VII.

Das in Bezug auf das Potenz-Zentrum der 3 Ankreise symmetrisch gelegene, dem Urdreieck congruente Dreieck.

(Siehe nebenstehende Figur VII).

Das Dreieck A′ B′ C′ ist congruent mit und symmetrisch zu ABC in Bezug auf P als Situationspunkt. P (früher P_4 genannt) ist das Potenz-Zentrum der Ankreise, deren Mittelpunkte A_1 A_2 und A_3. P ist daher auch Inkreismittelpunkt des Mittendreiecks A_0 B_0 C_0 und da A′ B′ C′ Gegenpunkte von ABC in Bezug auf P, so sind auch A'_0 B'_0 C'_0, die Mitten von A′ B′ C′, Gegenpunkte von A_0 B_0 C_0, also ist der Inkreis von A_0 B_0 C_0 gleichzeitig der von A'_0 B'_0 C'_0 und sein Mittelpunkt ist auch Potenz-Zentrum der Ankreise des Dreiecks A′ B′ C′, dessen Mittelpunkte A'_1 A'_2 A'_3. Folglich haben diese 6 Kreise einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis, dessen Zentrum P. Die 12 von P aus an die 6 Kreise gelegten Tangenten sind gleich.

Die Euler-Geraden der beiden Dreiecke ABC und A′ B′ C′ : H F S O und H′ F′ S′ O′ sind parallel und ihre Punkte paarweis symmetrisch zu P. Da auch H I ∥ und = H′ I′, so bildet H I H′ I′ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich in P schneiden. I S P S′ I′ ist die andre Diagonale, auf der somit die Inkreismittelpunkte und Schwerpunkte liegen.

Der Höhenschnittpunkt H ist Umkreismittelpunkt von A'_1 A'_2 A'_3, O′, der Umkreismittelpunkt von A′ B′ C′, ist zugleich Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises von $A'_1 A'_2 A'_3$, da beide Kreise identisch sind, und I′ ist Höhenschnittpunkt von A'_1 A'_2 A'_3. Analoge Bedeutung haben H O und I für das Dreieck A_1 A_2 A_3. Daraus folgt, daß auch die Schwerpunkte dieser Dreiecke auf H O′ I′ resp. H′ O I fallen.

O ist Höhenschnittpunkt von A_0 B_0 C_0 und F Umkreismittelpunkt, während der Schwerpunkt des Mittendreiecks A_0 B_0 C_0 mit S, dem Schwerpunkt des Urdreiecks, zusammenfällt. Dieselbe Bedeutung haben O′, F′ und S′ für das Mittendreieck A'_0 B'_0 C'_0. Daraus folgt, daß auch die Mittelpunkte ihrer Feuerbachschen Kreise auf O F resp. O′ F′ liegen.

A_a B_b C_c und A'_a B'_b C'_c sind die Punkte, in welchen die Ankreise die entsprechenden Dreiecksseiten berühren. Dann schneiden sich A A_a, B B_b und C C_c in I′, dem Inkreismittelpunkt des symmetrischen Dreiecks A′ B′ C′ und analog

A′ A'_a, B′ B'_b und C′ C'_c in I, dem Inkreismittelpunkt von ABC.

Diese Transversalen gehen aber auch durch die Mitten der entsprechenden Seiten des symmetrischen Dreiecks, also z. B. A A_a durch A'_b, d. i. die Mitte von B′ C′, also a′.

Die Strahlen $I'A$, $I'B$ und $I'C$ werden in A'_0, B'_0 und C'_0 halbiert, ebenso IA', IB' und IC' in A_0, B_0 und C_0, sodaß die Dreiecke ABC und $A'_0 B'_0 C'_0$ symmetrisch (perspektivisch) liegen in Bezug auf I' und $A'B'C'$ und $A_0 B_0 C_0$ in Bezug auf I.

Ferner liegen auf den Höhen des Dreiecks ABC die Ankreismittelpunkte des symmetrischen Dreiecks $A'_1 A'_2 A'_3$ und natürlich auch deren Berührungspunkte mit den entsprechenden Dreiecksseiten $A'_a B'_b C'_c$ also auf h_a : A'_1 und A'_a ꝛc.

Analog auf den Höhen des Dreiecks $A'B'C'$ die Ankreismittelpunkte $A_1 A_2 A_3$ und deren Berührungspunkte mit den Dreiecksseiten A_a, B_b und C_c. $A_0 A'_0 \perp A_2 A_3$, $B_0 B'_0 \perp A_1 A_3$ und $C_0 C'_0 \perp A_1 A_2$.