# Erster Teil. Der Kreis als Maximalfläche.

Wenn ich einen Faden an den Enden zusammenknüpfe, sodass er einen Ring bildet, und auf den Tisch lege, so kann ich mit ihm die verschiedensten geschlossenen Figuren herstellen, gradlinige Polygone von verschiedener Seitenzahl und verschiedener Form, auch Figuren, deren Begrenzung teilweise aus krummen Linien besteht oder ganz krummlinig ist. Die von diesem Umfange eingeschlossene Fläche wird in den einzelnen Fällen sehr verschieden gross ausfallen, ich kann sie sogar verschwinden lassen, wenn ich den Faden an zwei Punkten fasse, durch welche er in gleiche Stücke geteilt wird, und die beiden Hälften straffziehe, bis sie aneinander liegen. Dann hat die eingeschlossene Fläche die Masszahl Null. — Bilde ich irgend ein Vieleck, sei es Drei- oder Vier- oder Fünfeck, so wird jedesmal die Fläche eine bestimmte Grösse haben, und durch Verschieben der Ecken und Verändern der Seitenlängen kann man auszuprobieren versuchen, unter welchen Bedingungen bei gegebener Seitenzahl die Fläche möglichst gross wird, es drängt sich die Erkenntnis leicht auf, dass, wenn man bei Dreiecken stehen bleibt, doch wohl das gleichseitige am grössten sein muss, ebenso von allen Vierecken desselben Umfanges das Quadrat, usf., es liegt die Vermutung nahe, dass von allen isoperimetrischen Vielecken mit derselben Seitenzahl das reguläre die grösste Fläche haben wird, und wenn wir nach der absolut grössten möglichen Fläche fragen, so lehrt der Augenschein, dass wir dieser näher kommen, je mehr die Ringfigur einem Kreise ähnelt.

Wenn das nun aber auch bei der Betrachtung der verschiedenen Figuren wohl einzuleuchten scheint, so ist es doch nur eine Vermutung, kein Beweis. Dass in der Tat die Vermutung richtig ist, wollen wir mathematisch zu beweisen suchen; die Mittel, welche die mathematischen Kenntnisse der Prima liefern, reichen zu diesem Zweck vollkommen aus, selbst Differentialrechnung brauchen wir nicht notwendig heranzuziehen, wollen sie aber gelegentlich nicht ausschliessen, wo es sich um geeignete Beispiele handelt.

Unser Thema gliedern wir uns nun aber in Abschnitte oder Stufen. Wir sehen also nicht gleich auf das allerletzte Resultat, dass der Kreis die absolut grösste Fläche gegebenen Umfangs sei, sondern erobern das Gebiet schrittweise. Zuerst fragen wir, welches das grösste Dreieck, dann welches das grösste Viereck sei, dann allgemeiner, welches bei gegebener Seitenzahl n das grösste n-Eck sei, und erst am Schluss stellen wir die Frage, wie sich unsere gewonnenen Erkenntnisse eignen, um bei zwei Vielecken von gleichem Umfange, aber verschiedener Seitenzahl — wo jedes innerhalb seiner Gruppe das grösste sein möge — zu entscheiden, welches das andere an Grösse übertrifft.

Wir beginnen also mit dem Dreieck.

Aber auch hier fragen wir nicht sofort, welches Dreieck vom Umfange u die grösste Fläche habe, sondern wir gliedern wieder und spezialisieren. Denn wenn wir zu der Bedingung, dass ein Dreieck einen bestimmten Umfang haben soll, noch eine zweite Bedingung — ein „zweites Stück" — hinzunehmen, so ist das Dreieck dadurch auch noch nicht bestimmt, weil zu seiner Bestimmung 3 Stücke nötig sind. So könnten wir z. B. noch einen Winkel geben, also fragen: Wann wird ein Dreieck, welches den gegebenen Umfang u und an der Ecke A den gegebenen Winkel $\alpha$ hat, am grössten?

Jetzt wollen wir zuerst beachten, dass, wenn der Umfang gegeben ist, auch noch eine Seite gegeben werden kann, und es gibt doch noch unzählig viele Dreiecke mit diesen beiden Stücken, sie sind verschieden gross; welches ist das grösste? Also: ein Dreieck habe die bestimmte Grundseite $BC = a$ und den Gesamtumfang $a + b + c = u$. Es gibt unzählig viele, ich kann beliebige von ihnen auf folgende bekannte Manier darstellen: in ein Reissbrett steche ich zwei Reissstifte so ein, dass ihr Abstand die gegebene Strecke a ist, und einen geschlossenen Fadenring, dessen Länge u ist, lege ich so an, dass er die Stifte berührt und das Stück zwischen ihnen gespannt ist. Des anderen Stückes Teile spanne ich, indem ich sie mit einem Bleistift straffziehe. Führe ich, immer alle Teile des Fadens gespannt haltend, die Spitze des Bleistifts über das Papier, so zeichnet sie eine krumme Linie, eine Ellipse. Diese ist also der geometrische Ort für die dritte Ecke A eines solchen Dreiecks. Verbinde ich einen ihrer Punkte mit B und C, so habe ich allemal ein Dreieck mit der Grundlinie $BC = a$ und dem Umfange u. Diese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreiecke fallen sehr verschieden gross aus, weil ihre Höhen (und auf diese kommt es ja bei gegebener Grundlinie an) sehr verschieden werden. Grösstes von allen ist das, welches die grösste Höhe hat. Der Augenschein lehrt, dass die grösste Höhe erreicht wird, wenn A in der Mittelsenkrechten von BC liegt, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig wird.

Können wir nun diese aus der Anschauung, durch Probieren, gewonnene Erkenntnis als richtig beweisen? Fordern müssen wir das. Es geht leicht mit Hilfe der Heronischen Formel, welcher wir zu unserem Zweck diese Gestalt geben:

$$\triangle = \sqrt{\frac{(b+c)+a}{2} \cdot \frac{(b+c)-a}{2} \cdot \frac{a+(b-c)}{2} \cdot \frac{a-(b-c)}{2}}$$

$(b+c)$ und $a$ sollen also bei unserer Betrachtung in jedem Falle ein jedes immer denselben Wert behalten, sie sind „konstant", $b$ und $c$ einzeln sind veränderlich, „variabel". Die Grösse von $\triangle$ hängt augenscheinlich von derjenigen des Produkts der 4 Zähler ab, die Nenner als konstante Zahlen können ausser Betracht gelassen werden. Dies Produkt können wir so fassen:

$$[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2];$$

so ist der erste Faktor auch konstant, es kommt also nur noch auf den zweiten an. In ihm, einer Differenz, ist aber der Minuendus ebenfalls konstant, die Differenz wird dann am grössten, wenn ihr Subtrahendus möglichst klein wird. Da er ein Quadrat ist, ist der kleinste Wert, den er erhalten kann, die Null. Also wird das Produkt, und mit ihm der Radikand und die Wurzel, und damit die Fläche am grössten, wenn $b = c$ wird, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig wird; der Satz ist bewiesen:

Von allen Dreiecken über derselben Grundlinie und mit gleichem Umfange ist das gleichschenklige das grösste.

Wie gross ist es? Aus dem Umfange $u$ und der Basis $a$ erhalten wir $b + c = u - a$, also durch Einsetzen in die Heronische Formel für $b = c$

$$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{[(u-a)^2 - a^2] \cdot a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(u^2 - 2ua)\, a^2}.$$

Nach diesem Satze können wir nun bemerkenswerter Weise zu jedem vorgelegten ungleichseitigen Dreieck ein anderes zeichnen, welches dieselbe Grundlinie und denselben Umfang besitzt, aber grösser ist. Es sei also ein Dreick ABC gegeben, $BC = a$ sei die Grundlinie, die beiden anderen Seiten $BA = c$ und $CA = b$ seien ungleich, so konstruieren wir um B und C Kreise, deren Radius das arithmetische Mittel der anderen Seiten, also $\frac{b+c}{2}$, ist, ihr Schnittpunkt D ist dann die dritte Ecke eines zweiten Dreiecks, welches dieselbe Grundlinie und denselben Umfang wie das erste hat, welches aber, weil es gleichschenklig ist, grösser als das erste ist. (Fig. 1.)

Diese einfache Konstruktion müssen wir uns merken, sie ist für das folgende von ausserordentlicher Wichtigkeit und kehrt immer wieder. Ich will sie, Schellbach folgend, als „Transformation" des Dreiecks bezeichnen, im Gegensatz zur „Verwandlung": bei beiden Verfahren ändert man die Gestalt des Dreiecks, aber bei der Verwandlung bleibt die Fläche so gross wie sie war, bei der Transformation bleibt Grundlinie und Umfang erhalten, das Dreieck wird gleichschenklig, mit der Grundlinie als Basis, und deshalb wird sein Inhalt grösser.

Will man nun weiter vorschreiten zum Beweise des Satzes, dass das gleichseitige Dreieck das allergrösste ist, so kann man das Verfahren fortgesetzt anwenden. Also: grösser als ein vorgelegtes ungleichseitiges Dreieck mit den Seiten a, b, c ist ein isoperimetrisches gleichschenkliges mit der Basis a. Ist dies aber nicht zufällig schon gleichseitig, so kann ich es auch noch vergrössern: ich sehe einen seiner Schenkel als Basis an und konstruiere ein neues, welches in Rücksicht auf diesen Schenkel als Basis gleichschenklig ist. Mit diesem verfahre ich ebenso und kann so fortfahren; so werden vermutlich, je öfter ich es wiederhole, in den folgenden gleichschenkligen Dreiecken Basis und Schenkel sich immer weniger unterscheiden, und das Ideal sozusagen, welchem alle diese isoperimetrischen Dreiecke zustreben — erreicht würde dies Ideal vermutlich im allgemeinen erst nach unzähligen Transformationen werden — wird das gleichseitige Dreieck sein. Da hierbei stets das folgende Dreieck grösser wird, so würde das gleichseitige zum Schluss des unendlichen Prozesses als grösstes der ganzen Reihe erscheinen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir suchen den Vorgang durch Formeln zu beschreiben. Es habe ein gleichschenkliges Dreieck (von einem solchen auszugehen ist keine unzulässige Einschränkung) die Basis b, die beiden Schenkel s; so zeichne ich, weil dieses noch in Rücksicht auf s als Basis ungleichschenklig ist, ein neues, welches gleichschenklig wird, Basis s, und die Schenkel des neuen sind augenscheinlich $\frac{b+s}{2}$. In diesem betrachte ich wiederum einen dieser Schenkel als Basis und mache es gleichschenklig, der neue Schenkel wird das arithmetische Mittel aus s und $\frac{b+s}{2}$, also $\frac{b+3s}{4}$. Mit diesem verfahre ich ebenso. Dann wird sich folgende Reihe von Basen und Schenkeln ergeben:

| Nr. | Basis | Schenkel |
|---|---|---|
| 0 | $b$ | $s$ |
| 1 | $s$ | $\frac{b+s}{2}$ |
| 2 | $\frac{b+s}{2}$ | $\frac{b+3s}{4}$ |
| 3 | $\frac{b+3s}{4}$ | $\frac{3b+5s}{8}$ |
| 4 | $\frac{3b+5s}{8}$ | $\frac{5b+11s}{16}$ |
| 5 | $\frac{5b+11s}{16}$ | $\frac{11b+21s}{32}$ |
| 6 | $\frac{11b+21s}{32}$ | $\frac{21b+43s}{64}$ |
| 7 | $\frac{21b+43s}{64}$ | $\frac{43b+85s}{128}$ |
| 8 | $\frac{43b+85s}{128}$ | $\frac{85b+171s}{256}$ |

Der Schenkel tritt bei der nächsten Nummer als Basis auf, der neue Schenkel ist das arithmetische Mittel von Basis und Schenkel der vorhergehenden Nummer.

Die allgemeine Formel lautet

$$b_n = \frac{[2^{n-1} + (-1)^n]\, b + [2^n - (-1)^n] s}{3 \cdot 2^{n-1}},$$

$$s_n = \frac{[2^n - (-1)^n]\, b + [2^{n+1} + (-1)^n] s}{3 \cdot 2^n},$$

was sich durch Schluss von n auf $(n+1)$ erweisen lässt. Für $n = \infty$ erhalten wir

$$b_\infty = \lim_{n=\infty} \left\{ \left[\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}\right] b + \left[\frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}\right] s \right\} = \frac{1}{3} b + \frac{2}{3} s$$

$$s_\infty = \lim_{n=\infty} \left\{ \left[\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}\right] b + \left[\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}\right] s \right\} = \frac{1}{3} b + \frac{2}{3} s$$

also $b_\infty = s_\infty$, d. h. es erscheint wirklich als Schluss der Reihe nach unendlich vielen Transformationen das isoperimetrische gleichseitige Dreieck, dessen Umfang $b_\infty + 2s_\infty = b + 2s$ dem aller übrigen gleich ist. Dies erscheint stets, ganz gleich, welches Seitenverhältnis das eine hatte, und da fortgesetzt, bei jeder Transformation, der Inhalt wuchs, ist es das grösste von allen. Von allen Dreiecken desselben Umfangs ist das gleichseitige das grösste.

Die grösste Fläche, welche ein Dreieck, dessen Umfang u ist, umschliessen kann, ist

$$F_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} u\right)^2 \sqrt{3} = \frac{1}{36} u^2 \sqrt{3}.$$

Der hier durchgeführte unendliche Prozess ist natürlich nicht so befriedigend wie die andere Methode, die man anwenden kann, falls man über sie verfügt, ich meine die Behandlung nach der Theorie

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Maxima und Minima am besten mit Hilfe des Differentialquotienten. Ich füge diese an, solche Gegenüberstellungen sind recht geeignet, zu zeigen, welche enormen Vorteile sie bietet. Der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Umfang u, dessen Basis a ist, wurde eben (S. 7) ausgedrückt, wir können der Formel diese Gestalt geben:

$$F_3 = \frac{1}{4} \sqrt{u^2 a^2 - 2 u a^3}.$$

Fragen wir nun: wie muss, bei gegebenem u, a gewählt werden, damit die Wurzel ein Maximum werde?, so betrachten wir den Radikanden als eine Funktion von a und differenzieren diese Funktion nach a:

$$y = u^2a^2 - 2ua^3, \quad y' = 2u^2a - 6ua^2, \quad y'' = 2u^2 - 12ua = 2u\,(u - 6a).$$

Wenn $y' = 0$ wird, wird $a = \frac{1}{3}u$, das Dreieck wird gleichseitig, und da $y''$ für dieses a negativ wird, ist es wirklich ein Maximum.

Das Dreieck ist hiermit erledigt, wir gehen zum Viereck über. Da können wir zunächst das bereits erworbene benutzen. Hat ein Viereck*) unter seinen Seiten a, b, c, d zwei ungleiche, die auf einander folgen, etwa AB = a und BC = b: so ziehe ich die Diagonale AC, sie zerlegt das Viereck in die Dreiecke ACB und ACD, von denen ich das letztere nicht weiter erwähne, es möge so gross sein, als es nur sein kann; so ist dennoch das ganze Viereck nicht das grösste, solange das Dreieck ACB nicht möglichst gross ist. Dies steht auf der Grundlinie AC und wird dann am grössten, wenn es gleichschenklig ist, wenn a = b ist. Solange das nicht der Fall, könnte ich durch die oben angegebene Transformation an seine Stelle ein grösseres AEC setzen, und das Viereck AECD würde grösser als ABCD sein. Das gilt für je zwei aneinanderstossende Seiten, sie müssen gleich sein. Wir könnten nun hier ein ähnliches Verfahren wie beim Dreieck anwenden, also erstens das Dreieck ABC abschneiden und durch ein anderes AEC über derselben Grundlinie ersetzen, welches denselben Umfang hat, aber, weil es gleichschenklig gemacht ist, grösser geworden ist, alsdann in dem, dadurch vergrösserten, aber im Umfange nicht veränderten, Viereck AECD die Diagonale ED ziehen und ECD in ein grösseres Dreieck EFD transformieren und damit fortfahren; so würde das Endresultat jedenfalls wieder ein Viereck sein, das lauter gleiche Seiten hat Die Verfolgung dieses unendlichen Prozesses wollen wir uns aber ersparen. Jedenfalls ahnen wir, dass der Satz

Das grösste von allen Vierecken mit gegebenem Umfange ist gleichseitig

wohl gelten wird, und wir sehen die eine Eigenschaft des Quadrats hierin auftauchen.

