Vorbemerkungen.

Die in folgendem zusammengestellten Sätze, welche Beziehungen der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks ausdrücken zu den Gegenpunkte-, Ankreismittelpunkte- und Potenzpunktedreiecken, verdanken ihre Entstehung der Beschäftigung mit den bezüglichen Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der Hoffmannschen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aus den Jahren 1896 und folg. Ich verweise im besonderen auf die Aufgaben № 1463. 1464. 1489. 1491. 1492. 1505. 1523. 1541. 1576. 1578. 1600. 1601. 1602. 1628. 1629. 1633. 1649. 1660. 1712. 1713. 1714. 1748. 1749. 1750. 1806. 1807. 1808. und 1809.

Der 35. Jahrgang 1904 brachte die nachfolgenden Sätze als die ersten Nummern der neuen Aufgaben-Serie u. zw. die ersten vier als № 1. bis 4. in der 1. Nummer des vorigjährigen Jahrgangs Seite 55 bis 57, ferner den 5. und 6. Satz als № 12. und 13. auf Seite 214, während der letzte Satz noch nicht veröffentlicht ist.

Ich habe die Zusammenstellung in der Überzeugung unternommen, daß man ausgehend von der Eigenschaft des Feuerbachschen Kreises, daß derselbe die Ankreise eines Dreiecks aus- und den Inkreis einschließend berührt, zu einer Lösung der Hauptaufgabe des Apollonischen Taktionsproblems gelangen könne.

Um Mitarbeiter an dieser nicht uninteressanten Untersuchung zu werben, widmete ich daher die vorliegenden Sätze dem Mathematischen Verein an der Universität Jena. Derselbe nennt sich selbst die Fortsetzung der von Professor Schäffer begründeten Mathematischen Gesellschaft, der ich während der Jahre 1875 bis 1879 angehörte und mannigfache Anregungen verdanke. Durch Herrn Professor Dr. Gutzmer ließ ich den Mitgliedern eine darauf bezügliche Preisaufgabe stellen. Ich hoffe, durch vorliegende Veröffentlichung meiner Vorstudien denen, die sich für die Lösung obiger Aufgaben im Aufgaben-Repertorium der Hoffmannschen Zeitschrift interessieren, sowie meinen jugendlichen Vereinsgenossen im Mathematischen Verein eine willkommene Hilfe durch die beigegebenen Figuren darzubieten.

I.

Die Dreiecke, deren Ecken die Mittelpunkte der Ankreise des ursprünglichen und seines Gegenpunktedreiecks auf dem Umkreis sind.

(Siehe nebenstehende Figur. Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. B. № 1.

$A'B'C'$ sind die Gegenpunkte von ABC auf dem Umkreis, dessen Mittelpunkt O ist.

$A_1 A_2 A_3$ sind die Mittelpunkte der Ankreise von ABC und $A'_1 A'_2 A'_3$ die der Ankreise von $A'B'C'$:

Dann sind $A'_1 A'_2 A'_3$ die Gegenpunkte von $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf O.

Ferner sind sowohl $A_1 A_2 A_3$ die Mittelpunkte der Kreise, welche durch je 2 Ankreismittelpunkte und den Mittelpunkt des Inkreises I' des Dreiecks $A'B'C'$ gehen, als auch $A'_1 A'_2 A'_3$ diejenigen der Kreise, welche durch je 2 Ankreis- und den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC gehen.

Endlich sind auch die Inkreismittelpunkte I und I' der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Mittelpunkte der durch $A'_1 A'_2 A'_3$ und $A_1 A_2 A_3$ gelegten Kreise.

Der gemeinschaftliche Umkreis von ABC und $A'B'C'$ ist gemeinschaftlicher Feuerbachscher Kreis für folgende 8 Dreiecke:

$A_1 A_2 A_3$, $I A_1 A_2$, $I A_1 A_3$, $I A_2 A_3$ und
$A'_1 A'_2 A'_3$, $I' A'_1 A'_3$, $I' A'_1 A'_3$, $I' A'_2 A'_3$.

Daher liegen sämtliche Seitenmitten, Höhenfußpunkte und Mitten der oberen Höhenabschnitte auf der Peripherie dieses Kreises. Daraus folgt weiter, daß die Mitten $M_1 M_2 M_3$ der Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zugleich die Mittelpunkte folgender 6 Kreise:

$B C A_2 A_3$, $A C A_1 A_3$, $A B A_1 A_2$ und
$B' C' I' A'_1$, $A' C' I' A'_2$, $A' B' I' A'_3$ sind.

Ebenso sind die Mitten $M'_1 M'_2 M'_3$ der Seiten des Dreiecks $A'_1 A'_2 A'_3$ zugleich die Mittelpunkte folgender 6 Kreise:

$B' C' A'_2 A'_3$, $A' B' A'_1 A'_3$, $A' B' A'_1 A'_2$ und
$B C I A^I$, $A C I A_2$, $A B I A_3$.

Fig. I.

