§ 1. **Definition der Kurven.** Im zweiten Buche seiner Geometrie spricht Descartes »de certaines ovales que vous verrez être très-utiles pour la théorie de la catoptrique«. Diese Kurven, welche man heutzutage gewöhnlich Cartesische Ovale nennt und welche in der Theorie der Brennlinien eine gewisse Rolle spielen — die Diacaustica eines Kreises ist die Evolute eines Cartesischen Ovals — können in folgender Weise definiert werden: Es sind zwei feste Punkte A und B gegeben; ein die Kurve beschreibender Punkt M bewegt sich derart, dass seine Abstände von A und B der Relation: p. MA + q. MB = a genügen, oder:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots p\, r_{,} + q\, r_{,,} = a.$$

Hierin bedeuten p und q zwei konstante Zahlen und a eine gegebene Strecke. Mit Hilfe dieser Gleichung können die Kurven leicht durch Konstruktion bestimmt werden. Zu diesem Zwecke berechne man aus (1) zwei zusammengehörige Werte von $r_{,}$ und $r_{,,}$ und beschreibe mit ihnen als Radien Kreise um A und B; deren Schnittpunkte geben alsdann zwei Punkte der Kurve. Damit sich die beiden Kreise in reellen Punkten durchschneiden, ist erforderlich, dass

$$r_{,} + r_{,,} \geqq e \geqq \pm (r_{,} - r_{,,})$$

ist, wobei stets die absoluten Werte von $r_{,}$ und $r_{,,}$ zu berücksichtigen sind. Die Grösse e bedeutet hierbei den Abstand der beiden Fundamentalpunkte A und B, also AB = e. Wir erfahren aus dieser Konstruktion, dass die Gerade AB eine Symmetrieachse der Kurve ist und dass letztere aus zwei getrennten Ovalen besteht, von denen das eine ganz innerhalb des andern liegt. Descartes selbst war der Meinung, dass die Kurve nur aus einem einzigen Ovale bestände.

Eine andere von Newton herrührende Erzeugungsweise des Cartesischen Ovals, welche an die der Kegelschnitte erinnert, ist die folgende: Es sind zwei feste Kreise gegeben und es wird der Ort eines Punktes gesucht, dessen Abstände von diesen Kreisen ein konstantes Verhältnis zu einander haben. Wählen wir nämlich die Zentrale AB = e der beiden Kreise als x-Achse und A als Anfangspunkt, bezeichnen die Radien der beiden Kreise mit a und b und das konstante Verhältnis durch $-\frac{q}{p}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - a}{\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - b} = -\frac{q}{p},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $r_, = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $r_{,,} = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$ setzen:

$$\frac{r_, - a}{r_{,,} - b} = -\frac{q}{p}, \text{ folglich}$$
$$p\, r_, + q\, r_{,,} = ap + bq,$$

welche Gleichung der Form nach mit (1) übereinstimmt. — Wir wollen nun im Folgenden einige Eigenschaften der Cartesischen Ovale auf analytischem Wege abzuleiten versuchen. [1]

§ 2. **Die Gleichung der Kurve.** Wir beginnen mit der Aufstellung der Polargleichung des Cartesischen Ovals. Zu dem Zwecke wählen wir wieder A als Anfangspunkt und AB als Polarachse. Der Kosinussatz ergiebt:

$$r_{,,}^2 = e^2 + r_,^2 - 2\, er_, \cos\theta,$$

wo Winkel MAB $= \theta$ gesetzt wurde. Andrerseits ergiebt sich aus (1):

$$r_{,,}^2 = \frac{1}{q^2}(a - pr_,)^2, \text{ folglich:}$$

$$e^2 + r_,^2 - 2\, er_, \cos\theta = \frac{1}{q^2}(a - pr_,)^2,$$

oder geordnet, und nach Weglassung des Index:

$$(2) \;.\;.\; (p^2 - q^2)\, r^2 - 2\,(ap - q^2e \cos\theta)\, r + a^2 - q^2e^2 = 0.$$

Dies ist die Polargleichung des Cartesischen Ovals. [2] Hätten wir umgekehrt den Punkt B als Anfangspunkt gewählt und die Gerade BA als positive Achse, so hätten wir die Gleichung:

$$(2a) \;.\;.\; (p^2 - q^2)\, r^2 + 2\,(aq - p^2e \cos\theta)\, r - (a^2 - p^2e^2) = 0$$

gefunden, wo nun Winkel MBA $= \theta$ ist.

Nicht so einfach gestaltet sich die Gleichung der Kurve in rechtwinkligen Koordinaten. Durch Substitution von

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\; \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ geht (2) über in:}$$

$$(3) \;.\; (p^2 - q^2)^2 (x^2 + y^2)^2 + 4q^2 (p^2 - q^2)\, ex\, (x^2 + y^2) + 4q^4 e^2 x^2 - 2\,(p^2 + q^2)\, a^2 (x^2 + y^2) - 2q^2 (p^2 - q^2)\, e^2 (x^2 + y^2) + 4q^2 (a^2 - q^2 e^2)\, ex + (a^2 - q^2 e^2)^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass das Cartesische Oval eine Kurve vierter Ordnung ist, welche symmetrisch zur x-Achse liegt, wie wir bereits oben bei der Konstruktion der Kurve erkannt haben. Dagegen liegt die Kurve nicht symmetrisch zur y-Achse; auch kann die Gleichung (3) durch Koordinatentransformation nicht so umgeformt werden, dass

[1] Vou Litteratur stand dem Verfasser nur das Werk von Loria, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, zur Verfügung.

[2] Die Gleichung (2) ist die Polargleichuug der Kurve in Bezug auf ein Bipolarsystem.

die neue y-Achse eine Symmetrieachse der Kurve würde. Dagegen lassen sich aus (3) die Glieder dritter Dimension fortschaffen.

Verschieben wir nämlich den Anfangspunkt längs der x-Achse um eine bestimmte Strecke, indem wir:

$$(4) \;\ldots\ldots\; x = \xi - \frac{eq^2}{p^2 - q^2};\; y = \eta$$

setzen, so geht (3) über in:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2.\, \frac{a^2(p^2+q^2) + e^2 p^2 q^2}{(p^2-q^2)^2}(\xi^2+\eta^2) + \frac{8p^2q^2a^2e}{(p^2-q^2)^3}\xi$$
$$+ \frac{a^4(p^2-q^2)^2 - 2a^2e^2p^2q^2(p^2+q^2) + e^4p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} = 0.$$

Um dieser Gleichung eine übersichtlichere Form zu geben, führen wir drei Hilfsgrössen ein, indem wir setzen:

$$(5) \;..\; \begin{cases} P^2 = \dfrac{a^2(p^2+q^2) + e^2p^2q^2}{(p^2-q^2)^2} \\ Q^3 = \dfrac{p^2q^2a^2e}{(p^2-q^2)^3} \\ R = \dfrac{a^2 + e^2(p^2+q^2)}{e(p^2-q^2)} \end{cases}$$

Dann ergiebt sich:

$$(\xi^2+\eta^2)^2 - 2P^2(\xi^2+\eta^2) + 8Q^3\xi + P^4 - 4Q^3R = 0, \text{ oder}$$

$$(6) \;..\; (\xi^2 + \eta^2 - P^2)^2 + 4Q^3(2\xi - R) = 0.$$

Von dieser Gleichung werden wir später einen ausgiebigen Gebrauch machen.

Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, welche Annahmen in Betreff der beiden Zahlen p und q gemacht werden dürfen, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen. Zunächst ist klar, dass wir p und q als ganze Zahlen voraussetzen dürfen; denn wären es Brüche, so könnten wir die Gleichung (1) durch Multiplikation so umformen, dass die Koeffizienten von $r_,$ und $r_{,,}$ als ganze Zahlen erscheinen. Ebenso können p und q als relative Primzahlen angenommen werden; denn hätten sie einen gemeinsamen Faktor, so könnten wir (1) durch denselben dividieren, wodurch p und q relativ prim würden. Ferner geht aus (3) hervor, dass wir uns auf positive Werte von p und q beschränken dürfen, da jene Gleichung nur gerade Potenzen dieser Zahlen enthält. Endlich können wir $p > q$ voraussetzen; denn wäre umgekehrt $q > p$, so hätten wir nur nötig, die beiden Fundamentalpunkte A und B und also auch p und q mit einander zu vertauschen. Die Gleichung (3) geht nämlich in diesem Falle über in:

$$(p^2-q^2)^2(x^2+y^2)^2 - 4p^2(p^2-q^2)ex(x^2+y^2) + 4p^4e^2x^2 - 2a^2(p^2+q^2)(x^2+y^2)$$
$$+ 2p^2(p^2-q^2)e^2(x^2+y^2) + 4p^2(a^2-p^2e^2)ex + (a^2-p^2e^2)^2 = 0.$$

Verlegen wir dann aber den Anfangspunkt nach B und geben gleichzeitig der positiven x-Achse die entgegengesetzte Richtung, indem wir $e - x$ statt x schreiben, so geht obige Gleichung wieder in (3) über.