Doch müssen wir noch etwas anderes berücksichtigen Wir erinnern uns, dass schon beim Dreieck der Umfang allein nicht zur Bestimmung genügte, es konnte zuerst auch noch eine Seite als gegeben hinzugenommen werden, die Fläche ist auch dann noch nicht bestimmt, sodass die Frage nach der grössten Dreiecksfläche offenblieb. Beim Viereck ist diese Möglichkeit sozusagen in noch höherem Masse vorhanden. Denn während das Dreieck durch seine 3 Seiten eindeutig bestimmt ist, ist das Viereck durch seine 4 Seiten noch nicht bestimmt, es gibt unzählige Vierecke mit denselben Seiten a, b, c, d, weil zur Bestimmung des Vierecks 5 Stücke erforderlich sind. Man kann sich leicht, etwa aus Holzstäbchen oder Drahtstücken, ein bewegliches Viereck herstellen, so beschaffen, dass um seine Ecken sich die in ihnen zusammenstossenden Seiten drehen lassen. Legt man dann etwa AB = a hin, so kann noch die Ecke C um B einen Kreis mit dem Radius b, die Ecke D um A einen Kreis mit dem Radius d beschreiben, und zwischen die Peripherien dieser Kreise passt die Seite c in unendlich vielen Lagen hinein. Deshalb müssen wir wohl unsere erste Frage über das Viereck so formulieren:

Wie ist von allen, dieselben Seiten a, b, c, d besitzenden, Vierecken dasjenige beschaffen, welches die grösste Fläche hat?

Um diese Frage zu untersuchen, drücken wir zunächst den Inhalt des Vierecks auf geeignete Weise aus. Durch die Diagonale AC zerfällt es (Fig. 2) in die Dreiecke ABC, mit dem Winkel $\beta$ bei B, und ADC, mit dem Winhel $\delta$ bei D, und seine Fläche ist

$$F = \frac{1}{2}\, ab \sin \beta + \frac{1}{2}\, cd \sin \delta.$$

*) Im folgenden ist stets das Viereck mit ABCD bezeichnet, die Ecken der Reihe nach mit A, B, C, D, die Winkel mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, die Seiten sind AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, die Diagonalen AC = e, BD = f. (Fig. 2.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sobald noch einer dieser Winkel bestimmt ist, haben wir das fehlende fünfte Stück. Nun sind aber die Winkel nicht von einander und von den Seiten unabhängig, sondern mit ihnen durch eine Beziehung verknüpft. Wenden wir auf die beiden Dreiecke, die auf der Diagonale $AC = e$ als Grundlinie stehen, den allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz (Cosinussatz) an, so erhalten wir

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta,$$

es ist also stets

$$2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

d. h. wenn die Seiten gegeben sind, ist diese Differenz konstant, selbst wenn der Winkel $\beta$ sich ändert, zu jedem $\beta$ gehört dann ein bestimmtes $\delta$. Die Bedingung nun, welche wir erfüllen wollen, nämlich dass die Fläche ein Maximum sein soll, will ich, den oben angeführten Ausdruck benutzend, symbolisch so ausdrücken:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin \beta + \frac{1}{2} cd \sin \delta = \text{Max.}$$

und ebenso die Tatsache, dass die besagte Differenz konstant ist, so:

$$2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta = \text{Const.}$$

Da ein konstanter Faktor keinen Einfluss hat, kann ich auch so schreiben:

$$ab \cos \beta - cd \cos \delta = \text{Const.}$$
$$ab \sin \beta + cd \sin \delta = \text{Max.}$$

Was aber von dieser Differenz und Summe selbst gilt — dass sie eine Constante oder ein Maximum sein sollen — gilt auch von ihren Quadraten:

$$(ab \cos \beta - cd \cos \delta)^2 = \text{Const.}$$
$$(ab \sin \beta + cd \sin \delta)^2 = \text{Max.},$$

und auch die Summe beider Ausdrücke muss ein Maximum sein. Wenn ich aber diese Summe bilde, nachdem ich ausquadriert habe, erhalte ich, wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$,

$$a^2b^2 - 2abcd (\cos \beta \cos \delta - \sin \beta \sin \delta) + c^2d^2 = \text{Max.}$$

Das erste und dritte Glied sind konstant und auch das mittlere hat einen konstanten Faktor, für die Klammer aber kann ich schreiben $\cos (\beta + \delta)$. Demnach muss

$$-\cos (\beta + \delta) = \text{Max}$$

sein, und dies erreicht sein Maximum, $(+1)$ nämlich, wenn der Cosinus zu $(-1)$ wird, also für

$$\beta + \delta = \pi.$$

Von allen Vierecken mit 4 gegebenen Seiten ist dasjenige das grösste, in welchem zwei gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind, das Sehnenviereck.

Hier tritt zum erstenmale der Kreis bei unserer Untersuchung auf, um uns nicht wieder zu verlassen.

Die nächste Frage würde ja nun sein: Können wir denn das Sehnenviereck, wenn seine Seiten gegeben sind, bestimmen? Können wir es berechnen? Das ist eine beliebte trigonometrische Übung. Können wir es aus den Seiten konstruieren? Diese schöne Aufgabe ist weniger geläufig. Beides soll im zweiten Teile ausgeführt werden. Hier wollen wir in unserer Untersuchung fortfahren.

Zunächst spannen wir den Rahmen etwas weiter und legen uns die Frage vor, was sich wohl ergeben wird, wenn wir nicht alle 4 Seiten des Vierecks als gegeben annehmen, sondern nur eine, und dazu den Umfang. Wir wenden unser Transformationsverfahren an: Ist die Grundseite a gegeben und dazu die Summe der anderen 3 Seiten, also dass $a + (b + c + d) = u$, so gibt es mehrmals unzählige Vielecke, die diesen beiden Bedingungen genügen. Die Frage, wie das grösste von ihnen beschaffen sein müsse, beurteilen wir nach den beiden Kriterien, die wir gewonnen haben, und bringen diese nach einander zur Geltung. Das grösste muss zunächst seine Ecken auf einem Kreise haben, der durch die Endpunkte der Grundseite geht. Aber auch ein Sehnenviereck (von dem ja die übrigen 3 Seiten nun nicht einzeln gegeben sind, nur ihre Summe hat eine bestimmte Länge) ist noch nicht das grösste, solange die anderen 3 Seiten nicht einander gleich sind, denn sonst könnten wir durch eine Diagonale ein ungleichseitiges Dreieck abtrennen und dadurch, dass wir dieses, unter Beibehaltung des Umfanges, in ein gleichschenkliges transformieren, ein Viereck herstellen, welches grösser als das Sehnenviereck wird. Demnach:

Das grösste Viereck mit der Grundseite a und dem Umfange u ist dasjenige Sehnenviereck, in welchem die anderen 3 Seiten einander gleich sind, alle $b = \frac{u - a}{3}$.

Seine Ecken müssen also auf einem Kreise liegen und es muss $BC = CD = DA = \frac{u - a}{3}$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn aber die Kreissehnen BC und AD einander gleich sind, so sind die Verbindungslinien ihrer Endpunkte, falls sie sich kreuzen, gleich; falls sie dies nicht tun (und es soll ja ein Viereck entstehen!) parallel. Also entsteht als grösstes ein Trapez, und zwar, da die Schenkel gleich sind, ein Antiparallelogramm. (Fig. 3.)

Von allen Vierecken, welche die Grundseite $AB = a$ und den Umfang $u$ gemein haben, ist das leicht konstruierbare Antiparallelogramm, dessen andere Seiten alle $\frac{u-a}{3}$ sind, das grösste. Seine Ecken liegen auf einem Kreise, die Winkel bei A und B sind einander gleich, ebenso die Winkel bei C und D.

Der Inhalt dieses Trapezes ist leicht zu bestimmen. Nenne ich den Schenkel b, so ist

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h, \quad h^2 = b^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{3b^2 + 2ab - a^2}{4},$$

$$F = \frac{1}{4}(a+b)\sqrt{3b^2 + 2ab - a^2}.$$

Setze ich $b = \frac{u-a}{3}$ ein, so erhalte ich, nachdem alles unter die Wurzel gebracht und geordnet ist,

$$F = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{u^4 + 4au^3 - 16a^3u - 16a^4}{3}}.$$

Hier hatten wir ausser dem Umfange u noch eine Seite a als gegeben angenommen. Wie gross muss diese Grundlinie nun gewählt werden, damit das absolute Maximum, welches bei dem gegebenen Umfange möglich ist, erreicht wird? So, dass jedenfalls ein Antiparallelogramm entsteht, in welchem die anderen 3 Seiten gleich sind, und dessen Ecken auf einem Kreise liegen. Jede Seite muss ich dabei als Grundlinie ansehen können, und diese Forderung muss jedesmal erfüllt sein. Das ist aber nur der Fall, wenn es ein Quadrat wird. — Aus dem Ausdruck für die Fläche können wir das wieder nach der Theorie der Maxima und Minima einfach erschliessen. Wir betrachten den Zähler des Radikanden als eine Funktion von a und differenzieren sie nach a:

$$y = u^4 + 4au^3 - 16a^3u - 16a^4$$
$$y' = + 4u^3 - 48a^2u - 64a^3$$
$$y'' = - 96au - 192a^2 = - 96a(u + 2a)$$

$y' = 0$ ergibt eine kubische Gleichung, welche, wenn man $u:a = x$ substituiert, so lautet:

$$x^3 - 12x - 16 = 0.$$

Nach der Cardanischen Formel hat sie die erste Wurzel

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{8^2 - 4^3}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{8^2 - 4^3}} = 2 + 2,$$

also $u:a = 4$, $a = \frac{1}{4}u$. $y''$ wird für diesen Wert negativ, also ist es ein Maximum.

Von allen Vierecken desselben Umfanges ist das Quadrat das grösste. Die grösste Fläche, welche ein Viereck mit dem Umfange u umspannen kann, ist

$$F = \left(\frac{1}{4}u\right)^2 = \frac{1}{16}u^2.$$

Diese Fläche ist grösser als die des grössten isoperimetrischen Dreiecks (S. 8), $\frac{1}{16}u^2 > \frac{1}{36}u^2\sqrt{3}$, was sich leicht erweisen lässt.

Hiermit haben wir die Grundlage für alles weitere. Und zwar ist nicht das Erscheinen des Quadrates sondern das des Kreises das wichtigste Ergebnis, und der Satz, dass von allen Vierecken mit gegebener Grundlinie und gegebenem Umfange das Antiparallelogramm (Sehnenviereck), dessen andere 3 Seiten einander gleich sind, und welches an den Grundseiten gleiche Winkel hat, das Maximum vorstellt. Diesen Satz werden wir immer wieder benutzen.

Wir fragen nunmehr nicht gesondert nach dem grössten Fünfeck, dem grössten Sechseck usw., sondern gehen sofort auf Vielecke von allgemeiner, bestimmter Seitenzahl n ein. Hier ist nun nicht, wie

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

es beim Viereck war, zuerst der Fall zu erledigen, dass alle Seiten des n-Ecks einzeln als bestimmte Strecken gegeben sind, oder, dass eine Seite und von den übrigen ihre Summe gegeben ist. Wir können gleich den Gesamtumfang als das allein gegebene ansehen. Von den genannten speziellen Fällen wird der zweite uns im zweiten Teile noch besonders beschäftigen, den ersten können wir kurz abtun, um dann sofort an die allgemeine Frage heranzugehen.

Welches Vieleck mit den gegebenen n Seiten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ist das grösste? Dasjenige, dessen Ecken auf einem Kreise liegen. Denn sind P, Q, R, S vier aufeinander folgende Ecken, so schneide ich durch die Diagonale PS ein Viereck ab. Der übrige Teil der Fläche möge bereits so gross sein, als er nur irgend werden kann und möge seine Gestalt behalten, ebenso wie PS seine Länge nicht ändere; so wird doch das ganze n-Eck noch nicht das grösste, so lange das Viereck PQRS nicht möglichst gross ist. Dieses aber — von ihm sind alle 4 Seiten gegeben — erreicht sein Maximum dann, wenn es ein Sehnenviereck wird. Also muss durch je vier aufeinander folgende Ecken des grössten n-Ecks ein Kreis gehen. Da ein solcher aber bereits durch 3 Punkte bestimmt ist, müssen alle Ecken auf einem Kreise liegen.

Von allen n-Ecken, die die gegebenen Seiten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ haben, ist dasjenige das grösste, dessen Ecken auf einem Kreise liegen.

So einfach die Beantwortung dieser Frage ist, so schwer ist es, bei gegebenem a und grösserem u den Umkreisradius zu bestimmen.

Nun gehe ich einen wichtigen Schritt weiter, ich lasse die Seiten frei und nehme nur den Umfang als gegeben an.

Also ein Vieleck soll n (eine bestimmte Anzahl) Seiten und einen gegebenen Umfang u haben und möglichst gross sein. — Zerbreche ich den Umfang in n beliebige Stücke, so muss, damit die Fläche ein Maximum werde, ein Kreis durch alle Ecken des von diesem Umfang eingeschlossenen Vielecks gehen. Aber wenn die Seiten beliebig gewählt waren, kann, ohne Veränderung des Umfanges, die Fläche allemal noch vergrössert werden, solange noch ungleiche Seiten vorhanden sind: liegen solche an den Ecken P, Q, R, S, so wird das Viereck PQRS, selbst wenn es schon Sehnenviereck war, sich noch vergrössern lassen: um das Maximum zu erreichen, muss an seine Stelle ein Antiparallelogramm treten, in welchem die Seiten Px = QR = RS gleich sind und die Winkel Q = R ebenfalls gleich sind. Das gilt für je 4 benachbarte Ecken, also müssen alle Seiten einander gleich sein und alle Winkel einander gleich sein:

Von allen Vielecken mit derselben Seitenzahl n und demselben Umfang u ist das reguläre das grösste.

Den Inhalt desselben, ausgedrückt durch u und n, finden wir so: Das Bestimmungsdreieck hat die Basis $s = \frac{1}{n}u$, den Gipfelwinkel $\frac{2}{n}\pi$, also seine Basishöhe $\varrho$ bildet mit dem Umkreisradius den Winkel $\frac{1}{n}\pi$, es ist daher $\operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi = \frac{1}{2}s : \varrho$, $\varrho_n = \frac{1}{2}s : \operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi$, $\triangle_n = \frac{1}{2}s \cdot \varrho = \frac{1}{4}s^2 : \operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi$, und die ganze Fläche $f_n = \frac{n}{4}s^2 : \operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi$. Führe ich den Umfang u ein, so kommt

$$f_n = \frac{u^2}{4n\ \operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi}.$$

Diesen Ausdruck können wir noch so schreiben: $\frac{u^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{n\ \operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi}$, oder, da der erste Faktor augenscheinlich der Inhalt $K_u$ des Kreises mit dem Umfange u ist,

$$f_n = K_u \cdot \frac{\left(\frac{1}{n}\pi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\pi\right)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dies ist die grösste Fläche, die ein Vieleck von n Seiten mit dem Umfange u umschliessen kann.

Bis jetzt wissen wir also: hat eine Reihe von Polygonen denselben Umfang, so ist von allen Dreiecken, die vorkommen, das gleichseitige, von allen Vierecken das Quadrat, von allen n-Ecken das reguläre das grösste; so bleibt nur noch eine Frage: von allen isoperimetrischen Fünfecken ist das reguläre am grössten, von allen Sechsecken desgl. das reguläre, usf.; ist denn nun aber bei gleichem Umfange das reguläre Sechseck grösser als das reguläre Fünfeck? (Von Viereck und Dreieck hatten wir bereits S. 11 gesprochen.) Ist das Zehn-, Neun-, Achteck immer wieder grösser? Wächst also bei konstantem Umfange mit wachsender Seitenzahl die Fläche des regulären Vielecks? Wir könnten die Beantwortung dieser Frage an die letzte Formel anzuknüpfen versuchen, sie enthält als konstanten Faktor die Fläche des isoperimetrischen Kreises, so müsste gezeigt werden, dass der Quotient $\frac{\left(\frac{1}{n}\pi\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\pi\right)}$ mit wachsendem n unausgesetzt zunimmt. Dies unabhängig geometrisch zu beweisen ist nicht unmöglich, aber umständlich; ich ziehe es vor, den Beweis auf den bisherigen Grundlagen aufzubauen und dann umgekehrt auf den Wert dieses Quotienten zu schliessen; mit Hilfe unseres Transformationsverfahrens soll das leicht gelingen, und es ist mir lieb, auf diese Weise den wichtigen Satz, dass der Ausdruck $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ mit abnehmenden x immer grösser und für verschwindendes x zu 1 wird, daraus entnehmen zu können, da derselbe ja bei der Entwicklung der trigonometrischen Reihen benutzt, aber vielleicht nicht immer einwandfrei bewiesen wird.