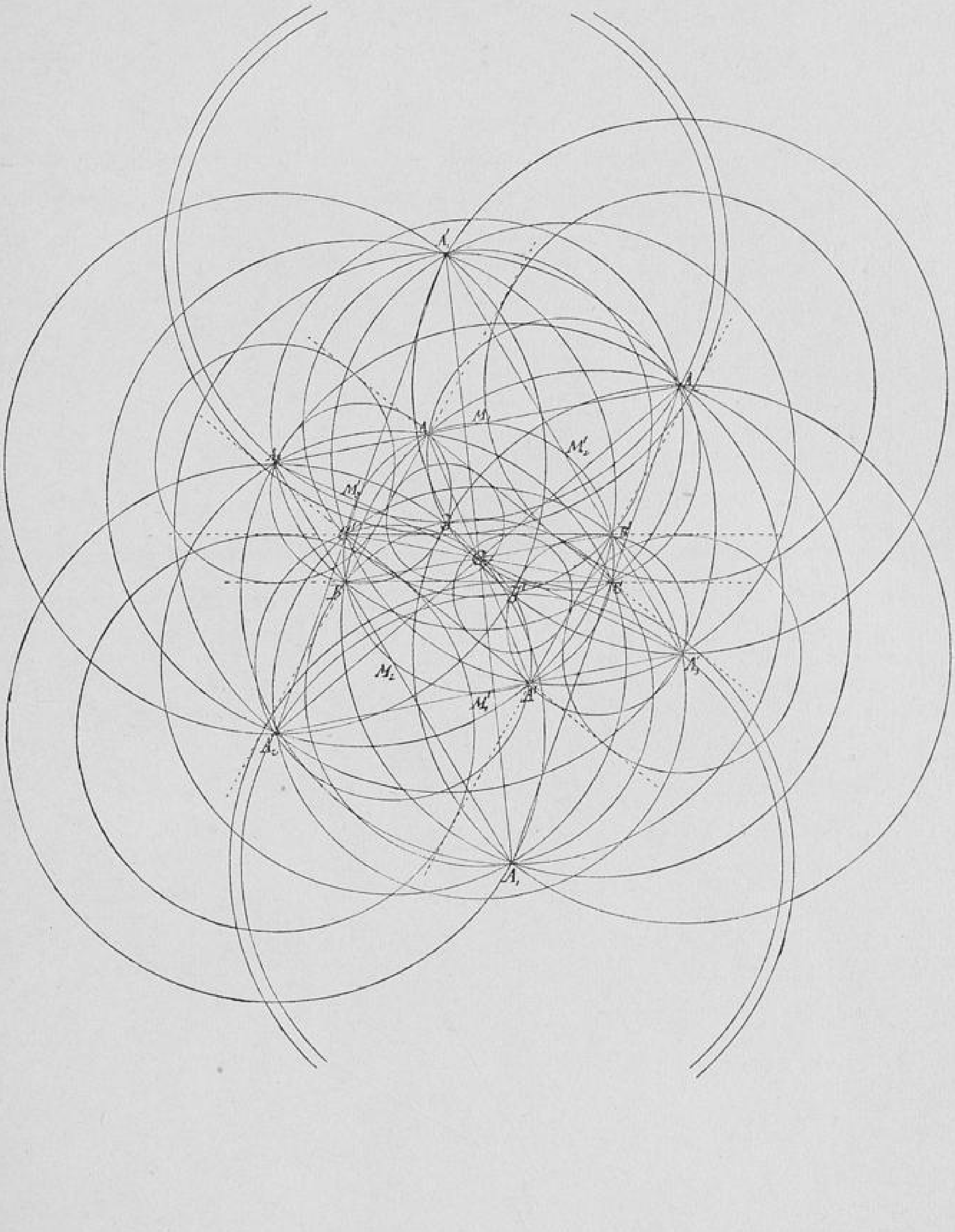
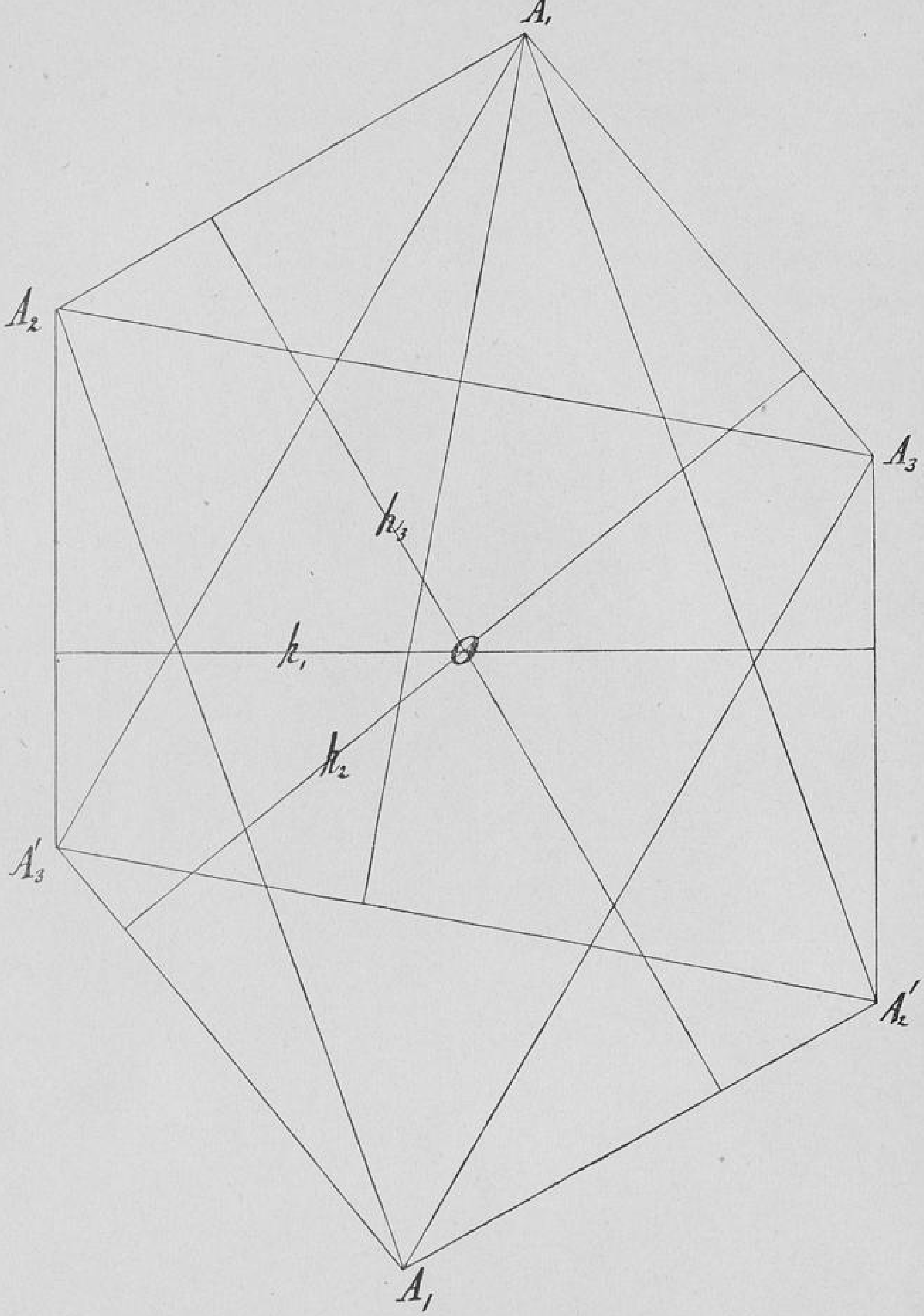


Fig. Ia.



Zusatz zu I.
(Siehe Rückseite der Figur I).

Verbindet man die Punkte $A_1\,A'_2\,A_3\,A'_1\,A_2\,A'_3$, so erhält man ein gleichseitiges parallelseitiges Sechseck, dessen Inhalt, durch die Bestimmungsstücke des ursprünglichen Dreiecks ausgedrückt, 4rs beträgt.

