I.

Die Dreiecke, deren Ecken die Mittelpunkte der Ankreise des ursprünglichen und seines Gegenpunktedreiecks auf dem Umkreis sind.

(Siehe nebenstehende Figur. Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. B. № 1.

$A' B' C'$ sind die Gegenpunkte von ABC auf dem Umkreis, dessen Mittelpunkt O ist.

$A_1 A_2 A_3$ sind die Mittelpunkte der Ankreise von ABC und $A'_1 A'_2 A'_3$ die der Ankreise von $A' B' C'$:

Dann sind $A'_1 A'_2 A'_3$ die Gegenpunkte von $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf O.

Ferner sind sowohl $A_1 A_2 A_3$ die Mittelpunkte der Kreise, welche durch je 2 Ankreismittelpunkte und den Mittelpunkt des Inkreises I' des Dreiecks $A' B' C'$ gehen, als auch $A'_1 A'_2 A'_3$ diejenigen der Kreise, welche durch je 2 Ankreis- und den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC gehen.

Endlich sind auch die Inkreismittelpunkte I und I' der Dreiecke ABC und $A' B' C'$ die Mittelpunkte der durch $A'_1 A'_2 A'_3$ und $A_1 A_2 A_3$ gelegten Kreise.

Der gemeinschaftliche Umkreis von ABC und $A' B' C'$ ist gemeinschaftlicher Feuerbachscher Kreis für folgende 8 Dreiecke:

$A_1 A_2 A_3$, $I A_1 A_2$, $I A_1 A_3$, $I A_2 A_3$ und
$A'_1 A'_2 A'_3$, $I' A'_1 A'_3$, $I' A'_1 A'_3$, $I' A'_2 A'_3$.

Daher liegen sämtliche Seitenmitten, Höhenfußpunkte und Mitten der oberen Höhenabschnitte auf der Peripherie dieses Kreises. Daraus folgt weiter, daß die Mitten $M_1 M_2 M_3$ der Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zugleich die Mittelpunkte folgender 6 Kreise:

$B C A_2 A_3$, $A C A_1 A_3$, $A B A_1 A_2$ und
$B' C' I' A'_1$, $A' C' I' A'_2$, $A' B' I' A'_3$ sind.

Ebenso sind die Mitten $M'_1 M'_2 M'_3$ der Seiten des Dreiecks $A'_1 A'_2 A'_3$ zugleich die Mittelpunkte folgender 6 Kreise:

$B' C' A'_2 A'_3$, $A' B' A'_1 A'_3$, $A' B' A'_1 A'_2$ und
$B C I A^{I}$, $A C I A_2$, $A B I A_3$.

Fig. I.