Wir führen folgende Betrachtung durch: A, B, C seien (Fig. 4) benachbarte Ecken eines regulären Vielecks von n Seiten, also des grössten n-Ecks, das mit dem bestimmten Umfange eingeschlossen werden kann; so macht unser schon oft geübtes Transformationsverfahren es uns leicht, eine Fläche aufzufinden, die zwar nicht mehr regulär, auch nicht mehr ein n-Eck ist, aber das vorliegende reguläre n-Eck jedenfalls an Grösse übertrifft Ich nehme in der Seite AB einen Punkt X an und verbinde ihn mit C: so schneidet die Strecke XC von der Fläche ein Dreieck XBC ab, welches ungleiche Seiten hat und deshalb noch der Vergrösserung fähig ist. Ich konstruiere über XC ein gleichschenkliges Dreieck XYC mit den Schenkeln $YX = YC = \frac{1}{2}(XB + BC)$. Dieses Dreieck ist grösser als XBC, also die Fläche mit den Ecken A, X, Y, C . . . grösser als diejenige, von der wir ausgingen. Dieses neue Polygon hat aber eine Ecke mehr als das erste (A, X, Y, C statt A, B, C), es ist ein $(n+1)$-Eck, der Umfang jedoch ist nicht geändert. Natürlich lässt sich das Verfahren auch auf andere als reguläre Vielecke anwenden:

> Zu jedem n-Eck von gegebenem Umfang, selbst wenn es das grösste, das reguläre n-Eck ist, lässt sich ein $(n+1)$-Eck auf mancherlei Weise konstruieren, welches denselben Umfang, aber grössere Fläche besitzt.
>
> Kein n-Eck von endlicher Seitenzahl und mit geraden Seiten von messbarer Länge kann das absolut grösste Vieleck des gegebenen Umfanges sein.

G r ö s s e r aber als das durch diese Transformation gewonnene $(n+1)$-Eck ist nun wieder das r e g u l ä r e $(n+1)$-E c k d e s s e l b e n U m f a n g s; in Fig. 4 ist das Siebeneck AXYCDEF grösser als das reguläre Sechseck ABCDEF, aber noch grösser als das irreguläre Siebeneck würde das reguläre Siebeneck sein.

> Wenn mehrere reguläre Vielecke denselben Umfang haben, so hat dasjenige grössere Fläche, welches die grössere Anzahl von Ecken hat.

Das allergrösste n-Eck muss die allergrösste Seitenzahl haben, es muss „unendlich viele Ecken besitzen“.

> Grösser als alle Vielecke von einem bestimmten Umfang ist der Kreis, der diesen Umfang besitzt.
>
> Die grösste Fläche, welche von einem Umfang u eingeschlossen werden kann, ist
>
> $$F_{\text{Max.}} = \frac{u^2}{4\pi}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Ausdruck $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ist grösser als 1, nimmt mit abnehmenden x ab, und es ist

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Dieser Übergang vom n-Eck zum (n + 1)-Eck, ebenso genial wie einfach, ist des grossen Geometers, der ihn uns gewiesen hat, durchaus würdig.

---

Bei Baltzer lautet Satz und Beweis so:

„Die Flächen der isoperimetrischen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreis bilden eine steigende Reihe; die Perimeter der gleichen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreis bilden eine fallende Reihe *)

Beweis: Das reguläre n-Eck kann als irreguläres (n + 1)-Eck betrachtet werden, in welchem ein Winkel 180° beträgt. Das irreguläre (n + 1)-Eck ist also kleiner als das isoperimetrische reguläre (n + 1)-Eck usw.

*) Pappus $V_{11}$. Steiner p. 112. Der Letztere hat den einfachen Beweis gefunden."

---

Und in der Steinerschen Arbeit selbst lautet diese Stelle:

26. Quand on cherchera donc quel polygone a l'aire maxima pour un périmètre constant, ou le périmètre minimum pour une aire constante, le nombre de côtés étant variable, on n'aura qu' à s'occuper des polygones réguliers, et l'on trouvera la loi suivante:

*Les aires des polygones réguliers isopérimètres forment une série croissante, qui commence par le triangle et se termine par le cercle; et les périmetrès des polygones équivalents forment une série décroissante, à partir du triangle jusqu' au cercle.* — Démonstration. Deux polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés différents*) étant donnés, par exemple un pentagone ABCDE et un quadrilatére abcd, on peut considérer ce dernier comme un pentagone dont l'un des côtés serait nul, ou bien, en prenant arbitrairement un point e sur un des côtés de ce quadrilatère, par exemple sur ad, le considérer comme un pentagone abcde, dont l'un des angles e serait égal à deux angles droits; le quadrilatère régulier peut donc être regardé comme un pentagone irrégulier: donc son aire est plus petite que cette du pentagone régulier ABCDE.

*) Soll wohl d i f f é r e n t heissen, „von verschiedener Seitenzahl". D. Verf.

# Zweiter Teil. Beispiele, Aufgaben, Spezialisierungen, Erweiterungen.

In diesem Teile will ich noch einige Ergänzungen geben, die das Bild vervollständigen sollen, einige wichtige Aufgaben besprechen, in Spezialisierungen, in einzelne Fälle näher eindringen, aber auch Bedingungen, an welchen bisher festgehalten wurde, aufgeben, also allgemeinere Probleme erörtern. Der Gang dieser Untersuchungen wird im wesentlichen dem des ersten Teiles parallel laufen.

I. Da hatte ich z. B. (S. 6) die Aufgabe erwähnt, das grösste Dreieck zu bestimmen, welches einen gegebenen Umfang ($u = 2s$) und an der Ecke A den gegebenen Winkel $\alpha$ besitzt. Das lässt sich geometrisch einfach erledigen. Ich denke an die Inhaltsformel, in welcher die Hälfte des Umfangs vorkommt, $\triangle = \varrho \cdot s$. Soll also bei gegebenem Umfange die Fläche möglichst gross werden, so muss der Inkreisradius $\varrho$ möglichst gross werden. Nun ist aber $\varrho = (s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, $\alpha$ ist auch gegeben, — damit $\varrho$ möglichst gross werde, muss a möglichst klein sein. Wir knüpfen deshalb an die bekannte Konstruktionsaufgabe an: „$\triangle$ aus $u = 2s$, a, $\alpha$", also wir konstruieren ein Dreieck aus dem Umfang, einem Winkel und seiner Gegenseite. Die Konstruktion lautet: Ich zeichne den Winkel $A = \alpha$ und halbiere ihn. Auf dem einen Schenkel trage ich Strecke $AH = s$, auf dem anderen $AJ = s$ ab. Dann konstruiere ich den Kreis $M_1$, dessen Mittelpunkt auf der Halbierungslinie liegt, und der die Schenkel in H und J berührt (den ersten Ankreis), trage auf den Schenkeln nach dem Scheitel hin die Strecken $HE = JF = a$ ab und konstruiere den Kreis M, dessen Mittelpunkt auf der Halbierungslinie liegt, und der die Schenkel in E und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

F berührt (den Inkreis), und lege an die Kreise eine gemeinschaftliche innere Tangente. Sie schneide AJ in B, AH in C; so ist ABC das verlangte Dreieck

Damit nun das Dreieck möglichst gross werde, muss auch der Inkreisradius $\varrho$ sein Maximum erreichen. Da aber s, $\alpha$, $\varrho_1$ ein Datum ist, ist durch u und $\alpha$ der Ankreisradius $\varrho_1$ bestimmt, und hiermit für $\varrho$ eine Grenze gegeben. Der grösste Wert von $\varrho$ tritt ein, wenn beide Kreise sich berühren. Der Berührungspunkt muss auf der Winkelhalbierenden liegen, die Seite a wird durch ihn halbiert, das grösste Dreieck wird gleichschenklig. Es ist leicht zu konstruieren.

II. Der wichtigste Satz von den isoperimetrischen Vierecken erfordert eine Vervollständigung. Er lautete: Von allen Vierecken, die dieselben Seiten a, b, c, d haben, ist das Sehnenviereck das grösste. Wir wollen es aus seinen Seiten berechnen. Wir erinnern uns der Formeln, die wir aufstellten (S. 10):

$$\text{Fläche } F = \frac{1}{2}ab \sin\beta + \frac{1}{2}cd \sin\delta$$

und zweitens die konstante Beziehung (Fig. 5)

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

Im Sehnenviereck sind $\beta$ und $\delta$ Supplemente, die Formel für die Fläche lautet jetzt

$$F = \frac{ab + cd}{2}\sin\beta,$$

die konstante Beziehung $a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$.

Aus ihr folgt

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}$$

Wir gehen zu den Funktionen des halben Winkels über durch

$$1 + \cos\beta = \frac{2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd},$$

$$1 - \cos\beta = \frac{2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ab + 2cd}$$

$$\text{oder } 2\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2ab + 2cd}$$

$$2\left(\sin\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2ab + 2cd}$$

Ich zerlege die Differenz der Quadrate und erhalte durch Division

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{(c + d + a - b)(c + d - a + b)}{(a + b + c - d)(a + b - c + d)}$$

Rechterhand dividiere ich jeden Faktor durch 2 und setze $\frac{a + b + c + d}{2} = s$, so erhalte ich, nachdem ich noch radiziert habe,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{(s - c)(s - d)}},$$

einen Ausdruck, der einem aus der Trigonometrie bereits bekannten sehr ähnlich ist, dieser ist als spezieller Fall enthalten. Die Formel ist nämlich so gebaut: im Zähler treten als Subtrahenden die Seiten a und b auf, welche den Winkel einschliessen, im Nenner die anderen. Lasse ich nun d zu Null werden, so wird $s = s - d = \frac{a + b + c}{2}$, es erscheint das Dreieck, und in ihm liegt dem Winkel $\beta$ die Seite e gegenüber, die bekannte Dreiecksformel ergibt sich richtig. — Für die übrigen Winkel des Sehnenvierecks ergibt sich der entsprechende Ausdruck nach der angeführten Regel, z. B.

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{(s - c)(s - d)}{(s - a)(s - b)}},$$

dieser ist der Reziprokwert des ersten, und das muss so sein, da es sich um Komplementwinkel handelt.

Mit Einsetzung der Grösse s lauten die Ausgangsgleichungen

$$2\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{2(s - c)(s - d)}{ab + cd}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\left(\sin\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{2(s-a)(s-b)}{ab+cd}.$$

Multipliziere ich sie, so ergibt sich

$$\left(2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2},$$

die linke Seite ist $\sin\beta^2$, und wenn ich den Nenner und die 4 nach links bringe, kommt

$$\left[\frac{ab+cd}{2}\sin\beta\right]^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

der Ausdruck in der Klammer ist aber die Fläche F, also:

Die grösste Fläche, welche ein Viereck mit den Seiten a, b, c, d einschliessen kann, — der Inhalt des Sehnenvierecks — ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},\quad s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

welche Formel der Heronischen Dreiecksformel analog gebaut ist; für $d = 0$ geht diese hervor.

Um an den Umkreisradius heranzukommen, drücken wir erst die Diagonale e aus, dazu brauchen wir $\cos\beta$ (S. 15)

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$$
$$= \frac{(a^2+b^2)\,cd + (c^2+d\ )\,ab}{ab+cd}.$$

Der Zähler lässt sich zum Zweck der Zerfällung so ordnen:

$$a^2cd + abc^2 + b^2cd + abd^2 = ac(ad+bc) + bd(ad+bc) = (ac+bd)(ad+bc),$$

$$\text{also } e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}.$$

Im Nenner steht die Summe der Produkte der „von e gespannten“ Seiten, a und b, c und d, im Zähler die Summen der Produkte der Seiten, die von den Endpunkten von e ausgehen, und der sich gegenüberliegenden Vierecksseiten. Für die Diagonale f lautet demnach die Formel

$$f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

Multiplikation ergibt $ef = ac + bd$, den Ptolemäischen Satz. — Der Radius r ist zugleich Umkreisradius des Dreiecks ABC, in welchem dem Winkel $\beta$ die Seite e gegenüberliegt, also $e = 2r\sin\beta$, und nach der obenstehenden Gleichung

$$\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} = 2r\cdot\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{\left(\frac{ab+cd}{2}\right)}$$

$$r = \frac{\sqrt{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4F}$$

Für $d = 0$ geht auch hieraus eine bekannte Dreiecksformel hervor.

Die Berechnung des Sehnenvierecks aus seinen Seiten ist damit beendet. Nun fragt es sich, ob wir es auch geometrisch aus den Seiten konstruieren können. Ich gebe dazu eine Analysis, welche sich der bisherigen Benutzung der Figur anschliesst.

Aufgabe. Das Sehnenviereck, welches die gegebenen Strecken a, b, c, d als Seiten hat, zu konstruieren. (Fig. 6.)

Analysis. Durch die Diagonale $AC = e$ zerfällt das Viereck, welches wir als das gesuchte ansehen, in zwei Dreiecke, ABC und ACD, in welchen der Seite e folgende Winkel gegenüberliegen: im ersten $\beta$, im zweiten das Supplement zu $\beta$, $\delta = \pi - \beta$. Daher wird es leicht sein, Parallelen in die Figur zu bekommen. Drehe ich das Dreieck ACD um die Ecke A, bis D in die Gerade AB fällt, und nenne ich die Ecken in ihrer neuen Lage D′ und C′, so ist $BA = a$, $AD' = d$, $D'C' = c$ und $D'C'$ zu BC

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

parallel. Schneidet die Gerade C′C die Gerade D′B in E, so teilt E die Strecke D′B im Verhältnis D′C′ : BC = c : b in äussere Abschnitte und ist hierdurch bestimmt. Das Dreieck ACC′ ist gleichschenklig, AC′ = AC = e. Es wird sich empfehlen, seine Mittellinie zu benutzen, FA sei diese, so ist $\sphericalangle$ AFE $= \frac{1}{2}\pi$. Nun ist aber BCC′D′ ein Trapez, F die Mitte eines Schenkels, also wird die Mittellinie dieses Trapezes zu berücksichtigen sein: schneidet sie D′B in G, so ist G der Mittelpunkt von D′B und FG ist das arithmetische Mittel der Grundseiten, also FG $= \frac{b + c}{2}$, und BC und D′C′ sind zu GF parallel.

Damit haben wir alles nötige gewonnen, denn nun können wir sagen: zunächst sind auf einer Geraden die Punkte D′, A und B hintereinander bestimmt durch D′A = d, AB = a, und auch der Mittelpunkt G von D′B. Punkt E ist bestimmt, weil er D′B im Verhältnis c : b in äussere Abschnitte teilt. Für Punkt F haben wir zwei geometrische Örter: er liegt erstens auf dem Halbkreise über AE und zweitens auf dem Kreise um G, dessen Radius $\frac{b + c}{2}$ ist. Durch E und F ist der Strahl EF bestimmt, und die Punkte C und C′ liegen auf ihm sowie auf den Parallelen zu GF, welche durch B und D′ zu ziehen sind. Hiernach ist die Konstruktion leicht auszuführen. Der Umkreisradius eines der Dreiecke ABC oder AD′C′ ist auch Umkreisradius des gesuchten Sehnenvierecks, es erscheint durch Aneinanderlegen der genannten Dreiecke.

III. Von regulären Vielecken will ich nur ein Beispiel durchführen, das ich in der Einleitung erwähnte:

Wie gross ist die grösste Fläche, die mit 20 Wänden von je 2 m Länge eingehegt werden kann?

