Die Lösung

der

zusammengesetzteren Gleichungen des zweiten Grades

mit

zwei Unbekannten.

Ein

algebraischer Excurs für die Schule

von

J. S. Könitzer,

Professor.

§. 1.

Die Lehrbücher der Algebra, und zwar nicht allein die für den Zweck der Schule eingerichteten, gedrängteren Compendien, sondern selbst die umfangreicheren Handbücher, welche diese Disciplin der Mathematik behandeln, enthalten im Allgemeinen keine besondere Andeutung, noch weniger aber eine genauer eingehende Anleitung zur Behandlung der verwickelteren Gleichungen des zweiten Grades mit mehren unbekannten Größen; daher sieht sich der Anfänger auf die bei der Behandlung der Gleichungen ersten Grades erlernte und geübte Substitution und Elimination beschränkt, und geräth deshalb, weil diese, in einfach direkter Weise in Anwendung gebracht, sich bei den verwickelteren Aufgaben als nicht ausreichend ausweisen, auf Schwierigkeiten der Lösung, welche für ihn unüberwindlich sind. Reichen Stoff zur Uebung bieten in dieser Hinsicht besonders die Gleichungen, welche, nominell zwar höheren Grades, sich durch geschickte Reduktion formell quadratisch lösen lassen.

Dieser Umstand verbunden mit der Ueberzeugung, daß gerade die Uebung in der Behandlung derartiger Gleichungen besonders geeignet ist, den Scharfsinn der Schüler zu wecken und das Interesse an dem Gegenstande zu beleben, ist die Veranlassung zur Veröffentlichung des vorliegenden rein praktischen Excurses, der sich eben deshalb vorzugsweise an Beispiele anlehnen wird, welche dem genannten Zwecke zu dienen geeignet sind.

Man könnte hier vielleicht daran erinnern wollen, daß es eine allgemeine Lösung der algebr. Gleichungen mit zwei Unbekanten gebe, welche man ja nur auf die zweite Potenz beschränkt hier mitzutheilen habe, um damit jede Schwierigkeit zu beseitigen; ich meine nemlich die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen $F(x, y)$ und $f(x, y)$, unter $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ die beiden Bedingungsgleichungen vorgestellt: die dabei erforderlichen Vorbereitungen sind aber im Allgemeinen so umständlich, daß der praktische Werth dieser Methode innerhalb der von uns gesteckten Gränzen verschwindet.

Es sind zu diesem Behuf die hierher gehörigen Aufgaben aus der vorzüglichen Sammlung von Miles Bland (übersetzt vom Rektor Nagel, Stuttgard 1847) zum Grunde gelegt worden, welche daselbst ohne Lösung auf Seite 131—133 zu finden sind.

§. 2.

Jede algebraische Gleichung von der Form: $x^{2n} + Px^n = Q$ läßt sich operativ quadratisch lösen, und führt auf das Resultat $x = \sqrt[n]{a}$. Z. B. $x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{2}{3}} = 32$ giebt:

$$x^{\frac{2}{3}} = -2 \pm \sqrt[2]{36} = \begin{cases} 4 \text{ oder} \\ -8 \end{cases}; \quad \text{folglich } x = \sqrt[2]{4^3} \text{ oder } \sqrt[2]{-8^3} = \pm 8 \text{ oder } \pm 16\sqrt[2]{-2}.$$

Es braucht wohl kaum erinnert zu werden, daß in solchen Fällen eine einfache Substitution von y für x^n auf die gewöhnliche Form $y^2 + Py = Q$ führen würde, und begreiflich wird dieses einfachen Satzes nur des Zusammenhanges wegen Erwähnung gethan, da daraus unmittelbar für unsern Zweck zu folgern ist, daß auch in gleicher Weise Verbindungen wie $(x^n + y^n)^{\frac{p}{q}} = a$ zu behandeln sind, da dann ebenfalls $a^{\frac{q}{p}} = x^n + y^n$; wovon weiter unten an geeigneter Stelle Gebrauch gemacht werden wird.

§. 3.

Als ein für unsern praktischen Zweck besonders wichtiger Punkt muß hier aber der operative Zusammenhang, sowie die gegenseitige Abhängigkeit der Summe, der Differenz, des Produktes, der Summe und Differenz der Quadrate, Cubus, Biquadrate und fünften Potenzen zweier Größen erwähnt werden. Die wesentlichsten Beziehungen sind in den nachstehenden Gleichungen enthalten.

§. 1.

Die Lehrbücher der Algebra, und zwar nicht allein die für den Zweck der Schule eingerichteten, gedrängteren Compendien, sondern selbst die umfangreicheren Handbücher, welche diese Disciplin der Mathematik behandeln, enthalten im Allgemeinen keine besondere Andeutung, noch weniger aber eine genauer eingehende Anleitung zur Behandlung der verwickelteren Gleichungen des zweiten Grades mit mehren unbekannten Größen; daher sieht sich der Anfänger auf die bei der Behandlung der Gleichungen ersten Grades erlernte und geübte Substitution und Elimination beschränkt, und geräth deshalb, weil diese, in einfach direkter Weise in Anwendung gebracht, sich bei den verwickelteren Aufgaben als nicht ausreichend ausweisen, auf Schwierigkeiten der Lösung, welche für ihn unüberwindlich sind. Reichen Stoff zur Uebung bieten in dieser Hinsicht besonders die Gleichungen, welche, nominell zwar höheren Grades, sich durch geschickte Reduktion formell quadratisch lösen lassen.

Dieser Umstand verbunden mit der Ueberzeugung, daß gerade die Uebung in der Behandlung derartiger Gleichungen besonders geeignet ist, den Scharfsinn der Schüler zu wecken und das Interesse an dem Gegenstande zu beleben, ist die Veranlassung zur Veröffentlichung des vorliegenden rein praktischen Excurses, der sich eben deshalb vorzugsweise an Beispiele anlehnen wird, welche dem genannten Zwecke zu dienen geeignet sind.

Man könnte hier vielleicht daran erinnern wollen, daß es eine allgemeine Lösung der algebr. Gleichungen mit zwei Unbekanten gebe, welche man ja nur auf die zweite Potenz beschränkt hier mitzutheilen habe, um damit jede Schwierigkeit zu beseitigen; ich meine nemlich die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen $F(x, y)$ und $f(x, y)$, unter $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ die beiden Bedingungsgleichungen vorgestellt: die dabei erforderlichen Vorbereitungen sind aber im Allgemeinen so umständlich, daß der praktische Werth dieser Methode innerhalb der von uns gesteckten Gränzen verschwindet.

Es sind zu diesem Behuf die hierher gehörigen Aufgaben aus der vorzüglichen Sammlung von **Miles Bland** (übersetzt vom Rektor **Nagel**, Stuttgard 1847) zum Grunde gelegt worden, welche daselbst ohne Lösung auf Seite 131 — 133 zu finden sind.

§. 2.

Jede algebraische Gleichung von der Form: $x^{2n} + Px^n = Q$ läßt sich operativ quadratisch lösen, und führt auf das Resultat $x = \sqrt[n]{a}$. Z. B. $x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{2}{3}} = 32$ giebt:

$$x^{\frac{2}{3}} = -2 \pm \sqrt[2]{36} = \begin{cases} 4 \text{ oder} \\ -8 \end{cases}; \quad \text{folglich } x = \sqrt[2]{4^3} \text{ oder } \sqrt[2]{-8^3} = \pm 8 \text{ oder } \pm 16\sqrt[2]{-2}.$$

Es braucht wohl kaum erinnert zu werden, daß in solchen Fällen eine einfache Substitution von y für x^n auf die gewöhnliche Form $y^2 + Py = Q$ führen würde, und begreiflich wird dieses einfachen Satzes nur des Zusammenhanges wegen Erwähnung gethan, da daraus unmittelbar für unsern Zweck zu folgern ist, daß auch in gleicher Weise Verbindungen wie $(x^n + y^n)^{\frac{p}{q}} = a$ zu behandeln sind, da dann ebenfalls $a^{\frac{q}{p}} = x^n + y^n$; wovon weiter unten an geeigneter Stelle Gebrauch gemacht werden wird.

§. 3.

Als ein für unsern praktischen Zweck besonders wichtiger Punkt muß hier aber der operative Zusammenhang, sowie die gegenseitige Abhängigkeit der Summe, der Differenz, des Produktes, der Summe und Differenz der Quadrate, Cubus, Biquadrate und fünften Potenzen zweier Größen erwähnt werden. Die wesentlichsten Beziehungen sind in den nachstehenden Gleichungen enthalten.

$$1)\quad (x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$
$$2)\quad (x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$
$$3)\quad (x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$$
$$4)\quad (x+y)^4=x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2,$$
worin wieder statt x^2+y^2 der Werth $(x+y)^2-2xy$ eingesetzt und der Ausdruck in:
$$(x+y)^4=x^4+y^4+4(x+y)^2xy-2x^2y^2$$
umgeformt werden kann; eben so wird:
$$5)\quad (x+y)^5=x^5+y^5+5xy(x^3+y^3)+10xy(x+y);$$
worin wieder x^3+y^3 in $(x+y)^3-3xy(x+y)$ umgewandelt werden kann; desgleichen
$$6)\quad (x-y)^5=x^5-y^5-5xy[(x-y)^3+3xy(x-y)]+10x^2y^2(x-y).$$
Da als bekannt vorausgesetzt werden kann, daß aus Summe oder Differenz und Produkt zweier Unbekannten diese selbst durch eine quadratische Gleichung in der Art zu finden sind, daß nach
$$1)\quad x-y=\pm\sqrt{(x+y)^2-4xy} \text{ und } x+y=\pm\sqrt{(x-y)^2+4xy};$$
so geht aus näherer Betrachtung der eben entwickelten Ausdrücke hervor, daß wenn x^3+y^3 und $x+y$ gegeben sind, aus 2) auch xy gefunden und dadurch die Lösung auf 1) zurückgeführt wird. Ebenso würde aus x^3+y^3 und xy durch einfache Substitution die Gleichung unter der Form: $x^{2n}+ax^n=b$ operativ quadratisch werden; desgleichen auch $x^4+y^4=m$ und $x+y=n$ aus 4) mittelst einer quadratischen Gleichung den Werth von xy ergeben, und die Lösung sich wiederum quadratisch auf 1) zurückführen lassen; auch x^3-y^3 und $x-y$ würden nach 3) ausreichen, um das Produkt xy mittelst einer quadratischen Gleichung zu bestimmen, und die Lösung wäre auf 1) reduzirt. Dasselbe gilt endlich von x^5+y^5 oder x^5-y^5 in Verbindung mit bezüglich $x+y$ oder $x-y$. Selbstverständlich könnte nach den oben gegebenen Andeutungen auch $x+y$ und $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$, $x+y$ und $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$ u. s. w. eintreten. Daß übrigens jede Verbindung zweier Bedingungsgleichungen von der Form $x^n\pm y^n=a$ und $xy=b$, durch $y=\frac{b}{x}$ auf $x^n\pm\frac{b^n}{x^n}=a$, folglich auf $x^{2n}-ax^n=\mp b^n$ führt, und somit eine quadratisch lösbare Gestalt nach §. 2 erhält, ist leicht zu übersehen.