Das Sechseck kann aus dem Parallelogramm $A_2\,A_3\,A'_2\,A'_3$ und den beiden gleichschenkligen congruenten Dreiecken $A_1\,A'_2\,A'_3$ und $A'_1\,A_2\,A_3$ berechnet werden. Die gemeinschaftliche Basis des Parallelogramms und der beiden Dreiecke ist $A_2\,A_3 = 4r\cos\frac{\alpha}{2}$. Die Höhe des Parallelogramms ist der untere Höhenabschnitt und die Hälfte des oberen von dem Dreieck $A_1\,A_2\,A_3$

$$\begin{aligned}
\text{also} &= 4r\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 2r\sin\frac{\alpha}{2}\\
&= 2r\left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\\
&= 2r\left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{h}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= 2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2}. \quad \text{Somit der Flächeninhalt}
\end{aligned}$$

$$8r^2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 8r^2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = r^2\left(\sin\beta + \sin\gamma\right)$$

Die Höhe der beiden gleichschenkligen Dreiecke ist die Hälfte des oberen Höhenabschnitts von $A_1\,A_2\,A_3$, also der Flächeninhalt der beiden Dreiecke $4r\cos\frac{\alpha}{2}.\ 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 8r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 4r^2\sin\alpha$. Somit der Flächeninhalt des Sechsecks: $4r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2r(2r\sin\alpha + 2r\sin\beta + 2r\sin\gamma) = 2r.\ 2s = 4rs$.

Zieht man durch O die 3 auf je zwei Gegenseiten des Sechsecks senkrecht stehenden Geraden h_1 h_2 und h_3, so ist deren Summe dem doppelten Umfang des Urdreiecks gleich.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $A_2\,A_3\,A'_2\,A'_3$ ist nach vorstehendem $= 4r^2 (\sin\beta + \sin\gamma)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
2r\,h_1 &= 4r^2(\sin\beta + \sin\gamma)\\
h_1 &= 2r(\sin\beta + \sin\gamma). \quad \text{Analog}\\
h_2 &= 2r(\sin\alpha + \sin\gamma) \quad \text{und}\\
h_3 &= 2r(\sin\alpha + \sin\beta). \quad \text{Folglich}
\end{aligned}$$

$$h_1 + h_2 + h_2 = 4r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4s.$$

II.

Das Ankreismittelpunktedreieck und das Potenzpunktedreieck.

(Siehe nebenstehende Figur. Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. 1904. Seite 56. № 2).

$A_1 A_2 A_3$ sind wieder die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks ABC und I der des Inkreises. $P_1 P_2 P_3$ und P_4 sind die Potenzpunkte der Kreise um $I A_2 A_3$, $I A_1 A_3$, $I A_1 A_2$ und $A_1 A_2 A_3$.

$A_0 B_0 C_0$ sind die Seitenmitten von ABC.

Dann haben die Dreiecke ABC und $P_1 P_2 P_3$ einen gemeinschaftlichen Feuerbachschen Kreis.

P_4 ist der Mittelpunkt des Inkreises des Mittendreiecks $A_0 B_0 C_0$. Ferner sind $P_1 P_2 P_3$ die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$.

Endlich sind die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $A_1 A_2 A_3$ ähnlich. Die Seiten des ersteren sind parallel den Seiten des letzteren und je die Hälfte derselben. Der Situationspunkt der beiden Dreiecke ist S, der Schwerpunkt des ursprünglichen Dreiecks ABC.

Es verhalten sich

$$SP_1 : SA_1 = SP_2 : SA_2 = SP_3 : SA_3 = 1 : 2.$$

(Vergl. Aufg. 1649 in XXIX, 25. und deren Auflösung in XXX, Seite 262).

Fig. II.