Der Umfang muss ein reguläres Zwanzigeck werden, das übrigens leicht abgesteckt werden könnte, jeder Aussenwinkel beträgt 18°. Um den Inhalt festzustellen, können wir von der geometrischen Formel ausgehen oder die trigonometrische benutzen. Im ersten Falle benutzen wir die Darstellung der Seite und der Fläche durch den Umkreisradius,

$$s_{20} = \frac{1}{2}\, r \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}, \quad f_{20} = 5r^2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Bezeichne ich die Seite mit a, so erhalte ich durch Elimination von r

$$f = \frac{5a^2 (\sqrt{5} - 1)}{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{5a^2 \left(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)(\sqrt{5} - 1)}{6 - 2\sqrt{5}}.$$

Hier ist zu beachten, dass der Nenner das Quadrat des zweiten Faktors im Zähler ist, dieser hebt sich, und durch Rationalmachen des Nenners erscheint

$$f = \frac{5a^2 (4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(\sqrt{5} + 1)}{4} = 5a^2 \left[(\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{4}a^2 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}\right]$$

Der zweite Teil wird $\frac{1}{2}a^2 \sqrt{(5 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}$, der Nenner hebt sich nachdem ausmultipliziert ist auch noch, und es erscheint

$$f_{20} = 5a^2 \left[\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1\right].$$

$\sqrt{5} = 2{,}2361$, a = 2 liefert den Zahlenwert f = 126,2751. Benutzen wir andererseits die trigonometrische Formel $f_n = \dfrac{u^2}{4n \operatorname{tg} \frac{1}{n}\pi}$ (S. 12), so liefert dieselbe für u = 40, n = 20

$$f_{20} = 20 \operatorname{ctg} 9^0,$$

und aus der „Tafel der natürlichen trigonometrischen Zahlen", IVe in Greves Logarithmentafel entnehmen wir den Wert der Funktion ctg 9° und erhalten nach Multiplikation mit 20 dasselbe Resultat. Also: Die grösste Fläche, welche mit 20 Wänden von je 2 m Länge eingehegt werden kann, umfasst 1 a 26 qm 28 qdm. (Der Kreis von 40 m Umfang hat 127,3240 qm Fläche.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. Der Dreischenkel. Bei der Begründung unserer Ergebnisse spielte das Viereck eine grosse Rolle, welches das Maximum der Fläche für gegebene Grundseite und gegebenen Umfang darstellt, das Antiparallelogramm mit 3 gleichen Seiten. Es verlohnte sich wohl, diese Figur einmal nach allen Richtungen hin durchzuarbeiten, sie bietet Stoff zu zahlreichen Aufgaben und Übungen, ich will hier nur einiges hervorheben. Um aber nicht an eine so umständliche Bezeichnungsweise gebunden zu sein, will ich für sie einen Namen gebrauchen, der zwar vielleicht nicht schön, aber kurz und bezeichnend sein dürfte: ich nenne ein gleichschenkliges Trapez, in welchem die eine (obere) Grundseite den Schenkeln gleich ist, in welchem also drei Seiten von gleicher Länge, darunter die beiden Schenkel vorkommen, einen „Dreischenkel", später entsprechend ein Fünfeck mit vier gleichen Seiten, dessen Symmetrieachse das Mittellot der fünften Seite ist, einen „Vierschenkel", usf. Die vierte Seite des Dreischenkels, also die (untere) Grundseite, von welcher nicht angenommen wird, dass sie den Schenkeln gleich sei, heisst die Basis, die ihr anliegenden Winkel heissen Basiswinkel des Dreischenkels, weiter die Endpunkte der Basis die Basisecken, die anderen Ecken Schenkelecken, die an ihnen liegenden Winkel Schenkelwinkel. In der Figur (7, a und b) bezeichne ich die Basis mit $AB = a$, die Basiswinkel mit A und B, den Schenkel mit $BC = CD = DA = b$, die Schenkelwinkel mit C und D. Der Radius des Umkreises M heisse r, der Zentriwinkel, welcher zur Basis gehört, werde mit $2\alpha$, der zum Schenkel gehörende mit $2\beta$ bezeichnet, so ist

$$a = 2r \sin \alpha, \; b = 2r \sin \beta,$$

$\alpha$ und $\beta$ sind die Peripheriewinkel, welche zur Basis resp. zum Schenkel als Sehnen gehören. Durch die Seiten a und b lassen sich Höhe und Diagonale des Dreischenkels ausdrücken, ersteres war schon auf Seite 11 geschehen

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \; d^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + 2ba - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(3b-a)(b+a)}, \; d = \sqrt{b(b+a)}.$$

Eine geometrische Eigenschaft ist leicht abzuleiten. Das Dreieck BCD ist gleichschenklig, also $\sphericalangle$ CBD = CDB, letzterer aber als Gegenwinkel an Parallelen gleich ABD, also ABD = CBD, d. h.

Im Dreischenkel halbiert die Diagonale den Basiswinkel.

Da ferner der zum Schenkel (als seiner Sehne) gehörige Zentriwinkel $2\beta$ sein sollte, ist der Winkel CDB, welcher als Peripheriewinkel zur Sehne BC gehört, gleich $\beta$, und der Basiswinkel gleich $2\beta$.

Der Basiswinkel des Dreischenkels ist so gross wie der Zentriwinkel des Schenkels.

Es folgt ferner, dass die Diagonalen sich in Abschnitte teilen, die sich wie Basis und Schenkel verhalten, und dass

$$\sin \beta = \frac{h}{d} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \frac{a}{b}}$$

ist. Dass — wie sich hieraus ergibt — a nicht grösser als 3b gegeben sein darf, ist ja selbstverständlich.

Folgende Aufgaben sind leicht zu lösen:

Einen Dreischenkel zu konstruieren aus 1. Basis und Schenkel, 2. Basis und Basiswinkel, 3. Schenkel und Schenkelwinkel, 4. Schenkel und Basiswinkel, 5. Basis und Diagonale (algebraisch!), 6. Schenkel und Diagonale, 7. Basiswinkel und Diagonale, 8. Diagonale und Höhe, 9. Schenkel und Höhe, 10. Basis und Höhe, 11. Basiswinkel und Höhe, 12. dem Verhältnis zweier Stücke und der absoluten Länge eines dritten.

Nehmen wir den Radius des Umkreises hinzu (Fig. 7), so gibt es auch schöne Konstruktionsaufgaben, z. B. „Dreischenkel aus Umkreisradius und Diagonale", wir stossen aber auch auf eine Aufgabe, die sich mit Zirkel und Lineal nicht lösen lässt. Um die Fälle überblicken zu können, betrachten wir die einzelnen Möglichkeiten und gehen von der einfachsten Aufgabe aus, nämlich einen Dreischenkel aus dem Radius des Umkreises und dem Schenkel zu konstruieren:

Dreischenkel aus Umkreis und Schenkel, b und r. Ich zeichne den Kreis M mit dem Radius r und trage in ihn hintereinander 3 Sehnen $AD = DC = CB = b$ ein, dann verbinde ich A mit B, so ist ABCD der verlangte Dreischenkel.

Nun kommt es aber doch sehr auf die Grösse von b an, im Vergleich zu r, danach sehen die Ergebnisse sehr verschieden aus, und auch innere Beziehungen der Figur lauten danach verschieden. Wir

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wollen alle Fälle durchgehen, indem wir b erst klein, dann grösser und grösser nehmen. In Fig. 7a ist $b < r$, dann liegt der Mittelpunkt M des Umkreises ausserhalb der Fläche des Dreischenkels. Der Zentriwinkel $2\alpha$ der Basis enthält jetzt die 3 Schenkelzentriwinkel $2\beta$ in sich, es ist

$$2\alpha = 3 \cdot 2\beta, \qquad \alpha = 3\beta.$$

Wird $b = r$, so erscheint als Dreischenkel die Hälfte des eingeschriebenen regulären Sechsecks und M liegt auf der Basis. Ist $b > r$, aber um weniges grösser, so kommt Fig. 7b zum Vorschein, der Mittelpunkt M des Umkreises liegt in der Fläche der Figur, und es ist jetzt $2\alpha + 3 \cdot 2\beta = 2\pi$, $\alpha + 3\beta = \pi$, während zuerst $\alpha = 3\beta$ war. Diese beiden Fälle bezeichne ich als die Dreischenkel „erster" und „zweiter Art", ihre Schenkel mit $b_1$ und $b_2$, ihre $\beta$ mit $\beta_1$ und $\beta_2$. Bei beiden ist

$$\sin\alpha = \sin 3\beta.$$

Die Grösse des Schenkel- und Basiswinkels interessiert uns auch noch. Der Basiswinkel ist immer $2\beta$, über den Schenkelwinkel und seine Teile gilt folgendes: im ersten Falle, 7a, ist $\sphericalangle$ BDA $= \pi - \alpha$, im zweiten $\sphericalangle$ BDA $= \alpha$, also der Schenkelwinkel im ersten Falle $\pi - \alpha + \beta$, im zweiten $\alpha + \beta$, gleich der Summe der Peripheriewinkel, die zur Basis und zum Schenkel als Sehnen gehören.

Bisher war die Basis a grösser als der Schenkel b. Bei weiter wachsendem b wird aber a immer kleiner. Wird b der Seite des regulären Vierecks im Kreise gleich, so wird a ebenso gross, das Quadrat ist ein besonderer Fall des Dreischenkels. Wird $b > r\sqrt{2}$, so wird $a < r\sqrt{2}$ (Fig. 7b'), zunächst bleibt es noch ein „Dreischenkel zweiter Art", aber je grösser b wird, um so näher rücken sich die Basisecken A und B, und wenn b der Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks gleich wird, $b = r\sqrt{3}$, fallen sie zusammen, als weiterer besonderer Fall des Dreischenkels erscheint das gleichseitige Dreieck, Fig. 7b'', für $a = 0$ Wird aber b noch grösser, so rückt B noch weiter nach links, A nach rechts, die Basisecken vertauschen ihre Lage, die Basis a wechselt ihre Richtung (für die Rechnung wird sich ergeben, dass dann die Basis negativ zu nehmen ist), die Seitenschenkel AD und BC schneiden sich innerhalb des Kreises, wir haben den „gekreuzten Dreischenkel" (Fig 7c) vor uns. Die Zentriwinkel liegen jetzt so, dass folgende Gleichung besteht, die wir erhalten, wenn wir etwa vom Radius MA aus die Winkel zählen:

$$\sphericalangle \text{AMD} + \text{DMC} + \text{CMB} = 2\pi + \text{AMB}, \quad 3 \cdot 2\beta = 2\pi + 2\alpha, \quad 3\beta = \pi + \alpha,$$

jetzt ist $\sin\alpha = -\sin 3\beta$.

Für uns, denen es auf grösste Flächen ankommt, hat dies Gebilde, der gekreuzte oder überschlagene Dreischenkel, genau genommen keine Bedeutung, dennoch müssen wir ihn beachten, da er bei Aufgaben auftritt, deren allgemeine Lösung nicht vollkommen deutbar ist, wenn wir ihn nicht berücksichtigen. Denken wir uns nun wie in Fig. 3 die Höhe DF und die „Diagonale" BD gezogen, so lauten in Fig. 7c die Beziehungen:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2, \quad d^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

gehen also, wie schon gesagt, aus den früheren (S. 8) hervor, wenn a durch $(-a)$ ersetzt wird.

Die Konstruktion des Dreischenkels aus Umkreisradius und Schenkel war leicht, anders ist es, wenn Umkreisradius und Basis gegeben sind. Der Anfang ist selbstverständlich einfach:

> Dreischenkel aus Umkreis und Basis In einen Kreis M mit dem Radius r trage ich die Sehne $AB = a$ ein und verbinde A und B mit M; so müsste ich, um die Schenkelecken D und C zu erhalten, den Zentriwinkel AMB in 3 gleiche Teile teilen, den konkaven oder den konvexen.

Es kommt also die „Trisektion des Winkels" in Frage, von welcher bekannt ist, dass sie allgemein mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar ist, wir werden gleich sehen, dass diese Aufgabe auf eine kubische Gleichung führt. Die 3 reellen Wurzeln dieser kubischen Gleichung haben folgende Bedeutung: eine liefert den ersten Fall, 7a, durch Dreiteilung des konkaven Zentriwinkels AMB, eine andere den Fall 7b, durch Dreiteilung des konvexen Zentriwinkels, des Implements vom ersten, der Dreischenkel liegt im ersten Falle in einem Kreissegment, das kleiner als der Halbkreis ist, im zweiten in dem, welches grösser als der Halbkreis wird; und die noch vorhandene Wurzel liefert den gekreuzten Dreischenkel.

Wenn nun aber auch die allgemeine Aufgabe „Dreischenkel aus Umkreisradius r und Basis a" nicht konstruktiv ausführbar ist, so können wir doch wenigstens, wenn eine Wurzel gegeben ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die anderen konstruieren. Denn durch $a = 2r \sin \alpha$ ist $2\alpha$ bestimmt; und wenn ich, wie schon angegeben, die in den 3 Fällen zum Schenkel gehörigen Zentriwinkel mit $2\beta_1$, $2\beta_2$, $2\beta_3$ bezeichne, sodass $b_1 = 2r \sin \beta_1$, $b_2 = 2r \sin \beta_2$, $b_3 = 2r \sin \beta_3$ wird, so galten (S. 19). wie wir aus den Figuren 7a, 7b, 7c entnahmen, die Beziehungen

$$3 \cdot 2\beta_1 = 2\alpha, \quad 3 \cdot 2\beta_2 + 2\alpha = 2\pi, \quad 3 \cdot 2\beta_3 = 2\pi + 2\alpha.$$

Aus ihnen folgt

$$3\,(2\beta_1 + 2\beta_2) = 2\pi, \quad 3 \cdot 2\beta_3 = 2\pi + 3 \cdot 2\beta_1,$$

$$\text{also } 2\beta_1 + 2\beta_2 = \frac{2}{3}\pi, \quad 2\beta_3 = \frac{2}{3}\pi + 2\beta_1.$$

Also die Zentriwinkel, die zum Schenkel $b_1$ des ersten resp. $b_2$ des zweiten Dreischenkels gehören, betragen zusammen $\frac{2}{3}\pi$ oder $120^0$, und der zum Schenkel $b_3$ des dritten Dreischenkels gehörende übertrifft den zum ersten gehörigen um ebensoviel. Hiernach ist, wenn der erste gegeben, der zweite und dritte leicht zu konstruieren. In Fig. 7d sei $ABC_1D_1$ der Dreischenkel 1. Art, das Segment, in welchem er liegt, kleiner als der Halbkreis; so trage ich von $C_1$ über B hinaus und von $D_1$ über A hinaus den Radius je zweimal als Sehne ein, bis $C_2$ und $D_2$, dann sind dies die Schenkelecken des Dreischenkels 2. Art, weil $\sphericalangle C_1MB + BMC_2 = \frac{2}{3}\pi$, und ich trage von $C_1$ über $D_1$ und A hinaus und von $D_1$ über $C_1$ und B hinaus den Radius je zweimal als Sehne ein, bis $C_3$ und $D_3$, so sind dies die Schenkelecken des gekreuzten Dreischenkels, weil $\sphericalangle BMC_3 = BMC_1 + \frac{2}{3}\pi$ ist. Anstatt des letzteren Verfahrens hätte ich auch das erste fortsetzen und den Radius in den zuerst eingeschlagenen Richtungen je viermal eintragen können, so wäre ich auch auf $C_3$ und $D_3$ gekommen. — Dies sind also 3 verschiedene Dreischenkel, welche in demselben Kreise zu derselben Basis (Sehne) AB gehören. Zu jedem von ihnen, wenn er gezeichnet vorliegt, kann ich die beiden anderen zugehörigen finden.

Bemerkenswert ist, dass die homologen Schenkelecken $C_1$, $C_2$, $C_3$ sowie $D_1$, $D_2$, $D_3$ je ein reguläres Dreieck bilden. Man könnte also auch von diesem ausgehen. Auch besteht eine Beziehung zwischen den Seiten der drei zusammengehörigen Dreischenkel. Ein bekannter Satz lautet: Verbindet man einen beliebigen Punkt eines Kreises mit den Ecken eines ihm eingeschriebenen regulären Dreiecks, so ist die grösste dieser Verbindungssehnen der Summe der beiden anderen gleich, also $b_3 = b_1 + b_2$.