Alle diese Annahmen über die Zahlen p und q sollen im Folgenden stets als erfüllt angesehen werden, so dass wir, falls von irrationalen Werten abgesehen wird, als die einfachsten Fälle des Cartesischen Ovals die folgenden haben:

$$2r_, + r_{,,} = a;\; 3r_, + r_{,,} = a;\; 3r_, + 2r_{,,} = a;$$
$$4r_, + r_{,,} = a;\; 4r_, + 3r_{,,} = a;\; \text{u. s. w.}$$

§ 3. **Spezialfälle**. Unter gewissen Bedingungen degeneriert das Cartesische Oval in einen Kegelschnitt. Ist nämlich $p = \pm q$, so geht (3) über in:

$$x^2(a^2 - p^2e^2) + a^2y^2 - (a^2 - p^2e^2)\,ex = \frac{(a^2 - p^2e^2)^2}{4p^2},$$

oder, wenn wir die Mitte von AB als neuen Anfangspunkt wählen, indem wir $x + \frac{e}{2}$ statt x schreiben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - p^2e^2} = \frac{1}{4p^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $a^2 \gtrless p^2e^2$ ist. Die Hauptachse hat den Wert $\frac{a}{p}$, die Nebenachse $\frac{1}{p}\sqrt{a^2 - p^2e^2}$ resp. $\frac{1}{p}\sqrt{p^2e^2 - a^2}$. Die beiden Fundamentalpunkte A und B sind die Brennpunkte des Kegelschnitts. Uebrigens wird sich später herausstellen, dass auch im allgemeinen Falle A und B zwei Brennpunkte der Kurve sind. —

Nehmen wir ferner an, dass $q = 0$ ist, so geht (3) über in:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{p^2}\right)^2 = 0$$

und dies ist ein (doppelt zu zählender) Kreis, dessen Zentrum in A liegt und dessen Radius $= \frac{a}{p}$ ist. Analog erhalten wir für $p = 0$:

$$q^4(x^2 + y^2)^2 - 4q^4ex(x^2 + y^2) + 4q^4e^2x^2 - 2a^2q^2(x^2 + y^2)$$
$$+ 2e^2q^4(x^2 + y^2) + 4q^2(a^2 - q^2e^2)\,ex + (a^2 - q^2e^2)^2 = 0,$$

oder, wenn wir den Anfangspunkt nach B verlegen und demnach $x + e$ statt x schreiben:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{q^2}\right)^2 = 0,$$

d. h. auch in diesem Falle degeneriert die Kurve in einen (doppelt zu zählenden) Kreis, der um den Punkt B mit dem Radius $\frac{a}{q}$ beschrieben ist. Alle diese Resultate hätten wir auch aus der Polargleichung (2) resp. (2a) ableiten können.

Fallen die beiden Brennpunkte A und B zusammen, ist also $e = o$, so geht (2) über in:

$$\left[r(p+q) - a\right] . \left[r(p-q) - a\right] = o,$$

und die Kurve besteht dann aus zwei konzentrischen Kreisen mit den

Radien $\frac{a}{p+q}$ und $\frac{a}{p-q}$.

Ist ferner die Grösse $a = o$, so geht (2) über in:

$$(p^2 - q^2)(x^2 + y^2) + 2q^2 ex - q^2 e^2 = o$$

und dies ist ein Kreis, dessen Radius $= \frac{ep\,q}{p^2 - q^2}$ ist und dessen Zentrum auf der x-Achse im Abstande $x = \frac{-eq^2}{p^2 - q^2}$ vom Anfangspunkte A liegt. Wir kommen damit auf den Apollonischen Lehrsatz zurück.

Endlich betrachten wir noch den Spezialfall $q = \pm\frac{a}{e}$. Die Polargleichung (2) geht dann über in:

$$(a^2 - e^2 p^2)\, r + 2ae(ep - a\cos\vartheta) = o,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2 - 2fx)^2 - h^2(x^2 + y^2) = o,$$

wo zur Abkürzung:

$$f = \frac{a^2 e}{a^2 - e^2 p^2}, \quad h = \frac{2ae^2 p}{a^2 - e^2 p^2}$$

gesetzt wurde. Daraus folgt, dass das Cartesische Oval in dem besondern Falle $q = \pm\frac{a}{e}$ gleichbedeutend mit einer Pascal'schee Schneckenlinie ist. Dasselbe ergiebt sich natürlich für $p = \pm\frac{a}{e}$, wenn wir die Gleichung (2a) berücksichtigen.

Alle diese Spezialfälle sollen im Folgenden ausgeschlossen werden.

§ 4. **Parametrische Darstellung**. Wenn wir die Gleichung (3) nach y^2 auflösen, so ergiebt sich:

$$(7) \;.\;.\; y^2(p^2 - q^2)^2 = a^2(p^2 + q^2) + e^2 q^2 (p^2 - q^2) - 2q^2 ex(p^2 - q^2) - (p^2 - q^2)^2 x^2 \pm 2pqa\sqrt{a^2 + e^2(p^2 - q^2) - 2ex(p^2 - q^2)}.$$

Um die Irrationalität zu beseitigen, setzen wir:

$$a^2 + e^2(p^2 - q^2) - 2ex(p^2 - q^2) = a^2\lambda^2,$$

wo λ ein beliebiger Parameter ist. Folglich ist:

$$(8) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x = \frac{a^2(1-\lambda^2) + e^2(p^2 - q^2)}{2e(p^2 - q^2)}.$$

Substituieren wir diesen Wert in (7), so ergiebt sich:

$$(9) \;.\;.\;.\;.\;.\; 4e^2y^2(p^2 - q^2)^2 = 4a^2e^2(p \mp q\lambda)^2 - [a^2(1-\lambda^2) + e^2)(p^2 - q^2)]^2.$$

Diese beiden Gleichungen (8) und (9) geben eine parametrische Darstellung der Kurve. Berücksichtigen wir in (9) das obere Vorzeichen, so erhalten wir nach einigen leichten Umformungen:

$$(10) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 4e^2y^2(p^2 - q^2)^2 =$$

$$\Big[e(p+q) + a(1-\lambda)\Big] \cdot \Big[e(p-q) + a(1+\lambda)\Big] \cdot$$

$$\Big[e(p+q) - a(1-\lambda)\Big] \cdot \Big[a(1+\lambda) - e(p-q)\Big].$$

Analog ergiebt sich für das untere Vorzeichen:

$$(11) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 4e^2y^2(p^2 - q^2)^2 =$$

$$\Big[e(p+q) + a(1+\lambda)\Big] \cdot \Big[e(p-q) + a(1-\lambda)\Big] \cdot$$

$$\Big[e(p+q) - a(1+\lambda)\Big] \cdot \Big[a(1-\lambda) - e(p-q)\Big].$$

Um eine Anwendung dieser Formeln zu geben, wollen wir die Längen für zwei zusammengehörige Brennstrahlen des Ovals berechnen. Es ist:

$$r_{,}^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2(p \pm q\lambda)^2}{(p^2 - q^2)^2}, \text{ folglich}$$

$$(12) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; r_{,} = \frac{a(p \pm q\lambda)}{p^2 - q^2}.$$

Ebenso ist:

$$r_{,,}^2 = (e - x)^2 + y^2 = \frac{a^2(q \pm p\lambda)^2}{(p^2 - q^2)^2}, \text{ folglich}$$

$$(13) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; r_{,,} = \frac{a(q \pm p\lambda)}{p^2 - q^2}.$$

In diesen Gleichungen (12) und (13) haben wir die obern, resp. untern Vorzeichen zu kombinieren. Damit die Relation (1) erfüllt wird, müssen wir $r_{,,}$ negativ nehmen. Beide Brennstrahlen werden einander gleich für $\lambda = \pm 1$; in diesem Falle ist, absolut genommen:

$$r_{,} = r_{,,} = \frac{a}{p-q} \text{ für das äussere Oval, und}$$

$$r_{,} = r_{,,} = \frac{a}{p+q} \text{ für das innere Oval.}$$

§ 5. **Die Asymptoten.** Um die Asymptotenrichtungen des Cartesischen Ovals zu finden, setzen wir in (3) die Glieder höchster Dimension gleich Null und zerlegen die linke Seite dieser Gleichung in lineare Faktoren. Dies giebt:

$$(x + iy)^2 . (x - iy)^2 = o.$$

Die Kurve hat demnach vier imaginäre Asymptotenrichtungen, welche paarweise zusammenfallen. Folglich ist sie ganz im Endlichen gelegen und hat keine unendlichen Äste, wie wir bereits aus ihrer Konstruktion erfahren haben. Jede Gerade, deren Gleichung von der Form:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x \pm iy = h$$

ist, hat mit der Kurve zwei imaginäre Punkte im Unendlichen gemein; denn eliminieren wir aus (14) und (3) eine der Veränderlichen, so erniedrigt sich der Grad der Gleichung um zwei Einheiten. Wir schliessen daraus, dass die Kurve im Unendlichen zwei imaginäre Doppelpunkte besitzt. Dieselben fallen mit den imaginären Kreispunkten zusammen, d. h. das Cartesische Oval ist eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung. Führen wir die oben erwähnte Elimination aus, so ergiebt sich:

$$\left[h (p^2 - q^2) + eq^2\right]^2 x^2 + Mx + N = o,$$

wo M und N zwei konstante Grössen bedeuten. Um nun die Tangenten (Asymptoten) jener beiden Doppelpunkte zu bestimmen, haben wir über die Grösse h derart zu verfügen, dass sich der Grad der Gleichung (3) um drei Einheiten erniedrigt. Folglich müssten wir

$$\left[h (p^2 - q^2) + eq^2\right]^2 = o$$

setzen, woraus sich dann für h die beiden gleichen Werte

$$h = -\frac{eq^2}{p^2 - q^2}$$

ergeben. Demnach fallen die beiden Tangenten jedes Doppelpunktes in eine Gerade zusammen, oder mit andern Worten: Die imaginären Kreispunkte sind zwei Rückkehrpunkte der Kurve. Die beiden Rückkehrtangenten entsprechen den Gleichungen:

$$x + iy + \frac{eq^2}{p^2 - q^2} = o; \quad x - iy + \frac{eq^2}{p^2 - q^2} = o.$$

Ihr Schnittpunkt ist reell, nämlich:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad x = -\frac{eq^2}{p^2 - q^2}; \; y = o.$$

Dieser Punkt ist ein ausserordentlicher Brennpunkt der Kurve; wir wollen ihn mit F bezeichnen. Er liegt links von A auf der negativen x-Achse. Wählen wir F als neuen Anfangspunkt, so haben wir die Substitutionen (4) vorzunehmen, woraus hervorgeht, dass die Gleichung (6) das Cartesische

Oval darstellt unter der Voraussetzung, dass sein ausserordentlicher Brennpunkt F als Anfangspunkt gewählt wird.