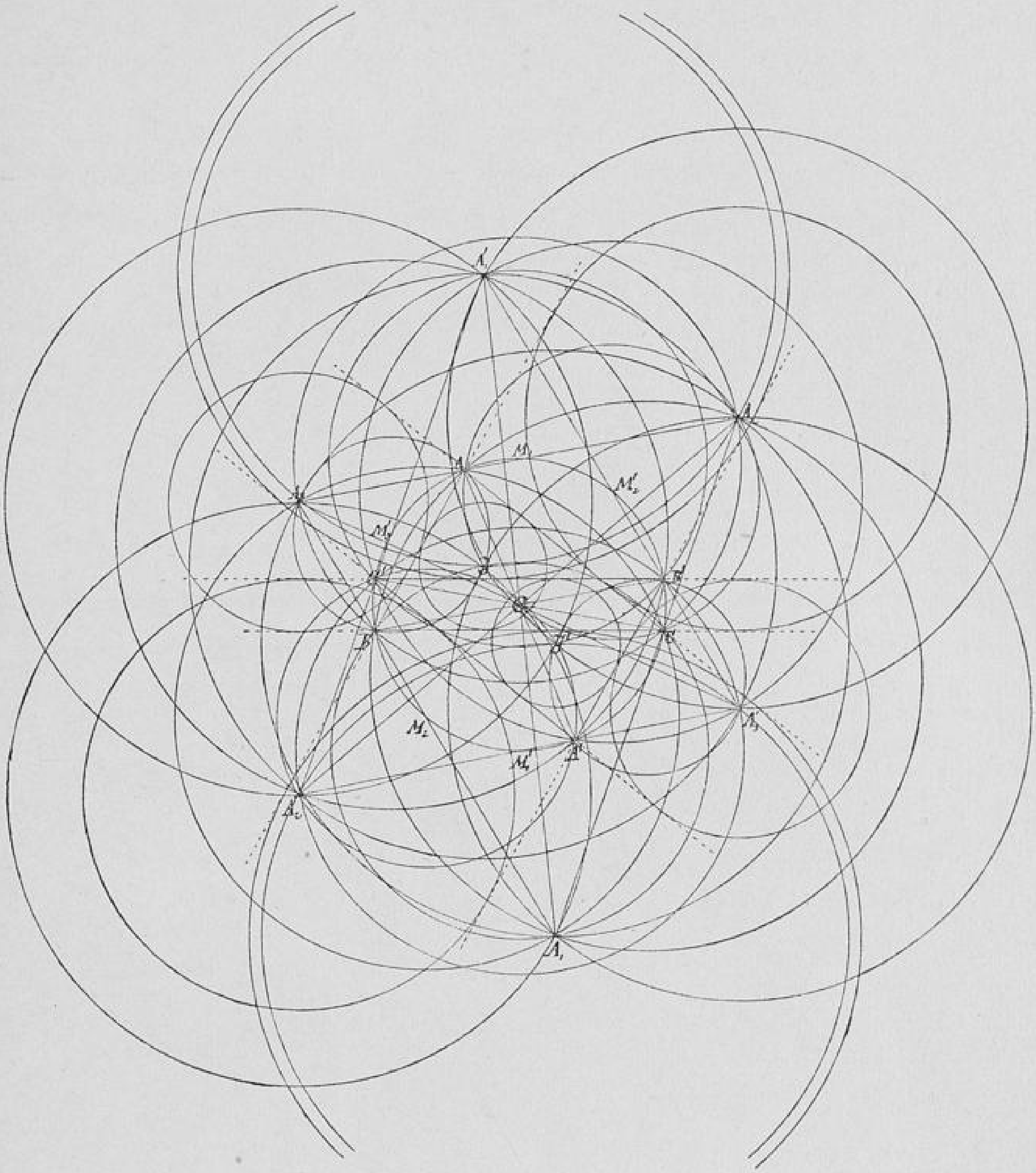
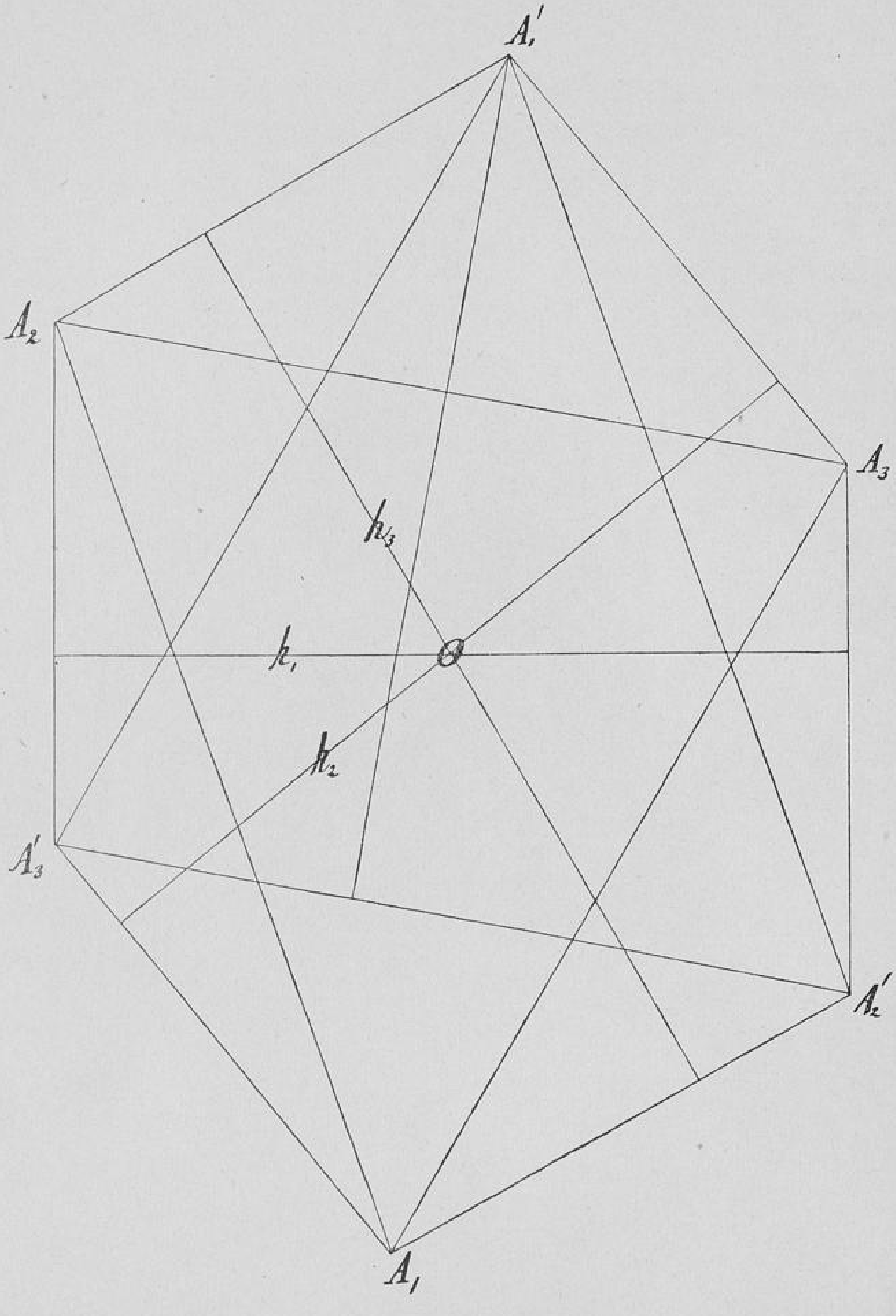