Haben drei Dreischenkel Umkreis und Basis gemein, so ist der Schenkel des gekreuzten die Summe der Schenkel der beiden anderen.

Bemerkenswert ist noch (Fig. 7d) der Winkel, welchen die Basis mit dem Durchmesser durch A bildet, $\sphericalangle BAM = \varphi$. Er ist $\frac{1}{2}\pi - \alpha$. Da nun aber $3 \cdot 2\beta_3 = 2\pi + 2\alpha$ war, so ist $\beta_3 = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, also der Basiswinkel des Dreiecks $AMD_3$ (dessen Gipfelwinkel $2\beta_3$ ist!) wird

$$\frac{1}{2}\pi - \beta_3 = \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{1}{3}\varphi.$$

Von dem Winkel BAM teilt der Schenkel $AD_3$ des gekreuzten Dreischenkels den dritten Teil ab.

Wollen wir eine Gleichung zur Diskussion dieser Zusammenhänge ansetzen, so gehen wir von $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$ aus und von der Bedingung, dass für die Dreischenkel 1. und 2. Art $\sin \alpha = \sin 3\beta$ ist. Wir benutzen die bekannte Beziehung

$$\sin 3\beta = 3 \sin \beta - 4 \sin \beta^3$$

und erhalten

$$\frac{a}{2r} = 3\frac{b}{2r} - 4\left(\frac{b}{2r}\right)^3 \text{ oder } ar^2 = 3br^2 - b^3.$$

Ist a und b gegeben, so findet sich hieraus r durch $r^2 = \frac{b^3}{3b - a}$, woraus wieder die Beschränkung $a < 3b$ folgt. Ist der Schenkel b und der Umkreisradius r gegeben, so ist bei konstantem r

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Basis a eine Funktion von b, über deren Verlauf sich folgendes ergibt: für $b = r\sqrt{3}$ wird a zu Null, für kleineres b positiv, für grösseres negativ. $b = r$ liefert $a = + 2r$, $b = 2r$ aber $a = - 2r$. Differentiation liefert

$$a'r^2 = 3r^2 - 3b^2,\ a''r^2 = - 6b.$$

So lange $b < r$, ist $a'$ positiv, ebenso lange nimmt a mit wachsendem b zu, das Maximum für a tritt ein, wenn $a' = 0$, d. h. wenn $b = r$ wird, für $b > r$ ist $a'$ negativ, mit weiter wachsendem b nimmt a ab. Ganz wie es die geometrische Deutung schon gab!

Nun sei endlich die Basis a und der Umkreisradius r gegeben; so haben wir zur Bestimmung von b eine kubische Gleichung, die geordnet so lautet:

$$b^3 - 3br^2 + ar^2 = 0.$$

Da $a < 2r$, $\frac{1}{2}ar^2 < r^3$, erscheint der *Casus irreducibilis.* Die Cardanische Formel liefert nach einiger Umformung

$$b = - r\left\{\sqrt[3]{\frac{a}{2r} + i\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{a}{2r} - i\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r}\right)^2}}\right\}.$$

Die Lösung kommt durch $\frac{a}{2r} = \cos\varphi$, nämlich

$$b = - 2r\cos\frac{1}{3}\varphi,\quad \cos\varphi = \frac{a}{2r}.$$

Die drei reellen Wurzeln lauten

$$b' = - 2r\cos\frac{1}{3}\varphi,\quad b'' = - 2r\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{2}{3}\pi\right),\quad b''' = - 2r\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{4}{3}\pi\right)$$

Der Winkel $\varphi$ hat die oben schon erörterte geometrische Bedeutung, es ist der Winkel (Fig. 7c) zwischen der Sehne $AB = a$ und dem durch A gehenden Durchmesser, er wurde durch den Schenkel $AD_3$ des gekreuzten Dreischenkels gedrittelt. Jedenfalls ist dieser Winkel spitz, also $b'$ ist negativ. $\frac{1}{3}\varphi$ ist kleiner als $30^0$, daher liegt der Winkel von $b''$ im zweiten, der von $b'''$ im dritten Quadranten, und $b''$ und $b'''$ sind beide positiv. Unsere Aufgabe liefert also für b zwei positive und einen negativen Wert. Was bedeuten diese? Wenn wir die schon (S. 20) erörterte Beziehung zwischen $\varphi$ und $\alpha$ benutzen, $\frac{1}{3}\varphi = \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, erhalten wir:

$$b' = - 2r\cos\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right) = - 2r\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi + \alpha}{3}\right) = - 2r\sin\frac{\pi + \alpha}{3}$$

und das ist in der oben (S. 20) angegebenen Bezeichnung $b' = - 2r\sin\beta_3 = - b_3$. Ferner

$$b'' = - 2r\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) = - 2r\cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right)$$

$$= - 2r\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right) = + 2r\sin\frac{\pi - \alpha}{3}, = 2r\sin\beta_2 = b_2.$$

Und endlich $$b''' = - 2r\cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{4}{3}\pi\right) = - 2r\cos\left(\frac{9}{6}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right)$$

$$= - 2r\cos\left(\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right) = + 2r\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right)$$

$$= + 2r\sin\frac{1}{3}\alpha = + 2r\sin\beta_1 = + b_1.$$

Es sind also $b''$ und $b'''$ die Schenkel $b_2$ und $b_1$ der nicht gekreuzten, $b'$ aber ist der negative Wert des Schenkels des gekreuzten Dreischenkels. — Da die kubische Gleichung von Anfang an reduziert war, das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

quadratische Glied den Koeffizienten Null hat, genügen ihre Wurzeln der Bedingung $b' + b'' + b''' = 0$, d. h. es ist $b_3 = b_1 + b_2$.

So führen geometrische und algebraische Erörterung in befriedigender Weise zu denselben Ergebnissen.

V. Das grösste n-Eck mit gegebenen Seiten. Seite 12 war angegeben, dass das Maximum der Fläche bei gegebenen Seiten erreicht wird, wenn durch die Ecken des Polygons ein Kreis geht, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ seien die Seiten eines n-Ecks, r der Radius des Umkreises des an Fläche grössten, und zur Seite $a_p$ gehöre der Zentriwinkel $2\alpha_p$, sodass jedesmal $a_p = 2r \sin \alpha_p$ ist; so würden zur Bestimmung von r diese Gleichungen zu lösen sein:

$$a_1 = 2r \sin \alpha_1, \quad a_2 = 2r \sin \alpha_2, \quad \ldots a_n = 2r \sin \alpha_n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = \pi,$$

$(n + 1)$ Gleichungen mit den $(n + 1)$ Unbekannten r und $\alpha_1$ bis $\alpha_n$. Eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe, die wir mit Elimination von r noch so schreiben können:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = \pi,$$
$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 : \ldots : \sin \alpha_n = a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n,$$

kenne ich nicht. Für gewisse Spezialisierungen der Seiten a ist die Lösung möglich, dann z. B., wenn nicht n verschiedene Längen vorkommen, sondern etwa nur zwei, indem von den Seiten ihrer p alle gleich a, die übrigen q alle gleich b gegeben sind $(p + q = n)$, dann können wir für gewisse Zusammenstellungen von p und q die Gleichungen trigonometrisch oder algebraisch lösen. Sie sehen dann so aus

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta \text{ oder } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}, \quad p\alpha + q\beta = \pi.$$

Aus der letzteren folgt $\sin p\alpha = \sin q\beta$. Hier werden also die Formeln für den Sinus des Vielfachen eines Winkels gebraucht, welche bekanntlich am einfachsten aus dem Moivreschen Satze fliessen: in

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

entwickeln wir die rechte Seite nach dem binomischen Satze und setzen dann die reellen Bestandteile beider Seiten einander gleich, ebenso die imaginären. Die geraden Potenzen des Cosimus können wir in der Formel für $\sin n\alpha$ noch beseitigen, indem wir statt $\cos^2$ allemal $(1 - \sin^2)$ setzen, auspotenzieren und ordnen. So sind die speziellen Formeln, welche wir im folgenden benutzen werden, leicht zu gewinnen.

Einzelne Fälle mögen erörtert werden, wobei nicht unerwähnt bleibe, dass die Auflösung noch vieldeutig ist, insofern als es auf die Reihenfolge der Seiten nicht ankommt, sie können beliebig vertauscht werden, der Radius r bleibt derselbe.

VI. $p = q$. Die halbregulären 2n-Ecke. Von den $(p + q)$ oder 2 n Seiten eines grössten Polygones mit gegebenen Seiten sollen die eine Hälfte alle die Länge a, die andere alle die Länge b haben. Dann ist $\quad 2r \sin \alpha = a, \; 2r \sin \beta = b, \; \sin \alpha : \sin \beta = a : b,$

$$p\alpha + p\beta = \pi, \text{ also } \alpha + \beta = \frac{1}{p}\pi.$$

Ist p eine Zahl aus der Reihe derjenigen, für welche, wenn sie als Anzahl der Ecken genommen werden, das reguläre Vieleck konstruierbar wird, so lässt sich $\alpha + \beta = \frac{1}{p}\pi$ mit Zirkel und Lineal konstruieren. Schneiden wir vom Vieleck (Fig. 8) ein Dreieck ACB ab, in dessen Ecke C eine Seite a und eine Seite b zusammentreffen, so kommen wir auf eine bekannte Grundaufgabe zurück: aus $\sin \alpha : \sin \beta = a : b$ folgt in bekannter Weise $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = a + b : a - b$, das ist der Tangenssatz für dieses Dreieck, und da a und b bekannt, lässt sich $\alpha$ und $\beta$ bestimmen. Aber es geht sogar geometrisch: Der Aussenwinkel an der Ecke C des Dreiecks ist, wie leicht zu sehen, $\alpha + \beta$, also das Dreieck nach dem I. Konstruktionsfalle (zwei Seiten, Aussenwinkel an der gemeinschaftlichen Ecke) konstruierbar. Durch das Dreieck ABC ist sein Umkreis bestimmt, in ihn lassen sich die $(p - 1)$ übrigen Sehnen a und b als Sehnen eintragen, um das gesuchte geschlossene Vieleck zu ergeben. Sieht man davon, dass die Fläche ein Maximum werden soll, ab, so lässt es sich rein geometrisch als Kreisaufgabe fassen, die schon in Tertia zu lösen ist, etwa:

Es soll ein Sechseck konstruiert werden, durch dessen Ecken ein Kreis geht, und die Seiten sollen abwechselnd die Länge a und b haben. — Konstruktion (Fig. 8). Ich zeichne einen Winkel $C = 60^0$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

trage auf dem einen Schenkel Strecke $CB = a$, auf dem Gegenstrahle des anderen Schenkels Strecke $CA = b$ ab und konstruiere die Mittelsenkrechten von CA und CB, ihren Schnittpunkt nenne ich M. Ich konstruiere den Kreis um M durch A, C, B und trage in ihn die Sehnen b, a, b, a noch zweimal nacheinander ein.

Beim Achteck tritt an die Stelle von $60^0$ der Winkel $45^0$, beim Zehneck $36^0$ usf. Diese „halbregulären" Polygone — sie stimmen mit den regulären ganz in der Grösse der Aussenwinkel überein — sind damit erledigt.

VII. Einige besondere Fälle.

A. $p = 2$, $q = 4$. Das grösste Sechseck zu bestimmen, in welchem zwei Seiten gleich a, die anderen alle gleich b sind.

Auflösung. $a = 2r \sin\alpha, \quad b = 2r \sin\beta, \quad 2\alpha + 4\beta = \pi.$

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi - 2\beta, \quad \sin\alpha = \cos 2\beta, \quad \text{also, wenn wir } \frac{a}{b} = k \text{ setzen,}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos 2\beta}{\sin\beta} = k, \qquad 1 - 2\sin\beta^2 = k\sin\beta.$$

$$\sin\beta = x \text{ liefert } x^2 + \frac{1}{2}x\,k = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{k^2+8} - k}{4}, \text{ oder, wenn ich wieder}$$

$$k = \frac{a}{b} \text{ einsetze, } \sin\beta = \frac{\sqrt{a^2+8b^2} - a}{4b} = \frac{b}{2r},$$

$$2r = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2+8b^2} - a} = \frac{\sqrt{a^2+8b^2} + a}{2}.$$

Das lässt sich leicht konstruieren. Bemerkenswert sind die besonderen Fälle, die hierin enthalten sein müssen. Wird $a = b$, so muss das reguläre Sechseck erscheinen. In der Tat wird dann $2r = 2b$. Und $a = o$, $k = o$ muss das Quadrat ergeben: $2r = b\sqrt{2}$.

B. $p = 2$, $q = 3$. Das grösste Fünfeck zu bestimmen, in welchem zwei Seiten gleich a, die anderen drei gleich b sind.

$$a = 2r \sin\alpha, \quad b = 2r \sin\beta.$$
$$2\alpha + 3\beta = \pi.$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{2}\beta, \ \sin\alpha = \cos\frac{3}{2}\beta. \text{ Also } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{3}{2}\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = k.$$

Wir beachten, dass $\cos\frac{3}{2}\beta = 4\cos\frac{1}{2}\beta^3 - 3\cos\frac{1}{2}\beta$, $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\beta$ und erhalten

$$\frac{4\cos\frac{1}{2}\beta^2 - 3}{2\sqrt{1-\cos\frac{1}{2}\beta^2}} = k, \text{ also wenn wir das Quadrat des Cosinus mit x bezeichnen } 4x - 3 = 2k\sqrt{1-x},$$

geordnet $x^2 - x \cdot \frac{6-k^2}{4} = \frac{4k^2-9}{16}$, woraus $x = \cos\frac{1}{2}\beta^2 = \frac{\pm\sqrt{k^4+4k^2+6} - k^2}{8}$.

Die Lösung verlangt eine Diskussion. k ist das Verhältnis $a : b$. Da nun, wenn ein Fünfeck aus 2 Seiten a und 3 Seiten b möglich sein soll, 2a kleiner als 3b sein muss, so ist $k < \frac{3}{2}$ zu geben. Dann ist $6 - k^2$ positiv. Nehmen wir nun das positive Vorzeichen der Wurzel, so wird das Quadrat des Cosinus sicher positiv, es mus aber ein echter Bruch sein; und nehmen wir das Minuszeichen, so darf der Wert doch nicht negativ werden. Also haben wir folgende Grenzbedingungen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. $\sqrt{k^4 + 4k^2} + 6 - k^2 < 8$, $\sqrt{k^4 + 4k^2} < 2 + k^2$, was stets erfüllt ist, und

2. $6 - k^2 - \sqrt{k^4 + 4k^2} > o$, $36 - 12k^2 + k^4 > k^4 + 4k^2$, $36 > 16k^2$, und das ist eben die für k schon angegebene Bedingung.

Wird $a = b$, $k = 1$, so muss das reguläre Fünfeck erscheinen, $\beta = 36^0$ werden. In der Tat erhalten wir

$$\cos \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}, \quad \cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

$a = o$, $k = o$ muss das reguläre Dreieck erscheinen lassen, $\beta = 60^0$; es wird aber

$$\cos \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{6}{8}, \quad \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

C. $p = 3$, $q = 5$. Das grösste Achteck zu bestimmen, in welchem drei Seiten gleich a, fünf Seiten gleich b sind.

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta.$$

$3\alpha + 5\beta = \pi$, $\sin 3\alpha = \sin 5\beta$, also $3 \sin \alpha - 4 \sin \alpha^3 = 5 \sin \beta - 20 \sin \beta^3 + 16 \sin \beta^5$, für $\sin \alpha : \sin \beta = a : b = k$ erscheint die Gleichung

$$\sin \beta\, (3k - 4k^3 \sin \beta^2) = \sin \beta\, (5 - 20 \sin \beta^2 + 16 \sin \beta^4),$$

also nachdem gehoben ist, für $\sin \beta^2 = x$ $3k - 4k^3 x = 5 - 20x + 16x^2$, sie liefert

$$x = \sin \beta^2 = \frac{5 - k^3 \pm \sqrt{k^6 - 10k^3 + 12k + 5}}{8}$$

Für $a = b$, $k = 1$ muss das reguläre Achteck erscheinen, $\beta = 22\frac{1}{2}^0$, es kommt

$$\sin \beta^2 = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{8}, \quad \sin 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}.$$

$k = o$ muss das reguläre Fünfeck liefern, $\beta = 36^0$:

$$\sin \beta^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}, \quad \sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

VIII. $p = 1$, $q = n - 1$. Der Vielschenkel. Besonderes Interesse beansprucht der Fall, dass von den n Seiten des Polygons eine von allen übrigen sich durch ihre Länge unterscheidet, alle anderen untereinander gleich sind. Es sei also eine Seite gleich a, alle übrigen gleich b. Einen solchen Fall haben wir bereits vollkommen erledigt, den „Dreischenkel". Die dort benutzte Bezeichnung wenden wir auch hier an und nennen a die Basis, b den Schenkel des „q-Schenkels". Die Gleichungen lauten

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad \alpha + q\beta = \pi, \quad \sin \alpha = \sin q\beta, \text{ also}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin q\beta}{\sin \beta} = \frac{a}{b} = k.$$

In mehreren Fällen führt das auf lösbare Gleichungen, $q = 3$ war abgemacht.