§ 6. **Die Brennpunkte des Ovals.** Um zu untersuchen, ob die Kurve ausser F noch andere Brennpunkte hat, betrachten wir die Gerade:

$$\eta - y = i(\xi - x),$$

und stellen die Bedingung dafür auf, unter welcher sie die Kurve (6) berührt. Eliminieren wir η aus beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$4z^2\xi^2 - 4(z^3 + P^2z - 2Q^3)\xi - 4Q^3R + (z^2 + P^2)^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung $x + iy = z$ gesetzt wurde. Damit diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln in ξ hat, ist erforderlich, dass:

$$z^3 - Rz^2 + P^2z - Q^3 = 0$$

ist. Diese kubische Gleichung hat aber die drei Wurzeln:

$$z_{,} = \frac{eq^2}{p^2 - q^2},\quad z_{,,} = \frac{ep^2}{p^2 - q^2},\quad z_{,,,} = \frac{a^2}{e(p^2 - q^2)},$$

wie sich leicht ergiebt, wenn wir die Gleichungen (5) beachten und berücksichtigen, dass

$$z_{,} + z_{,,} + z_{,,,} = R;\quad z_{,}z_{,,} + z_{,}z_{,,,} + z_{,,}z_{,,,} = P^2;\quad z_{,}z_{,,}z_{,,,} = Q^3$$

sein muss. Setzen wir nun in obigen Wurzelwerten den reellen und den imaginären Teil einzeln gleich Null, so ergeben sich folgende drei Brennpunkte:

$$(16)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{aligned} x_{,} &= \frac{eq^2}{p^2 - q^2},\quad y_{,} = 0 \\ x_{,,} &= \frac{ep^2}{p^2 - q^2},\quad y_{,,} = 0 \\ x_{,,,} &= \frac{a^2}{e(p^2 - p^2},\quad y_{,,,} = 0. \end{aligned}\right.$$

Die beiden ersten fallen mit den beiden Fundamentalpunkten A und B zusammen, die wir daher gleich von vornherein als Brennpunkte bezeichnet haben. Der dritte aber ist ein neuer Brennpunkt, den wir mit C bezeichnen wollen. Das Cartesische Oval hat demnach im Ganzen vier reelle Brennpunkte, A, B, C und F, welche sämtlich auf der x-Achse gelegen sind. Ihre Aufeinanderfolge ist verschieden, je nach den Werten von a, e, p und q. Falls $a > ep$ ist, haben wir die Reihenfolge F, A, B, C. Wenn aber $ep > a > eq$, so haben wir die Folge F, A, C, B; und ist endlich $eq > a$, so ist die Reihenfolge F, C, A, B. Von diesen 4 Brennpunkten können bei einem eigentlichen Cartesischen Oval niemals zwei zusammenfallen; nur wenn das Oval in eine Pascal'sche Schneckenlinie übergeht, also $a = ep$, resp. $a = eq$ ist, fällt C mit B, resp. mit A zusammen. Auch ist es ausgeschlossen, dass einer der Brennpunkte A, B oder C auf der Kurve selbst liegt. Denn substituieren wir die Werte (16) der Reihe nach in die Gleichung (6), so ergeben sich die Relationen:

$$(a^2 - e^2q^2)^2 = 0;\quad (a^2 - e^2p^2)^2 = 0$$
$$\text{und}\ (a^2 - e^2p^2)^2\,(a^2 - e^2q^2)^2 = 0,$$

welche für ein eigentliches Cartesisches Oval nicht erfüllt sein können. Dagegen ist es möglich, dass der ausserordentliche Brennpunkt F auf der Kurve selbst liegt. Dies wird nämlich unter der Bedingung $P^4 - 4Q^3 R = 0$ der Fall sein, oder, falls wir die linke Seite in Faktoren zerlegen, wenn:

$$\left[a(p+q) - epq\right] \cdot \left[a(p-q) + epq\right] \cdot \left[a(p+q) + epq\right] \cdot \left[a(p-q) - epq\right] = 0$$

ist. Der Punkt F wird also auf der Kurve selbst liegen, entweder wenn $a(p+q) - epq = 0$, oder wenn $a(p-q) - epq = 0$ ist.

§ 7. **Die Brennstrahlen.** Wir wollen zunächst die Längen der Brennstrahlen eines Punktes M des Ovals berechnen. Es ist $(MF)^2 = \xi^2 + \eta^2$, oder wenn wir die Gleichung (6) beachten:

$$(MF)^2 = P^2 \pm 2\sqrt{Q^3(R - 2\xi)},$$

wo das obere Zeichen dem äussern und das untere dem innern Ovale entspricht. Verstehen wir nun unter zwei konjugierten Kurvenpunkten $M_,$ und $M_{,,}$ zwei Punkte, welche derselben Abscisse entsprechen und von denen der eine auf dem äussern, der andere auf dem innern Ovale liegt, so ist:

$$(M_,F)^2 = P^2 + 2\sqrt{Q^3(R - 2\xi)},$$

$$(M_{,,}F)^2 = P^2 - 2\sqrt{Q^3(R - 2\xi)}$$

folglich $(M_,F)^2 + (M_{,,}F)^2 = 2P^2$,

d. h. die Brennstrahlen zweier konjugierten Kurvenpunkte (in Bezug auf den ausserordentlichen Brennpunkt) bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse eine konstante Länge hat.

Um die Berechnung der andern Brennstrahlen MA, MB und MC zu vereinfachen, wollen wir die Abscissen dieser Brennpunkte mit α, β, γ bezeichnen; wir setzen also:

$$(17) \; . \; . \; \alpha = \frac{eq^2}{p^2 - q^2}; \; \beta = \frac{ep^2}{p^2 - q^2}; \; \gamma = \frac{a^2}{e(p^2 - q^2)};$$

dann haben wir die Relationen:

$$(18) \; . \; . \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = R \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = P^2 \\ \alpha\beta\gamma = Q^3. \end{array} \right.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} (MA)^2 &= (\xi - \alpha)^2 + \eta^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\alpha\xi + \alpha^2 \\ &= (\xi^2 + \eta^2 - P^2) + \alpha^2 + P^2 - 2\alpha\xi \\ &= (\xi^2 + \eta^2 - P^2) + \alpha(R - 2\xi) + \beta\gamma. \end{aligned}$$

und in Folge der Gleichung (6):

$$R - 2\xi = \frac{(\xi^2 + \eta^2 - P^2)^2}{4Q^3},$$

folglich $(MA)^2 = \frac{\alpha^2(\xi^2 + \eta^2 - P^2)^2 + 4\alpha Q^3(\xi^2 + \eta^2 - P^2) + 4Q^6}{4\alpha Q^3}$,

und:

$$(19) \; . \; . \; MA = \frac{\alpha(\xi^2 + \eta^2 - P^2) + 2Q^3}{2\alpha\sqrt{\beta\gamma}} = \frac{\xi^2 + \eta^2 - P^2 + 2\beta\gamma}{2\sqrt{\beta\gamma}}$$

Entsprechend ergiebt sich für die beiden andern Brennstrahlen:

$$(20) \; . \; . \; MB = \frac{\xi^2 + \eta^2 - P^2 + 2\alpha\gamma}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

$$(21) \; . \; . \; MC = \frac{\xi^2 + \eta^2 - P^2 + 2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Demnach sind diese Brennstrahlen rationale Funktionen der Koordinaten des Punktes M, wie bei den Kegelschnitten, so dass die Punkte A, B und C auch als Brennpunkte im Euler'schen Sinne erscheinen.

Substituieren wir die Werte (18) in die Gleichung (6), so nimmt diese folgende Form an:

$$(22) \; . \; . \left[\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\right]^2 + 4\alpha\beta\gamma\left[2\xi - (\alpha + \beta + \gamma)\right] = 0.$$

Da diese Gleichung symmetrisch in Bezug auf die drei Grössen α, β, γ ist, so schliessen wir daraus, dass wir dieselbe Kurve erhalten, gleichviel, ob wir A und B als Fundamentalpunkte wählen oder A und C oder endlich B und C. Mit andern Worten, wir können das Cartesische Oval nicht allein durch die Gleichung (1) darstellen, sondern durch irgend eine der drei folgenden Gleichungen:

$$(23) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \left\{ \begin{aligned} \rho_, r_, + \rho_{,,} r_{,,} &= a_{,,,} \\ \rho_, r_, + \rho_{,,,} r_{,,,} &= a_{,,} \\ \rho_{,,} r_{,,} + \rho_{,,,} r_{,,,} &= a_, \end{aligned} \right.$$

wo $r_{,,,}$ der dritte Brennstrahl MC ist und die Grössen a und ρ Konstante bedeuten. (1) Setzen wir nämlich die Werte (19) und (20) in die erste der obigen Gleichnngen ein, so ergiebt sich:

$$\rho_, \cdot \frac{\xi^2 + \eta^2 - P^2 + 2\beta\gamma}{2\sqrt{\beta\gamma}} + \rho_{,,} \frac{\xi^2 + \eta^2 - P^2 + 2\alpha\gamma}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = a_{,,,}.$$

Soll nun diese Gleichung für jeden Wert von ξ und η bestehen, so muss einzeln:

$$\frac{\rho_,}{\sqrt{\beta\gamma}} + \frac{\rho_{,,}}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0; \; \rho_, \cdot \frac{2\beta\gamma - P^2}{2\sqrt{\beta\gamma}} + \rho_{,,} \cdot \frac{2\alpha\gamma - P^2}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = a_{,,,}$$

sein. Hieraus folgt:

$$\rho_, = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot \frac{a_{,,,}}{\beta - \alpha}; \; \rho_{,,} = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot \frac{a_{,,,}}{\beta - \alpha}.$$

Dadurch geht die erste der Gleichungen (23) über in:

(1) Vergl. Loria, Seite 168.