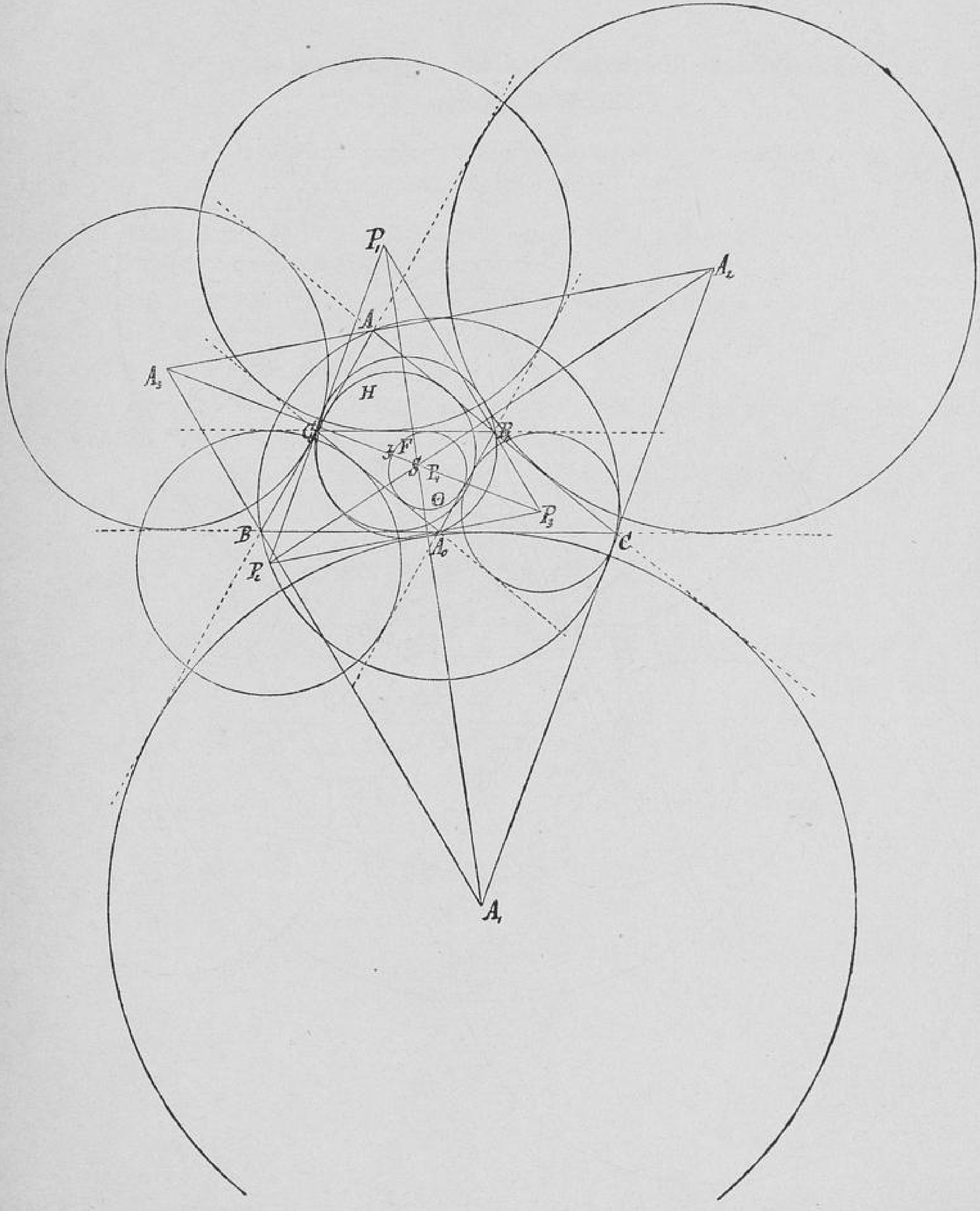
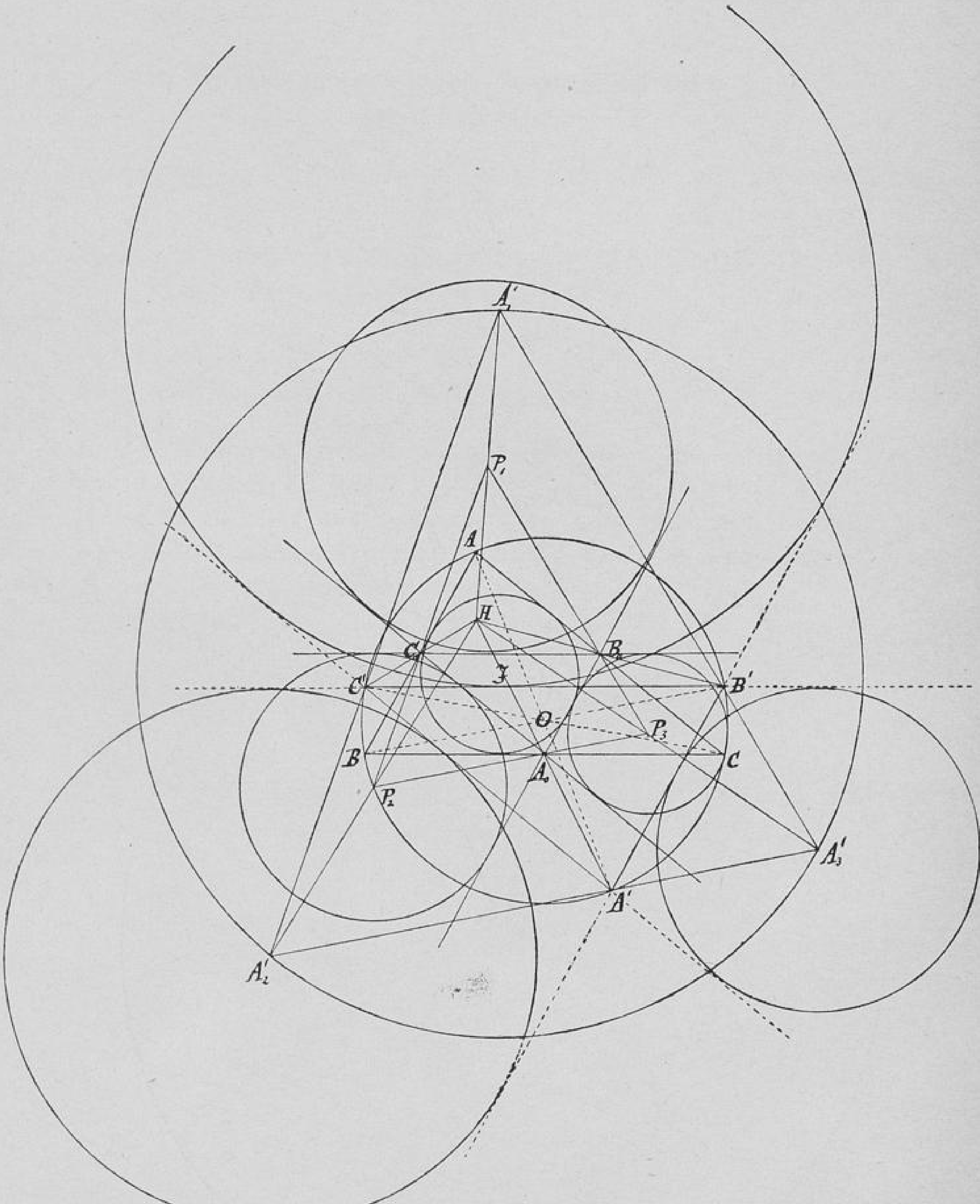


Fig. III.



III.

Das Potenzpunktedreieck und das Ankreismittelpunktedreieck des Gegenpunktedreiecks.

(Siehe nebenstehende Figur III. Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. 1904. Seite 56. № 3).

Wie in I sind $A' B' C'$ die Gegenpunkte von ABC auf dem Umkreis und $A'_1 A'_2 A'_3$ die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks $A' B' C'$.

Wie in II sind $P_1 P_2 P_3$ die Potenzpunkte je zweier Ankreise und des Inkreises des Urdreiecks ABC.

$A_0 B_0 C_0$ sind die Seitenmitten von ABC.

Dann sind die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $A'_1 A'_2 A'_3$ ähnlich und die Seiten des ersteren sind parallel den Seiten des letzteren und je die Hälfte derselben.

Der Situationspunkt der beiden ähnlichen Dreiecke ist H, der Höhenschnittpunkt des ursprünglichen Dreiecks.

Es verhalten sich

$$H P_1 : H A'_1 = H P_2 : H A'_2 = H P_3 : H A'_3 = 1 : 2 \text{ und}$$
$$H A_0 : H A' = H B_0 : H B' = H C_0 : H C' = 1 : 2.$$

Die Höhenfußpunkte des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ sind die Seitenmitten des Dreiecks ABC.

IV.

Das Mittendreieck, dessen Gegenpunktedreieck in Bezug auf den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises und die beiden Ankreismittelpunktedreiecke derselben.

(Siehe nebenstehende Figur IV. Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. 1904. Seite 56. № 4).

$A_0 B_0 C_0$ sind wieder die Mitten der Seiten von ABC, $P_1 P_2 P_3$ die Potenzpunkte je zweier Ankreise und des Inkreises von ABC. Dann sind (siehe II.) $P_1 P_2 P_3$ auch die Mittelpunkte der Ankreise von $A_0 B_0 C_0$.