Fig. 1a.



Zusatz zu I.

(Siehe Rückseite der Figur I).

Verbindet man die Punkte $A_1\ A'_2\ A_3\ A'_1\ A_2\ A'_3$, so erhält man ein gleichseitiges parallelseitiges Sechseck, dessen Inhalt, durch die Bestimmungsstücke des ursprünglichen Dreiecks ausgedrückt, $4rs$ beträgt.

Das Sechseck kann aus dem Parallelogramm $A_2\ A_3\ A'_2\ A'_3$ und den beiden gleichschenkligen congruenten Dreiecken $A_1\ A'_2\ A'_3$ und $A'_1\ A_2\ A_3$ berechnet werden. Die gemeinschaftliche Basis des Parallelogramms und der beiden Dreiecke ist $A_2\ A_3 = 4r\cos\frac{\alpha}{2}$. Die Höhe des Parallelogramms ist der untere Höhenabschnitt und die Hälfte des oberen von dem Dreieck $A_1\ A_2\ A_3$

$$\begin{aligned}
\text{also} &= 4r\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 2r\sin\frac{\alpha}{2}\\
&= 2r\left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\\
&= 2r\left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{h}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= 2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2}. \quad \text{Somit der Flächeninhalt}
\end{aligned}$$

$$8r^2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 8r^2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = r^2\left(\sin\beta + \sin\gamma\right)$$

Die Höhe der beiden gleichschenkligen Dreiecke ist die Hälfte des oberen Höhenabschnitts von $A_1\ A_2\ A_3$, also der Flächeninhalt der beiden Dreiecke $4r\cos\frac{\alpha}{2}.\ 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 8r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ $= 4r^2\sin\alpha$. Somit der Flächeninhalt des Sechsecks: $4r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2r(2r\sin\alpha$ $+ 2r\sin\beta + 2r\sin\gamma) = 2r.\ 2s = 4rs$.

Zieht man durch O die 3 auf je zwei Gegenseiten des Sechsecks senkrecht stehenden Geraden $h_1\ h_2$ und h_3, so ist deren Summe dem doppelten Umfang des Urdreiecks gleich.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $A_2\ A_3\ A'_2\ A'_3$ ist nach vorstehendem $= 4r^2$ $(\sin\beta + \sin\gamma)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
2rh_1 &= 4r^2(\sin\beta + \sin\gamma)\\
h_1 &= 2r(\sin\beta + \sin\gamma). \quad \text{Analog}\\
h_2 &= 2r(\sin\alpha + \sin\gamma) \quad \text{und}\\
h_3 &= 2r(\sin\alpha + \sin\beta). \quad \text{Folglich}
\end{aligned}$$

$$h_1 + h_2 + h_2 = 4r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4s.$$