§. 4.

Alle diese vorgeführten Verbindungen sind in den Aufgabensammlungen mehr oder weniger berücksichtigt, besonders weist Meier Hirsch in seinen weit verbreiteten algebraischen Aufgaben auf die Wichtigkeit der Uebung der Anfänger in der Behandlung derartiger Gleichungen hin, und giebt auch über einige der erwähnten Verbindungen geeignete Beispiele. Aehnliche Beispiele finden sich auch innerhalb dieser Gränzen sich bewegend in der Sammlung von Heis (5. Aufl. Köln 1850); jedoch sind fast alle für den hier sogleich noch näher zu erörternden Zweck in Verbindung mit den in §. 3 angegebenen allgemeinen operativen Beziehungen mehr als vorbereitende Grundlage anzusehen, auf welche allerdings hingewiesen werden mußte, weil sie zum genaueren Verständniß der verwickelteren Formen der Gleichungen wesentlich beitragen; keineswegs aber ausreichen, um jede mögliche Schwierigkeit zu überwinden.

Der bessern Uebersicht wegen theilen wir nun hier diese Gleichungen zunächst ein:

a) in solche, bei denen differirende Exponenten der unbekannten Größen in der Lösung zum Vorschein kommen, welche erst durch die Verbindung der Resultate beider Bedingungsgleichungen zu beseitigen sind;
b) in solche, worin nach dem Vorbilde der in §. 3 angegebenen Verbindungen irgendwelche Aggregate, sei es um der Unbekannten unter sich allein, sei es mit Bekannten verbunden, als die bei der Lösung zunächst in Betracht kommende Unbekannte anzusehen sind;
c) in solche, bei denen irgend eine operative Verbindung der einen Bedingungsgleichung mit der andern diese selbst auf eine quadratisch lösbare Form zurückführt;
d) in solche, welche durch Zerlegung oder Zusammenfassung einzelner Glieder der Bedingungsgleichungen, oder auch Einfügung identischer Ausdrücke auf beiden Seiten derselben, eine quadratisch lösbare Form erhalten; und endlich
e) in solche, worin durch passende Absonderung gleicher Faktoren, sei es nun im Zähler und Nenner eines Bruchausdrucks, oder auch auf beiden Seiten der Bedingungsgleichungen, diese

selbst auf eine Form zurückgeführt werden können, bei welcher die Verbindung der aus ihnen gewonnenen Resultate eine quadratische Lösung zuläßt.

Anhangsweise möge hier noch einer Art von Gleichungen gedacht werden, welche auf die leichteste Weise durch Vertauschung der Symbole des Bekannten mit dem Gesuchten zu lösen sind. Einige belehrende Beispiele bietet dazu die Sammlung von Heis S. 235, deren Lösung am Schlusse angedeutet werden soll.

Begreiflich lassen sich die hier aufgezählten Arten durch Combination unter einander zu einer noch viel größern Mannichfaltigkeit der Formen benutzen, die jedoch hier nicht als besonders zu zählende aufgeführt worden sind.

Es möge hier nur noch daran erinnert werden, daß die einfachen Regeln der Behandlung einer quadratischen Gleichung, sowie die gewöhnlichen Methoden der Lösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten der Kürze wegen als bekannt vorausgesetzt werden.

Ebenso bedarf es auch wohl nur der Andeutung, daß für jede quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten die Werthe derselben nothwendig immer paarweise zusammengehören, wobei freilich nicht zu übersehen ist, daß bei gewissen Formen der Gleichungen durch Combination mehr Paare solcher zusammengehöriger Werthe entstehen können, indem z. B. dem einen Werthe des x dieselben zwei Werthe des y in beiden Bedingungsgleichungen entsprechen, und umgekehrt.

§. 5.

Es wäre nun vielleicht nicht unzweckmäßig die in §. 4 angedeuteten Arten der verwickelteren Formen sogleich durch Beispiele näher zu bestimmen, um jeden Zweifel über die eigentlich gemeinte Gestalt zu beseitigen; da aber die einzelnen Unterabtheilungen selbst noch eine so mannichfaltige Realisirung im Einzelnen zulassen, daß durch das einzelne Beispiel der Anfänger doch schwerlich eine genügende Einsicht in die Allgemeingültigkeit desselben gewönne; so ist der umgekehrte Weg vorgezogen worden, durch Zusammenstellung gleichartiger Fälle das Verständniß des ihnen Gemeinsamen anzubahnen, und den Schüler indirekt dahin zu führen, sich diese Allgemeingültigkeit durch eignes Abstrahiren herzuleiten, somit also zu der praktischen Behandlung der Gleichungen selbst überzugehen. Die einzelnen Beispiele aus Miles Bland's Sammlung sind mit der laufenden Nummer derselben bezeichnet, und die ersten elf als nichts Bemerkenswerthes darbietend übergangen worden. Am Schlusse werden noch einige Andeutungen hinzugefügt werden, durch welche der Anfänger in den Stand gesetzt werden wird, ähnliche Beispiele zu bilden, und eben dadurch in ein genaueres und sichereres Verständniß derselben eingeführt werden dürfte.

§. 6.

Miles Bland's Sammlung quadratischer Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

12) I.) $x^2 + 10x + y = 119 - 2\sqrt{y}(x+5)$. II.) $x + 2y = 13$.

Aus I.) durch Addition von 25 auf beiden Seiten

III.) $x^2 + 10x + 25 + y = 144 - 2\sqrt{y}(x+5)$

IV.) $(x+5)^2 + 2\sqrt{y}(x+5) + y = 144$; woraus

V.) $x + \sqrt{y} = 7$ oder -17. Aus II.) und V.) ergiebt sich nun leicht:

VI.) $2y - \sqrt{y} = 6$ oder 30 und $y - \frac{1}{2}\sqrt{y} = 3$ oder 15

also: $\sqrt{y} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = 2$ oder $-\frac{3}{2}$, wenn 3; und $\sqrt{y} = \frac{1 \pm \sqrt{241}}{4}$, wenn 15 eingesetzt wird. Aus dem letzteren Werthe ergiebt sich für y der Werth $\frac{121 \pm \sqrt{241}}{8}$, aus dem erstern $y = 4$ oder $\frac{9}{4}$. Für x erhält man leicht aus II.) die entsprechenden Werthe

$$5)\ \frac{17}{2} \text{ und } \frac{-69 \mp \sqrt{241}}{8}.$$

Der Anfänger möchte hier besonders auf die vorkommenden Verbindungen $x^2 + 10x$ und $x + 5$ zu achten haben, wodurch zur Genüge der einzuschlagende Weg angedeutet wird. Die Gleichung erscheint als ein modifizirter Fall von d); die Verbindung mit II.) hat weiter keine Schwierigkeit.

13) I.) $\frac{x^4}{y^2} + \frac{2x^2}{y} = 9\frac{39}{49}$

II.) $x^2 + y^2 = 65$.

Durch Ergänzung erhält man leicht aus I.)

III.) $\frac{x^2}{y} + 1 = \pm\frac{23}{7}$; also $x^2 = \frac{16y}{7}$ oder $-\frac{30y}{7}$, wodurch aus II.) durch Substitut.

IV.) $y^2 + \frac{16y}{7} = 65$; $y = 7$ oder $-\frac{65}{7}$;

Wählt man den zweiten Werth des x^2 zur Substitution, so wird: $y^2 - \frac{30y}{7} = 65$, und $y = \frac{15 \pm \sqrt{3410}}{7}$; für x erhält man durch Substitution dieser Werthe des y den Werth 4 oder $\frac{\pm 4\sqrt{-65}}{7}$; die Benutzung der letzten Werthe des y giebt für x die Werthe $\frac{\pm\sqrt{-450 \mp 30\sqrt{3410}}}{7}$. Die Gleichung gehört unter die Abtheilung a.

14) I.) $x + y + \sqrt{x+y} = 6$;

II.) $x^2 + y^2 = 10$.

Die Lösung ist leicht, indem alsbald zu erkennen, daß in I.) $x + y$ als das Quadrat von $\sqrt{x+y}$ zu betrachten ist, und daraus $x + y$ selbst gefunden werden kann, was mit II.) verbunden die Größen x und y selbst ergiebt. Es ist III.) $\sqrt{x+y} = 2$ oder -3, also $x + y = 4$ oder 9, woraus $x = 3$ oder 1, und $y = 1$ oder 3, außerdem aber noch für x und y zwei imaginäre Werthe erscheinen, $x = \frac{9 \pm \sqrt{-61}}{2}$; $y = \frac{9 \mp \sqrt{-61}}{2}$.

15) I.) $x^2 + 4\sqrt{x^2 + 3y + 5} = 55 - 3y$;

II.) $6x - 7y = 16$.

Aus I.) findet man durch passende Zerlegung der 55 in $60 - 5$, daß

III.) $x^2 + 3y + 5 + 4\sqrt{x^2 + 3y + 5} = 60$ wird, woraus durch eine Verbindung der Formen b) und d)

IV.) $\sqrt{x^2 + 3y + 5} + 2 = \pm 8$; folglich: $x^2 + 3y + 5 = 36$ oder 100.

Nun ist aus II.) $y = \frac{6x - 16}{7}$, $x^2 + 3y = 31$ oder 95, und endlich:

V.) $x^2 + \frac{18x}{7} = \frac{265}{7}$, wenn der Werth 31 gewählt wird.

Daraus erhält man nun leicht $x = 5$ oder $-\frac{53}{7}$, und entsprechend $y = 2$ oder $-\frac{46}{7}$; setzte man aber den zweiten Werth 95 ein, so würde:

VI.) $x^2 + \frac{18x}{7} = 95 + \frac{48}{7}$ werden, folglich:

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{5072}}{7}, \quad y = \frac{-166 \mp 6\sqrt{5072}}{49}.$$

Die letzten Lösungsresultate sind, beiläufig bemerkt, in der Sammlung von M. Bland nicht richtig angegeben, wie man fast ohne zu rechnen sehen kann.

16) I.) $x^2 + 3x + y = 73 - 2xy$

II.) $y^2 + 3y + x = 44$.

Nach gehöriger Umstellung erhält man sogleich durch Addition beider Gleichungen

III.) $(x + y)^2 = 117 - 4(x + y)$, und daraus ebenso leicht

IV.) $x + y = -2 \pm 11$; folglich $x + y = 9$ oder -13.