A. $p = 1$, $q = 4$. Der Vierschenkel. Das grösste Fünfeck zu bestimmen, in welchem eine Seite gleich a ist, die anderen vier gleich b sind. Das grösste ist das Kreisfünfeck, es ist symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Basis a. Wir wollen wieder feststellen, welche Gestaltungen möglich sind, und gehen dazu abermals von der Aufgabe aus, den Vierschenkel aus Umkreisradius r und Schenkel b zu konstruieren.

Konstruktion. In einen Kreis M mit dem Radius r (Fig. 9) trage ich vier gleiche Sehnen $AE = ED = DC = CB$ ein und verbinde A mit B; so ist ein Vierschenkel entstanden. Doch sind augenscheinlich wieder verschiedene Fälle zu unterscheiden: wir beginnen mit kleinen b und lassen b grösser werden. 1. Ist b kleiner als die Seite des eingeschriebenen regulären Achtecks, so liegt der Vierschenkel in einem Segment, das kleiner als ein Halbkreis ist (Fig. 9a), für den Zentriwinkel gilt die Beziehung $4 \cdot 2\beta = 2\alpha$, $\sin 4\beta = \sin \alpha$. 2. Ist b grösser als $s_8$ aber um weniges grösser, so liegt der Vierschenkel in einem Segment, welches grösser als der Halbkreis ist (Fig. 9b), es ist $4 \cdot 2\beta + 2\alpha = 2\pi$, $4\beta + \alpha = \pi$, $\sin 4\beta = \sin \alpha$. Ist $b = s_5$, so erscheint als spezieller Fall das reguläre Fünfeck. Diese beiden Vierschenkel, 1. und 2. Art, sind nicht gekreuzte, so bleiben sie, so lange b kleiner als $s_4$, in beiden Fällen ist $\sin \alpha = \sin 4\beta$. Wird b grösser, so rücken die Basisecken A und B sich immer näher, für $b = s_4$ fallen sie zusammen, es erscheint das Quadrat als spezieller Fall. 3. Ist b grösser als $s_4$ aber kleiner als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Sehne, welche drei Viertel des Halbkreises spannt, so erscheint der „gekreuzte Vierschenkel 1. Art“, Fig. 9c, es kreuzen sich nur die von den Basisecken ausgehenden Schenkel. Für die Peripheriewinkel erhalten wir, wenn wir wieder vom Radius MA herumgehen,

$$\sphericalangle\ AME + EMD + DMC + CMB = 2\pi + AMB,$$
$$4 \cdot 2\beta = 2\pi + 2\alpha,\ 4\beta = \pi + \alpha,\ \sin 4\beta = -\sin\alpha.$$

Ist b der genannten Sehne, der Diagonale des Achtecks, welche drei Viertel des Kreises spannt, gleich, so ist die Basis wieder so weit heraufgerückt, dass der Mittelpunkt M auf ihr liegt; wobei inzwischen noch der Fall eingetreten sein muss, dass A mit C, B mit E zusammenfiel, dass also das gleichseitige Dreieck erschien, dessen Basis dreimal zu zählen ist.

4. Wird b noch grösser als die genannte Diagonale des Achtecks, so liegt die Basis wieder im oberen Segment, das kleiner als der Halbkreis ist, und die von den Basisecken ausgehenden Schenkel kreuzen nicht nur sich, sondern auch die anderen Schenkel, wir haben den „zweimal gekreuzten Dreischenkel“ vor uns. Zähle ich jetzt wieder die Zentriwinkel, so umlaufe ich dabei zweimal den Mittelpunkt, es wird

$$\sphericalangle\ AME + EMD + DMC + CMB + BMA = 4\pi,$$
$$4 \cdot 2\beta + 2\alpha = 4\pi,\ 4\beta = \pi - \alpha,\ \sin 4\beta = -4\sin\alpha.$$

Bemerkenswert ist, dass auch hier alle zu derselben Basis gehörigen Vierschenkel in demselben Kreise sich auseinander herleiten lassen. Wie es beim Dreischenkel geschah, so können wir auch hier Beziehungen zwischen den Schenkelzentriwinkeln $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ der Vierschenkel 2., 3. und 4. Art und dem des Vierschenkels 1. Art, $\beta_1$, herstellen, und das Ergebnis ist eine Konstruktion, ganz analog der beim Dreischenkel erwähnten und ausführlich begründeten. Gingen wir dort in Schritten von $\frac{2}{3}\pi$ um den Kreis herum, so müssen wir hier Schritte von $\frac{2}{4}\pi$ machen. Also: von den zweiten Endpunkten der von den Basisecken ausgehenden Schenkel des Vierschenkels 1. Art trage ich in entgegengesetzten Richtungen eine Sehne, welche der Seite des regulären Vierecks in demselben Kreise gleich ist, fortgesetzt in den Kreis ein, so erhalte ich schrittweise die Ecken der Vierschenkel 2., 3. und 4. Art.

Ich will nun nur noch einige Beispiele anführen, in welchen das Verhältnis der Basis zum Schenkel, $a : b = k$, als gegeben angenommen wird und aus ihm die Zentriwinkel des Schenkels, $\beta$, und der Basis, $\alpha$, bestimmt werden, und endlich durch Betrachtung ihrer Grösse erschlossen wird, welchen von den 4 Fällen des Vierschenkels jede Lösung darstellt.

Die Gleichungen lauteten

$$a = 2r \sin\alpha,\quad b = 2r\sin\beta,\quad a : b = k,$$

und in den nicht gekreuzten Vierschenkeln ist $\sin\alpha = \sin 4\beta$. Wir lösen den Sinus des Vierfachen auf:

$$\sin 4\beta = 4 \sin\beta \cos\beta \cos 2\beta,\ \text{mithin}\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 4\cos\beta\cos 2\beta = k$$

oder, wenn wir den einfachen Winkel einführen,

$$4\cos(2\cos\beta^2 - 1) = k.$$

Setzen wir $2\cos\beta = x$, so kommt die Gleichung

$$x^3 - x - k = o$$

zum Vorschein, für welche die Cardanische Formel folgende erste Wurzel liefert:

$$x = 2\cos\beta = \sqrt[3]{\frac{1}{2}k + \sqrt{\frac{1}{4}k^2 - \frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}k + \sqrt{\frac{1}{4}k^2 - \frac{8}{27}}}.$$

Hieraus $\beta$, dann $\alpha$ durch $\sin\alpha = k\sin\beta$.

Als erstes Beispiel wählen wir $a = 3b$, $k = 3$. Also: In einem Vierschenkel soll die Basis das Dreifache des Schenkels sein. Wie gross sind seine Winkel?

$$x = 2\cos\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{211}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{211}{108}}},$$

es gibt nur die eine reelle Lösung. Es ergab sich beim Durchrechnen $\beta = 18^0 47' 58''$, $\alpha = 75^0 11' 5''$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also, allerdings nicht bis auf Sekunden richtig, $\alpha = 4\beta$, d. h. es ist ein Vierschenkel 1. Art, der Mittelpunkt des Kreises liegt ausserhalb seiner Fläche. (Wie in Fig. 9a.)

2. Die Basis soll das Doppelte des Schenkels sein, a = 2b, k = 2.

$$x = 2 \cos \beta = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{19}{27}}}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \beta.$$ Es ergibt sich $\beta = 27^0 47' 30''$, $\alpha = 68^0 50'$, also $4\beta + \alpha = 180^0$, es ist ein Vierschenkel 2. Art. (Wie in Fig. 9b.)

3. Die Basis sei die Hälfte des Schenkels, und zwar wollen wir sie einmal als positiv, einmal als negativ annehmen, $a = \pm \frac{1}{2} b$, $k = \pm \frac{1}{2}$.

$$x = 2 \cos \beta = \sqrt[3]{\pm \frac{1}{4} + i \sqrt{\frac{101}{432}}} + \sqrt[3]{\pm \frac{1}{4} - i \sqrt{\frac{101}{432}}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \beta.$$

In der gewöhnlichen Weise behandelt liefert das im Falle des Pluszeichens eine positive Wurzel, im Falle des Minuszeichens deren zwei, und es ergeben sich aus diesen positiven Wurzeln folgende spitze Winkel:

| I. $k = +\frac{1}{2}$ | II. $k = -\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|
| $\beta = 40^0 17' 3''$ | $\beta' = 50^0 41' 24''$ | $\beta'' = 82^0 34' 10''$ |
| $\alpha = 18^0 51' 42''$ | $\alpha' = 22^0 45' 34''$ | $\alpha'' = 29^0 43' 20''$ |
| $4\beta + \alpha = 180^0$, | $4\beta' = 180^0 + \alpha'$, | $4\beta'' + \alpha = 360^0$, |

so ist das erste ein Vierschenkel, wie Fig. 9b, nur a kleiner, 2. Art (a positiv!), die beiden anderen sind der einmal (wie Fig. 9c) und der zweimal gekreuzte (wie Fig. 9d) Vierschenkel (a negativ!).

IX. Das Kreissegment als Maximum der Fläche bei gegebener Basis und gegebenem Umfange. Ist von einem Polygon der Umfang u und eine Seite a (die Grundlinie oder Basis) gegeben, ausserdem aber auch angegeben, wieviel Ecken das Polygon haben soll, so fand sich nach dem vorigen als Maximalfläche dasjenige n-Eck, in welchem alle übrigen Seiten gleich, also gleich $\frac{u - a}{n - 1}$ sind und dessen sämtliche Ecken auf einem Kreise liegen, der „(n — 1)-Schenkel"; für n = 4 und n = 5 haben wir diese Figuren eingehend besprochen, auch n = 6 und n = 8 liefern schöne Beispiele, das erste den „Fünfschenkel", dessen Auflösung auf eine quadratische Gleichung führt, das letztere den „Siebenschenkel" mit einer Gleichung 6. Grades, die als kubische lösbar ist. Ist nun aber auch z. B. der „Siebenschenkel", d. h. dasjenige Achteck, dessen Grundlinie a ist, dessen Schenkel alle gleich b sind, und dessen Ecken auf einem Kreise liegen, das grösste von allen Achtecken über derselben Grundlinie a und mit demselben Umfange (a + 7b), so ist es doch nicht das grösste von allen Polygonen, die über derselben Grundlinie a stehen und denselben Umfang haben, man kann mit Leichtigkeit ein grösseres isoperimetrisches Neuneck angeben, welches grösser ist, grösser als dies ist wieder der Achtschenkel, d. h. das halbreguläre Neuneck mit 8 gleichen Schenkeln, grösser als dies ein gewisses Zehneck, grösser als dies der „Neunschenkel", usf. Das Steinersche Verfahren liefert uns auch dies Ergebnis: Sind P, Q, R drei benachbarte Ecken (und zwar sollen Q und R Schenkelecken sein), eines solchen Kreis-Polygons mit der Basis a und lauter gleichen Schenkeln b, so kann ich in PQ beliebig einen Punkt S annehmen und mit R verbinden, und RS begrenzt ein Dreieck SQR, welches ungleiche Seiten QR und QS hat. Selbst also wenn die übrige Fläche so gross ist, als sie irgend sein kann, ist dennoch der vorliegende Vielschenkel noch nicht das allergrösste Polygon mit dieser Basis und mit diesem Umfange, denn ich kann ohne Veränderung des Umfanges das Dreieck RSQ in ein grösseres mit der Grundlinie RS transformieren. Ganz derselbe Gedankengang, den wir beim Kreise durchführten, liefert uns also das Ergebnis, dass die Anzahl der Schenkel möglichst gross, die Schenkel demnach, da ihre Gesamtlänge gegeben ist, möglichst klein werden müssen, dass also das Maximum eintritt, wenn es unendlich viele Schenkel sind, dann geht der Zug der Schenkel in einen Kreisbogen über, und wir erhalten folgenden Satz:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Soll über eine Basis $AB = a$ eine grösste Fläche begrenzt werden durch eine Linie, die ihre Endpunkte in A und B hat und deren ganzes zwischen A und B liegendes Stück die Länge b hat, so muss b ein Kreisbogen werden, die Figur aber wird ein Kreissegment mit der Sehne a und dem Bogen b.

Sind nun a und b bestimmt gegeben, so fragt es sich, ob wir dieses Segment berechnen können, ob wir den Radius des Kreises, dem es angehört, und seinen Zentriwinkel angeben können. Ist r der Radius, $2\varphi$ der Zentriwinkel, so ist $a = 2r \sin \varphi$, $b = r \cdot 2\varphi$, $\varphi$ muss so bestimmt werden, dass es der Gleichung

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{a}{b}$$

genügt. Zur Lösung einer solchen „transzendenten" Gleichung gibt es keine allgemeine Formel, sie wird für jeden besonderen Fall durch ein „Näherungsverfahren" behandelt. Dieses Newtonsche Näherungsverfahren, das auch auf andere transzendente sowie auf höhere algebraische Zahlengleichungen anwendbar ist, will ich an einem Beispiel erläutern. Wir setzen $\frac{a}{b} = k$, $\varphi = x$ und geben der Gleichung $\frac{\sin x}{x} = k$ besser diese Form:

$$\sin x - kx = 0.$$

Nun sagen wir so: es wird möglich sein, ein erstes x zu finden, welches, wenn man es in diesen Ausdruck einsetzt, die Gleichung nicht genau aber schon angenähert befriedigt, sodass

$$\sin x_1 - k \cdot x_1 = n_1$$

wird, wo $n_1$ zwar noch nicht o, aber eine kleine Zahl ist. Um eine genauere Wurzel der Gleichung zu erhalten, suche ich eine Grösse $Z_1$ so zu bestimmen, dass, wenn ich sie zu $x_1$ hinzufüge, durch den Winkel $(x_1 + Z_1)$ die Gleichung erfüllt wird. In

$$\sin (x_1 + Z_1) - k (x_1 + Z_1) = 0$$

entwickle ich den Sinus und erhalte $\sin x_1 \cos Z_1 + \cos x_1 \sin Z_1 - kx_1 - kZ_1 = 0$. Jedenfalls wird $Z_1$ nur ein kleiner Winkel sein, sodass ich $\cos Z_1 = 1$, $\sin Z_1 = Z_1$ setzen darf. Dann erscheint

$$(\sin x_1 - kx_1) + Z_1 (\cos x_1 - k) = 0.$$

Die erste Klammer war aber der Wert $n_1$, sodass $Z_1$ sich aus

$$Z_1 = - \frac{n_1}{\cos x_1 - k}$$

bestimmen lässt. Den Wert $x_2 = x_1 + Z_1$ setze ich nun wieder in den Ausdruck ein, so wird die Gleichung vielleicht auch durch ihn noch nicht genau befriedigt, es wird $\sin x_2 - k \cdot x_2 = n_2$ werden, wo jedoch $n_2$ kleiner als $n_1$ werden wird. Hieraus bestimme ich durch $Z_2 = - \frac{n_2}{\cos x_2 - k}$ ein neues $Z_2$, welches einen neuen Näherungswert $x_3 = x_2 + Z_2$ liefert, für den, wenn ich $\sin x_3 - k \cdot x_3 = n_3$ berechne, $n_3$ noch näher an Null herankommen wird. Dies benutze ich abermals zur Bestimmung eines weiteren $Z_3$ und $x_4 = x_3 + Z_3$ und wende das Verfahren so oft an, bis ein n erscheint, welches nur sehr wenig von Null verschieden ist. — Für einen bestimmten Wert von k wollen wir das numerisch durchführen.