Ebenfalls ist dort schon erwähnt, daß der Feuerbachsche Kreis von ABC zugleich der von $P_1 P_2 P_3$ ist.

Ist H der Höhenschnittpunkt von ABC, so liegen auch die Mitten von HA, HB und HC auf der Peripherie des Feuerbachschen Kreises und dieselben sind die Ecken eines dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecks $A'_0 B'_0 C'_0$, dessen Seiten denen von ABC parallel und je die Hälfte derselben sind. Der Situationspunkt dieser Dreiecke ist H.

Das Dreieck $A'_0 B'_0 C'_0$ ist das Gegenpunktedreieck von $A_0 B_0 C_0$ in Bezug auf den Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises. Das Ankreismittelpunktedreieck $P'_1 P'_2 P'_3$ ist das Gegenpunktedreieck von $P_1 P_2 P_3$, dem Ankreismittelpunktedreieck von $A_0 B_0 C_0$ (in Bezug auf F).

Fig IV.

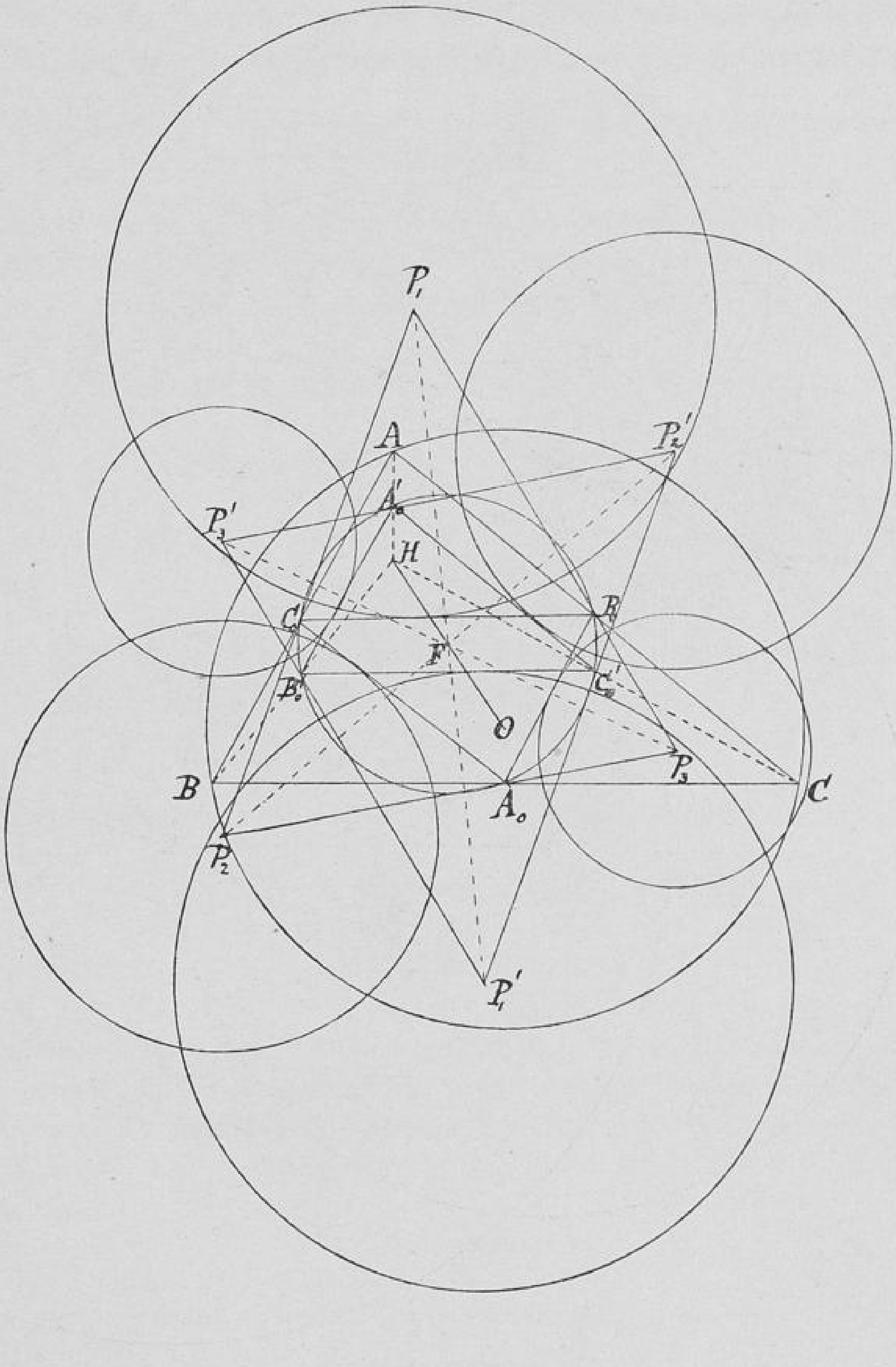
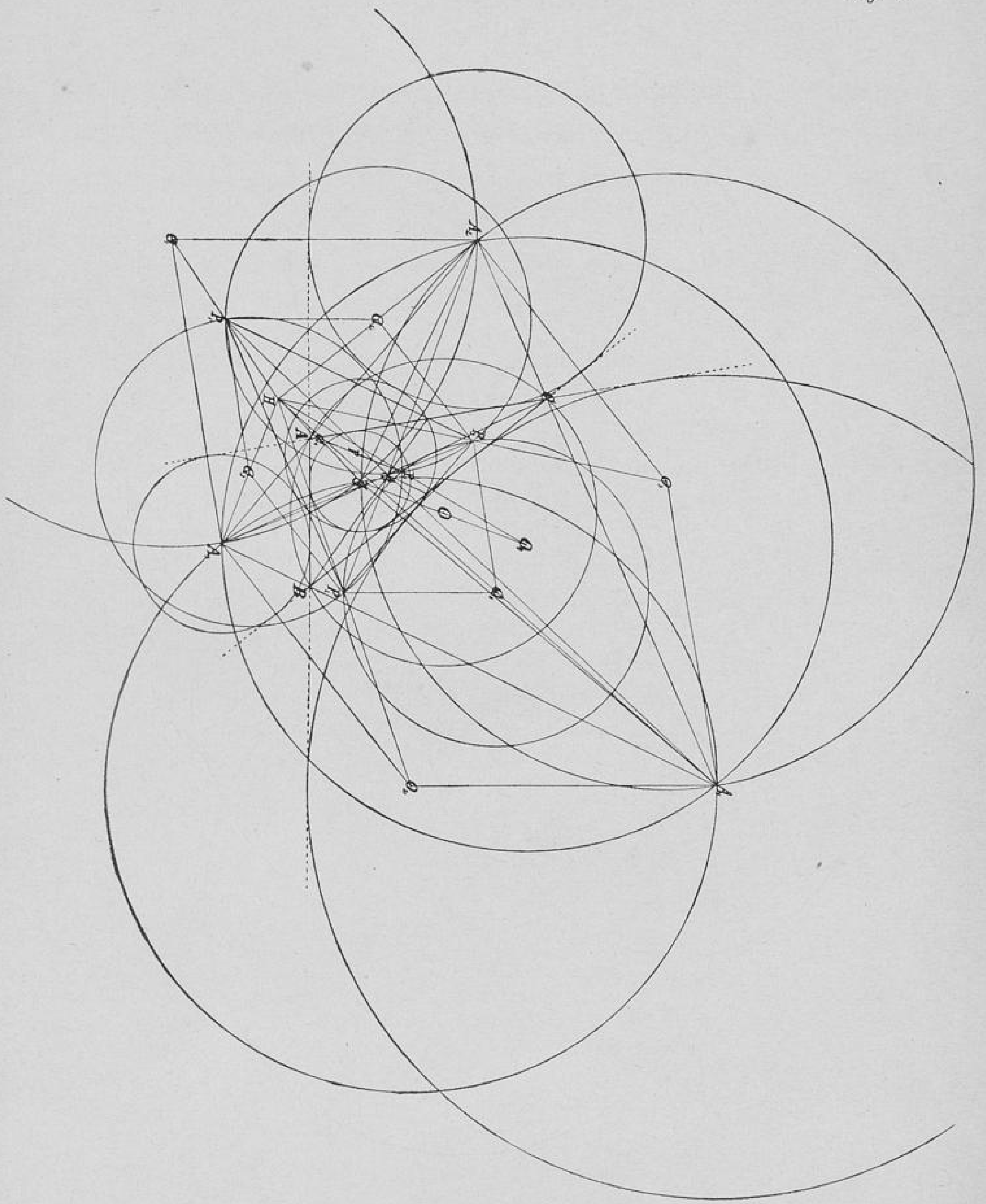