Die Substitution dieses Werthes in II.) giebt:

V.) $y^2 + 2y = 35$, wenn man den Werth 9 benutzt, folglich $y = 5$ oder -7; und $y^2 + 2y = 57$, also $y = -1 \pm \sqrt{58}$, wenn man $x + y = -13$ setzt. Die Werthe des x sind entsprechend 4, 16 und $-12 \mp \sqrt{58}$.

Es ist leicht zu sehen, daß die Gleichung im Wesentlichen zur Abtheilung c) zu zählen ist.

17) I.) $x = y^2 + 2$

II.) $\frac{y}{(x+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{x+y}}{y} = \frac{17}{4\sqrt{x+y}}$.

Durch Multiplikation mit $4y(x+y)^{\frac{3}{2}}$ erhält man aus II.) $4y^2 + 4(x+y)^2 = 17y(x+y)$, und daraus mittelst einfacher Umstellung

III.) $(x+y)^2 - \frac{17}{2} \cdot y(x+y) = -y^2$; folglich: $x + y = \frac{17y}{8} \pm y\sqrt{\left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1}$

also $x = 3y$ oder $-\frac{3y}{4}$, wonach sodann:

IV.) $y^2 + 2 = 3y$; $y^2 - 3y = -2$; $y = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, also $y = 2$ oder 1.

Durch Einführung von $x = -\frac{3y}{4}$ würden die beiden imaginären Werthe des y aus der Gleichung

V.) $y^2 + \frac{3y}{4} = -2$ gefunden werden $y = -\frac{3 \pm \sqrt{-119}}{8}$ und entsprechend x die Werthe 6, 3 und $\frac{9 \mp \sqrt{-119}}{32}$ erhalten. Die Gleichung gehört zur Abtheilung b).

In der Aufgabensammlung ist in der Gleichung II.) auf der rechten Seite derselben durch einen Druckfehler statt 17 ein x gesetzt.

18) I.) $y - y^{\frac{1}{2}} = 16 - x$

II.) $28 - y = x + 4x^{\frac{1}{2}}$.

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man:

III.) $y^{\frac{1}{2}} = 12 - 4x^{\frac{1}{2}}$ und durch deeen Quadriren

IV.) $y = 144 - 96x^{\frac{1}{2}} + 16x$. Zieht man nun III.) von IV.) ab, so wird:

V.) $y - y^{\frac{1}{2}} = 16 - x = 132 - 92x^{\frac{1}{2}} + 16x$, woraus:

VI.) $x - \frac{92x^{\frac{1}{2}}}{17} = -\frac{116}{17}$, also: $x^{\frac{1}{2}} = \frac{46}{17} \pm \frac{12}{17} = 2$ oder $\frac{58}{17}$ und $x = 4$ oder $\left(\frac{58}{17}\right)^2$.

Die Werthe für $y^{\frac{1}{2}}$ ergeben sich sogleich durch Substitution dieser Werthe aus III.) und $y = 16$ oder $\frac{784}{289}$.

Die Gleichung ist eine Modifikation der Abtheilung c).

19) I.) $x^4 + y^4 = 97$; II.) $x + y = 5$.

Diese Gleichung ist nach §. 3 zu behandeln. Es wird danach:

$(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2) = 625$, durch Subtr. von I.) und Substit. von $(x+y)^2 - 2xy$ für $x^2 + y^2$

III.) $4xy[(x+y)^2 - 2xy] + 6x^2y^2 = 528$, daraus aber, weil $x + y = 5$,

IV.) $x^2y^2 - 50xy = -264$; also $xy = 25 \pm 19$; $xy = 44$ oder 6.

Durch Verbindung mit II.) (für $xy = 6$) $x = 2$ und $y = 3$ oder umgekehrt, und (für $xy = 44$) $x = \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2}$; $y = \frac{5 \mp \sqrt{-151}}{2}$.

20) I.) $\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x - 2y}} = 2$.

II.) $x^2 - 18 = x(4y - 9)$.

Aus I.) durch Quadriren der Gleichung wird:

III.) $\frac{3x - 2y}{2x} + 2 + \frac{2x}{3x - 2y} = 4$, daraus durch Multiplikation mit $2x(3x - 2y)$

IV.) $(3x - 2y)^2 + 4x^2 = 4x(3x - 2y)$,

woraus sogleich zu erkennen, daß $(3x - 2y)^2 - 4x(3x - 2y) + 4x^2 = 0$ das vollständige Quadrat eines Binoms, somit: $3x - 2y - 2x = 0$, und $x = 2y$ ist. Die Substitution dieses Resultats in Gl. II.) giebt: $x^2 - 9x = -18$, woraus $x = \frac{9 \pm 3}{2}$ und $y = 3$ oder $\frac{3}{2}$. Die Gleichung ist unter die Form b) zu rechnen.

21) I.) $x + 4\sqrt{x} + 4y = 21 + 8\sqrt{y} + 4\sqrt{xy}$

II.) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6.$

Durch Umstellung ergiebt sich aus I.) $x - 4\sqrt{xy} + 4y = 21 - 4(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$; da aber die linke Seite der Gleichung das Quadrat des Klammer-Aggregats der rechten Seite ist, so hat man die quadratische Gleichung

III.) $(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2 + 4(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 21$, woraus sogleich: $\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 3$ oder -7.

Durch Verbindung mit II.) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$; erhält man daraus:

$3\sqrt{y} = 3$ oder 13; folglich $y = 1$ oder $\frac{169}{9}$ und $x = 25$ oder $\frac{25}{9}$.

Auch diese Gleichung gehört der Form b) an.

22) I.) $3x + \frac{2}{3}\sqrt{xy^2 + 9x^2y} = (x - \frac{1}{3})y$

II.) $6x + y : y = x + 5 : 3.$

Aus II.) erhält man auf gewöhnlichem Lösungswege $y = \frac{18x}{x+2}$ und durch Substitution desselben in I.) zunächst:

III.) $3x + \frac{2}{3}\sqrt{x.\left(\frac{18x}{x+2}\right)^2 + \frac{9x^2.18x}{x+2}} = (x - \sqrt{3})\,\frac{18x}{x+2}.$

Durch Division mit x wird die Gleichung eine gewöhnliche quadratische:

IV.) $3 + \frac{2}{3}\sqrt{x.\left(\frac{18}{x+2}\right)^2 + \frac{9.18x}{x+2}} = (x - \frac{1}{3})\,\frac{18}{x+2}$, folglich

$3 + \frac{12}{x+2}\sqrt{x + \frac{x(x+2)}{2}} = (x - \frac{1}{3})\,\frac{18}{x+2}$, woraus durch Division mit 3 und Multiplikation mit $x + 2$

V.) $x + 2 + 4\sqrt{\frac{2x + x^2 + 2x}{2}} = 6x - 2$; folglich auch

$2\sqrt{2x^2 + 8x} = 5x - 4$, woraus quadrirt:

VI.) $8x^2 + 32x = 25x^2 - 40x + 16$, also $17x^2 - 72x = -16$ und endlich

$x = \frac{36}{17} \pm \frac{32}{17} = 4$ oder $\frac{4}{17}$, und $y = 12$ oder $\frac{36}{19}$.

Die Gleichung gehört zu den leichtern Aufgaben der Form e) da eine einfache Division mit x hinreicht, sie in eine gewöhnliche quadratische zu verwandeln.

23) I.) $x + y = 5$; II.) $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 455.$

Mit Beziehung auf §. 3 wird aus II.) durch Einsetzung der mit I.) in Verbindung tretenden Werthe:

III.) $[(x+y)^2 - 2xy][(x+y)^3 - 3xy(x+y)] = 455$; woraus

$(25 - 2xy)(125 - 15xy) = 455$. Daraus entsteht die Gleichung

IV.) $x^2y^2 - \frac{125}{8}.xy = -89$, und $xy = 6$ oder $14\frac{5}{6}$, und da $x + y = 5$,

so ist die Lösung auf eine schon bekannte Form zurückgeführt, wonach entweder $x = 3$ oder 2; $y = 2$ oder 3; aber auch $x = \frac{5 \pm \sqrt{-\frac{103}{3}}}{2}$ und $y = \frac{5 \mp \sqrt{-\frac{103}{3}}}{2}$.

24) I.) $x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}$

II.) $x^2 + y^2 = 41.$

Faßt man mit Beziehung auf die Form b) die Gleichung I.) unter der Gestalt: $(x+y) - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}} = \frac{6}{x-y}$ quadratisch, so ergiebt sich daraus sogleich: $\sqrt{x+y} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \pm \sqrt{\frac{25}{4(x-y)}}$; also $\sqrt{x+y} = \frac{1 \pm 5}{2\sqrt{x-y}}$

und $x^2 - y^2 = 9$ oder 4, folglich $x^2 = 25$ oder $\frac{45}{2}$ und $x = \pm 5$ und $\pm 3\sqrt{\frac{5}{2}}$; $y = \pm 4$ und $\pm\sqrt{\frac{37}{2}}$.

25) I.) $\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} = 136\tfrac{1}{9} - 2xy$; II.) $x + 4 = 14 - y$.

Da man aus II.) sogleich $x + y = 10$ hat, und durch Umstellung aus I.) die quadratische Form $\frac{x^4}{y^2} + 2xy + \frac{y^4}{x^2} = 136\tfrac{1}{9}$ erhält; so gewinnt man durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \pm\frac{35}{2}$, folglich $x^3 + y^2 = \pm\frac{35xy}{2}$. Nun ist $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$, folglich auch $1000 - 30xy = \pm\frac{35xy}{3}$, woraus $xy = 24$ oder $\frac{600}{11}$. Durch Verbindung mit II.) ist also $x = 6$ oder 4; $y = 4$ oder 6; außerdem aber noch wegen des zweiten Werthes für xy; $x = 5 \pm 5\sqrt{-\frac{13}{11}}$, $y = 5 \mp 5\sqrt{-\frac{13}{11}}$. Die Beziehung auf die Form b) ist leicht zu erkennen.]

26) I.) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = 4\tfrac{4}{5}$

II.) $\sqrt{\frac{x-y}{x^4}} + \frac{1}{x} = \frac{4}{9\sqrt{x-y}}$.

Aus I.) durch Vereinigung der Nenner:

III.) $\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{24}{5}$, also $20xy = 24(x^2 - y^2)$

und $x^2 - y^2 = \frac{5}{6}xy$, woraus $y^2 + \frac{5xy}{6} = x^2$ und $y = -\frac{3x}{2}$ oder $+\frac{2x}{3}$.