$$(24) \ldots \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot r_{,,} - \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot r_{,} = \alpha - \beta.$$

Ebenso zeigen wir, dass die beiden letzten Gleichungen (23) die Form annehmen:

$$(25) \ldots \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot r_{,,,} - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot r_{,,} = \beta - \gamma.$$

$$(26) \ldots \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \cdot r_{,} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot r_{,,,} = \gamma - \alpha.$$

Hieraus ergiebt sich noch eine interessante Folgerung. Addieren wir nämlich (24), (25) und (26), so erhalten wir:

$$r_{,}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\right) + r_{,,}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right) + r_{,,,}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = 0,$$

welche Relation ebenfalls das Cartesische Oval ausdrückt. Nun ergiebt sich aus den Gleichungen (17):

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a^2}{e^2 p^2} = \frac{n^2}{p^2}; \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{e^2 q^2}{a^2} = \frac{q^2}{n^2}; \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{p^2}{q^2},$$

wo wir zur Abkürzung $\frac{a}{e} = n$ gesetzt haben. Dadurch geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{n^2 - p^2}{np} \cdot r_{,} + \frac{q^2 - n^2}{nq} \cdot r_{,,} + \frac{p^2 - q^2}{pq} r_{,,,} = 0.$$

§ 8. **Durchschnitt des Ovals mit seiner Achse.** Setzen wir in Gleichung (10) die linke Seite gleich Null, so erhalten wir die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse; sie entsprechen den Parametern:

$$\lambda_{,} = \frac{a + e(p+q)}{a}; \quad \lambda_2 = -\frac{a + e(p-q)}{a}; \quad \lambda_3 = \frac{e(p-q) - a}{a};$$

$$\lambda_4 = \frac{a - e(p+q)}{a}.$$

Aus Gleichung (11) würden wir dieselben Parameterwerte, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen, erhalten. In beiden Fällen ergeben sich aus (8) für die Abscissen der vier Schnittpunkte, welche wir L_1 L_2 L_3 L_4 nennen wollen:

$$(27) \ldots x_1 = -\frac{a + qe}{p - q}; \quad x_2 = \frac{qe - a}{p + q}; \quad x_3 = \frac{a + qe}{p + q};$$

$$x_4 = \frac{a - qe}{p - q}.$$

Wir bemerken zunächst, dass bei einem eigentlichen Cartesischen Oval niemals zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen können, d. h. die Kurve hat keinen auf der x-Achse gelegenen Doppelpunkt.

Im $\xi\eta$-System ergeben sich für die Abscissen der vier Schnittpunkte L, wenn wir die Gleichung (4) beachten, folgende Werte:

$$\xi_1 = -\frac{a(p+q)+epq}{p^2-q^2};\quad \xi_2 = \frac{epq-a(p-q)}{p^2-q^2};$$
$$\xi_3 = \frac{epq+a(p-q)}{p^2-q^2};\quad \xi_4 = \frac{a(p+q)-epq}{p^2-q^2};$$

oder in übersichtlicherer Schreibweise, indem wir die Relationen (17) beachten:

$$(28)\ \ldots \begin{cases} \xi_1 = -\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha\gamma} - \sqrt{\beta\gamma} \\ \xi_2 = \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma} - \sqrt{\beta\gamma} \\ \xi_3 = \sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{\beta\gamma} \\ \xi_4 = -\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{\beta\gamma} \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$(29)\ \ldots\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0,$$

d. h. der ausserordentliche Brennpunkt F ist das Zentrum der mittleren Entfernung von den vier Schnittpunkten des Ovals mit seiner Achse.

Was die Reihenfolge der 4 Schnittpunkte L anbetrifft, so hängt sie wesentlich von derjenigen der Brennpunkte F, A, B und C ab. Wir können diese Puukte in der Weise einander zuordnen, dass sich F und L_1, ferner A und L_2, B und L_3, C und L_4 einander entsprechen. Der Reihenfolge F A B C entspricht also die Folge $L_1\ L_2\ L_3\ L_4$; ferner der Reihenfolge F A C B die Folge $L_1\ L_2\ L_4\ L_3$ und endlich der Reihenfolge F C A B die Folge $L_1\ L_4\ L_2\ L_3$.

Die Kurve schneidet aus der Achse drei Strecken aus, welche bei der Annahme $\alpha < \beta < \gamma$ folgende Werte haben. Der linke Abschnitt zwischen den beiden Ovalen ist:

$$L_1 L_2 = 2(\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma}).$$

Der mittlere Abschnitt, d. h. die Achse des innern Ovals, ist

$$L_2 L_3 = 2(\sqrt{\beta\gamma} - \sqrt{\alpha\gamma})$$

und der rechte Abschnitt zwischen beiden Ovalen ist:

$$L_3 L_4 = 2(\sqrt{\alpha\gamma} - \sqrt{\alpha\beta}).$$

Dabei stellt sich heraus, dass der linke Abschnitt stets grösser als der rechte Abschnitt ist, d. h. das innere Oval liegt näher auf der rechten als linken Seite des äussern Ovals. Die Achse des letztern ist:

$$L_1 L_4 = 2(\sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\alpha\gamma}.$$

Die Strecke zwischen den Mittelpunkten der grossen und kleinen Achse wird stets durch den ausserordentlichen Brennpunkt halbiert, welches sich auch aus der Gleichung (29) ergiebt.

Sollen die vier Schnittpunkte L eine harmonische Reihe bilden, so ist erforderlich, dass

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

ist, d. h. die vier Brennpunkte bilden in diesem Falle ebenfalls eine harmonische Reihe.

Ähnliche Resultate ergeben sich bei der Annahme $\alpha < \gamma < \beta$ und $\gamma < \alpha < \beta$.

§ 9. **Die Doppeltangente des Ovals.** Angenommen, die Kurve (3) hätte eine zur x-Achse parallele Doppeltangente, deren Gleichung $x = x_0$ sein möge. Dann müsste die Substitution dieses Wertes in (3) eine Gleichung in y liefern, welche zwei Paare gleicher Wurzeln hätte, und weil die Kurve symmetrisch zur x-Achse liegt, so müssten auch die beiden Berührungspunkte symmetrisch zu dieser Achse liegen, d. h. das Resultat der Substitution müsste von der Form:

$$(30) \;.\;.\; (y - y_0)^2 . (y + y_0)^2 = 0$$

sein. Nun ergiebt sich aus (3):

$$(p^2 - q^2)\,y^4 - 2\,H\,y^2 + K = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\begin{aligned} H &= a^2(p^2 + q^2) + e^2 q^2 (p^2 - q^2) - 2q^2(p^2 - q^2)\,ex_0 - (p^2 - q^2)^2 x_0^2, \\ K &= (a^2 - q^2 e^2)^2 + 4\,q^2\,(a^2 - q^2 e^2)\,ex_0 - 2\,[a^2(p^2 + q^2) + q^2 e^2\,(p^2 - q^2) \\ &\quad - 2q^4 e^2]\,x_0^2 + 4q^2(p^2 - q^2)\,ex_0^3 + (p^2 - q^2)^2 x_0^4. \end{aligned}$$

Identifizieren wir obige Gleichung mit (30), so ergeben sich die beiden Bedingungsgleichungen:

$$(p^2 - q^2)\,y_0^2 = H;\; (p^2 - q^2)^2\,y_0^4 = K$$

woraus durch Elimination von y_0 folgt:

$$H^2 = K\,(p^2 - q^2)^2,$$

oder, wenn wir für H und K ihre Werte einsetzen:

$$2\,ex_0\,(p^2 - q^2) = a^2 + e^2(p^2 - q^2).$$

Die Gleichung der Doppeltangente ist demnach:

$$(31) \;.\;.\; x = \frac{a^2 + e^2(p^2 - q^2)}{2e\,(p^2 - q^2)} = \frac{1}{2}(\gamma + \beta - \alpha)$$

Die Ordinaten der Berührungspunkte ergeben sich aus der Gleichung:

$$4e^2(p^2 - q^2)^2 y_0^2 = \Big[a + e(p + q)\Big] . \Big[a + e\,(p - q)\Big] . \Big[a - e\,(p - q)\Big] . \Big[e\,(p + q) - a\Big],$$

wofür wir auch unter Beachtung der Gleichungen (17):

$$4\,y_0^2 = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) \\ (-\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$$

schreiben können. Die Kurve besitzt demnach eine zur y-Achse parallele Doppeltangente, deren Berührungspunkte aber nur dann reell sind, wenn

$$e(p+q) > a > e(p-q)$$

$$\text{oder } \sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha} > \sqrt{\gamma} > \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$$

ist. Diese Doppeltangente berührt das äussere Oval, welches daher unter vorstehender Bedingung eine Einschnürung und zwei Inflexions punkte haben muss (cfr. die Figurentafel). Das innere Oval kann keine Inflexionen haben, weil man sonst eine Gerade ziehen könnte, welche 6 Punkte mit der Kurve gemein hätte, was bei einer eigentlichen Kurve vierter Ordnung unmöglich ist. In den beiden Grenzfällen $a = e)(p \pm q)$ fallen die Berührungspunkte der Doppeltangente zusammen; letztere wird alsdann zur Undulationstangente und ihr Berührungspunkt zum Undulationspunkt.

Aus dem Werte für x_0 und Gleichung (8) ergiebt sich, dass die Koordinaten des Berührungspunktes der Doppeltangente dem Parameterwerte $\lambda_0 = 0$ entsprechen. Die Polarkoordinaten dieses Punktes sind:

$$(32) \;.\;.\; r = \frac{ap}{p^2 - q^2}; \; \cos\theta = \frac{a^2 + e^2(p^2 - q^2)}{2aep}.$$

Beachten wir die Gleichung (4), so erhalten wir als Gleichung der Doppeltangente im $\xi\eta$-System:

$$\xi = \frac{a^2 + e^2(p^2 + q^2)}{2e(p^2 - q^2)},$$

$$\text{oder: } (33) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \xi = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

wie sich auch sofort aus der Form der Gleichung (6) ergiebt.