Fig. V.



V.

Die Dreiecke, welche einerseits von den Mittelpunkten des In= und der Ankreise, andrerseits von den Potenzcentren je dreier dieser Dreiecke gebildet werden.

(Siehe nebenstehende Figur V. Aufgaben=Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. 1904. Seite 214. № 12).

$A_1 A_2 A_3$ sind die Mittelpunkte der Ankreise, I der des In=, O der des Umkreises, F der des Feuerbachschen Kreises; S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und H sein Höhenschnittpunkt.

$P_1 P_2 P_3$ und P_4 sind die Potenzcentra der Kreise um $I A_2 A_3$, $I A_1 A_3$, $I A_1 A_2$ und $A_1 A_2 A_3$.

$Q_1 Q_2 Q_3$ und Q_4 sind die Mittelpunkte der Kreise um $P_2 P_3 P_4$, $P_1 P_3 P_4$, $P_1 P_2 P_4$ und $P_1 P_2 P_3$.

$O_1 O_2 O_3$ und O_4 sind die Mittelpunkte der Kreise um $I A_2 A_3$, $I A_1 A_3$, $I A_1 A_2$ und $A_1 A_2 A_3$.

Dann liegen auf einer Geraden:

$H P_1 O_1$, $H P_2 O_2$, $H P_3 O_3$ und $H P_4 O_4$, ferner
$H Q_1 A_1$, $H Q_2 A_2$, $H Q_3 A_3$, und $H Q_4 I$; ebenso
$I S P_4$, $A_1 S P_1$, $A_2 S P_2$ und $A_3 S P_3$; ferner
$I O O_4$, $A_1 O O_1$, $A_2 O O_2$ und $A_3 O O_3$;
$A I A_1$, $B I A_2$, $C I A_3$ und $A A_2 A_3$, $B A_1 A_3$, $C A_1 A_2$,
$P_1 F Q_1$, $P_2 F Q_2$, $P_3 F Q_3$ und $P_4 F Q_4$.

Folgende Dreieckspaare sind ähnlich, haben den Situationspunkt S und ihre Seiten ver=verhalten sich wie 2 : 1:

$A_1 A_2 A_3$ und $P_1 P_2 P_3$
$I A_1 A_2$ und $P_4 P_1 P_2$
$I A_1 A_3$ und $P_4 P_1 P_3$
$I A_2 A_3$ und $P_4 P_2 P_3$

Der Umkreis des Urdreiecks ist Feuerbachscher Kreis für die links und der Feuerbachsche Kreis des Urdreiecks ist zugleich Feuerbachscher Kreis der rechts stehenden Dreiecke in voriger Zusammenstellung. Die Eulerschen Geraden dieser Dreieckspaare sind natürlich auch parallel und verhalten sich wie 2 : 1.

Die Punkte

$A_1 O_3 A_2 O_1 A_3 O_2$ und
$P_1 Q_3 P_2 Q_1 P_3 Q_2$

bilden parallelseitige gleichseitige Sechsecke mit dem Situationspunkt H.

VI.

Das aus den dem Feuerbachschen und den Ankreisen gemeinschaftlichen Tangenten gebildete Dreieck und das Potenzpunktedreieck.

(Siehe nebenstehende Figur VI. Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XXXV. 1904. Seite 214. № 13).

Ist $P_1 P_2 P_3$ das Potenzpunktedreieck von ABC, so ist dessen Höhenschnittpunkt P_4 das Potenz-Zentrum der Ankreise $A_1 A_2 A_3$. Da nun P_1 das Potenz-Zentrum der Kreise um $I A_2 A_3$ ist, so muß $P_1 P_4$ die Potenz-Gerade der Kreise um A_2 und A_3 sein. Folglich ist der Schnittpunkt K der dem Feuerbachschen und den Kreisen um A_2 und A_3 gemeinschaftlichen Tangenten KM und KN auf $P_1 P_4$, analog M auf $P_3 P_4$ und L auf $P_2 P_4$ gelegen.

Nun ist $P_1 P_2$ die Potenzgerade von den Kreisen um I u. A_3 und KL diejenige von denen um A_3 u. F, folglich ist ihr Schnittpunkt N das Potenz-Zentrum von $A_3 F I$; analog Q von $A_1 F$ u. I und R von $A_2 F$ u. I. Somit liegen N, Q u. R auf der Potenz-Geraden von F u. I d. i. die diesen gemeinschaftliche Tangente.