Aus der Gleichung II.) erhält man durch Multiplikation mit x^2 sogleich:

IV.) $\sqrt{x-y} + x = \frac{4x^2}{9\sqrt{x-y}}$; folglich $x - y + x\sqrt{x-y} = \frac{4x^2}{9}$,

woraus in bekannter Weise: $\sqrt{x-y} = \frac{x}{3}$ oder $-\frac{4x}{3}$, und $x - y = \frac{x^2}{9}$ oder $\frac{16x^2}{9}$. Da nun

$y = \frac{2x}{3}$ oder $-\frac{3x}{2}$, so hat man:

$x - \frac{2x}{3} = \frac{x^2}{9}$, oder $x - \frac{2x}{3} = \frac{16x^2}{9}$, desgl. $x + \frac{3x}{2} = \frac{x^2}{9}$, oder $x + \frac{3x}{2} = \frac{16x^2}{9}$;

folglich für x die vier Werthe: 3, $\frac{3}{16}$, $\frac{45}{2}$ und $\frac{45}{32}$; und für y entsprechend: die Werthe

$2, \frac{1}{8}, -\frac{135}{8}, -\frac{135}{64}$.

Die Gleichung gehört im Wesentlichen der Form c) an.

27) I.) $\sqrt{6\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = 9 - \frac{1}{2}\sqrt{y}$; II.) $x - y = 12$.

Durch einfache Umstellung erhält man aus I.) die Gleichung:

III.) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2\sqrt{6} \,.\, \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 18$, woraus $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = -\sqrt{6} \pm \sqrt{24}$,

folgl. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$ oder 54; somit wird die Gleichung in Verbindung mit II.) auf eine der schon bekannten Form des §. 3 zurückgeführt. Aus II.) wird durch Zerlegung in Faktoren:

IV.) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 12$, folglich $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ oder $\frac{2}{9}$;

also auch $2\sqrt{x} = 8$ oder $54\tfrac{2}{9}$, und $x = 16$ oder $\left(\frac{244}{9}\right)^2$; diesen Werthen entsprechend wird $y = 4$ oder $\left(\frac{242}{9}\right)^2$.

28) I.) $y^4 - 432 = 12xy^2$; II.) $y^2 = 12 + 2xy$.

Aus I.) wird zunächst: $(y^2-6x)^2=432+36x^2$, und durch Absonderung von 36

III.) $(y^2-6x)^2=36(12+x^2)$. Aus II.) erhält man durch Lösung nach y den Werth desselben durch die Gleichung $y^2-2xy+x^2=x^2+12$ ausgedrückt, wodurch sogleich durch Substitution die Gleichung

IV.) $(y-x)^2=\left(\frac{y^2-6x}{6}\right)^2$, folglich $y-x=\frac{y^2-6x}{6}$, und $y=6$, $x=2$.

Die Gleichung ist im Wesentlichen nach der Form a) behandelt.

29) I.) $\frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}=\frac{8+4y}{x}+\frac{12y^2}{x^2}$

II.) $4y^2-xy=x$.

Aus I.) erhält man durch einfache Reduktion:

III.) $\frac{(y+2)^2x^2}{y^2}=12y^2+4x(y+2)$; folglich quadratisch behandelt:

$$\left(\frac{(y+2)x}{y}-2y\right)^2=16y^2, \text{ woraus:}$$

IV.) $6y^2=xy+2x$. Die Gleichung II.) mit 3 multiplicirt giebt:

V.) $12y^2=3xy+3x$; Die Gleichung IV. mit 2 multiplicirt:

VI.) $12y^2=2xy+4x$, woraus durch Subtr. $xy=x$, also $y=1$ und $x=2$.

Die beiden andern Werthe des x und y ergeben sich, wenn in dem obigen Wurzelwerthe $2y-\frac{x(y+2)}{y}=4y$ gesetzt, und danach in der Subtraktion verfahren wird: es erscheint sodann: $2y^2=-xy-2x$ und im Resultate $y=-\frac{5}{3}$, woraus dann $x=-\frac{50}{3}$. Die Gleichung ist aus den Formen b) und c) gemischt behandelt.

30) I.) $\sqrt{(1+x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}=4$; II.) $(4-x^2)^2=18-4y^2$.

Durch Quadriren der Gleichung I.) erhält man zunächst:

III.) $2+2x^2+2y^2+2\sqrt{[(1+x)^2+y^2][(1-x)^2+y^2]}=16$, woraus

IV.) $\sqrt{[(1+x)^2+y^2][(1-x)^2+y^2]}=7-x^2-y^2$; durch nochmaliges Quadr.

V.) $(1-x^2)^2+2y^2(1+x^2)+y^4=(7-x^2-y^2)^2$ und nach gehöriger Reduktion:

VI.) $3x^2+4y^2=12$. Aus II.) ist aber sogleich: $4y^2=18-(4-x^2)^2$ aus VI.) $4y^2=12-3x^2$, folglich auch:

VII.) $(4-x^2)^2+3(4-x^2)=18$, woraus

$$4-x^2=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{18+\frac{9}{4}}=-\frac{3\pm 9}{2}=3 \text{ oder } -6,$$

wonach $x^2=1$ oder 10, und $x=\pm 1$ oder $\pm\sqrt{10}$. Die Werthe des y werden daraus entweder $y=\pm\frac{3}{2}$ oder $y=\pm 3\sqrt{-\frac{1}{2}}$. In der Gleichung erscheinen die Formen b) und c) gemischt.

31) I.) $\frac{x+\sqrt{x}+y}{x-\sqrt{x}+y}-\frac{\sqrt{x}-x-y}{\sqrt{x}+x+y}=\frac{89}{40}$

II.) $y^2-y\sqrt{x}=\frac{4x}{9}$.

Aus II.) ist zunächst durch quadratische Lösung $y=\frac{4}{3}\sqrt{x}$ oder $-\frac{\sqrt{x}}{3}$. Aus I.) erhält man durch Multiplikation mit $(x+y+\sqrt{x})(x+y-\sqrt{x})$ die Gleichung

III.) $(x+y+\sqrt{x})^2+(x+y-\sqrt{x})^2=\frac{89}{40}[(x+y)^2-x]$; folglich auch

$$2[(x+y)^2+x]=\frac{89}{40}[(x+y)^2-x], \text{ woraus } 13\sqrt{x}=3(x+y).$$

Aus II.) war $y=\frac{4}{3}\sqrt{x}$ oder $-\frac{\sqrt{x}}{3}$, also auch $3\sqrt{x}=x=9$ oder auch $x=\frac{14}{3}\sqrt{x}$, woraus $x=\frac{196}{9}$.

Da $x+y$ auch $=-\frac{13\sqrt{x}}{3}$ genommen werden könnte, so erhält man noch die beiden Werthe:

$x = -\frac{17}{3}\sqrt{x}$ und $4\sqrt{x}$, woraus $x = \frac{289}{9}$ und 16. Die vier entsprechenden Werthe des y sind danach: $4, -\frac{14}{9}, \frac{68}{9}, -\frac{4}{3}$. Die Gleichung ist nach den Formen a) und b) zu behandeln.

32) I.) $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = 4\frac{1}{4} - \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$; II.) $x(x+y) = 52 - \sqrt{x^2+xy+4}$.

Führt man in II.) die Multiplikation aus und addirt nach Andeutung des Aggregates unter dem Wurzelzeichen auf beiden Seiten der Gleichung 4, so wird dieselbe quadratisch unter der Gestalt:

III.) $x^2 + xy + 4 + \sqrt{x^2+xy+4} = 56$, woraus:

$$\sqrt{x^2+xy+4} = -\frac{1 \pm 15}{2}, \text{ also } x^2+xy+4 = 49 \text{ oder } 64.$$

Aus I.) erhält man leicht durch Umstellung und Zurückführung auf gleichen Nenner:

IV.) $\frac{4x^2-2y^2}{y^2} = \frac{17}{4}$, also: $16x^2 = 25y^2$ und $4x = 5y$. Setzt man den Werth des y aus IV.) in III.), so erhält man $x^2 + \frac{4x^2}{5} = 45$ oder $= 60$, und deshalb $x = \pm 5$ oder $\pm\frac{10\sqrt{3}}{3}$, und $y = \pm 4$ oder $\pm\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Die Gleichung ist auf die Formen b) c) und d) zu beziehen.

33) I.) $5y + \frac{\sqrt{x^2-15y-14}}{5} = \frac{x^2}{3} - 36$, II.) $\frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4} - \frac{y}{2}}$.

Aus I.) erhält man durch Multiplikation mit 3 und passende Ergänzung die Form einer quadratischen Gleichung:

III.) $x^2 - 15y - 14 - \frac{3\sqrt{x^2-15y-14}}{5} = 94$, woraus:

$$\sqrt{x^2-15y-14} = \frac{3 \pm 97}{10} = 10 \text{ oder } -\frac{94}{10} \text{ und } x^2-15y-14 = 100 \text{ oder } \frac{94^2}{100}.$$

Aus II.) erhält man durch Umstellung, Ausscheidung des Faktors x und Zusammenfassung die Gestalt:

IV.) $\frac{x^2}{8y} + \frac{4x+3y}{6} = x\sqrt{\frac{4x+3y}{12y}}$.

Die Form weist darauf hin nach $4x+3y$ zu ordnen, und ergiebt danach:

V.) $4x + 3y - \frac{6x\sqrt{4x+3y}}{2\sqrt{3y}} + \frac{3x^2}{4y} = 0$, woraus sogleich

$$\sqrt{4x+3y} = \frac{3x}{2\sqrt{3y}}, \text{ also: } 4x+3y = \frac{9x^2}{12y} \text{ und}$$

VI.) $x^2 - \frac{16xy}{3} = 4y^2$, folglich $x = 6y$ oder $-\frac{2y}{3}$.

Bestimmt man in Gl. III.) den Werth des $x^2 = 36y^2$ oder $\frac{4y^2}{9}$, so erhält man entweder:

VII.) $36y^2 - 15y = 114$ oder $\frac{4y^2}{9} - 15y = 114$; desgleichen aber auch $36y^2 - 15y = \frac{94^2}{100} + 14$ oder $\frac{4y^2}{9} - 15y = \frac{94^2}{100} + 14$. Ebenso würde man aus $x = 6y$ oder $-\frac{2y}{3}$ den Werth für 15y für die Gleichung III.) ableiten und einsetzen können, wodurch man, da $15y = \frac{5x}{2}$ oder $-\frac{45x}{2}$, die nachstehenden vier Gleichnngen erhielte:

$$x^2 - \frac{15x}{2} = 114 \text{ oder } \frac{94^2}{100} + 14;\ x^2 + \frac{45x}{2} = 114 \text{ oder } \frac{94^2}{100} + 14.$$

Aus denselben erhält man der Reihe nach die Werthe des x.

$$x = 12 \text{ oder } -\frac{19}{2},\ x = \frac{25 \pm \sqrt{41569}}{20},\ x = -\frac{45 \pm \sqrt{3849}}{4} \text{ und } x = -\frac{225 \pm \sqrt{91569}}{20},$$

wozu die entsprechenden Werthe des y sein würden:

$$y = 2 \text{ oder } -\frac{19}{12},\ y = \frac{25 \pm \sqrt{41569}}{120},\ y = \frac{135 \mp \sqrt{3849}}{8} \text{ und } y = \frac{675 \mp \sqrt{91569}}{40}.$$

Der Hauptsache nach gehört die Gleichung der Abtheilung b) an.