Mehr als eine Doppeltangente kann das Cartesische Oval nicht haben, wie weiter unten gezeigt werden soll.

§ 10. **Die Ordinaten des Cartesischen Ovals.** Wir berechnen zunächst die Ordinaten der vier Punkte L, indem wir die Werte (28) der Reihe nach in (6) oder

$$\eta^2 = P^2 - \xi^2 \pm 2\sqrt{Q^3(R - 2\xi)}$$

einsetzen. Dies giebt:

$$(34) \;.\;.\; \begin{cases} \eta_1^2 = (+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\pm 2\sqrt{\alpha\beta\gamma} - 2\sqrt{\alpha\beta\gamma}) \\ \eta_2^2 = (-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\pm 2\sqrt{\alpha\beta\gamma} + 2\sqrt{\alpha\beta\gamma}) \\ \eta_3^2 = (+\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\pm 2\sqrt{\alpha\beta\gamma} + 2\sqrt{\alpha\beta\gamma}) \\ \eta_4^2 = (+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\pm 2\sqrt{\alpha\beta\gamma} + 2\sqrt{\alpha\beta\gamma}) \end{cases}$$

Demnach sind je zwei dieser Ordinaten gleich Null, d. h. die x-Achse wird von der Kurve in allen 4 Punkten rechtwinklig durchschnitten, was ja auch unmittelbar aus der symmetrischen Lage der Kurve zu dieser Achse sich ergiebt. Was die beiden andern Ordinaten der Punkte L betrifft, so sind sie entweder reell oder imaginär, je nach den Werten von α, β, γ. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir $\alpha < \beta < \gamma$ voraussetzen. Nun sind die von Null verschiedenen Ordinaten in L_1 stets imaginär, in L_2 und L_3 stets reell, dagegen in L_4

reell oder imaginär, je nachdem $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \gtrless \sqrt{\gamma}$ ist, d. h. je nachdem die Kurve von der Doppeltangente in reellen oder imaginären Punkten berührt wird. Im Grenzfalle: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\gamma}$ oder $a = e(p+q)$ sind alle vier Ordinaten von L_4 gleich Null, dieser Punkt also ein Undulationspunkt (cfr. § 9). Die Gleichung der Undulationstangente ist in diesem Falle:

$$\xi = \alpha + \sqrt{\alpha\beta} + \beta.$$

Analoge Resultate ergeben sich bei der Annahme $\alpha < \gamma < \beta$ oder $\gamma < \alpha < \beta$. Für das Zeichnen der Kurven empfiehlt es sich, die fünf verschiedenen Fälle zu unterscheiden:

$$\sqrt{\gamma} > \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha};$$
$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha};$$
$$\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} > \sqrt{\gamma} > \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha};$$
$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha};$$
$$\sqrt{\gamma} < \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha},$$

wofür wir auch unter Beachtung der Gleichnngen (17):

$$a > e(p+q)$$
$$a = e(p+q)$$
$$e(p+q) > a > e(p-q)$$
$$a = e(p-q)$$
$$a < e(p-q)$$

schreiben können. Diese Relationen zwischen den Grössen a, e, p, q erinnern an diejenigen über die Lage zweier Kreise zu einander.

Wir können nun auch die Intervalle bestimmen, in denen das Cartesische Oval reelle Ordinaten hat. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$\eta_,^{\,2} = P^2 - \xi^2 + 2\sqrt{Q^3}.(R - 2\xi)$$
$$\eta_{,,}^{\,2} = P^2 - \xi^2 - 2\sqrt{Q^3}.(R - 2\xi)$$

und nehmen wieder an, dass $\alpha < \beta < \gamma$ sei. Dann ist von ξ_1 bis ξ_2 die Grösse $\eta_,^{\,2} > 0$, dagegen $\eta_{,,}^{\,2} < 0$, d. h. in diesem Intervalle entsprechen jeder Abscisse nur zwei reelle Ordinaten. Von ξ_2 bis ξ_3 ist sowohl $\eta_,^{\,2} > 0$ als auch $\eta_{,,}^{\,2} > 0$, d h. in diesem Intervalle existieren vier reelle Ordinaten. Endlich von ξ_3 bis ξ_4 ist wieder $\eta_,^{\,2} > 0$ und $\eta_{,,}^{\,2} < 0$, so dass in diesem dritten Intervalle wieder nur zwei reelle Ordinaten vorhanden sind. In allen andern Intervallen existieren keine reellen Ordinaten, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo das äussere Oval eine Einschnürung besitzt, wo also $\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha} > \sqrt{\gamma} > \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$ ist. Unter dieser Bedingung giebt es noch ein viertes Intervall von ξ_4 bis $\xi_0 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, in dem vier reelle Ordinaten existieren.

Ferner wollen wir die Ordinaten der drei Brennpunkte A, B und C bestimmen, indem wir in die Gleichung (6) für ξ der Reihe nach die Werte α, β, γ einsetzen. Dann ergiebt sich:

$$\pm\eta = \sqrt{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)} \pm \sqrt{\beta\gamma}$$
$$\pm\eta = \sqrt{\beta(\gamma+\alpha-\beta)} \pm \sqrt{\alpha\gamma}$$
$$\pm\eta = \sqrt{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \pm \sqrt{\alpha\beta}.$$

Nehmen wir wieder an, dass $\alpha < \beta < \gamma$, so haben A und B stets je vier reelle Ordinaten, und man zeigt leicht, dass in diesem Falle:

$$\xi_3 > \beta > \alpha > \xi_2$$

ist, d. h. die beiden Brennpunkte A und B liegen innerhalb des innern Ovals. Die Ordinaten des Brennpunktes C sind alle imaginär, wenn $\gamma > \alpha + \beta$; sie fallen paarweise zusammen, wenn $\gamma = \alpha + \beta$ und sie sind alle reell und verschieden, wenn $\gamma < \alpha + \beta$ ist. Ausserdem ist stets $\gamma > \xi_4$, d. h. der Brennpunkt C liegt ausserhalb des äussern Ovals. Analoge Resultate ergeben sich für den Fall, wo $\alpha < \gamma < \beta$ oder $\gamma < \alpha < \beta$ ist. Wir können also den Satz aussprechen: Von den drei Brennpunkten A, B und C liegen stets zwei innerhalb des innern, der dritte ausserhalb des äussern Ovals.

Was endlich die Ordinaten des ausserordentlichen Brennpunktes F anbetrifft, so ergeben sich dieselben aus (6), wenn $\xi = 0$ gesetzt wird, folglich

$$\eta^2 = P^2 \pm 2\sqrt{Q^3 R}.$$

Zwei dieser Ordinaten sind daher stets reell, die beiden andern nur dann, wenn $P^2 > 2\sqrt{Q^3 R}$, oder wenn $P^4 - 4Q^3 R > 0$ ist. Nun ergiebt sich aus (6), wenn $\eta = 0$ gesetzt wird:

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P^4 - 4Q^3 R = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4,$$

d. h. die Differenz $P^4 - 4Q^3 R$ ist gleich dem Produkte der Abscissen der 4 Schnittpunkte L. Wir schliessen daraus, dass die Ordinaten von F sämtlich reell sind, wenn die 4 Schnittpunkte L paarweise auf entgegengesetzten Seiten von F liegen, d. h. wenn F selbst innerhalb des innern Ovals liegt. Ist ferner $P^4 - 4Q^3 R = 0$, so hat F vier reelle Ordinaten, von denen zwei gleich Null sind. Dann fällt einer der Schnittpunkte L mit F zusammen, entweder L_2 oder L_4 (cfr. § 6). Ist endlich $P^4 - 4Q^3 R < 0$, so hat F zwei reelle und zwei imaginäre Ordinaten; von den vier Schnittpunkten L liegt dann einer, nämlich L_1 links, die andern drei rechts von F, und dieser Punkt selbst zwischen beiden Ovalen, auf der der Doppeltangente abgewandten Seite.

Aus der Relation (35) ergiebt sich noch eine beachtenswerte Folgerung. Setzen wir nämlich in (6) die Grösse $\xi = 0$, so folgt:

$$(\eta^2 - P^2)^2 - 4Q^3 R = 0.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung genügen der Relation:

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 = P^4 - 4Q^3 R,$$

folglich ist $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$

d. h. das Produkt der vier Abscissen ist gleich dem Produkt der vier Ordinaten. Dieser Satz bildet einen besondern Fall des bekannten Newton'schen Satzes über das Schnittpunktsystem zweier durch einen Punkt gehenden Transversalen mit einer algebraischen Kurve. Uebrigens ist leicht einzusehen, dass derselbe Satz für zwei beliebige auf einander senkrecht stehende Transversalen gilt.