Also gilt der Satz:

Die Ecken des Dreiecks, welches aus den dem Feuerbachschen und je einem Ankreise gemeinschaftlichen Tangenten gebildet wird, liegen auf den Höhen des Potenzpunktedreiecks, d. h. desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die Potenzgeraden des In- und je eines Ankreises sind. Ferner schneiden die 3 Seiten des Tangentendreiecks die des Potenzpunktedreiecks in 3 Punkten, welche auf der dem In- und dem Feuerbachschen gemeinschaftlichen Tangente liegen.

Fig. VI.

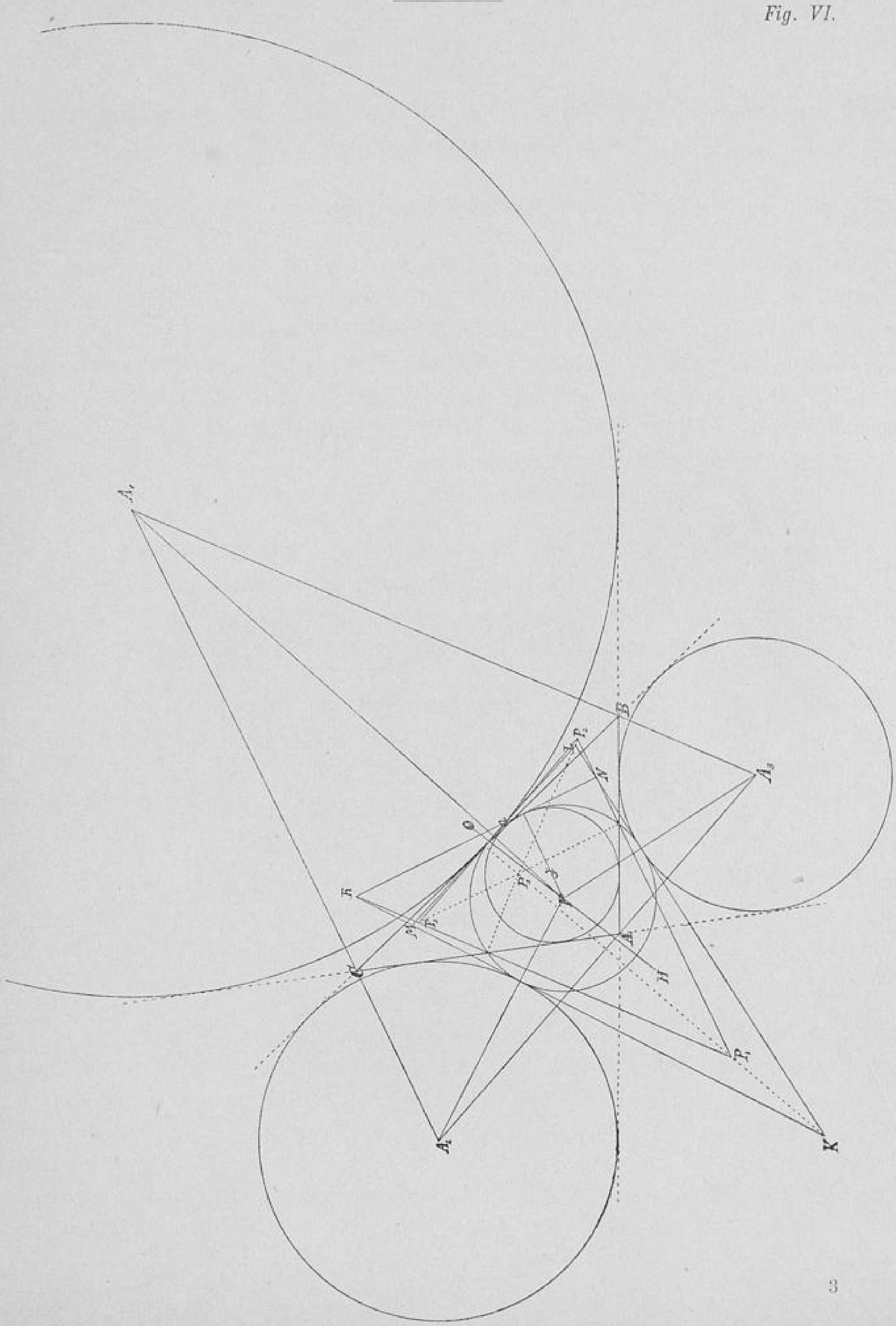
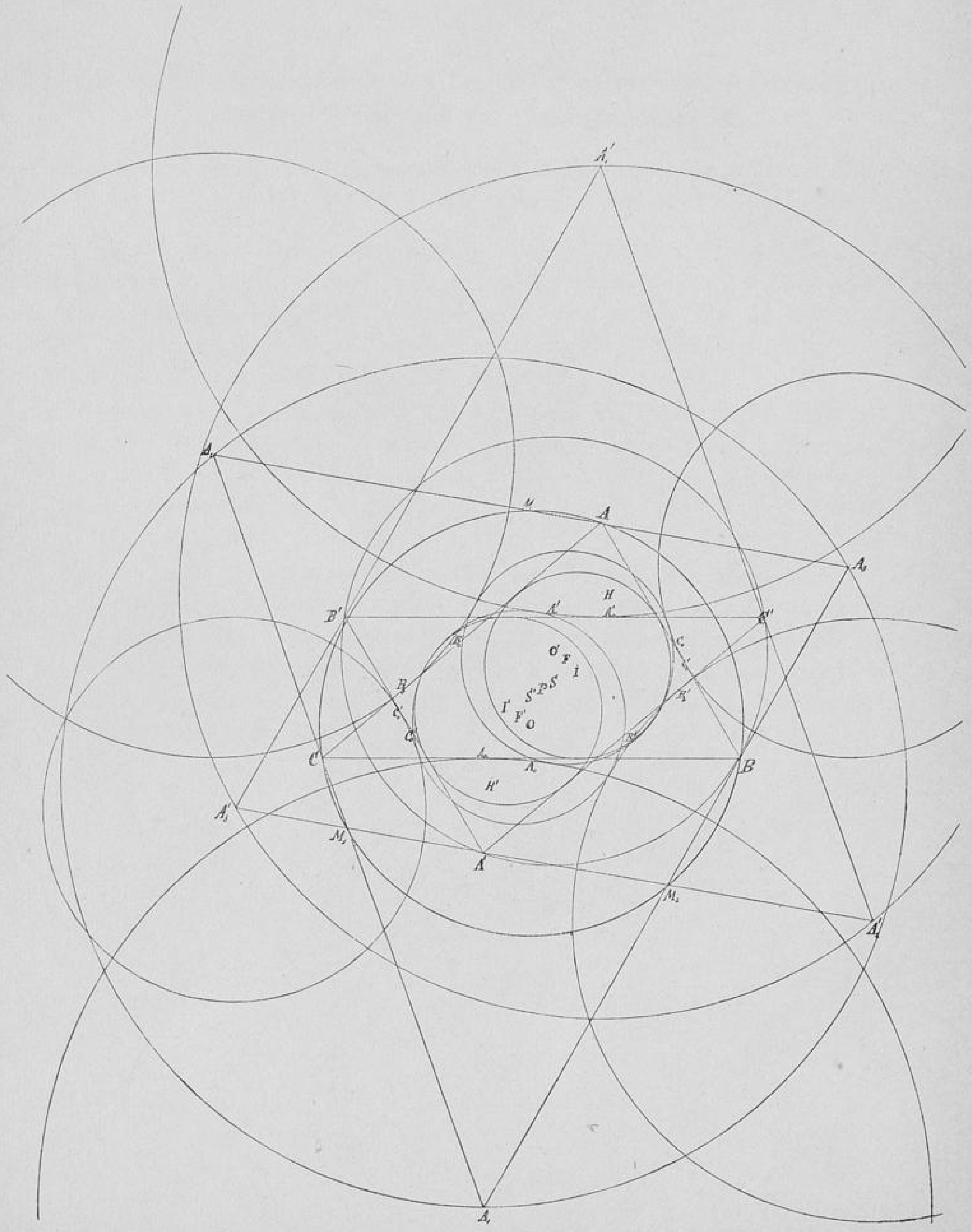