34) I. $\sqrt{\frac{x+y^2}{4x}} + \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} = \frac{y^2}{4}\sqrt{\frac{4x}{x+y^2}}$; II.) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}} = y+1$.

Aus II.) erhält man sogleich durch Multiplikation mit $\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}$ im Zähler und Nenner der linken Seite: $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1})^2}{y+1} = y+1$, woraus:

III.) $\sqrt{x}+\sqrt{x-(y+1)} = y+1$, und folglich $\sqrt{x}-\sqrt{x-(y+1)} = 1$, was sogleich auf das Resultat $2\sqrt{x} = y+2$, und $x = \left(\frac{y+2}{2}\right)^2$ führt.

Aus I.) ergiebt sich durch Multiplikation mit $\sqrt{x+y^2}$ die Gleichung

IV.) $\frac{x+y^2}{2\sqrt{x}} + y = \frac{y^2\sqrt{x}}{2}$, woraus $x+y^2+2y\sqrt{x} = xy^2$, also $y+\sqrt{x} = \pm y\sqrt{x}$ und $x = \left(\frac{y}{y-1}\right)^2$ oder $x = \left(\frac{y}{y+1}\right)^2$. Durch Verbindung dieser Werthe mit den aus III.) gefundenen hat man zunächst:

V.) $\frac{y}{y-1} = \frac{y+2}{2}$, also: $2y = y^2+y-2$, oder $y^2-y=2$, woraus: $y=2$ oder -1; und:

VI.) $\frac{y}{y+1}$, also: $2y = y^2+3y^2+2$, oder: $y^2+y=-2$, woraus $y = -\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$, und der Reihe nach für x die entsprechenden Werthe: $x=4$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1\pm 3\sqrt{-7}}{8}$ hervorgehen.

Beachtenswerth für den Anfänger dürfte hier die an den Werth $y=-1$ sich knüpfende Betrachtung sein, daß in diesem Falle immer aus $\sqrt{x}+\sqrt{x-(y+1)} = y+1$ sowohl, als aus $\sqrt{x}-\sqrt{x-(y+1)} = 1$ die zweite Wurzelgröße als negativ zu nehmen ist, wenn der in der Gleichung ausgesprochenen Forderung genügt werden soll. Vielleicht ließe sich dies noch anschaulicher unter der Form $\sqrt{a}-\sqrt{a-b} = 1$ erkennen, in welcher immer $\sqrt{a} = \frac{b+1}{2}$, was offenbar immer den Werth $\frac{1}{2} = \sqrt{a}$ giebt, wenn b in 0 übergeht, so daß der Forderung $\sqrt{a}-\sqrt{a} = 1$ nur dann genügt wird, wenn die zweite Wurzel als negativ gefaßt wird. Durch das Rationalmachen einer Gleichung werden überhaupt fremde Wurzeln in die ursprüngliche irrationale Gleichung, in welcher die unbekannte Größe unter dem Wurzelzeichen vorkömmt, eingeführt, sobald nur das vor der Wurzelgröße stehende Vorzeichen gelten soll, sie selbst aber absolut oder an sich positiv betrachtet wird. Ja, es könnte sogar an sich unmögliche Gleichungen geben, welche durch solches Rationalmachen für die Unbekannte einen ganz bestimmten Werth gäben, der aber andern Vorzeichen der Wurzelgrößen entspräche; so hat z. B. $\sqrt{x-8}-\sqrt{x-1} = 1$ gar keinen geltenden Werth für x, wenn man sich nicht begnügt zu ermitteln, daß $\sqrt{x-8} = -3$, und $\sqrt{x-1} = -4$ der Forderung entspricht, was für x den Werth 17 ergeben würde, aber nur der Form $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-8} = 1$ mit festgehaltenem Vorzeichen im obigen Sinne entspräche. Das Genauere bleibt einem besondern Excurs vorbehalten.

In der Angabe der Resultate zu dieser Aufgabe findet sich übrigens durch einen Druckfehler $\frac{-7\pm\sqrt{-7}}{2}$ für $\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$, wenn nicht etwa der Fehler einer unrichtigen Beziehung der Werthe von $\sqrt{x}$ auf y oder umgekehrt seinen Ursprung verdankt.

35. I.) $\frac{x+y+\sqrt{x^2-y^2}}{x+y-\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{9}{8y}(x+y)$; II.) $(x^2+y)^2+x-y = 2x(x^2+y)+506$.

Aus I.) erhält man durch Division mit $\sqrt{x+y}$ im Zähler und Nenner der linken Seite, und nachheriger Multiplikation mit $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$, die Gleichung

III.) $\frac{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}{2y} = \frac{9(x+y)}{8y}$, woraus: $2x+2\sqrt{x^2-y^2} = \frac{9(x+y)}{4}$ und $\sqrt{x^2-y^2} = \frac{x}{8}+\frac{9y}{8}$; durch Quadriren und Reduziren erhält man leicht:

IV.) $x^2 - \frac{18xy}{63} = \frac{145y^2}{63}$, wodurch $x = \frac{5y}{3}$. Aus der Gleichung II.) erhält man durch Umstellung zunächst: $(x^2+y)^2 - 2x(x^2+y) = y - x + 506$, woraus durch Ergänzung des Quadrates auf der linken Seite entsteht:

V.) $(x^2+y)^2 - 2x(x^2+y) + x^2 = x^2 + y - x + 506$, folglich auch:

VI.) $(x^2+y-x)^2 - (x^2+y-x) = -506$, also: $x^2+y-x = \frac{1}{2} \pm \frac{45}{2} = 23$ oder -22. Substituirt man den Werth des y aus IV, so ist zunächst:

VII.) $x^2 - \frac{2x}{5} = 23$, woraus $x = \frac{1 \pm 24}{5} = 5$ oder $-\frac{23}{5}$; setzt man dagegen den zweiten Werth aus VI.), so wird: $x^2 - \frac{2x}{5} = -22$, und daraus: $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{-61}}{5}$. Zu den Werthen des $x = 5$ oder $-\frac{23}{5}$ gehören die Werthe $y = 3$ oder $-\frac{69}{25}$, zu $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{-61}}{25}$, die Werthe $y = \frac{3 \pm 9\sqrt{-61}}{25}$.

36) I.) $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}} = 5$; II.) $\frac{2x^2}{y} - \frac{x}{3\sqrt{y}} = \frac{1}{3}$.

Aus II.) erhält man sogleich durch Multiplikation mit $\frac{y}{2}$ die gewöhnlich lösbare Form:

$x^2 - \frac{x}{6} \cdot \sqrt{y} = \frac{y}{6}$, woraus $x = \frac{\sqrt{y}}{12} \pm \frac{5\sqrt{y}}{12}$, also $x = \frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{3}\sqrt{y}$,

Aus I.) durch Verbindung der Faktoren: $\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{x}} = 5$, woraus leicht bestimmbar:

$\sqrt[4]{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{9}{4} = 2$ oder $-\frac{5}{2}$, folglich $\frac{y}{x} = 16$ oder $\frac{625}{16}$ und $y = 16x$ oder $16y = 625x$. Verbindet man diese Resultate mit den vorhin gefundenen Werthen des x, so hat man zunächst $y = 8\sqrt{y}$, woraus $y = 64$ und $x = 4$. Setzt man $16y = \frac{625 \cdot \sqrt{y}}{2}$, so wird $\sqrt{y} = \frac{625}{32}$, $y = \left(\frac{625}{32}\right)^2$; nimmt man aber den negativen Werth des x, so erhält man aus: $x = -\frac{1}{3}\sqrt{y}$ zunächst $\frac{y}{16} = -\frac{1}{3}\sqrt{y}$ und $\sqrt{y} = -\frac{16}{3}$ also $y = \frac{256}{9}$, und außerdem $\frac{16y}{625} = -\frac{1}{3}\sqrt{y}$, woraus $\sqrt{y} = -\frac{625}{48}$ und $y = \left(-\frac{625}{48}\right)^2$. Die entsprechenden Werthe des x sind sodann: $x = \frac{625}{64}$ oder $= \frac{16}{9}$ oder $= \frac{625}{144}$. Diese Gleichung bietet nichts Besonderes dar, und wird nur auf die Lösung nach $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ zu achten sein.

37) I.) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1$, II.) $\sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{y^3x} = 78$.

Aus I) erhält man durch Multiplikation mit $\sqrt{xy}$ sogleich:

III.) $x + y = 61 + \sqrt{xy}$, aus II.) durch Quadriren

IV.) $\sqrt{x^3y} + 2xy + \sqrt{y^3x} = 78^2$, woraus $(x+y)\sqrt{xy} + 2xy = 78^2$.

Verbindet man nun die Ergebnisse von Gl. III. und IV., so wird entweder $\sqrt{xy}$ oder $x + y$ durch eine quadratische Gleichung bestimmbar, und daraus zum Produkte xy die Summe $x + y$ gefunden, oder umgekehrt zur Summe $x + y$ das Produkt xy, wodurch die Lösung auf eine bekannte Form zurückgeführt erscheint. Für die Bestimmung des Produktes erhält man die Gleichung

V.) $xy + \frac{61}{3} \cdot \sqrt{xy} = \frac{78^2}{3}$, woraus $\sqrt{xy} = 36$ oder $-\frac{169}{3}$.

Die Summe ist sodann aus III.) $x + y = 97$ oder $\frac{14}{3}$. Für den ersten Fall erhält man: $x - y = \pm 65$, folglich $x = 81$ oder 16 und $y = 16$ oder 81, im zweiten Falle aber aus $\sqrt{xy} = -\frac{169}{3}$ und

$x+y=\frac{14}{3}$ wird: $x-y=\pm 72\sqrt{-22}$, also $x=\frac{7\pm 36\sqrt{-22}}{3}$ und $y=\frac{7\mp 36\sqrt{-22}}{3}$. Im Wesentlichen kömmt bei der Lösung die Form c) in Betracht.

38) I.) $x+\sqrt{3y^2-11+2x}=7+2y-y^2$; II.) $\sqrt{3y-x+7}=\frac{x+y}{x-y}$.

Aus I.) erhält man durch Umstellung und Quadriren:

III.) $3y^2-11+2x=[(7+2y-y^2)-x)^2$ woraus durch Umstellung:

$3y^2-11-(7+2y-y^2)^2=x^2-2x[(7+2y-y^2)+1]$, ergänzt zu

$3y^2-11-(7+2y-y^2)^2+[(7+2y-y^2)+1]^2=[x-(8+2y-y^2)]^2$, also:

$3y^2-11+2(7+2y-y^2)+1=y^2+4y+4=(y+2)^2=[x-(8+2y-y^2)]^2$,

also: IV.) $y+2=x-8-2y+y^2$ und $x=6+y-y^2$

Setzt man den Werth des x in Gleichung II.), so wird

V.) $\sqrt{y^2+2y+1}=y+1=\frac{x+y}{x+y}=\frac{6+2y-y^2}{6-y^2}$,

woraus durch Reduktion $6-y^2=2$ und endlich $y=2$, $x=4$.