§ 11. **Die Kurve der mittleren Ordinate.** Lösen wir die Gleichung (6) nach η auf, so ergeben sich nach Trennung der Wurzeln die beiden Relationen:

$$(36) \ldots \begin{cases} \eta_{,} = \pm\sqrt{P^2 - \xi^2 + 2\sqrt{Q^3(R - 2\xi)}} \\ \eta_{,,} = \pm\sqrt{P^2 - \xi^2 - 2\sqrt{Q^3(R - 2\xi)}}. \end{cases}$$

Wir wollen dann die Gleichung einer neuen Kurve aufstellen, deren Ordinate das arithmetische Mittel der obigen Ordinaten ist. Setzen wir demnach:

$$\eta = \frac{1}{2}(\eta_{,} + \eta_{,,}),$$

so ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen:

$$(37) \ldots \eta^2(\xi^2 + \eta^2 - P^2) + Q^3(R - 2\xi) = 0.$$

Diese Kurve vierter Ordnung, welche wir die Kurve der mittleren Ordinate nennen und der Kürze wegen mit φ bezeichnen wollen, steht in mehrfacher Beziehung zum Cartesischen Oval. Sie liegt ebenfalls symmetrisch zur ξ-Achse, geht durch die imaginären Kreispunkte und besteht aus drei Ovalen, von denen zwei einander kongruent sind und durch die Ordinaten der Punkte L_2 L_3 begrenzt werden. (Wir setzen wieder $\alpha < \beta < \gamma$ voraus). Diese beiden Ovale werden durch die ξ-Achse von einander getrennt. Das dritte Oval — für welches dieser Ausdruck nur im weitern Sinne gebraucht werden kann — schneidet die Achse im Punkte $\xi = \frac{R}{2}$ und wird hier von der Doppeltangente des Cartesischen Ovals berührt. Es geht ferner durch die Berührungspunkte dieser Doppeltangente und erstreckt sich längs der positiven ξ-Achse in's Unendliche, wo es in eine Spitze ausläuft. Dasselbe hat auf der linken Seite eine Einschnürung, bezüglich einen Undulationspunkt, falls das Cartesische Oval diese Eigenschaften besitzt. Lösen wir die Gleichung (37) nach η auf, so folgt:

$$\eta^2 = \frac{1}{2}\left[P^2 - \xi^2 \pm \sqrt{(P^2 - \xi^2)^2 + 4Q^3(2\xi - R)}\right]$$

$$\text{oder } \eta^2 = \frac{1}{2}\left[P^2 - \xi^2 \pm \sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}\right]$$

wo $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ wieder dieselbe Bedeutung haben wie in (28). Hieraus ergiebt sich sofort, dass die Kurve φ vier zur Achse senkrechte Doppeltangenten hat, welche durch die Punkte L_1 L_2 L_3 L_4 des Cartesischen Ovals gehen. Die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten haben die Ordinaten (cfr. die Gleichungen 34):

$$\eta_1{}^2 = -\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$$
$$\eta_2{}^2 = +\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})$$
$$\eta_3{}^2 = +\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$$
$$\eta_4{}^2 = +\sqrt{\alpha\beta\gamma}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}).$$

Daraus folgt, dass die Berührungspunkte der ersten Doppeltangente stets imaginär sind, die der zweiten und dritten stets reell, und die der vierten reell oder imaginär, je nachdem $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \gtrless \sqrt{\gamma}$ is, d. h. je nachdem die Doppeltangente des Cartesischen Ovals in reellen oder imaginären Punkten berührt. Ferner haben wir die bemerkenswerte Relation, dass die Kulminationspunkte der Kure φ dieselben Abscissen haben wie die Brennpunkte A, B, C des Cartesischen Ovals. Denn berechnen wir aus (37) den ersten Differentialquotienten und bilden die Gleichung $\frac{d\eta}{d\xi}=0$, so ergiebt sich:

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \xi\eta^2 - Q^3 = 0$$

oder wenn wir η^2 mit Hilfe von (36) eliminieren:

$$\xi^3 - R\xi^2 + P^2\xi - Q^3 = 0$$
$$\text{d. h. } (\xi-\alpha)(\xi-\beta)(\xi-\gamma) = 0,$$

womit obige Behauptung bewiesen ist. Die den Abscissen α, β, γ entsprechenden Ordinaten der Kulminationspunkte sind:

$$\eta_1 = \pm\sqrt{\beta\gamma};\quad \eta_2 = \pm\sqrt{\alpha\gamma};\quad \eta_3 = \sqrt{\alpha\beta};$$

daher $\eta_1{}^2+\eta_2{}^2+\eta_3{}^2 = P^2$. Aus (38) folgt noch, dass die Kulminationspunkte der Kurve φ auf einer Hyperbel dritter Ordnung liegen.

Bilden wir ferner diejenige Kurve ψ, deren Ordinate das geometrische Mittel der Ordinaten des Cartesischen Ovals ist, setzen also $\eta = \sqrt{\eta_{,}\eta_{,,}}$, so ergiebt sich mit Hilfe der Gleichungen (36):

$$(39) \quad \ldots\ldots \quad \eta^4 = (\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)\xi-\xi_4).$$

Auch diese Kurve steht in mehrfacher Beziehung zum Cartesischen Oval. Sie wird gebildet von einem mittleren Oval und zwei hyperbolischen Zügen, welche die gemeinsamen Asymptoten $\xi\pm\eta=0$ haben. Das mittlere Oval berührt das innere Cartesische Oval in seinen Scheiteln L_2 L_3, während die hyperbolischen Teile das äussere Cartesische Oval in L_1 und L_4 berühren. Alle diese Punkte sind Undulationspunkte der Kurve ψ. Von den 16 Schnittpunkten beider Kurven fallen 8 mit den Punkten L_1 L_2 L_3 L_4 zusammen, zwei weitere mit den Berührungspunkten der Doppeltangente des Cartesischen Ovals; die übrigen sechs mit den imaginären Kreispunkten, wo sich beide Kurven berühren.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu dem Cartesischen Oval zurück.

§ 12. **Die analytischen Charaktere des Cartesischen Ovals.** Wir haben in § 5 gesehen, dass die Kurve zwei imaginäre Doppelpunkte hat, welche sich als Rückkehrpunkte erweisen. Da nun eine eigentliche Kurve vierter Ordnung nicht mehr als drei Doppelpunkte haben kann, so würde unsere Kurve ausser jenen beiden Rückkehrpunkten nur noch einen singulären Punkt haben können, und dieser müsste, falls er überhaupt vorhanden wäre, jedenfalls reell sein. Wir haben aber bereits in § 8 gezeigt, dass die Kurve keinen auf der x-Achse gelegenen Doppelpunkt haben kann. Und wollten wir annehmen, dass er ausserhalb der Achse läge, so müsste die Kurve wegen ihrer symmetrischen Lage zur Achse noch einen vierten Doppelpunkt haben, was unmöglich ist. Folglich kann das Cartesische Oval ausser jenen beiden Rückkehrpunkten keine weitere Singularität mehr haben. Dies genügt, um die analytischen Charaktere der Kurve zu bestimmen. Wir haben nämlich:

Ordnungszahl der Kurve: $n = 4$.
Anzahl der Doppelpunkte: $\delta = 0$.
Anzahl der Rückkehrpunkte: $\varkappa = 2$.

Diese drei Relationen geben in Verbindung mit den Plücker'schen Gleichungen die übrigen Charaktere:

Klassenzahl der Kurve:

$$\nu = n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa = 6.$$

Anzahl der Inflexionspunkte:

$$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\varkappa = 8.$$

Anzahl der Doppeltangenten:

$$2\tau = \nu(\nu-1) - n - 3\iota = 2; \text{ also } \tau = 1.$$

Endlich noch der Defekt oder das Geschlecht der Kurve: $D = 1$.

§ 13. **Die Tangenten des Cartesischen Ovals.** Durch Differentiation der Gleichung (6), in der wir uns jetzt xy statt $\xi\eta$ geschrieben denken, ergiebt sich:

$$(x^2 + y^2 - P^2)(x + yy') + 2Q^3 = 0,$$

und hieraus:

$$(40) \quad \ldots\ldots \tan\tau = -\frac{2Q^3 + x(x^2 + y^2 - P^2)}{y(x^2 + y^2 - P^2)},$$

wenn wir den Richtungswinkel der Tangente mit τ bezeichnen. Setzen wir $\tan\tau = k$, wo k eine Konstante ist, so erhalten wir für alle Tangenten, welche einer bestimmten Richtung parallel laufen, die Relation:

$$(41) \quad \ldots\ldots (x + ky)(x^2 + y^2 - P^2) + 2Q^3 = 0.$$

Kombinieren wir dann diese Gleichung mit (6), so erhalten wir die Berührungspunkte jener Tangenten. Statt (41) können wir auch die einfachere Relation:

$$(42) \quad \ldots\ldots 3x^2 + 4kxy - y^2 - 2R(x + ky) + P^2 = 0$$

an die Stelle setzen, wie sich leicht ergiebt, wenn wir aus (6) und (41) die Grösse Q^3 eliminieren. Wir haben damit den Satz gewonnen: Die Berührungspunkte aller Tangenten, welche einer bestimmten Richtung parallel laufen, liegen auf einer Hyperbel. Das Zentrum dieser Hyperbel ist:

$$x_0 = \frac{1+2k^2}{3+4k^2} R; \quad y_0 = -\frac{kR}{3+4k^2}.$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen die Grösse k, so folgt:

$$\left(x_0 - \frac{5}{12} R\right)^2 + \frac{1}{3} y_0^2 = \frac{1}{144} R^2.$$

Demnach ist der Ort der Zentra aller Hyperbeln (42) eine Ellipse; letztere wird von der Doppeltangente des Cartesischen Ovals berührt.

Schreiben wir (42) in der Form:

$$(3x^2 - y^2 - 2Rx + P^2) + 2ky(2x - R) = 0,$$

so erhalten wir einen Kegelschnittbüschel, dessen Basispunkte

$$x = \frac{1}{3}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 3P^2}\right); \quad y = 0$$

$$\text{und } x = \frac{R}{2}; \quad y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4P^2 - R^2}$$

sind. Zwei von diesen Basispunkten liegen daher auf der Achse, die beiden andern fallen mit den Berührungspunkten der Doppeltangente des Ovals zusammen.