Ueber einer Basis $AB = a$ soll eine Maximalfläche stehen, deren übrige Begrenzung doppelt so lang als a ist. Wir müssen das Kreissegment bestimmen, dessen Sehne a, dessen Bogen 2a ist. Es geschieht durch Lösung der Gleichung

$$\text{A)}\ \sin x - \frac{1}{2}x = 0,$$

unter fortgesetzter Anwendung des geschilderten Näherungsverfahrens. Die Gleichung zur Bestimmung von Z lautet jetzt

$$\text{B)}\ Z = \frac{n}{0{,}5 - \cos x}.$$

Zuerst müssen wir einen schon möglichst genauen ersten Näherungswert von x bestimmen. Das könnte man auf graphischem Wege zu erreichen suchen: Da $\sin x = \frac{1}{2}x$ werden soll, zeichne ich zwei

Kurven, erstens die Sinuslinie $y = \sin x$, zweitens die Gerade $y = \frac{1}{2}x$. Die Abszisse ihres Schnittpunkts ist das gesuchte x. Wo kann nun der Schnittpunkt liegen? Der erste Kulminationspunkt von $y = \sin x$ liegt bei $x = \frac{1}{2}\pi$, $y = 1$. Verbinde ich ihn mit dem Anfangspunkte, so wird die Richtungskonstante dieser Geraden $1 : \frac{1}{2}\pi = 2 : \pi$, und dies ist, weil $\pi < 4$, grösser als $\frac{1}{2}$. Die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ muss also unter dieser Geraden liegen, sie geht unter dem ersten Kulminationspunkt hindurch und kann erst hinter diesem die Sinuslinie schneiden, es wird unser gesuchtes x grösser als $\frac{1}{2}\pi$ sein, es muss sich ein stumpfer Winkel als Lösung unserer transzendenten Gleichung ergeben. Nun etwa die Abszisse des Schnittpunkts der beiden Kurven durch Ausmessung einigermassen genau bestimmen zu wollen verspricht nicht viel Erfolg. Bequemer liefert uns folgende Methode erste Näherungswerte. Ich entwickele sin x in die Sinusreihe, so erhalte ich

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

und benutze nur die ersten Glieder der Reihe, um eine Bestimmungsgleichung für x zu bekommen. Gehe ich bis zum Quadrat, so wird $x^2 = \frac{1}{2} \cdot 3!$, $x = \sqrt{3} = 1{,}73 \dots$ Nehme ich noch das dritte Glied, so bekomme ich eine Gleichung, die geordnet so lautet: $x^4 - 20x^2 + 60 = 0$, aus ihr folgt als positive Wurzel $x = \sqrt{10 \pm \sqrt{40}}$. Da $x < \pi$, gilt das Minuszeichen, es erschein als Näherungswert $x_1 = \sqrt{10 - \sqrt{40}} = \sqrt{3{,}67745} = 1{,}917 \dots$ Nun haben wir die Näherungsformel

$$\text{B)} \quad Z_1 = \frac{n_1}{0{,}5 - \cos x_1}$$

zu benutzen, um das Inkrement zu berechnen, welches zu $x_1$ hinzugefügt den zweiten Näherungswert liefert, $n_1$ ist der Wert. A) $n_1 = \sin x_1 - 0{,}5x_1$.

Aus der Reihe kamen die ersten Näherungswerte 1,73 . . und 1,917 . . . Ich werde mit

$$x_1 = 1{,}9$$

in die Rechnung hineingehen. Dies ist die Masszahl von x in Bogenmass; um die Werte des Sinus und Cosinus aus der Logarithmentafel zu erhalten, müssen wir x erst in Winkelmass umrechnen Dazu bedienen wir uns der Tafel Vg, welche sich dankenswerter Weise in der Greveschen Logarithmentafel findet, sie enthält die „Länge der Kreisbögen für den Radius = 1“, wir bezeichnen, um homogene Benennungen zu haben, den Radius mit r, den Winkel mit $\alpha$, so finden wir für den Bogen von der Länge $x_1 = 1{,}9$ seine Darstellung in Bogenmass mit Leichtigkeit; das Schema wird ohne Erläuterung verständlich sein:

$$\begin{array}{rl|c}
x_1 = & 1{,}9\ r & \\
108^0 = & 1{,}884956\ r & \text{Wir setzen} \\
\hline
\text{Rest} & 0{,}015044\ r & \alpha_1 = 108^0\,51'\,43'' \\
51' = & 0{,}014835\ r & \text{und rechnen} \\
\hline
\text{Rest} & 0{,}000209\ r & n_1 \text{ nach A) aus:} \\
43'' = & 0{,}000208\ r &
\end{array}$$

$n_1 = \sin \alpha_1 - 0{,}5x_1 = 0{,}9463 - 0{,}95 = -0{,}0037$. Dieses $n_1$ ist schon erfreulich klein, doch wollen wir es noch genauer haben: Die Gleichung B liefert

$$Z_1 = \frac{-0{,}0037}{0{,}5 + 0{,}32322} = -0{,}0037 : 0{,}82322$$
$$= -370 : 82322 = -0{,}00449,$$

demnach $x_2 = x_1 + Z_1 = 1{,}9 - 0{,}00449 = 1{,}89551$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1{,}89551\ r \\ 108^0 & = & 1{,}88496\ r \\ \hline \text{Rest} & & 0{,}01055\ r \\ 36' & = & 0{,}01047\ r \\ \hline \text{Rest} & & 0{,}00008\ r \\ 16'' & = & 0{,}00008\ r \end{array}\right\} \alpha_2 = 108^0\,36'\,16''.$$

Hiermit bilden wir aufs neue den Ausdruck B:

$$n_2 = \sin x_2 - 0{,}5x_2 = 0{,}94774 - 0{,}94775 = -\,0{,}00001.$$

Dies n ist schon sehr klein, also $x_2$ eine ziemlich genaue Lösung. Um die Sache mit Aussicht auf Erfolg weiter zu treiben, würden nunmehr wohl siebenstellige Logarithmen nötig sein. Deshalb brechen wir ab und sagen:

Der Zentriwinkel eines Kreissegments, dessen Bogen doppelt so lang als die Sehne ist, ist $2\varphi = 217^0\,12'\,32''$.

Die Probe liefert: $a = 2r \sin \varphi = 1{,}89548\ r$, $b = 2r\varphi = 2 \,.\, 1{,}89551\ r$, also unterscheidet sich die Länge des Bogens von dem Doppelten der Sehne nur um 6 Einheiten der fünften Stelle, falls $r = 1$ gesetzt wird.

Die grösste Fläche, welche von einer Strecke a und einer die Endpunkte von a verbindenden zweiten Linie von der Länge 2a eingeschlossen werden kann, hat die Gestalt eines Kreissegments mit einem Zentriwinkel von $217^0\,12'\,32''$.

In Fig. 10 sind einige Figuren dargestellt, die alle dieselbe Grundlinie und denselben Umfang haben, und von denen jede die grösste ist, welche unter den gegebenen Bedingungen und bei gegebener Seitenzahl möglich ist: das grösste Dreieck, das gleichseitige; das grösste Viereck, der Dreischenkel; das grösste Fünfeck, der Vierschenkel, jedes ist immer grösser als das vorhergehende; und zuletzt die allergrösste Fläche, das „Maximum maximorum", das Kreissegment. Ich habe den Winkel logarithmisch berechnet und mit dem Transporteur gezeichnet, die Figur macht nicht auf Genauigkeit Anspruch, sie ist aber wohl ganz instruktiv.

X. Der grösste Kreissektor. Anschliessen möchte ich noch die folgende

Aufgabe. Wie gross ist der Zentriwinkel eines Kreissektors, der bei gegebenem Umfange den grössten Flächeninhalt oder, umgekehrt, bei grösster Fläche den geringsten Umfang besitzt?

Ist r der Radius, x der Zentriwinkel dieses Sektors, so soll

$$u = 2r + rx = \text{Min.},$$

$$F = \frac{1}{2}r^2x = \text{Const.}$$

sein. Elimination von x liefert

$$u = 2r + \frac{2\ F}{r}, \text{ mithin } u' = 2 - \frac{2\ F}{r^2},\ u'' = +\frac{4\ F}{r^3}.$$

Danach tritt bei gegebenem Inhalt das Minimum des Umfanges ein für $r^2 = F$, $x = 2$, ebenso bei gegebenem Umfange das Maximum der Fläche. Der Zentriwinkel ergibt sich in Graden so:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 2\ r \\ \hline 114^0 & = & 1{,}989675\ r \\ \text{Rest} & & 0{,}010325\ r \\ 35' & = & 0{,}010181\ r \\ \hline \text{Rest} & & 0{,}000144\ r \\ 30'' & = & 0{,}000145\ r \end{array}\right\} \alpha = 114^0\,35'\,30''.$$

Dieser Sektor (Fig. 11) hat interessante Eigenschaften: der geradlinige Teil seines Umfangs ist 2r, der krummlinige ebenfalls 2r, also jeder die Hälfte des ganzen Umfangs. Der Inhalt ist $r^2$, also derselbe wie der des Quadrats über r als Seite. Zeichne ich dieses über einem Endradius, so ist der Teil der Sektorfläche, welcher ausserhalb des Quadrats liegt, ebenso gross wie der Teil der Fläche des Quadrats, welcher ausserhalb des Sektors liegt, diese zwei Flächen, welche nicht kongruent sind, sind gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

# Dritter Teil.
## Über die größte Fläche, welche ein Linienzug von gegebener Zusammensetzung und gegebener Länge mit der Verbindungslinie seiner Endpunkte einschließen kann.

Wir spannen jetzt den Rahmen unseres Problems etwas weiter. Bei den letzten Betrachtungen hatten wir stets eine Seite des Polygons als gegeben angenommen, die „Basis", und dazu die anderen Seiten zusammen als einzeln oder ihrer Gesamtlänge nach gegeben; so konnten wir in jedem Falle sagen, wie die Figur beschaffen ist, die unter diesen Bedingungen den grössten Flächeninhalt hat; doch war sie nur unter diesen beiden Bedingungen das Maximum, nicht die absolut grösste Fläche. Wir geben jetzt noch die Basis AB frei, diese soll so gewählt werden, dass ein Linienzug, der, zunächst aus bestimmten Strecken in bestimmter Anordnung bestehend, von A ausgeht und in B endet, im Verein mit der Geraden AB eine möglichst grosse Fläche einschliesst. Auch hier gehen wir, wie im ersten Teile, schrittweise vor. Wir stellen also zunächst folgende Frage:

> Gegeben zwei Strecken $AB = c$ und $AC = b$, welche in A beweglich zusammenhängen. Wie müssen sie gelegt werden, damit, wenn ich B mit C verbinde, ein möglichst grosses Dreieck ABC entsteht?

Ist $\alpha$ der Winkel, den die Strecken bei A einschliessen, so ist der Inhalt des Dreiecks $\frac{1}{2}bc \sin \alpha$; und dies wird, bei gegebenem b und c, ein Maximum für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$.

> Von allen Dreiecken, die in zwei Seiten b und c übereinstimmen, ist dasjenige, welches in der beiden gemeinschaftlichen Ecke einen rechten Winkel besitzt, das grösste; die grösste Fläche, welche ein Dreieck mit den Seiten b und c haben kann, ist $\frac{1}{2}bc$.

Wir können es noch anders ausdrücken: Ein aus zwei Strecken $BA = c$ und $AC = b$ bestehender Linienzug soll mit seinen Endpunkten auf eine Gerade so gestellt werden, dass eine möglichst grosse Fläche entsteht.

> Der Abstand der Endpunkte BC muss zum Durchmesser des Halbkreises gemacht werden, auf welchem A liegt.

Dies kehrt nun immer wieder. Sind 3 Strecken $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ gegeben, die in den Punkten B und C beweglich zusammenhängen, und soll der offene Streckenzug ABCD durch die Verbindungslinie der Endpunkte, AD, so geschlossen werden, dass er im Verein mit AD eine möglichst grosse Fläche einschliesst, so müssen B und C auf dem Halbkreise liegen, dessen Durchmesser AD ist. Denn wenn ich (Fig. 12) die Diagonale AC ziehe: so möge das Dreieck ABC bereits so gross sein, als es nur kann; dann wird doch sicherlich die ganze Fläche nicht das gewünschte Maximum, wenn nicht das Dreieck ACD mit den gegebenen Seiten AC und CD auch möglichst gross wird. Damit dies geschieht, muss C auf dem Halbkreise über AD liegen. Und ebenso B. Mithin

> Von allen Vierecken, von welchen 3 Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ gegeben sind, ist dasjenige das grösste, dessen vierte Seite AD Durchmesser eines Halbkreises ist, auf welchem B und C liegen.

Nun kommt es darauf an, diese vierte Seite $AD = d$ so zu bestimmen, dass dies eintritt. Zum Ansatz dieser Aufgabe bieten sich zwei Wege. Einmal können wir den Ptolemäischen Lehrsatz benutzen: $e \cdot f = a \cdot c + bd$. Es ist aber $e^2 = d^2 - c^2$, $f^2 = d^2 - a^2$, also

$$d^4 - (a^2 + c^2)\, d^2 + a^2c^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2,\quad d^4 - (a^2 + b^2 + c^2)d^2 - 2abcd = 0.$$

$d = 0$ hat für unsere Aufgabe keinen Sinn (es würde das Dreieck mit den Seiten a, b, c erscheinen, als Minimalfläche?), also kommen wir auf die kubische Gleichung

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\, d - 2abc = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir können aber auch, ganz dem im ersten und zweiten Teile (S. 10 und S. 15) angewendeten Verfahren entsprechend, den allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz anwenden:

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta = a^2 + b^2 + 2abc \cos \delta,$$

$$\cos \delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2\,(ab + cd)} = \frac{c}{d}$$

woraus dieselbe kubische Gleichung folgt. Diese Gleichung ergibt sich übrigens, wie zu erwarten, auch, wenn wir den auf S. 16 gegebenen Ausdruck für die Fläche F des Sehnenvierecks benutzen und die Frage stellen, für welches d er bei gegebenem a, b, c ein Maximum wird. Der Radikand muss dann ein Maximum werden, und wenn wir ihn nach d differenzieren und den Differentialquotienten gleich Null setzen, erscheint dieselbe Gleichung. — Für einen speziellen Fall werde ihre Lösung gegeben. Nach Lampe*) S. 6 Aufg. IV ergibt sich für $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$ abgerundet der positive Wert $d = 6{,}1$, wonach Fig. 12 gezeicnet ist. Die anderen Wurzeln sind negativ, eine bedeutet das „überschlagene“ Sehnenviereck, in welchem d eine Diagonale ist.

Besteht der Streckenzug, dessen Endpunkte A und B so in eine Gerade gelegt werden sollen, dass er im Verein mit dieser eine möglichst grosse Fläche einschliesst, aus noch mehr gegebenen Strecken $AC_1 = a_1$, $C_1C_2 = a_2$, $C_2C_3 = a_3$ usf, so bleibt doch derselbe Schluss anwendbar: Verbinde ich $C_p$ mit A und B, so wird die Fläche nur dann ein Maximum, wenn das Dreieck $AC_pB$ es ist, dazu muss aber der Winkel $AC_pB$ ein rechter sein, also $C_p$ muss auf dem Halbkreise über AB liegen.

Damit ein gegebener Streckenzug $AC_1C_2 \ldots C_pB$ im Verein mit der Verbindungslinie AB seiner Endpunkte ein Maximum von Fläche einschliesse, muss AB Durchmesser eines Halbkreises werden, auf welchem alle C liegen.