Die Angabe der Formen, unter welche die Behandlung der Gleichungen zu bringen sei, bleibe für die übrigen Aufgaben dem Anfänger überlassen.

39) I.) $x^4+y^4=1+2xy+3x^2y^2$; II.) $x^3+y^3=2y^2x+2y^2+x+1$.

Aus I.) erhält man durch Theilung des Gliedes $3x^2y^2$ und Umstellung:

III.) $x^4-2x^2y^2+y^4=1+2xy+x^2y^2$, woraus sogleich: $x^2-y^2=1+xy$.

Aus II.) erhält man durch Absonderung der Faktoren $(x+1)$ und $(x+y)$ die Gleichung:

IV.) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+1)(2y^2+1)$. Substituirt man in der letzten Klammer für $1.y^2$ den Werth aus III.) und behält $1.y^2$ zurück, so erhält man:

V.) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+1)(x^2-xy+y)$, folglich

$x+y=x+1$ also auch $y=1$, und $x^2-x=2$, woraus $x=2$ oder -1.

40) I.) $x^2y-4=4x^{\frac{1}{2}}y-\frac{y^3}{4}$; II.) $x^{\frac{3}{2}}-3=x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$.

Aus I.) ergiebt sich durch Addition von xy^2 auf beiden Seiten nach gehöriger Umstellung:

III.) $(xy^{\frac{1}{2}})^2+xy^2+\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^2=xy^2+4x^{\frac{1}{2}}y+4$, woraus:

$xy^{\frac{1}{2}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}=x^{\frac{1}{2}}y+2$, und durch Umstellung

IV.) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})=2-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}$. Die Substitution in II.) giebt:

V.) $x^{\frac{3}{2}}-3=2-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}$, woraus zur erneuten Verbindung mit II.)

$$3x^{\frac{3}{2}}-10=x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^3+3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}).$$

Multiplicirt man II.) mit 3, so wird $3x^{\frac{3}{2}}-9=3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$, und durch Verbindung der beiden letzten Resultate: $1=y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$. Substituirt man den Werth des $x^{\frac{1}{2}}$ in Gl. IV.), so erhält man:

VI.) $-y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{2}}-1)=2-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}$, also auch: $-2y+2y^{\frac{1}{2}}=4-y^{\frac{3}{2}}$,

und: $y^{\frac{3}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}=2y+4$, folglich: $y^{\frac{1}{2}}(y+2)=2(y+2)$, woraus endlich

$y^{\frac{1}{2}}=2$ und $y=4$, daraus aber $x=1$.

41) I.) $5-2\sqrt{y+2}=\frac{9x^2}{64}-\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2$; II.) $\frac{7}{y}-10\sqrt{\frac{x}{y}}=x-16$.

Aus II.) erhält man zunächst durch Multiplikation mit y:

III.) $7-10\sqrt{xy}=xy-16y$, woraus quadratisch nach $\sqrt{xy}$ gelöst:

$\sqrt{xy}+5=4\sqrt{y+2}$. Aus I.) ergiebt sich durch Ausführung des Quadrats:

IV.) $5-2\sqrt{y+2}=\frac{9x^2}{64}-x+6\sqrt{xy}-9y$, und wenn man aus III.) den Werth für $6\sqrt{xy}$ einsetzt:

V.) $5 - 2\sqrt{y+2} - 24\sqrt{y+2} + 30 + 9y = \frac{9x^2}{64} - x.$

Ergänzt man auf beiden Seiten, die Lösung rechts im Auge behaltend, $\frac{16}{9}$, so verwandelt sich durch passende Verbindung die Gleichung in:

VI.) $17\frac{16}{9} - 26\sqrt{y+2} + 9(y+2) = \frac{9x^2}{64} - x + \frac{16}{9}$, woraus durch Ausziehen der Wurzel: $3\sqrt{y+2} - \frac{13}{3} = \frac{3x}{8} - \frac{4}{3}$, folglich $x + 8 = 8\sqrt{y+2}$. Da nun aber aus III.) auch $2\sqrt{xy} + 10 = 8\sqrt{y+2}$, so ist: $x - 2\sqrt{xy} = 2$, und somit $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{y+2}$. Aus diesem letzten Resultate und dem der Gl. III.) erhält man durch Gleichsetzung der Werthe für $\sqrt{x}$ die Gl.

VII.) $\sqrt{y} + \sqrt{y+2} = \frac{4\sqrt{y+2} - 5}{\sqrt{y}}$, daraus: $y + 5 = 4\sqrt{y+2} - \sqrt{y}.\sqrt{y+2}$

und durch Quadr. und Reduz. $8\sqrt{y(y+2)} = 8y + 7$, also: $\sqrt{y} = \frac{8y+7}{8y+16}$, woraus durch erneutes Quadr. $64y^3 + 256y^2 + 256y = 64y^2 + 112y + 49$, folglich:

VIII.) $64y^3 + 192y^2 + 144y = 49$, und $4y(16y^2 + 48y + 36) = 7^2$, somit:

$$2\sqrt{y}(4y+6) = 7, \text{ und } \sqrt{y} = \frac{7}{8y+12}.$$

Durch Verbindung der Resultate aus VII.) und VIII.) hat man:

IX.) $16y^2 + 24y = 7$, und $4y + 3 = 4$, also $= y = \frac{1}{4}$, woraus der Werth des $x = 4$ aus VI.) sogleich folgt.

42) I.) $\frac{y}{2x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y - \sqrt{x-1}}{y^2 - 2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$; II.) $\frac{1}{4}y^4 = y^2x - 1.$

Aus II.) ist zunächst durch Lösung nach y^2 die Gleichung $\left(\frac{y^2}{2} - x\right)^2 = x^2 - 1$ abzuleiten, woraus: $y^2 - 2\sqrt{x^2-1} = 2x$. Substituirt man diesen Werth in Gl. I.), so wird:

III.) $\frac{y}{2x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y - \sqrt{x-1}}{2x} = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ und daraus: $\frac{5y}{3} = 2\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}\sqrt{x-1}$

folglich auch:

IV.) $25y^2 = 40x + 32 + 24\sqrt{x^2-1}$. Durch Verbindung mit dem Resultate aus II.) erhält man durch Einsetzung des Werthes für $24\sqrt{x^2-1} = 12y^2 - 24x$ die Gleichung

V.) $13y^2 = 16x + 32 = 26\sqrt{x^2-1} + 26x$, oder $16 - 5x = 13\sqrt{x^2-1}$, und daraus: VI.) $169x^2 - 169 = 256 - 160x + 25x^2$, also auch: $x^2 + \frac{10x}{9} = \frac{425}{144}$, und somit: $x = -\frac{5}{9} \pm \frac{65}{36} = \frac{5}{4}$ oder $-\frac{85}{36}$, woraus die Werthe für y sich aus II.) ergeben:

$$y = \pm 2 \text{ oder } \pm\sqrt{-\frac{85}{18} + \frac{\sqrt{5929}}{648}}.$$

43) I.) $(x-2)y - \sqrt{xy}(y^2-1) = 2y^2 - x$; II.) $\frac{1}{4}xy = \frac{\sqrt{xy} - 12}{xy - 18}.$

Aus II.) findet man zunächst: $x^2y^2 - 18xy = 4\sqrt{xy} - 48$. Vertheilt man $18xy$ in passender Weise auf beide Seiten der Gleichung und addirt zur Vervollständigung der Quadrate auf beiden Seiten 49, so erhält man sogleich aus:

III.) $x^2y^2 - 14xy + 49 = 4xy + 4\sqrt{xy} + 1$; $xy - 2\sqrt{xy} = 8$, und $\sqrt{xy} = 4$.

Aus I.) erhält man für $\sqrt{xy}$ den Werth $\frac{xy - 2y - 2y^2 + x}{y^2 - 1} = \sqrt{xy}$; durch Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren des Zählers und Zerlegung des Nenners wird:

IV.) $\frac{x(y+1) - 2y(y+1)}{(y+1)(y-1)} = \sqrt{xy}$, folglich durch Verbindung von III.) und IV.) $\frac{x-2y}{y-1} = 4,$

woraus $x = 6y - 4$, und wenn man mit y multiplicirt $xy = 6y^2 - 4y = 16$, $y^2 - \frac{2y}{3} = \frac{8}{3}$, also $y = \frac{1 \pm 5}{3} = 2$ oder $-\frac{4}{3}$, woraus $x = 8$ oder -12.

44) I.) $3x - x\sqrt{\frac{5x^2}{4} - 2y + 8} = 2 - y$; II.) $\frac{\sqrt{x+y}}{2x} - \frac{3x}{4} = \frac{2x-3}{\sqrt{x+y}} - \frac{3y}{2x}$.

Sucht man zuerst den Werth des y aus I.), so erhält man dazu:

$$3x + y - 2 = x\sqrt{\frac{5x^2}{4} - 2y + 8} \text{ woraus:}$$

III.) $y^2 + y(6x - 4 + 2x^2) = \frac{5x^4}{4} - x^2 + 12x - 4$ und

$$y = -(3x - 2 + x^2) \pm \sqrt{x^4 + 9x^2 + 4 + 6x^3 - 4x^2 - 12x + \frac{5x^4}{4} - x^2 + 12x - 4}$$

$$y = -(3x - 2 + x^2) \pm \sqrt{\frac{9x^4}{4} + 6x^3 + 4x^2}$$

$$y = -(3x - 2 + x^2) + \frac{3x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2} - x + 2.$$

Substituirt man diesen Werth des y im letzten Gliede der Gl. II.) und löst dieselbe nach $\sqrt{x+y}$, so erhält man dazu nach gehöriger Reduktion die Gleichung

IV.) $\frac{\sqrt{x+y}}{2x} - \frac{2x-3}{\sqrt{x+y}} = \frac{3x-6}{2x}$, woraus durch Multiplikation mit $2x\sqrt{x+y}$ die Gl.

V.) $x + y - (3x - 6)\sqrt{x+y} = 4x^2 - 6x$, also: $\sqrt{x+y} = \frac{3x-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3x-6}{2}\right)^2 + 4x^2 - 6x}$

folgt. Daher ist $\sqrt{x+y} = 4x - 6$. Durch Verbindung dieses Resultates mit dem der Gl. III.) erhält man aus: $x + y = 16x^2 - 48x + 36$, und $y = \frac{x^2}{2} - x + 2$ die Gleichung

VI.) $x^2 - \frac{96x}{31} = \frac{68}{31}$, woraus $x = \frac{48 \pm 14}{31}$, also $x = 2$ oder $\frac{34}{31}$ und $y = 2$ oder $\frac{1446}{961}$.