Setzen wir die Konstante $k = \infty$, so degeneriert die Hyperbel (42) in zwei Gerade, nämlich:

$$y(2x - R) = 0.$$

Daraus folgt, dass diejenigen Tangenten des Ovals, welche senkrecht zur x-Achse sind, die Kurve in den vier Punkten L_1 L_2 L_3 L_4 berühren, resp. mit der (doppelt zu zählenden) Doppeltangente zusammenfallen. Nehmen wir ferner $k = 0$ an, so erhalten wir die Kulminationspunkte des Ovals; sie sind die Schnittpunkte der Kurve mit der Hyperbel:

$$(43) \quad \ldots\ldots \quad 3x^2 - y^2 - 2Rx + P^2 = 0$$

Das Zentrum dieser Hyperbel ist $x_0 = \frac{1}{3} R$; $y_0 = 0$; ihre Scheitel liegen ebenfalls auf der x-Achse und entsprechen den Abscissen:

$$x = \frac{1}{3}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 3P^2}\right).$$

Diese Abscissen sind stets reell, denn:

$$\begin{aligned} R^2 - 3P^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2\right]. \end{aligned}$$

Der rechte Zweig dieser Hyperbel geht durch die Berührungspunkte der

Doppeltangente des Ovals, hat aber keine weitern reellen Punkte mit der Kurve gemein. Der linke Hyperbelzweig, dessen Scheitel stets innerhalb des innern Ovals liegt, schneidet jedes Oval der Kurve in zwei reellen Kulminationspunkten. Auch ersehen wir daraus, dass die Kulminationspunkte des äussern Ovals stets links von denen des innern Ovals liegen. Die Abscissen aller Kulminationspunkte erhalten wir aus der kubischen Gleichung:

$$\varphi(x) = 2x^3 - Rx^2 + Q^3 = o,$$

welche sich ergiebt, wenn wir y aus (6) und (43) eliminieren. Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung mit $x_,$ $x_{,,}$ $x_{,,,}$ so ist

$$\frac{R}{2} > x_, > \frac{R}{3};\ \frac{R}{3} > x_{,,} > o;\ o > x_{,,,} > -\frac{R}{3};$$

denn es ist $\varphi\left(\frac{R}{2}\right) > o$; $\varphi\left(\frac{R}{3}\right) < o$; $\varphi(o) > o$ und $\varphi\left(-\frac{R}{3}\right) < o$. Nur den Abscissen $x_{,,}$ und $x_{,,,}$ entsprechen reelle Kulminationspunkte.

§ 14. **Die Polare des Cartesischen Ovals.** Als allgemeine Gleichung der Tangente des Ovals erhalten wir:

$$[2Q^3 + x(x^2 + y^2 - P^2)]\,\xi + y(x^2 + y^2 - P^2)\,\eta - 2Q^3 x$$
$$-(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - P^2) = o.$$

Aus Gleichung (6) ergiebt sich aber:

$$(x^2 + y^2 - P^2)^2 = 4Q^3(R - 2x), \text{ folglich}$$
$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - P^2) = 4Q^3(R - 2x) + P^2(x^2 + y^2 - P^2),$$

so dass obige Gleichung übergeht in:

$$[2Q^3 + x(x^2 + y^2 - P^2)]\,\xi + y(x^2 + y^2 - P^2)\,\eta + 2Q^3(3x - 2R)$$
$$-P^2(x^2 + y^2 - P^2) = o.$$

Soll diese Tangente durch einen festen Punkt P_0 gehen, dessen Koordinaten $x_0 y_0$ sein mögen, so haben wir die Bedingungsgleichung:

$$(44) \ldots (xx_0 + yy_0 - P^2)(x^2 + y^2 - P^2) + 2Q^3(3x + x_0 - 2R) = o.$$

Dies ist die Polare des Punktes P_0. Es folgt daraus der Satz: Die Berührungspunkte aller von einem festen Punkte an das Oval gezogenen Tangenten liegen auf einer zirkularen Kurve dritter Ordnung. Nun liefern die beiden Kurven (6) und (44) im Ganzen $4 \times 3 = 12$ Schnittpunkte. Davon fallen zweimal je drei mit den imaginären Kreispunkten I und J zusammen, denn beide Kurven berühren sich in diesen Punkten. Die Verbindungen $P_0 I$ und $P_0 J$ sind aber keine eigentlichen Tangenten des Ovals, da I und J Rückkehrpunkte dieser Kurve sind. Wir kommen damit auf den Satz zurück, dass das Cartesische Oval eine Kurve sechster Klasse ist, d. h. von jedem Punkte P_0 lassen sich 6 Tangenten an das Oval ziehen. Eliminieren wir aus (6) und (44) die Grösse $x^2 + y^2 - P^2$, so folgt:

$$(45)\ (2x - R)(xx_0 + yy_0 - P^2)^2 + Q^3(3x + x_0 - 2R)^2 = o.$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve dar, auf welcher ebenfalls die Berührungspunkte der von P_0 an das Oval gezogenen Tangenten liegen. Nehmen wir z. B. an, dass der Pol P_0 auf der Doppeltangente des Ovals liegt, so haben wir $x_0 = \frac{R}{2}$ zu setzen, wodurch (45) übergeht in:

$$(2x - R)\left[\left(\frac{R}{2}x + yy_0 - P^2\right)^2 + \frac{9}{4}Q^3(2x - R)\right] = 0.$$

Demnach liegen die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem Punkte der Doppeltangente an das Oval gelegt werden können, auf einer Parabel; und zwar wird diese Parabel selbst wieder von jener Doppeltangente berührt. Ist ausserdem $y_0 = 0$, so degeneriert die Parabel in zwei parallele Gerade.

Liegt aber der Pol in dem ausserordentlichen Brennpunkte F, so ist $x_0 = y_0 = 0$, und die Polare (44) degeneriert dann in einen Kreis. Dieser hat mit dem Oval 8 Punkte gemein, von denen 4 mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen. Die übrigen vier werden durch:

$$Q^3(3x - 2R)^2 + P^4(2x - R) = 0$$

bestimmt, welche Gleichung sich aus (45) ergiebt.

Soll ferner die Polare (44) durch ihren eigenen Pol hindurchgehen, so muss diese Gleichung durch die Koordinaten $x_0 y_0$ befriedigt werden. Dies giebt die Bedingungsgleichung:

$$(x_0^2 + y_0^2 - P^2)^2 + 4Q^3(2x_0 - R) = 0.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, dass der Pol auf dem Oval selbst liegt, womit wir auf einen bekannten Satz aus der Theorie der Polaren zurückkommen.

§ 15. **Die Normalen des Cartesischen Ovals.** Als allgemeine Gleichung der Normale im Punkte M des Ovals ergiebt sich:

$$(46) \quad . \; . \; y(x^2 + y^2 - P^2)\xi - [2Q^3 + x(x^2 + y^2 - P^2)]\eta + 2Q^3y = 0.$$

Diese Normale schneidet die x-Achse in einem Punkte, dessen Abscisse den Wert:

$$(47) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \xi = -\frac{2Q^3}{x^2 + y^2 - P^2}$$

hat. Wir wollen dann die Abstände $e_,$ $e_{,,}$ $e_{,,,}$ berechnen, welche dieser Punkt von den Brennstrahlen MA, MB und MC hat. Es ist:

$$e_, = \frac{y(\alpha - \xi)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}} = \frac{y[\alpha(x^2 + y^2 - P^2) + 2Q^3]}{(x^2 + y^2 - P^2)\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}},$$

oder, wenn wir beachten, dass die Wurzelgrösse die Länge des Brennstrahls MA bedeutet, in Folge von (19):

$$e_, = \frac{2y\sqrt{\beta\gamma}[\alpha(x^2 + y^2 - P^2) + 2Q^3]}{(x^2 + y^2 - P^2)(x^2 + y^2 - P^2 + 2\beta\gamma)}.$$

Da aber $Q^3 = \alpha\beta\gamma$ ist, ergiebt sich schliesslich:

$$e_, = \frac{2\alpha\sqrt{\beta\gamma} \cdot y}{x^2 + y^2 - P^2}$$

Analog ergiebt sich für die beiden andern Abstände:

$$e_{,,}=\frac{2\beta\sqrt{\alpha\gamma}\cdot y}{x^2+y^2-P^2};\ e_{,,,}=\frac{2\gamma\sqrt{\alpha\beta}\cdot y}{x^2+y^2-P^2}.$$

Daraus folgt:

$$(48)\ \ldots\ldots\ e_{,}:e_{,,}:e_{,,,}=\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}:\sqrt{\gamma}.$$

Nun können wir statt des Punktes ξ_0 irgend einen andern Punkt auf der Normalen wählen, seine Abstände von den drei Brennstrahlen haben zu einander stets dasselbe Verhältnis. Es folgt daraus der Satz

Jeder Punkt auf der Normale des Cartesischen Ovals hat von den Brennstrahlen MA, MB und MC drei Abstände, die in einem konstanten Verhältnis zu einander stehen.

Auf diesem Satze beruht folgende Normalenkonstruktion: Man ziehe zu zwei Brennstrahlen der Kurve, etwa zu MA und MB, zwei Parallelen, deren Abstände sich wie $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}$ oder was dasselbe ist, wie $q:p$ verhalten; der Schnittpunkt dieser beiden Parallelen ist dann ein zweiter Punkt der gesuchten Normale. Für $p=\pm q$ kommen wir auf einen bekannten Satz der Ellipse resp. Hyperbel zurück.

Ziehen wir eine beliebige Ordinate, welche das Oval in vier Punkten durchschneidet und konstruieren in diesen die Normalen, so durchschneiden sich wegen der symmetrischen Lage der Kurve je zwei derselben auf der x-Achse. Dadurch werden auf dieser Achse zwei Punkte bestimmt, deren Abscissen entgegengesetzt gleich sind. Denn nach (47) ist:

$$\xi_{,}=\frac{-2Q^3}{x^2+y_{,}^2-P^2}=\frac{-Q^3}{+\sqrt{Q^3(R-2x)}}$$

$$\xi_{,,}=\frac{-2Q^3}{x^2+y_{,,}^2-P^2}=\frac{-Q^3}{-\sqrt{Q^3(R-2x)}}.$$

Es folgt daraus der Satz: Je vier Normalen des Ovals, deren Fusspunkte derselben Abscisse entsprechen, bestimmen auf der x-Achse eine Strecke, welche durch den ausserordentlichen Brennpunkt der Kurve halbiert wird.