Fig. VII.



VII.

Das in Bezug auf das Potenz-Zentrum der 3 Ankreise symmetrisch gelegene, dem Urdreieck congruente Dreieck.

(Siehe nebenstehende Figur VII).

Das Dreieck $A'B'C'$ ist congruent mit und symmetrisch zu ABC in Bezug auf P als Situationspunkt. P (früher P_4 genannt) ist das Potenz-Zentrum der Ankreise, deren Mittelpunkte $A_1 A_2$ und A_3. P ist daher auch Inkreismittelpunkt des Mittendreiecks $A_0 B_0 C_0$ und da $A'B'C'$ Gegenpunkte von ABC in Bezug auf P, so sind auch $A'_0 B'_0 C'_0$, die Mitten von $A'B'C'$, Gegenpunkte von $A_0 B_0 C_0$, also ist der Inkreis von $A_0 B_0 C_0$ gleichzeitig der von $A'_0 B'_0 C'_0$ und sein Mittelpunkt ist auch Potenz-Zentrum der Ankreise des Dreiecks $A'B'C'$, dessen Mittelpunkte $A'_1 A'_2 A'_3$. Folglich haben diese 6 Kreise einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis, dessen Zentrum P. Die 12 von P aus an die 6 Kreise gelegten Tangenten sind gleich.

Die Euler-Geraden der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$: $HFSO$ und $H'F'S'O'$ sind parallel und ihre Punkte paarweis symmetrisch zu P. Da auch $HI \parallel$ und $= H'I'$, so bildet $HIH'I'$ ein Parallellogramm, dessen Diagonalen sich in P schneiden. $ISPS'I'$ ist die andre Diagonale, auf der somit die Inkreismittelpunkte und Schwerpunkte liegen.

Der Höhenschnittpunkt H ist Umkreismittelpunkt von $A'_1 A'_2 A'_3$, O', der Umkreismittelpunkt von $A'B'C'$, ist zugleich Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises von $A'_1 A'_2 A'_3$, da beide Kreise identisch sind, und I' ist Höhenschnittpunkt von $A'_1 A'_2 A'_3$. Analoge Bedeutung haben HO und I für das Dreieck $A_1 A_2 A_3$. Daraus folgt, daß auch die Schwerpunkte dieser Dreiecke auf $HO'I'$ resp. $H'OI$ fallen.

O ist Höhenschnittpunkt von $A_0 B_0 C_0$ und F Umkreismittelpunkt, während der Schwerpunkt des Mittendreiecks $A_0 B_0 C_0$ mit S, dem Schwerpunkt des Urdreiecks, zusammenfällt. Dieselbe Bedeutung haben O', F' und S' für das Mittendreieck $A'_0 B'_0 C'_0$. Daraus folgt, daß auch die Mittelpunkte ihrer Feuerbachschen Kreise auf OF resp. $O'F'$ liegen.

$A_a B_b C_c$ und $A'_a B'_b C'_c$ sind die Punkte, in welchen die Ankreise die entsprechenden Dreiecksseiten berühren. Dann schneiden sich AA_a, BB_b und CC_c in I', dem Inkreismittelpunkt des symmetrischen Dreiecks $A'B'C'$ und analog

$A'A'_a$, $B'B'_b$ und $C'C'_c$ in I, dem Inkreismittelpunkt von ABC.

Diese Transversalen gehen aber auch durch die Mitten der entsprechenden Seiten des symmetrischen Dreiecks, also z. B. AA_a durch A'_b, d. i. die Mitte von $B'C'$, also a'.

Die Strahlen $I'A$, $I'B$ und $I'C$ werden in A'_0, B'_0 und C'_0 halbiert, ebenso IA', IB' und IC' in A_0, B_0 und C_0, sodaß die Dreiecke ABC und $A'_0 B'_0 C'_0$ symmetrisch (perspektivisch) liegen in Bezug auf I' und $A'B'C'$ und $A_0 B_0 C_0$ in Bezug auf I.

Ferner liegen auf den Höhen des Dreiecks ABC die Ankreismittelpunkte des symmetrischen Dreiecks $A'_1 A'_2 A'_3$ und natürlich auch deren Berührungspunkte mit den entsprechenden Dreiecksseiten $A'_a B'_b C'_c$ also auf h_a : A'_1 und A'_a 2c.

Analog auf den Höhen des Dreiecks $A'B'C'$ die Ankreismittelpunkte $A_1 A_2 A_3$ und deren Berührungspunkte mit den Dreiecksseiten A_a, B_b und C_c. $A_0 A'_0 \perp A_2 A_3$, $B_0 B'_0 \perp A_1 A_3$ und $C_0 C'_0 \perp A_1 A_2$.