45) I.) $x^2 - y^2 = 3$; II.) $(x^4 + y^4)^2 + x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + x^2 - y^2 = 328$.

Substituirt man I.) und (I.)^2 in II.); so wird:

III.) $(x^4 + y^4)^2 + 9x^2y^2 = 325$, außerdem ist aber aus I.) $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = 9$,

und somit: IV.) $(9 + 2x^2y^2)^2 + 9x^2y^2 = 325$, also auch: $4x^4y^4 + 45x^2y^2 = 244$,

woraus: $x^2y^2 = -\frac{45 \pm 77}{8} = 4$ oder $-\frac{61}{4}$. Verbindet man wieder das Resultat der Gl. IV.) mit Gl. (I.)^2, so erhält man zunächst für $x^2y^2 = 4$ den doppelten Werth für $x^2 + y^2 = \pm 5$, und dadurch $x = \pm 2$, entsprechend: $y = \pm 1$. Wenn man dagegen den Werth $x^2 + y^2 = -5$ substituirt, so erhält man durch Verbindung mit $x^2 - y^2 = 3$ für x die Werthe $\pm\sqrt{-1}$, und dem entsprechend die beiden Werthe $y = \pm 2\sqrt{-1}$. Setzt man dagegen von vornherein den Werth $x^2y^2 = -\frac{61}{4}$; so ergiebt sich daraus: $x^2 + y^2 = \pm 2\sqrt{-13}$, und durch Verbindung mit $x^2 - y^2 = 3$ der Doppelwerth $x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm 2\sqrt{-13}}{2}}$, und entsprechend: $y = \pm\sqrt{\frac{-3 \pm 2\sqrt{-13}}{2}}$.

46) I.) $\frac{x^2y^2}{2} + 4 - 40y^2 = 140 - y^2\sqrt{x^2 - \frac{272}{y^2}}$;

II.) $x^2 - \frac{2}{y}\left(\frac{3}{y} + 15x\right) = \frac{30}{y^2} + \frac{5x}{y}$.

Aus I.) erhält man durch Multipl. mit 2 und Division mit y^2, nach gehöriger Reduktion die Gl.

III.) $x^2 - \frac{272}{y^2} + 2\sqrt{x^2 - \frac{272}{y^2}} = 80$, woraus: $\sqrt{x^2 - \frac{272}{y^2}} = -1 \pm 9$.

Setzt man $x^2 - \frac{272}{y^2} = 64$, so wird $x^2y^2 - 272 = 64y^2$, im andern Falle: $x^2y^2 - 272 = 100y^2$. Aus der Gl. II.) erhält man durch Multiplikation mit y^2 und gehöriges Zusammenziehen:

IV.) $x^2y^2 - 35xy = 36$, woraus der Werth für $xy = 36$, und danach entweder $y = 4$ oder $-\frac{16}{5}$, der Werth des x aber entweder $x = 9$ oder $-\frac{45}{4}$.

47) I.) $\frac{2y^2 - 8\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{4y^2 - 16\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$; II.) $\sqrt{x} + \sqrt{8(y - \sqrt{x}) - 4} = y + 1$.

Multiplizirt man Gl. II.) mit 8, und fügt dann nach vorgenommener Umstellung auf beiden Seiten -4 hinzu, so erhält man:

III.) $8(y - \sqrt{x}) - 4 - 8\sqrt{8(y - \sqrt{x}) - 4} = -12$, woraus in schon bekannter Weise: $\sqrt{8(y - \sqrt{x}) - 4} = 4 \pm 2 = 6$ oder 2. Bleiben wir zunächst bei dem letzten Werthe stehen, so wird $y - \sqrt{x} = 1$. Dividirt man nun Gl. I.) mit 2 und multipl. mit $\sqrt{x}$, so ergiebt sich leicht:

IV.) $y^2 - 4\sqrt{x} + \sqrt{x}\,.\,\sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} = \frac{3x}{4}$, und daraus durch Lösung als quadratische Gleichung $y^2 - 4\sqrt{x} = \frac{x}{4}$. Aus III.) wird $y^2 = (1 + \sqrt{x})^2$, also auch:

V.) $1 + 2\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} = \frac{x}{4}$, folglich: $x - \frac{8\sqrt{x}}{3} = -\frac{4}{3}$ und $\sqrt{x} = \frac{4 \pm 2}{3} = 2$ oder $\frac{2}{3}$, und somit $x = 4$ oder $\frac{4}{9}$; dem entsprechend wird $y = 3$ oder $\frac{5}{3}$. Außerdem war aber auch $\sqrt{8(y - \sqrt{x}) - 4} = 6$, folglich $y - \sqrt{x} = 5$, und $y^2 = (5 + \sqrt{x})^2$; da nun oben aus IV.) $y^2 - 4\sqrt{x} = \frac{x}{4}$; so ist auch: $y^2 - 4\sqrt{x} = 25 + 10\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} = \frac{x}{4}$, also:

$$\frac{3x}{4} + 6\sqrt{x} = -25;\ x + \frac{24\sqrt{x}}{3} = -\frac{100}{3},\ \sqrt{x} = -\frac{12}{3} \pm \sqrt{-\frac{156}{9}}$$

$$\sqrt{x} = -4 \pm 2\sqrt{-\frac{13}{3}},\ \text{woraus}\ x = 16 \mp 16\sqrt{-\frac{13}{3}} - \frac{52}{3} = -\frac{4}{3} \pm 16\sqrt{-\frac{13}{3}},$$

dem entsprechend würden die Werthe für $y = 1 \pm 2\sqrt{-\frac{13}{3}}$, da $y = 5 + \sqrt{x}$. Nimmt man aus Gl. IV.) den Werth für $\sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}}{2}$, so wird: $y^2 - 4\sqrt{x} = \frac{9x}{4}$, und daraus durch Substitution von $y^2 = (1 + \sqrt{x})^2$ die Gleichung

VI.) $1 + 2\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} = \frac{9x}{4}$, folglich: $\sqrt{x} = \frac{2}{5}$ oder $= -2$, also: $x = \frac{4}{25}$ oder $= (-2)^2 = 4$; entsprechend hat y die Werthe: $y = \frac{7}{5}$ oder $= -1$.

Zuletzt könnte aber noch $y - \sqrt{x} = 5$ angewendet werden, um daraus in Verbindung mit $y^2 - 4\sqrt{x} = \frac{9x}{4}$ die Werthe für x und y zu finden, so daß man zur Bestimmung von $\sqrt{x}$ hätte die Gl.

VII.) $x - \frac{24\sqrt{x}}{5} = 20$, woraus $\sqrt{x} = \frac{12 \pm \sqrt{644}}{5}$ und $x = \frac{788 \pm 24\sqrt{644}}{25}$

und dazu die entsprechenden Werthe des $y = \frac{37 \pm \sqrt{644}}{5}$.

48) I.) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}(x^{\frac{2}{3}} - 1) + \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}(2x^{\frac{2}{3}} - 1) = \frac{4y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}(y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}) + \frac{3y}{x^{\frac{1}{3}}} + 2,$

II.) $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} - \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{y} - \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{133}{36} \cdot \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$

Die erste Gleichung mit $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ multipl. giebt:

III.) $x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - 1) + y^{\frac{2}{3}}(2x^{\frac{2}{3}} - 1) = 4y^{\frac{2}{3}}(y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}) + 3y^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

Multipl. man auf der linken Seite dieser Gleichung die Klammerausdrücke, addirt auf beiden Seiten $y^{\frac{4}{3}}$ und ordnet gehörig, so erhält man zunächst die Gleichung

IV.) $x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}(y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}) + 4y^{\frac{4}{3}}$, also:

$$\text{V.)}\quad (x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2+4\,y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})+4\,y^{\frac{4}{3}},\ \text{folglich auch:}$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+2\,y^{\frac{2}{3}},\ \text{und}\ x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}},$$

woraus durch Ergänzung von $\frac{1}{4}$ auf beiden Seiten: $x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}=y^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}$, und somit $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1$. Aus der Gl. II.) erhält man durch Multipl. mit $y^{\frac{4}{3}}.x^{\frac{2}{3}}$ und passende Ordnung die Gleichung

$$\text{VI.)}\quad x^2-2xy+y^2-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x-y)=\frac{133}{36}.x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

woraus: $(x-y)^2-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x-y)+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=\frac{169}{36}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, folglich auch:

$$x-y-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=\frac{13}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}},\ \text{und}\ x-y=\frac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

Nun war aber oben aus Gl. V.) gefunden $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1$, woraus auch:

$$(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3=1=x-y-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}),$$

folglich, wenn man den für $x-y$ gefundenen Werth substituirt: $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=6$. Verbindet man diesen Werth mit $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1$, so erhält man in einfacher Weise: $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=\pm 5$, woraus $x^{\frac{1}{3}}=3$ oder -2 und $y^{\frac{1}{3}}=2$ oder -3, folglich $x=27$ oder -8 und $y=8$ oder -27.

Es mögen hier noch die beiden Gleichungen aus Heis' Sammlung p. 235 68) und 69) eine Stelle finden.

$$68)\quad \text{I.)}\ ax+by=2(x^2-y^2).\qquad \text{II.)}\ \frac{b}{x-y}-\frac{a}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Durch Vertauschung der Symbole sind hier leicht die Werthe von a und b als die Unbekannten aus x und y zu finden und aus ihnen sodann x und y zu bestimmen. Man erhält auf diesem Wege $a=\frac{x^2-y^2}{x}$ und $b=\frac{x^2-y^2}{y}$, also $ax=by$, und durch Substit. in der Gl. I.) $x=\frac{ab^2}{b^2-a^2}$ etc.

$$69)\quad \text{I.)}\ a-b=\frac{x^2-y^2}{(x+1)(y+1)};\quad \text{II.)}\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)(y-1)}.$$

Durch Division von I.) durch II.) wird $ab=\frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}$, und durch Verbindung dieses Werthes mit I.) entsteht:

$$\text{III.)}\ a=\frac{x-1}{y+1},\ b=\frac{y-1}{x+1},\ \text{woraus leicht:}\ \text{IV.)}\ x=\frac{2a+ab+1}{1-ab}\ \text{etc.}$$

§. 7.

Gehen wir nun zur Bildung ähnlicher Bedingungsgleichungen über, und halten uns zunächst an die Form a) des §. 4., so würde z. B. eine Annahme von $x=3$ und $y=4$ auf die entsprechende Verbindung $x^2+y=13$, und $x+\sqrt{y}=5$ führen, woraus sogleich, etwa durch Addition, die Bedingungsgleichung: $x^2+x+y+\sqrt{y}=18$ zu bilden wäre. Um die Uebersicht nicht zu sehr zu erschweren, möge die Verbindung, welche x^2+y zum vollständigen Quadrate eines Binoms ergänzen würde $2x\sqrt{y}=12$ gesetzt werden, so hat man zunächst durch Addition von I.) und II.) $(x+\sqrt{y})^2+x+\sqrt{y}=30$, woraus durch Bestimmung des Binoms $x+\sqrt{y}=-\frac{1\pm 11}{2}=5$ oder -6, folglich $x^2+y=13$ gefunden würde, wenn zunächst der Werth 5 in Betracht gezogen wird. Da ferner: $(5-x)^2=y$, so ist auch: $x^2-5x=-6$, woraus $x=3$ oder 2. Man hätte natürlich ebenso gut auch eine besondere Gleichung zur Gewinnung des Werthes $2x\sqrt{y}=12$ bilden können, etwa der Art, daß $x\sqrt{y}=6$, $x\sqrt{y}-1=5$, $x^2y-2x\sqrt{y}+1=25$, und daraus $\frac{x^2y}{2}-x\sqrt{y}=12$. Man würde dann begreiflich aus dieser letzten Gleichung erst den Werth von $x\sqrt{y}$ quadratisch zu bestimmen haben, und denn wie oben verfahren.

Um Bedingungsgleichungen nach der Form b) zu bilden, setze man etwa: $\sqrt{x^2+\sqrt{y}-2}=3$, woraus $x^2+\sqrt{y}=11$, also auch: I.) $4\sqrt{x^2+\sqrt{y}-2}-x^2-\sqrt{y}=1$. Setzt man nun: II.) $3x-\sqrt{y}=7$, so würde aus I.) $x^2+\sqrt{y}-2=9$ gefunden, und durch Addit. von II.) entstehen: III.) $x^2+3x=18$, woraus $x=3$ und $\sqrt{y}=2$, also $y=4$. Auch hier hätte man begreiflich $3x-\sqrt{y}=7$ selbst wieder von der Lösung einer quadratischen Gleichung abhängig machen und dadurch die Schlußlösung noch mehr verdecken können, wenn etwa: $9x^2-42x+49=y$,

$9x^2 - y = 42x - 49$, $(3x + \sqrt{y})(3x - \sqrt{y}) = 7(6x - 7)$, $\frac{3x + \sqrt{y}}{6x - 7} = \frac{7}{3x - \sqrt{y}}$ gesetzt worden wäre.

Um weitere Bedingungsgleichungen zu der Form c) zu bilden, setzen wir eine vollständige Verbindung der Glieder der Quadrate zweier Binome einander gleich, z. B. $x^2 + 6x + 9 = y^2 + 4y + 4$, worin $x = 2$, $y = 3$, und trennen sodann diese Gleichung in $y^2 - x^2 = 5$, $4y = 6x$, $2y = 3x$. In der vorliegenden einfachen Form würde man nun freilich sogleich durch einfaches Substit. quadratisch lösen; es soll aber eben die einfache Gestalt nur als Schema für zusammengesetztere Verbindungen dienen, welche danach zu bilden dem aufmerksamen Schüler nicht schwer fallen wird. Setzte man z. B. $x = 4$, $y = 3$, und bildete dann die beiden Gleichungen: I.) $2x^2y^2 - (x + y)^2 = 239$, und II.) $xy = x + y + 5$, so würde man durch Addition des Quadrates der umgestellten Gl. II.) eine bequeme Form einer quadr. Gleichung für xy, und daraus auch sogleich den Werth für $x + y$ erhalten. Es wäre nämlich dann: III.) $2x^2y^2 - (xy - 5)^2 = 239$, d. h. $x^2y^2 + 10xy = 264$, und $xy = -5 \pm 17$; woraus die Werthe $xy = 12$ oder -22, für $x + y$ aber die Werthe 7 oder -27 erhalten würden, aus denen dann in gewöhnlicher Weise x und y gefunden werden können. Noch bezeichnender tritt die Bildung solcher Gleichung aus der Nummer 16. der mitgetheilten Sammlung hervor. Es war dort: I.) $x^2 + 3x + y = 73 - 2xy$; II.) $y^2 + 3y + x = 44$. Die Addition beider Bedingungsgleichungen ergab aber sogleich: III.) $(x+y)^2 + 4(x+y) = 117$ u. s. w.

Für die unter d) erwähnte Form hätte man vielleicht als einfachstes Schema $x^2 + x = y^2 - y$, worin die Addition von $\frac{1}{4}$ auf beiden Seiten sogleich auf die Lösung $x + \frac{1}{2} = y - \frac{1}{2}$ führen würde, welche allerdings auch nach der folgenden Form e) durch Zerlegung in die Faktoren $x(x+1) = y(y-1)$ in die Proportion $x : y = y - 1 : x + 1$ und daraus in: $x + y : x + y = y : x + 1$ umgewandelt werden könnte, woraus sogleich $y = x + 1$ erkannt wird. Ginge man aus von $x = 6$, $y = 4$, so wäre $x - 1 = \sqrt{y} + 3$, daraus: $x^2 - 2x + 1 = y + 6\sqrt{y} + 9$, und eine der Form entsprechende Bedingungsgleichung: $x^2 - y = 2x + 6\sqrt{y} + 8$, wozu man etwa die Bedingungsgleichung: $x\sqrt{y} + \frac{x^2 - 16}{\sqrt{y}} = x^2 - 7\sqrt{y}$ fügen könnte, wodurch die zweite Lösung nur vom ersten Grade sein würde: sollte dies aber vermieden werden, so hätte man nur die Gleichung in $4x\sqrt{y} + \frac{x^2 - 16}{\sqrt{y}} = 2x^2 - 7\sqrt{y}$ umzuändern. Setzte man nämlich in die obige Gleichung den Werth $x = \sqrt{y} + 4$, so hätte man sogleich: $\sqrt{y}(\sqrt{y} + 4) + \frac{y + 8\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = y + 8\sqrt{y} + 16 - 7\sqrt{y}$, folglich:

$$y + 4\sqrt{y} + \sqrt{y} + 8 = y + \sqrt{y} + 16, \text{ und } 4\sqrt{y} = 8, \ y = 4.$$

In ähnlicher Weise könnte auch ein identisches Mittelglied auf beiden Seiten der Gleichung addirt die quadratische Lösung ermöglichen, wenn man z. B. $x^4 + y^2 = 4x^2y^2 + \frac{x^2}{4}$ setzte, da hier die Hinzufügung von $2x^2y$ auf beiden Seiten sogleich auf $x^2 + y = 2xy + \frac{x}{2}$ führen würde; da aber hieraus durch Ergänzung von y^2 die Form: $x^2 - 2xy + y^2 = x - y + y^2$, oder: $(x - y)^2 - (x - y) = y^2 - \frac{x}{2}$ entstände; so könnte man etwa als zweite Bedingungsgleichung $\frac{x}{2} = y^2 - 6$ setzen.

Zu der Form e) besondere Beispiele zu bilden ist aus dem Grunde nicht nöthig, weil jede der vorhandenen quadratisch lösbaren Formen auf dieselbe gebracht werden kann, wenn man eine geeignete Multiplikation im Zähler und Nenner eines erscheinenden Bruchwerthes auf einer Seite einer Bedingungsgleichung mit einem irgend welche Verbindung der Unbekannten enthaltenden Faktor vornimmt, oder auch beide Seiten einer ganzen Gleichung mit einem solchen multiplizirt. Die Zerlegung gegebener Ausdrücke in Faktoren, wodurch eine verlangte Lösung einer Gleichung oft überraschend erleichtert wird, wird hierbei besonders geübt, da man durch die Umkehrung des Verfahrens jedenfalls eine deutlichere Einsicht in den operativen Zusammenhang zusammengesetzterer Ausdrücke mit einfacheren gewinnt. Versucht der Anfänger solche Gleichungen zu bilden, so wird er darauf zu sehen haben, daß durch die Wahl der rückwärts wieder abzusondernden Faktoren die Ausdrücke in sich selbst Zusammenziehung der Glieder gestatten, wodurch jedenfalls die Absonderung mehr verdeckt wird; besonders zu empfehlen würde es aber sein, die zu dem Verständniß des Gegenstandes gelangten Schüler dazu anzuregen, sich unter einander zur gegenseitigen Prüfung der Kräfte solche selbstgebildete Aufgaben zur Lösung vorzulegen.

§. 8.

Zum Schluß folgen noch einige leichtere Gleichungen der Art ohne Lösung zu eigner Uebung.

1) I.) $12xy = 1 + 4\sqrt{xy}$
II.) $x + y = 3 - \sqrt{x + y + 3}$.

2) I.) $xy^2 + 3xy + 2x = y^3 - y^2 - 10y - 8$
II.) $4(x - y) = x^2 - y^2 + (y - x)^3$.

3) I.) $x(2x + 1) + y(2y + 1) = 105 - 4xy$
II.) $xy = \frac{204}{xy + 5}$.

4) I.) $x - y + \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} = \frac{20}{x + y}$
II.) $y^2 + 2y = x^2 - 2x$.

5) I.) $4x^2 + 5x + 3y = 63 - xy$
II.) $y^2 + 3x + y = 33 - 3xy$.

6) I.) $x^{\frac{5}{2}} - y^{\frac{5}{2}} + 2xy + 2x\sqrt{xy} - 9(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = y^2x^{\frac{1}{2}} - x^2y^{\frac{1}{2}} + 5y(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
II.) $x^2 + y^2 = y(2x + 1) + 1 - 2\sqrt{y}$.

7) I.) $\sqrt{(x - y)^2 + 100\sqrt{xy}} = 25$
II.) $\sqrt{52xy - x^2y^2} = 24$.

8) I.) $\frac{x - y - 1}{1 + y^{\frac{1}{2}}} = 3y^{\frac{1}{2}}$
II.) $y^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{42}{x^{\frac{2}{3}}}$.

9) I.) $x = \frac{3x^2 - y + 1}{4 + 2\sqrt{y}}$
II.) $11x + \frac{y - 1}{x} = x^3 - 6\sqrt{y}$.

10) I.) $x^2y^2 - 2x^2\sqrt{\frac{y^2}{25} - \frac{7}{x^2}} = 35 + \frac{3x^2}{5}$
II.) $\frac{1}{x + y} = \frac{x - y}{9}$.

11) I.) $3x^2 - 2xy + 8 = y^2 + 12y$
II.) $4x + 3y + \frac{xy}{2} = \frac{5x^2 - y^2 + 22}{4}$.

12) I.) $x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 24y^{\frac{4}{3}}$
II.) $2y + \sqrt{x} = \frac{36 - y^2}{\sqrt{x}}$.

13) I.) $x^2 + y^2 = 8y + 9$
II.) $x^4 + y^4 - 108 = 3y(8 - y) - x^2(3 - 2y^2)$.