§ 16. **Die Krümmung des Cartesischen Ovals.** Wir bestimmen zunächst den zweiten Differentialquotienten y''. Aus Gleichung (6), deren linke Seite wir durch U bezeichnen wollen, ergiebt sich durch successive Differentiation:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=4(D^2x+2Q^3);\ \frac{\partial U}{\partial y}=4D^2y$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=4(D^2+2x^2);\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=8xy;\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=4(D^2+2y^2).$$

Hierbei wurde zur Abkürzung $x^2+y^2-P^2=D^2$ gesetzt. Nach einer bekannten Formel erhalten wir dann:

$$-y'' = \frac{D^6(x^2+y^2)+4D^4Q^3x+4D^2Q^6+8Q^6y^2}{D^6y^3}.$$

Nun ist $D^4 = (x^2+y^2-P^2)^2 = 4Q^3(R-2x)$, folglich

$$-y'' = \frac{D^2(x^2+y^2)(R-2x)+4Q^3x(R-2x)+D^2Q^3+2Q^3y^2}{D^2y^3(R-2x)},$$

oder endlich, weil $x^2+y^2 = D^2+P^2$ ist:

$$+y'' = \frac{(x^2+y^2-P^2)(2P^2x-P^2R-Q^3)-4Q^3(R-2x)(R-x)-2Q^3y^2}{y^3(x^2+y^2-P^2)(R-2x)}.$$

Den Zähler dieses Bruches wollen wir zur Abkürzung durch φ bezeichnen. Um nun die Wendepunkte des Ovals zu bestimmen, haben wir $\varphi = 0$ zu setzen und gelangen damit zu dem Satze: Die Wendepunkte des Ovals liegen auf einer zirkularen Kurve dritter Ordnung. Nun schneiden sich die beiden Kurven (6) und $\varphi = 0$ in $4 \times 3 = 12$ Punkten; davon fallen vier mit den imaginären Kreispunkten zusammen, und da letztere keine Wendepunkte, sondern Rückkehrpunkte des Ovals sind, so kommen wir auf den Satz zurück, dass das Cartesische Oval im Ganzen acht Wendepunkte besitzt. Von ihnen sind höchstens zwei reell.

Um die Krümmungsstärke des Ovals zu bestimmen, berechnen wir zunächst den Ausdruck $1+y'^2$. Aus (40) ergiebt sich:

$$1+y'^2 = \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2-P^2)^2+4Q^3x(x^2+y^2-P^2)+4Q^6}{y^2(x^2+y^2-P^2)^2}.$$

Nun ist aber in Folge von (6): $(x^2+y^2-P^2)^2 = 4Q^3(R-2x)$, folglich:

$$1+y'^2 = \frac{y^2(R-x)-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{y^2(R-2x)}$$

und daraus nach einer bekannten Formel:

$$\rho = \frac{2Q^{\frac{3}{2}}[y^2(R-x)-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)]^{\frac{3}{2}}}{\varphi}$$

Nun können wir, wenn wir beachten, dass in Folge von (6): $4Q^3(R-2x) = (x^2+y^2-P^2)^2$ ist, die Grösse φ in der Form schreiben:

$$\varphi = 2\sqrt{Q^3(R-2x)}\,[(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)-y^2(R-x)]-2Q^3y^2,$$

so dass sich für ρ schliesslich folgender Wert ergiebt:

$$(49)\quad .\ .\ \rho = \frac{[y^2(R-x)-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R-2x}\,[(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)-y^2(R-x)]-y^2\sqrt{Q^3}}.$$

Aus dieser Formel können wir leicht den Krümmungsradius für einen beliebigen Punkt des Ovals berechnen. So z. B. erhalten wir für die vier Schnittpunkte der Kurve mit der Achse:

$$\rho = \sqrt{\frac{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}{\alpha+\beta+\gamma-2x}}$$

in welchen Ausdruck wir dann der Reihe nach die Werte (28) zu substituieren haben. Dies giebt:

$$\rho_1 = \frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$$

$$\rho_2 = \frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$$

$$\rho_3 = \frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$$

$$\rho_4 = \frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}.$$

Setzen wir wieder $\alpha < \beta < \gamma$ voraus, so beziehen sich ρ_1 und ρ_4 auf das äussere, die beiden andern auf das innere Oval. Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich leicht zeigen, dass in den Schnittpunkten mit der x-Achse das äussere Oval schwächer gekrümmt ist als das innere, und dass letzteres auf der der Doppeltangente zugewandten Seite die stärkere Krümmung hat. Hat das äussere Oval in L_4 einen Undulationspunkt, so ist $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\gamma}$ und der zugehörige Krümmungsradius unendlich gross. Für die Berührungspunkte der Doppeltangente ist $x = \frac{R}{2}$ und $y^2 = \frac{1}{4}(4P^2 - R^2)$, folglich:

$$\rho = \frac{4Q^3}{4P^2 - R^2}, \text{ oder}$$

$$\rho = \frac{4\alpha\beta\gamma}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}$$

Weniger übersichtlich sind die Werte von ρ in den Endpunkten der Brennpunktsordinaten. Setzen wir z. B. $x = \alpha$, so geht (49) über in:

$$\rho = \frac{y(\beta+\gamma)^{\frac{3}{2}}}{(\beta+\gamma)\sqrt{\beta+\gamma-\alpha}+\sqrt{\alpha\beta\gamma}}$$

wo wir dann noch für y den in § 01 gefundenen Wert einzusetzen haben. Schneidet diese Brennpunktsordinate das äussere Oval in M, und das innere Oval in $M_{\prime\prime}$ und bezeichnen wir die entsprechenden Krümmungsradien mit $\rho_\prime$ und $\rho_{\prime\prime}$, so folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{\rho_\prime}{\rho_{\prime\prime}} = \frac{y_\prime}{y_{\prime\prime}},$$

d. h. die Krümmungsradien in den Endpunkten einer Brennpunktsordinate verhalten sich wie die entsprechenden Ordinaten der Kurve.

Nordhausen, im Februar 1906.

in welchen Ausdr e (28) zu sub-
stituieren haben.

Setzen wir wieder ρ_1 und ρ_4 auf
das äussere, die t Hilfe dieser
Formeln lässt sich nkten mit der
x-Achse das äusse s innere, und
dass letzteres auf Seite die stär-
kere Krümmung Undulations-
punkt. so ist $\sqrt{\alpha}+$ ngsradius un-
endlich gross. Für nte ist $x = \frac{R}{2}$

und $y^2 = \frac{1}{4}(4 P^2 -$

$$\rho = \frac{4 Q^3}{4 P^2 - \ldots}$$

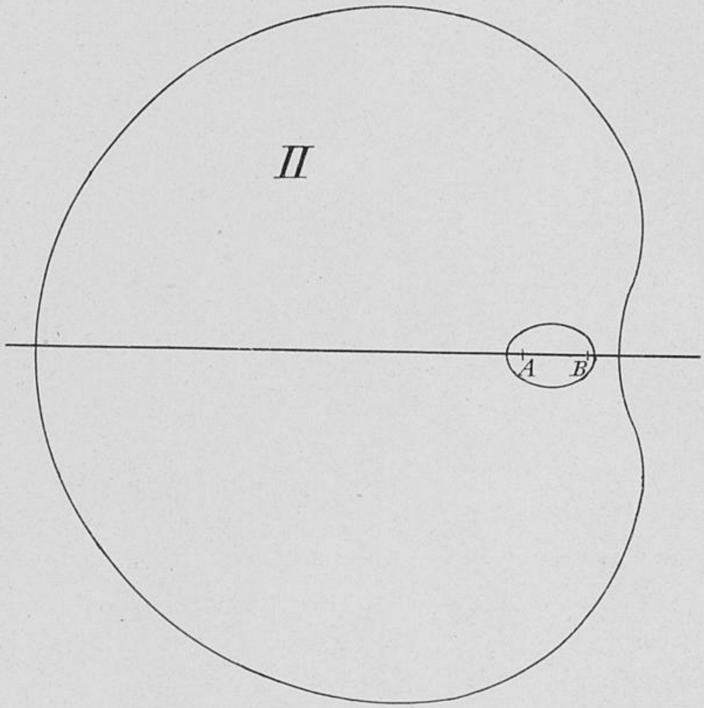
$$\rho = \frac{}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \ldots} \quad -\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$$

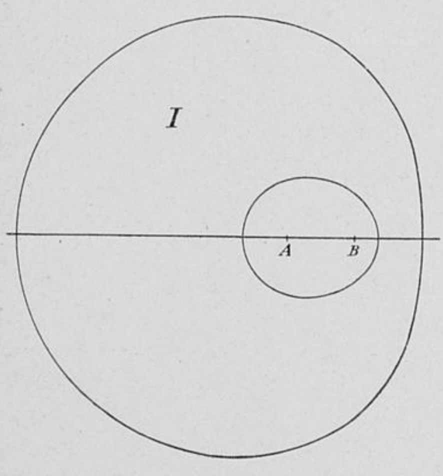
Weniger übersichtli punkten der
Brennpunktsordinate 9) über in:

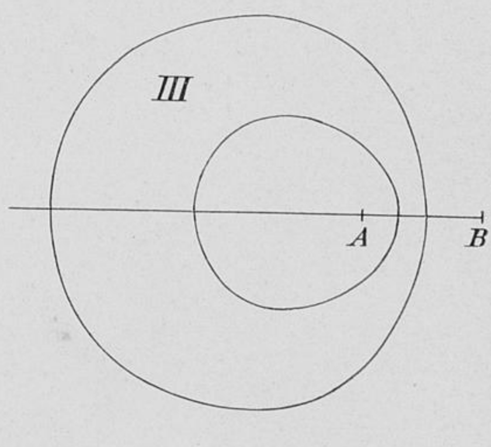
wo wir dann noch einzusetzen.
haben. Schneidet Oval in M,
und das innere Ov sprechenden
Krümmungsradien m ung:

d. h. die Krümmung punktsordi-
nate verhalten sich urve.

Nordhausen,


II
A
B


I
A
B


III
A
B