Gebe ich nun aber auch noch die Länge der einzelnen Teile des Streckenzuges frei und verlange nur, dass er eine bestimmte Gesamtlänge haben soll, so kommt wiederum das Steinersche Verfahren in Anwendung; ist zunächst noch die Anzahl der Stücke, aus denen er besteht, als bestimmte Zahl gegeben, so müssen alle Stücke einander gleich werden. Denn das Viereck $C_p C_{p+1} C_{p+2} C_{p+3}$, welches die Diagonale $C_p C_{p+3}$ abschneidet, muss ein Dreischenkel sein, also die Seiten gleich, die Ecken müssen auf einem Kreise liegen, und das Dreieck $AC_pB$ muss rechtwinklig sein. — Ist n eine von den Zahlen, für welche das reguläre n-Eck konstruierbar ist, so lässt sich auch dieser Streckenzug mit seinem Halbkreise zeichnen.

Geben wir endlich auch die Anzahl n der Stücke des Streckenzuges frei und behalten wir seine Gesamtlänge l als gegeben, so erscheint die grösste Fläche — den Schluss brauche ich wohl nicht zu wiederholen — dann, wenn n möglichst gross wird, und das ist der Halbkreis.

> Wenn eine (irgendwie gestaltete) Linie von der Länge l in Verein mit der geraden Verbindungslinie AB ihrer Endpunkte eine möglichst grosse Fläche einschliessen soll, so muss ein Halbkreis aus ihr geformt werden, dessen Durchmesser AB wird. Es ist dann $AB = \frac{2l}{\pi}$
>
> uund die grösste Fläche wird $\frac{l^2}{2\pi}$.

Diese Fläche hat also doppelten Inhalt wie ein Kreis mit dem Umfange l (S. 13), das steht aber mit unseren Resultaten nicht im Widerspruch, denn der Halbkreis mit dem Bogen l hat eben grösseren Umfang als der Kreis.

---

*) Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen. Berlin. H. W. Müller 1877.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

# Anhang.

Nachdem ich so das, was ich mir vorgenommen hatte, erledigt habe, möchte ich zum Schluss noch auf ein verwandtes Maximalproblem eingehen wegen der schönen Anwendung auf die Lehre vom Wurf, die es gestattet. Ich verdanke dies Heger.*)

Wenn E der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD eines Vierecks ist und diese sich unter dem Winkel $\varepsilon$ schneiden, so lässt sich die Vierecksfläche als Summe von 4 Dreiecken so ausdrücken.

$$F = \frac{1}{2} EA \,.\, EB \sin \varepsilon + \frac{1}{2} EB \,.\, EC \sin \varepsilon + \frac{1}{2} EC \,.\, ED \sin \varepsilon + \frac{1}{2} ED \,.\, EA \sin \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} (EA \,.\, EB + EC \,.\, EB + EA \,.\, ED + EC \,.\, ED) \sin \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} (EA + EC)(EB + ED) \sin \varepsilon = \frac{1}{2} AC \,.\, BD \sin \varepsilon.$$

Denselben Inhalt wie ein Viereck hat ein Dreieck, von welchem zwei Seiten den Vierecksdiagonalen gleich sind und denselben Winkel wie diese einschliessen.

Bei gegebenen Diagonalen erhält man daher das grösste (im übrigen noch nicht bestimmte) Viereck, wenn diese Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Von allen Parallelogrammen mit denselben beiden Diagonalen ist der Rhombus das grösste. Von allen Rechtecken, die in der Diagonale übereinstimmen, ist das Quadrat das grösste

Das lässt sich natürlich auch einfacher beweisen. Wir wenden es nun auf den schiefen Wurf an

Mit der Anfangsgeschwindigkeit a werde ein Projektil unter bestimmtem Elevationswinkel geworfen Ich zerlege a in eine horizontale und eine vertikale Komponente, erstere sei $a_1$, letztere $a_2$. Die Abszisse des geworfenen Punktes ist nach t Sekunden $x = a_1 t$, seine Ordinate $y = a_2 t - \frac{1}{2} g t^2$. Das Geschoss erreicht die Horizontale zum zweitenmale, wenn $y = 0$, d. h. ($t = 0$ ist der Augenblick, wo der Wurf beginnt) wenn $t = a_2 : \frac{1}{2} g$ wird. Also die horinzotale Wurfweite ist $w = \frac{a_1 \,.\, a_2}{\frac{1}{2} g}$. Das lässt sich sehr hübsch konstruieren. Ist es doch nichts anderes als die Aufgabe, ein Rechteck mit den Seiten $a_1$ und $a_2$ in ein anderes zu verwandeln, von welchem die eine (vertikale) Seite $\frac{1}{2} g$ gegeben ist, mit Hilfe der Ergänzungsparallelogramme leicht ausführbar.

Die horizontale Wurfweite hängt nur von $a_1 \,.\, a_2$, von der Fläche des Komponentenrechtecks, ab, sie ist dieselbe in allen Fällen, in welchen diese Fläche dieselbe ist.

Bewegt sich der Endpunkt der Strecke, welche die Anfangsgeschwindigkeit darstellt, auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Vertikale und die Horizontale durch den Anfangspunkt sind, so wird allemal derselbe Punkt der Horizontalen getroffen. Vor allem aber: die horizontale Wurfweite ändert sich nicht, wenn $a_1$ und $a_2$ vertauscht werden: Flachschuss und Bogenschuss geben dieselbe Wurfweite, wenn die Elevationswinkel Komplemente sind oder von $45^0$ gleich viel abweichen. Und das Maximum wird erreicht, wenn jenes Rechteck möglichst gross wird; seine Diagonale ist gegeben, sie ist die Anfangsgeschwindigkeit a, so tritt das Maximum dann ein, wenn das Komponentenrechteck ein Quadrat wird, der Elevationswinkel $45^0$ beträgt.

Das lässt sich also ohne Trigonometrie zeigen.

*) Heger, Die Erhaltung der Arbeit. Hellwing, Hannover 1896.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Nachdem ich so das, w[…] habe, möchte ich zum Schluss noch auf ein verwandtes Maximalprobl[…]lung auf die Lehre vom Wurf, die es gestattet. Ich verdanke […]

Wenn E der Schnittpun[…]Vierecks ist und diese sich unter dem Winkel ε schneiden, so läss[…]n 4 Dreiecken so ausdrücken.

$$F = \frac{1}{2} EA \,.\, EB \sin \varepsilon \; […] \sin \varepsilon + \frac{1}{2} ED \,.\, EA \sin \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} (EA \; […] \,.\, ED) \sin \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} (EA \; […] \,.\, BD \sin \varepsilon.$$

Denselben […]ck, von welchem zwei Seiten den Vierecksdiagonalen g[…]iese einschliessen.

Bei gegebenen Diagonal[…]rigen noch nicht bestimmte) Viereck, wenn diese Diagonalen aufeinand[…]

Von allen I[…] Diagonalen ist der Rhombus das grösste. Von allen I[…]stimmen, ist das Quadrat das grösste

Das lässt sich natürlich […] es nun auf den schiefen Wurf an

Mit der Anfangsgeschwi[…]stimmtem Elevationswinkel geworfen Ich zerlege a in eine horizontale[…]e sei $a_1$, letztere $a_2$. Die Abszisse des geworfenen Punktes ist nach[…]$y = a_2t - \frac{1}{2}gt^2$. Das Geschoss erreicht die Horizontale zum zw[…] ist der Augenblick, wo der Wurf beginnt) wenn $t = a_2 : \frac{1}{2}g$ wir[…] $w = \frac{a_1 \,.\, a_2}{\frac{1}{2}g}$. Das lässt sich sehr hübsch konstruieren. Ist es doc[…]Rechteck mit den Seiten $a_1$ und $a_2$ in ein anderes zu verwandeln, v[…]g gegeben ist, mit Hilfe der Ergänzungsparallelogramme leicht a[…]

Die horizontale Wurfwe[…]che des Komponentenrechtecks, ab, sie ist dieselbe in allen Fällen, […]

Bewegt sich der Endp[…]geschwindigkeit darstellt, auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren A[…]ntale durch den Anfangspunkt sind, so wird allemal derselbe Punkt[…]n aber: die horizontale Wurfweite ändert sich nicht, wenn $a_1$ und […] Bogenschuss geben dieselbe Wurfweite, wenn die Elevationswinkel […]viel abweichen. Und das Maximum wird erreicht, wenn jenes Recht[…]de ist gegeben, sie ist die Anfangsgeschwindigkeit a, so tritt das M[…]ntenrechteck ein Quadrat wird, der Elevationswinkel $45^0$ beträgt.

Das lässt sich also ohn[…]

*) Heger, Die Erhaltung d[…]

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

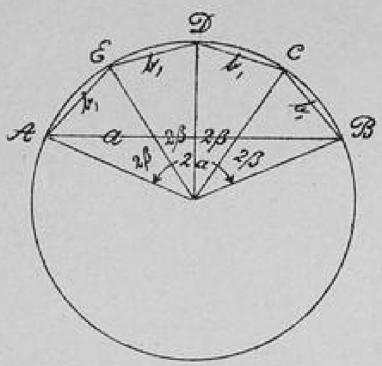



Fig. 9a

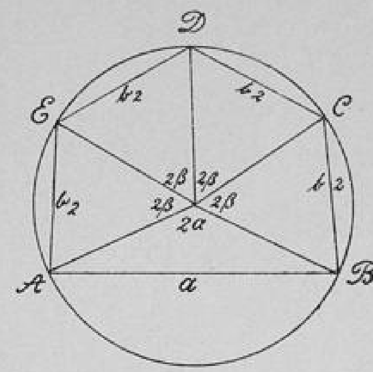



Fig. 9b

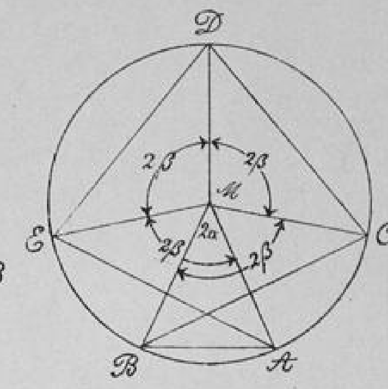



Fig. 9c

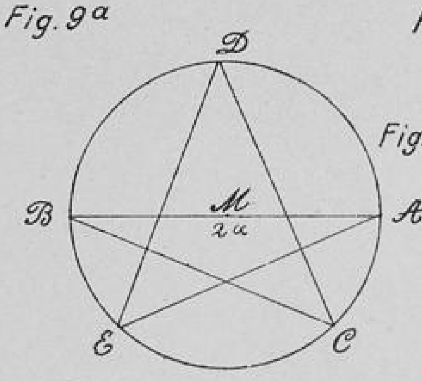



Fig. 9c'

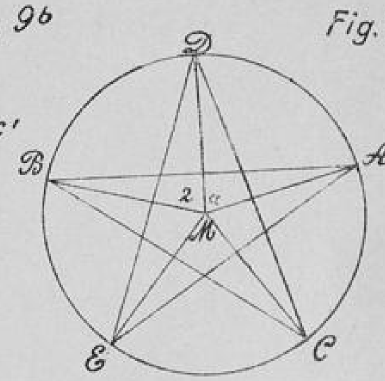



Fig. 9d

Fig. 10.

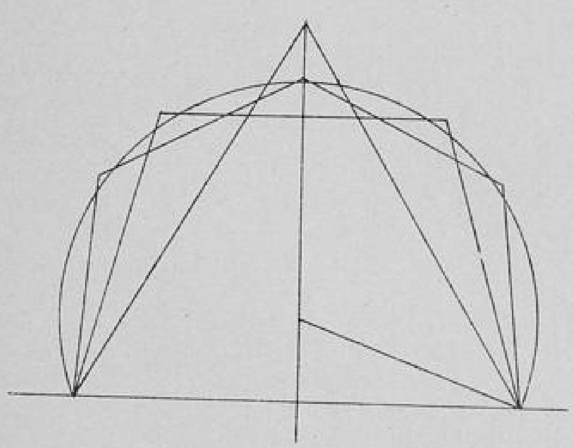


Fig. 11.

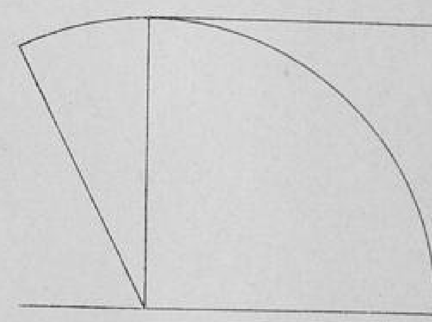
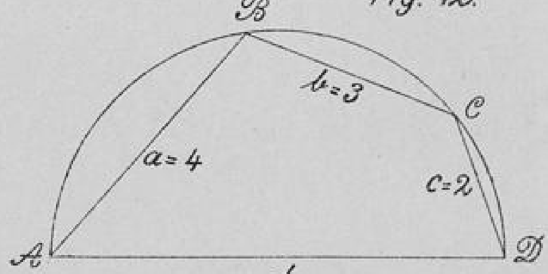
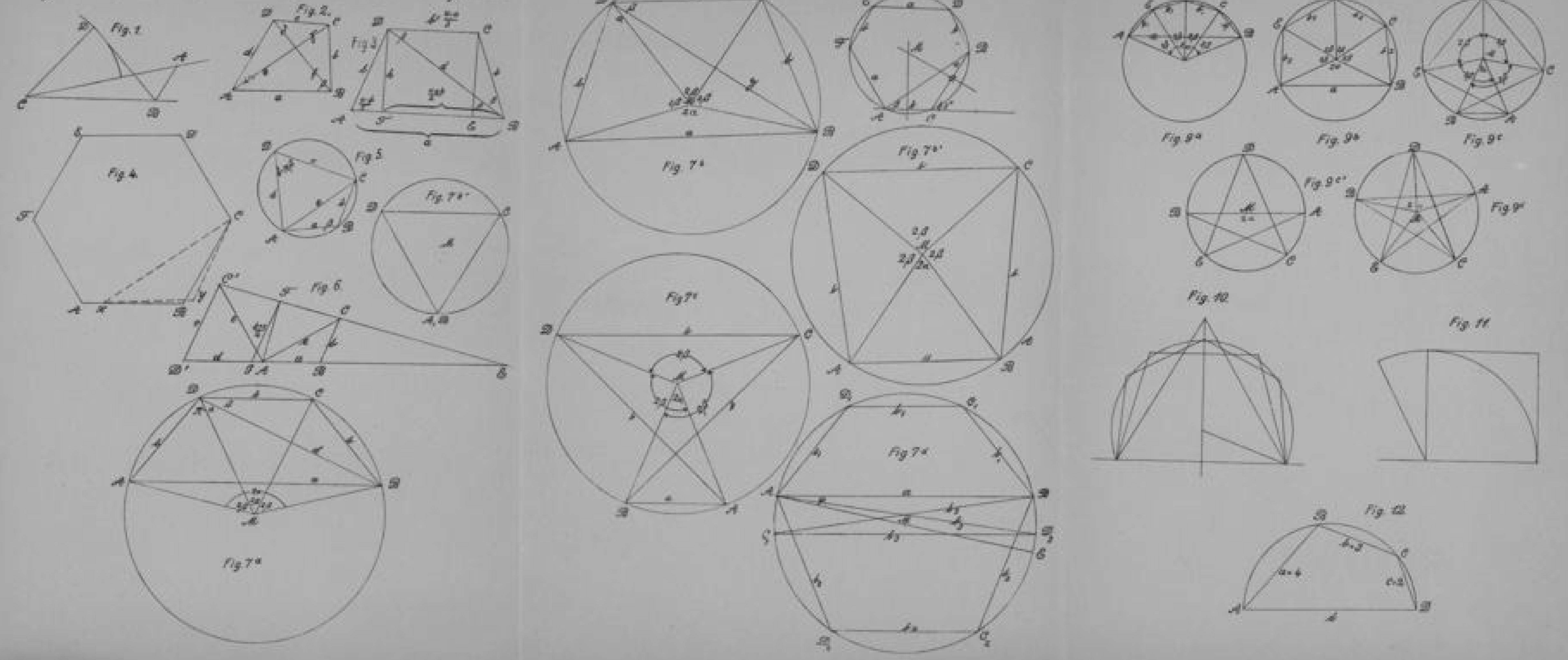


Fig. 12.




Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Figuren zu Dr. Karl Rochow, „der Kreis als Maximalfläche."




Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf