In der Beilage zum Programm der Großherzoglichen Realschule 1897 hatte ich, von der Definition der Apollonischen Kreise ausgehend, die Beziehungen der Radien derselben zu den Seiten, Winkeln, Winkelhalbierenden, Höhen und dem Flächeninhalt des Dreiecks, die Constructionen zur Auffindung der Mittelpunkte der A. Kr., die Lage derselben zu einander und ihre Entfernung von einander, ferner die Beziehungen zum Umkreis, zu dem Grebeschen Punkt und den Winkelgegentransversalen zusammengestellt. Im folgenden füge ich hierzu noch einige Beziehungen der Verbindungslinie der Mittelpunkte der A. Kr. zu der Harmonikalen des Dreiecks, der Verbindungslinie der Apollonischen Pole zu dem Umkreis, ferner die Berechnung der Entfernung der Apollonischen Pole und die Beziehungen der Verbindungslinie der Mittelpunkte der A. Kr. zu den Brocardschen Punkten und dem Brocardschen Kreise.

12.

Die Verbindungslinie der äußeren Endpunkte der mit den Seiten zusammenfallenden Durchmesser der A. Kr. ist die Harmonikale des Inkreismittelpunktes in Bezug auf das Dreieck. (Figur 8.)

$A_1 A_2 A_3$ sind die Ankreismittelpunkte des Dreiecks ABC. Man verlängert die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, bis sie sich mit den verlängerten gegenüberliegenden Seiten von ABC schneiden in A'_α, B'_β und C'_γ. Diese drei Punkte liegen in einer Geraden, der Harmonikalen des Inkreismittelpunktes in Bezug auf das Dreieck ABC.*) Sie sind die äußeren Ähnlichkeitspunkte je zweier Ankreise des Dreiecks ABC. Sind AA_α, BB_β und CC_γ die Winkelhalbierenden von ABC, so sind A_α und A'_α die Endpunkte des Durchmessers des zu a gehörigen Apollonischen Kreises, der mit a zusammenfällt. Es ist somit H_a der Mittelpunkt von $A_\alpha A'_\alpha$, entsprechend H_b der von $B_\beta B'_\beta$ und H_c der von $C_\gamma C'_\gamma$.

Es gehen demnach von C folgende harmonische Punktreihen aus: $CA_\alpha BA'_\alpha$ und $CB_\beta AB'_\beta$. Daraus folgt, daß auch $A_\alpha B_\beta$ nach C'_γ convergiert, weil BA und $A'_\alpha B'_\beta$ dahin convergieren. Analog $A_\alpha C_\gamma$ nach B'_β und $B_\beta C_\gamma$ nach A'_α. Daraus folgt in Verbindung mit früherem: Es liegen nicht nur die Mittelpunkte der A. Kr. auf einer Geraden, sondern auch die äußeren Endpunkte sowie ein äußerer und je zwei innere Endpunkte der mit den Dreiecksseiten zusammenfallenden Durchmesser der A. Kr.

Ferner sind harmonische Punktreihen:

$A_1 A_\alpha A X$,
$A_2 B_\beta B Y$ und
$C C_\gamma A_3 Z$, d. h.

die 4. harmonischen Punkte zu $A_1 A_\alpha A$, $A_2 B_\beta B$ und $C C_\gamma A_3$ liegen ebenfalls auf der Harmonikalen des Inkreismittelpunktes in Bezug auf das Dreieck ABC.

---

*) Dr. F. W. Frankenbach. Die Harmonikalen der Mittelpunkte der Berührungskreise eines Dreiecks in Bezug auf dasselbe. Liegnitz 1895.

Endlich sind harmonische Punktreihen:

$$A_1\,B\,A_3\,B'\beta,$$
$$A_2\,A\,A_3\,A'\alpha \quad \text{und}$$
$$A_1\,C\,A_2\,C'\gamma, \quad \text{d. h.}$$

der äußere Endpunkt des Durchmessers des zu a gehörigen Apollonischen Kreises ($A'\alpha$) teilt die a gegenüberliegende Seite des Dreiecks $A_1\,A_2\,A_3$ in demselben Verhältnis nach außen, wie der Höhenfußpunkt (A) nach innen.

13.

Die Verbindungslinie der Apollonischen Pole (isodynamischen Punkte) wird von dem Umkreis harmonisch geschnitten, d. h. die Apollonischen Pole sind zugeordnete Pole des Umkreises. (Figur 9.)

Der Mittelpunkt des Umkreises O liegt auf der Verbindungslinie der Apollonischen Pole $P_{,}\,P_{,,}$, und der Umkreis ist Orthogonalkreis der Apollonischen Kreise (siehe Programm 1897 Nr. 7. Seite 11.)

Wenn aber ein Kreis einen andern rechtwinklig schneidet, so wird jede durch den Mittelpunkt des einen Kreises gehende gerade Linie von dem andern Kreis so geschnitten, daß die Durchschnittspunkte zugeordnete Pole des ersten Kreises werden. Jeder Durchmesser des Umkreises wird daher von jedem Apollonischen Kreise harmonisch geschnitten. Folglich auch derjenige, auf welchem die beiden Apollonischen Pole $P_{,}$ und $P_{,,}$ liegen. $P_{,}\,P_{,,}$ sind also zugeordnete Pole des Umkreises.*) Es gilt

$$M\,P_{,} : N\,P_{,} = M\,P_{,,} : N\,P_{,,}.$$

14.

Die Entfernung der Apollonischen Pole (isodynamischen Punkte) von einander. (Figur 4 der Programm-Beilage 1897.)

Um $P_{,}\,P_{,,}$ zu berechnen, benutzen wir das Dreieck $P_{,}\,H_a\,H_c$, in welchem $P_{,}\,H_a = r_a$, $P_{,}\,H_c = r_c$ und $\sphericalangle\, H_c\,P_{,}\,H_a = 120^0$. Die Hälfte von $P_{,}\,P_{,,}$ ist die Höhe dieses Dreiecks auf $H_a\,H_c$. Da der Außenwinkel des Dreiecks $H_c\,P_{,}\,H_a$ bei $P_{,} = 60^0$, so ist die von H_c auf $H_a\,P_{,}$ gefällte Höhe $= r_c \sin\,60^0 = \frac{r_c}{2}\sqrt{3}$. Somit

$$\frac{P_{,}\,P_{,,}\,.\,H_a\,H_c}{4} = \frac{r_a\,r_c}{4}\sqrt{3}, \quad \text{also}$$

$$P_{,}\,P_{,,} = \frac{r_a\,r_c\sqrt{3}}{H_a\,H_c}.$$

Nun ist (siehe Progr. 1897 Seite 10)

$$H_a\,H_c = \sqrt{r_a{}^2 + r_c{}^2 + r_a\,r_c}, \text{ also}$$

$$P_{,}\,P_{,,} = \frac{r_a\,r_c\sqrt{3},}{\sqrt{r_a{}^2 + r_c{}^2 + r_a\,r_c}}$$

---

*) Hierin liegt der Grund, daß die Punkte $P_{,}$ und $P_{,,}$ als Apollonische Pole bezeichnet wurden.

Um in diesem Ausdruck r_a und r_c durch die Bestimmungsstücke des Dreiecks zu ersetzen, leiten wir für r_a und r_c mit Hülfe des Satzes 10 der vorigjährigen Progr.-Beilage andre Werte ab. Es ist (siehe dort Seite 14) $r^2 = d_a{}^2 - r_a{}^2$, weil $\Delta\ A\,O\,H_a$ rechtwinklig; ferner

$$d_a = \frac{r_a\, t_a}{h_a}, \text{ also}$$

$$r^2 = \frac{r_a{}^2}{h_a{}^2}\,(t_a{}^2 - h_a{}^2)$$

Nun ist $t_a{}^2 - h_a{}^2 = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$, worin p und q die Höhenabschnitte auf a sind und $\frac{p-q}{2} = r\sin(\beta-\gamma)$; also $r^2 = \frac{r_a{}^2}{h_a{}^2}\,.\, r^2\sin^2(\beta-\gamma)$.

Setzt man hierin

$$h_a = 2r\sin\beta\,\sin\gamma, \text{ so kommt}$$

$$r^2 = \frac{r_a{}^2\sin^2(\beta-\gamma)}{4\sin^2\beta\,\sin^2\gamma} = \frac{r_a{}^2}{4}(\cot_g\gamma - \cot_g\beta)^2$$

$$\text{Also } r_a = \frac{2r}{\cot_g\gamma - \cot_g\beta} \text{ und}$$

$$\text{analog } r_c = \frac{2r}{\cot_g\beta - \cot_g\alpha}.$$

Setzt man diese beiden Werte in den Ausdruck für $P, P_{\prime\prime}$ ein, so erhält man

$$P, P_{\prime\prime} = \frac{4r^2\sqrt{3}}{(\cot g\beta - \cot g\alpha)(\cot g\gamma - \cot g\beta)\sqrt{\frac{4r^2}{(\cot g\beta-\cot g\alpha)^2}+\frac{4r^2}{(\cot g\gamma-\cot g\beta)^2}+\frac{4r^2}{(\cot g\beta-\cot g\alpha)(\cot g\gamma-\cot g\beta)}}}$$

$$= \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{(\cot_g\beta-\cot_g\alpha)^2 + (\cot_g\gamma-\cot_g\beta)^2 + (\cot_g\beta-\cot_g\alpha)(\cot_g\gamma-\cot_g\beta)}}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ergiebt:

$$\cot_g{}^2\alpha + \cot_g{}^2\beta + \cot_g{}^2\gamma - \cot_g\alpha\ \cot_g\beta - \cot_g\alpha\ \cot_g\gamma - \cot_g\beta\ \cot_g\gamma,$$

und dies läßt sich in folgende Form bringen:

$$(\cot_g\alpha + \cot_g\beta + \cot_g\gamma)^2 - 3(\cot_g\alpha\ \cot_g\beta + \cot_g\alpha\ \cot_g\gamma + \cot_g\beta\ \cot_g\gamma).$$

Nun ist $\cot_g\alpha + \cot_g\beta + \cot_g\gamma = \cot_g\omega$, worin ω den Brocardschen Winkel des Dreiecks ABC bedeutet, und $\cot_g\alpha\ \cot_g\beta + \cot_g\alpha\ \cot_g\gamma + \cot_g\beta\ \cot_g\gamma = 1$.

Also ergiebt sich

$$P, P_{\prime\prime} = \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{\cot_g{}^2\omega - 3}} \text{ oder auch}$$

$$= 2r\sqrt{\frac{3}{\cot_g{}^2\omega - 3}}$$

Spezielle Fälle:

I. Da für das **gleichseitige** Dreieck $\omega = 30^0$, also $\cot_g\omega = \sqrt{3}$, so folgt aus dem Ausdruck: $P, P_{\prime\prime} = \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{\cot_g{}^2\omega - 3}}$, daß $P, P_{\prime\prime}$ für das gleichseitige Dreieck ∞ ist. Dies ergiebt sich auch schon daraus, daß $P_{\prime\prime}$ für das gleichseitige Dreieck im Unendlichen liegt.

II. Im **gleichschenkligen** Dreieck ist: $\cot_g \omega = \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$, worin α der Winkel an der Spitze ist.*)

$$\text{Also } \cot_g{}^2\omega - 3 = \frac{4 - 4\cos\alpha + \cos^2\alpha - 3 + 3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - 4\cos\alpha + 4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}, \text{ somit}$$

$$\sqrt{\cot_g{}^2\omega - 3} = \frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ also}$$

$$P_{,}P_{,,} = \frac{2r\sqrt{3}\sin\alpha}{1 - 2\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{1 - 2\cos\alpha},$$

worin a die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ist. Bezeichnet man nun den Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks mit b und die Höhe mit h, so kommt, da

$$1 - 2\cos\alpha = 3 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{b},$$

$$1 - 2\cos\alpha = 3 - \frac{4h^2}{b^2} = \frac{3b^2 - 4h^2}{b^2},$$

$$\text{und da } h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}, \text{ also}$$

$$1 - 2\cos\alpha = \frac{3b^2 - 4b^2 + a^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

$$\text{somit } P_{,}P_{,,} = \frac{ab^2\sqrt{3}}{a^2 - b^2}.$$

III. Im rechtwinkligen Dreieck (Hypotenuse a und Katheten b und c) wird

$$\cot_g \omega = \frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a^2}{bc}. \text{ Also}$$

$$P_{,}P_{,,} = \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{bc}\right)^2 - 3}} = \frac{2rbc\sqrt{3}}{\sqrt{b^4 - b^2c^2 + c^4}}.$$

Hieraus folgt für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck:

$$P_{,}P_{,,} = 2r\sqrt{3} = a\sqrt{3},$$

was sich leicht direct beweisen läßt.

IV. Da der Radius des Brocardschen Kreises: $r_{,} = \frac{r}{2}\sqrt{1 - 3t_g{}^2\omega}$, so findet zwischen der Entfernung der Apollonischen Pole (isodynamischen Punkte) $P_{,}P_{,,} = e$, dem Radius des Umkreises r, dem des Brocardschen Kreises $r_{,}$ und dem Brocardschen Winkel ω folgende Beziehung statt:

$$r_{,} \cdot e = r^2 t_g \omega \sqrt{3}.$$

Eliminieren wir mittelst der Gleichung $r_{,} = \frac{r}{2}\sqrt{1 - 3t_g{}^2\omega}$ aus diesem Ausdruck $t_g\omega$, so erhalten wir

*) Dr. A. Emmerich. Die Brocardschen Gebilde. Berlin 1891. § 7. 2. Seite 14.

$$r_{,} \, . \, e = r\sqrt{r^2 - 4r_{,}^2} \quad \text{oder}$$
$$\left(\frac{r_{,}\, e}{r}\right)^2 = (r + 2r_{,})\,(r - 2r_{,})$$

Demnach kann man e aus r und $r_{,}$ durch folgende Construction finden: Man construiert die mittlere geometrische Proportionale m zu $r + 2r_{,}$ und $r - 2r_{,}$ d. i. die halbe durch den Grebeschen Punkt gelegte kleinste Sehne des Umkreises, die zugleich Tangente an den Brocardschen Kreis ist. Dann ist e die 4. Proportionale zu $r_{,}$, r und m, denn

$$\frac{r_{,}\, e}{r} = m\,.$$

15.

I. Die Potenzlinie (Chordale) des Brocardschen und umbeschriebenen Kreises fällt mit der Polaren des Grebeschen Punktes in Bezug auf den umbeschriebenen Kreis zusammen.*) (Figur 9.)

OG ist der Durchmesser des Brocardschen Kreises, wenn O der Mittelpunkt des Umkreises und G der Grebesche Punkt ist. Der Centralpunkt Q d. h. der Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Centralen der beiden Kreise teilt die Centrale so, daß die Differenz der Quadrate der Abstände von den Mittelpunkten gleich ist der Differenz der Quadrate der Radien. Bezeichnet man OQ mit x, den Radius OZ des Brocardschen Kreises mit $r_{,}$ und den des Umkreises mit r, so muß

$$x^2 - (x - r_{,})^2 = r^2 - r_{,}^2 \quad \text{sein. Hieraus}$$
$$x = \frac{r^2}{2r_{,}}. \quad \text{Nun ist}$$
$$r_{,} = \frac{r}{2}\sqrt{1 - 3\,t_g{}^2\omega}$$
$$x = \frac{r}{\sqrt{1 - 3\,t_g{}^2\omega}}$$

Soll nun die Senkrechte auf der Centralen in Q die Polare zu G in Bezug auf den Umkreis sein, so müssen MGNQ harmonische Punkte sein. Halbiert man den Abstand der beiden zugeordneten Punkte MN, so muß

$$ON^2 = OG\,.\,OQ \quad \text{sein.}$$

Setzt man die gefundenen Werte ein, so ist $r^2 = r\sqrt{1 - 3\,t_g{}^2\omega}\,.\ \dfrac{r}{\sqrt{1 - 3\,t_g{}^2\omega}} = r^2$. Somit ist der obige Satz bewiesen.

II. Die drei dem Umkreis und je einem der Apollonischen Kreise gemeinschaftlichen Sehnen schneiden sich im Grebeschen Punkte.

Der Grebesche Punkt ist in Nr. 8 der Programm-Beilage von 1897 charakterisiert als der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken desjenigen Dreiecks A′B′C′, dessen Seiten Tangenten an den Umkreis in den Ecken des Urdreiecks sind. Also schneiden sich AA′, BB′ und CC′ in G. Nun sind ferner AG, BG und CG die

*) Prof. Dr. G. Hoffmann: Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben. Leipzig 1887. III. Abschnitt No. 1106. Seite 162.

Potenzlinien zu dem Umkreis und je einem der Apollonischen Kreise. Folglich fallen auch die dem Umkreis und je einem der Apollonischen Kreise gemeinschaftlichen Sehnen AA'', BB'' und CC'' mit AG, BG und CG zusammen.

III. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Apollonischen Kreise ist Polare zum Grebeschen Punkt in Bezug auf den Umkreis und zugleich Potenzlinie des Brocardschen und des Umkreises.

In der Programm-Beilage von 1897 ist unter Nr. 7 bewiesen, daß der Umkreis Orthogonalkreis der Apollonischen Kreise ist. Verbindet man daher den zweiten Endpunkt der dem Umkreis und dem einen Apollonischen Kreis gemeinschaftlichen Sehne mit dem Mittelpunkt des zugehörigen Apollonischen Kreises, zieht also z. B. $A'' H_a$, so ist auch diese Linie eine Tangente an den Umkreis. Ebenso $B'' H_b$ und $C'' H_c$. Folglich ist $H_a H_b H_c$ die Polare von G in Bezug auf den Umkreis nach dem Satze: Die Tangenten in den Endpunkten aller durch einen Punkt gelegten Sehnen schneiden sich in der Polaren dieses Punktes. Nach I dieses Kapitels ist aber die Polare des Grebeschen Punktes in Bezug auf den Umkreis zugleich die Potenzlinie des Brocardschen und des umbeschriebenen Kreises. Also ist $H_a H_b H_c$ die Potenzlinie des Kreises um Z (Radius ZO) und desjenigen um O (Radius OM).

IV. Die Apollonischen Pole (isodynamischen Punkte) teilen den Durchmesser des Brocardschen Kreises harmonisch.

Da die Mittelpunkte der Apollonischen Kreise auf der Potenzlinie des Brocardschen und des umbeschriebenen Kreises liegen, so schneiden die Apollonischen Kreise sowohl den umbeschriebenen, wie auch den Brocardschen Kreis rechtwinklig. Somit wird die den Apollonischen Kreisen gemeinschaftliche Sehne $P_, P_{,,}$ in G und O harmonisch geteilt. Wir haben also auf derselben Geraden folgende drei harmonische Punktreihen:

$$M P_, N P_{,,} \ (1),$$
$$M G N Q \ (2) \text{ und}$$
$$O P_, G P_{,,} \ (3).$$

Aus (1) folgt $ON^2 = r^2 = OP_, . OP_{,,}$,

aus (2) $ON^2 = r^2 = OG . OQ$ und

aus (3) $ZG^2 = r_,^2 = ZP_, . ZP_{,,}$.

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Strecken einzeln ausdrücken. Es folgt z. B. aus

$$QP_,^2 = QG . QO, \text{ daß}$$

$$QG = \frac{3 r t_g{}^2 \omega}{\sqrt{1 - 3 t_g{}^2 \omega}}.$$ Eliminiert man mit Hülfe der Gleichung:

$$t_g \omega = \frac{r_, e}{r^2 \sqrt{3}}$$ hieraus $t_g \omega$, so erhält man

$$QG = \frac{r_, e^2}{2 r^2}.$$ Setzt man hierin $QG = u$, so folgt die Proportion:

$r^2 : e^2 = r_, : 2u$. Somit kann man die Entfernung des Centralpunktes Q von dem Grebeschen Punkt nach folgender Construction finden:

Man construiert aus r und e als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck, so verhalten sich dessen Höhenabschnitte auf der Hypotenuse $p : q = r^2 : e^2$. Also ist $2u$ die 4. Proportionale zu p, q und $r_,$.

Ferner ergiebt sich

$$ZP_, = \frac{r(1 - \sqrt{3}\, t_g\, \omega)^2}{2\sqrt{1 - 3\, t_g^2\, \omega}} \text{ und } ZP_{,,} = \frac{r(1 + \sqrt{3}\, t_g\, \omega)^2}{2\sqrt{1 - 3\, t_g^2\, \omega}}$$

$$\text{und } P_, O = \frac{r(1 - \sqrt{3}\, t_g\, \omega)}{\sqrt{1 - 3\, t_g^2\, \omega}} \text{ und } P_{,,} O = \frac{r(1 + \sqrt{3}\, t_g\, \omega)}{\sqrt{1 - 3\, t_g^2\, \omega}}.$$

Auch diese Resultate werden durch die Einführung von e und $r_,$ sehr vereinfacht. So ergiebt sich

$$QO = QG + GO = \frac{r_, e^2}{2 r^2} + 2 r_,$$

$$= \frac{1}{2 r_,}\left(\frac{r_, e}{r}\right)^2 + 2 r_, = \frac{1}{2 r_,}(r^2 - 4 r_,^2) + 2 r_,$$

$$= \frac{r^2}{2 r_,} - 2 r_, + 2 r_, = \frac{r^2}{2 r_,}.$$

$$\text{Also } P_, O = \frac{r^2}{2 r_,} - \frac{e}{2} \text{ und } P_{,,} O = \frac{r^2}{2 r_,} + \frac{e}{2}.$$

Endlich weil

$$ZP_, = P_, O\, (1 - \sqrt{3}\, t_g\, \omega) \text{ und } ZP_{,,} = P_{,,} O\, (1 + \sqrt{3}\, t_g\, \omega),$$

ergiebt sich

$$ZP_, = \frac{(r^2 - e r_,)^2}{2 r_, r^2} \text{ und } ZP_{,,} = \frac{(r^2 + e r_,)^2}{2 r_, r^2}.$$

16.

Die durch den Grebeschen Punkt gelegten Ecktransversalen teilen die Gegenseiten im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten.

(Figur 10.*)

Nach 15. II fällt die Ecktransversale AD durch den Grebeschen Punkt G zusammen mit der dem Apollonischen und dem Umkreis gemeinschaftlichen Sehne AA″. Da nun die zwischen AC und AB gelegene Strecke einer Antiparallelen zu BC durch G in diesem Punkte halbiert wird**), somit auch eine Parallele zu derselben durch D, eine Antiparallele zu BC aber parallel AH_a ist, so müssen $CDBH_a$ harmonische Punkte sein. Folglich verhalten sich

$$CD : DB = CH_a : BH_a.$$

Nun sind die Abschnitte, in welche die Winkelhalbierende AA_α die Seite BC teilt:

$$CA_\alpha = \frac{ab}{b+c} \text{ und } BA_\alpha = \frac{ac}{b+c},$$

$$\text{also } CH_a = r_a + \frac{ab}{b+c} = \frac{abc}{b^2 - c^2} + \frac{ab(b-c)}{b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{b^2 - c^2}$$

*) Man verlängere CB bis H_a und bezeichne auf CB den Schnittpunkt des Apollonischen Kreises mit A_α und den der Transversale AG mit D.

**) Siehe Programm-Beilage 1897. No. 8. Seite 12.

und $BH_a = r_a - \frac{ac}{b+c} = \frac{abc}{b^2-c^2} - \frac{ac(b-c)}{b^2-c^2} = \frac{ac^2}{b^2-c^2}$;

somit: $CH_a : BH_a = b^2 : c^2$ also auch
$CD : DB = b^2 : c^2$.

17.

I. Die durch den Grebeschen Punkt gelegten Ecktransversalen sind die Gegenmittellinien des Dreiecks. (Figur 11.)

Unter der Gegenmittellinie von A aus ist die Linie AD zu verstehen, welche mit der Winkelhalbierenden des Winkels α d. i. AA_α denselben Winkel bildet, wie die Seitenhalbierende AA_0. Also lautet die Behauptung

$$\sphericalangle DAA_\alpha = \sphericalangle A_0AA_\alpha.$$

In Nr. 10 der Programm-Beilage von 1897 ist bewiesen, daß der Winkel zwischen d_a d. i. OH_a und dem nach A gezogenen Radius des zu a gehörenden Apollonischen Kreises d. i. AH_a gleich ist dem Winkel zwischen h_a und t_a. Bezeichnet man diesen Wintel mit φ, so ist, weil

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAH_a - \sphericalangle BAH_a$$

und $\sphericalangle DAH_a = \sphericalangle AOH_a = 90^0 - \varphi$, auch

$\sphericalangle BOH_a = \gamma$:

$\sphericalangle BAD = 90^0 - \varphi - \gamma$. Da nun

ferner $\sphericalangle AA_0A_a = 90^0 - \varphi$, so ist

$\sphericalangle CAA_0 = 90^0 - \varphi - \gamma$; also

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAA_0$ und somit

auch $\sphericalangle DAA_\alpha = \sphericalangle A_0AA_\alpha$.

Folgerungen: 1. Die durch CAA_0 und BAD gelegten Kreise schneiden sich in einem Punkte der Peripherie des zu a gehörenden Apollonischen Kreises.*)

2. Die seitenhalbierenden Transversalen des Dreiecks schneiden sich in S, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Da sich nun die Gegenmittellinien in G, dem Grebeschen Punkte, schneiden, so folgt daraus, daß der Grebesche Punkt der Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes ist.**)

II. Die Mitten der dem Umkreis und je einem Apollonischen Kreis gemeinschaftlichen Sehnen liegen auf dem Brocardschen Kreise.

Die zwei Kreisen gemeinschaftliche Sehne schneidet die Centrale rechtwinklig. Also ist z. B. $\sphericalangle GQ_aO$ ein Rechter. Da nun der Brocardsche Kreis OG zum Durchmesser hat, so muß derselbe durch Q_a, also auch durch Q_b und Q_c gehen.

Zusatz: Die zweiten Endpunkte der dem Umkreise und je einem Apollonischen Kreise gemeinschaftlichen Sehnen bestimmen ein Dreieck A′B′C′, welches mit dem ursprünglichen den Umkreis, die Apollonischen Kreise, den Grebeschen Punkt und den Brocardschen Kreis gemeinsam hat.***)

---

*) Siehe Programm-Beilage von 1897, No. 9.

**) Siehe Prof. Dr. G. Hoffmann, Anleitung 2c., 3. Teil, Seite 160. XIV.

***) conf. A. Artzt. Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, 2c. Programm des Gymnasiums zu Recklinghausen. 1886.

18.

Construction der Brocardschen Punkte mit Hülfe der Apollonischen Kreise.
(Figur 12.)

Man construiere zu der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Apollonischen Kreise als Polare den Pol in Bezug auf den Umkreis, so ist derselbe nach 15, III der Grebesche Punkt. Oder: Man suche den Grebeschen Punkt als Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes, d. h. als Schnittpunkt der Gegenmittellinien des Dreiecks. Dann ziehe man durch G die Ecktransversalen $A A_g$, $B B_g$ und $C C_g$, lege durch die Punkte A_g, B_g und C_g die Parallelen zu den andern Dreiecksseiten,

also $A_g A_b \parallel AC$ und $A_g A_c \parallel AB$,
$B_g B_a \parallel BC$ und $B_g B_c \parallel AB$, endlich
$C_g C_a \parallel BC$ und $C_g C_b \parallel AC$.

Verbindet man nun die auf den Dreiecksseiten liegenden Endpunkte dieser Parallelen mit den Gegenecken, so schneiden sich diese sechs Transversalen zu je dreien in einem der Brocardschen Punkte, d. h. in einem solchen Punkte, dessen Verbindungslinien mit den Eckpunkten mit den Dreiecksseiten gleichwendig gleiche Winkel bilden; es schneiden sich nämlich

$A B_c$, $B C_a$ und $C A_b$ in Ω' und
$C B_a$, $B A_c$ und $A C_b$ in Ω, sodaß

$$\sphericalangle \Omega' AB = \sphericalangle \Omega' BC = \sphericalangle \Omega' CA = \sphericalangle \Omega CB =$$
$$\sphericalangle \Omega BA = \sphericalangle \Omega AC = \sphericalangle \omega \text{ und } \cot_g \omega = \cot_g \alpha + \cot_g \beta + \cot_g \gamma .$$

Beweis: Nach 16. verhalten sich:

$C A_g : B A_g = b^2 : c^2$, also auch
$C A_c : A A_c = b^2 : c^2$; hieraus folgt

$$A A_c = \frac{b c^2}{b^2 + c^2}, \text{ analog}$$
$$A A_b = \frac{b^2 c}{b^2 + c^2}. \text{ Folglich verhalten sich}$$

$A A_c : AB = bc : (b^2 + c^2)$, ebenso
$A A_b : AC = bc : (b^2 + c^2)$, somit
$A A_c : AB = A A_b : AC$.

Also sind die Dreiecke $A B A_c$ und $A C A_b$, weil sie auch den Winkel α gemeinschaftlich haben, ähnlich. Aus gleichen Gründen $\Delta\, B B_c A \sim B B_a C$, ferner
$\Delta\, C C_a B \sim C C_b A$.

Bezeichnet man nun den Winkel $A B A_c$ mit ω, so ist

$$\sin(\alpha + \omega) : \sin\omega = (b^2 + c^2) : bc = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}.$$

Hieraus folgt $\cot_g \omega = \dfrac{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\cot_g \omega = \frac{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\sin\alpha}$$

$$\cot_g \omega = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\,b\,c \sin\alpha}$$

$$\cot_g \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,\Delta}$$

$$\cot_g \omega = \frac{a^2}{2\,a\,h_a} + \frac{b^2}{2b\,h_b} + \frac{c^2}{2\,c\,h_c}$$

$$\cot_g \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right)$$

Nun ist $\frac{a}{h_a} = \frac{2\,r \sin\alpha}{2\,r \sin\beta \sin\gamma} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma} = \cot_g\beta + \cot_g\gamma$,

ebenso $\frac{b}{h_b} = \cot_g\alpha + \cot_g\gamma$ und

$\frac{c}{h_c} = \cot_g\alpha + \cot_g\beta$; also

$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = 2\cot_g\alpha + 2\cot_g\beta + 2\cot_g\gamma$ und somit

$$\cot_g \omega = \cot_g\alpha + \cot_g\beta + \cot_g\gamma\,.$$

19.

Die Apollonischen Kreise, die Beikreise und der Brocardsche Kreis.

(Fig. 13.)

Die Kreise um O_a, O_b und O_c berühren bezüglich Seite a in C, b in A und c in B und gehen durch A und C, bezüglich A und B, und B und C. Sie schneiden sich in Ω, dem einen Brocardschen Punkte des Dreiecks. Sie werden die dem Dreieck bezüglich des Punktes Ω zugeordneten **Beikreise** genannt. Die Kreise um O'_a, O'_b und O'_c berühren a in B, bezüglich b in C, und c in A. Sie gehen durch A und B, respektive durch B und C, und durch A und C. Diese schneiden sich in Ω', dem 2. Brocardschen Punkte und werden die dem Dreieck in Bezug auf Ω' zugeordneten Beikreise genannt.*) Zwei in derselben Ecke berührende Beikreise schneiden sich zum zweiten Male in der Mitte der dem Umkreis und dem entsprechenden Apollonischen Kreis gemeinschaftlichen Sehne. Also z. B. die in A berührenden Kreise um O_b und O'_c schneiden sich außer in A noch in Q_a, der Mitte der dem Umkreis und dem zu a gehörigen Apollonischen Kreis (H_a) gemeinschaftlichen Sehne. Die in B berührenden Kreise um O'_a und O_c in Q_b und die in C berührenden um O_a und O'_b in Q_c. Ferner schneiden sich die durch Ω respektive Ω' gelegten Ecktransversalen des Dreiecks A B C zu je zweien in $A' B' C'$. Diese 6 Punkte $Q_a\,Q_b\,Q_c$ $A' B' C'$ liegen mit Ω und Ω' auf dem über O G als Durchmesser geschlagenen Kreise, der daher der Kreis der 10 Punkte oder nach seinem Entdecker Brocardscher Kreis genannt wird.

$A' B' C'$ sind auch die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten auf den Seiten A B C mit diesem Kreise.

---

*) Dr. Emmerich: Die Brocardschen Gebilde. 5. Kap. § 33—38.

Zu diesen schon bekannten Beziehungen fügen wir nun noch einige neue, die die Apollonischen Kreise mitbetreffen:

I. Die Mittelpunkte der zu einer Dreiecksseite gehörigen Beikreise, z. B. O_a und O'_a liegen mit dem Mittelpunkt des zu derselben Seite gehörigen Apollonischen Kreises auf einer Geraden: $H_a\,O'_a\,O_a$. Denn es ist z. B. $\sphericalangle\, ABC$ der zur Sehne AB gehörige Sehnentangentenwinkel in dem Kreise um O'_a und $\sphericalangle\, ACB$ der zur Sehne AC gehörige Sehnentangentenwinkel in dem Kreise um O_a. Bezeichnet man daher den Radius des Kreises O_a mit r_a und den des Kreises O'_a mit r'_a, so ist

$$c = 2\,r'_a \sin\beta \quad \text{und}$$
$$b = 2\,r_a \sin\gamma\,.$$

Drückt man b und c durch den Radius des Umkreises und den entsprechenden Dreieckswinkel aus, so erhält man

$$2\,r\sin\gamma = 2\,r'_a \sin\beta \quad \text{und}$$
$$2\,r\sin\beta = 2\,r_a \sin\gamma\,. \quad \text{Hieraus folgt}$$
$$r'_a : r_a = \sin^2\gamma : \sin^2\beta = c^2 : b^2\,.$$

Nun ist auch $H_a B : H_a C = c^2 : b^2$ (siehe Nr. 16).

Folglich liegen H_a, O'_a und O_a auf einer Geraden. Ebenso $H_b\,O_b\,O'_b$ und $H_c\,O'_c\,O_c$.

II. Hieraus folgt ferner, daß auch die 2. Schnittpunkte je zweier zu derselben Dreiecksseite gehörigen Beikreise auf dem entsprechenden Apollonischen Kreise liegen; also z. B. R_a auf dem Kreise um H_a. Dies ließe sich schon aus der Umkehrung des Satzes 9 der Programm-Beilage von 1897 folgern, wenn man die Winkel, welche die Winkelgegengeraden mit AB und AC bilden, gleich 0 werden ließ.

Es läßt sich aber auch in folgender Weise direct beweisen:

Verlängert man $R_a A$ bis zum Durchschnitt mit BC, so ist der Schnittpunkt A_o die Mitte von BC. Denn $R_a A$ ist Potenzlinie der beiden Beikreise um O_a und O'_a, also sind die von A_o aus an dieselben gelegten Tangenten einander gleich, also $CA_o = A_o B$. Berechnet man nun die Tangente von A_o an den Apollonischen Kreis, dessen Mittelpunkt H_a, so erhält man, da

$$H_a B = \frac{a\,c^2}{b^2 - c^2}, \quad \text{also}$$

$$H_a A_o = \frac{a}{2} + \frac{a\,c^2}{b^2 - c^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2},$$

für die Tangente:

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}\right)^2 - \left(\frac{a\,b\,c}{b^2 - c^2}\right)^2} = \frac{a}{2}\,.$$

Somit ist A_o auch ein Punkt der Potenzlinie des Apollonischen Kreises und der beiden entsprechenden Beikreise. Also geht der Apollonische Kreis um H_a auch durch R_a.

Dabei hat sich auch der Satz ergeben:

III. Die von der Mitte einer Dreiecksseite an den zu dieser gehörigen Apollonischen Kreis gelegten Tangenten sind der Hälfte der entsprechenden Dreiecksseite gleich.

IV. Die durch O, Ω und Ω' und je einem der Punkte Q_a, Q_b und Q_c gelegten 9 Sehnen convergieren zu je dreien nach H_a, H_b und H_c; nämlich

nach H_a: $O\,Q_a$, $\Omega\,Q_b$ und $\Omega'\,Q_c$,
nach H_b: $O\,Q_b$, $\Omega\,Q_c$ und $\Omega'\,Q_a$,
nach H_c: $O\,Q_c$, $\Omega\,Q_a$ und $\Omega'\,Q_b$.

Diese Sehnen werden sämtlich durch die Peripherien der entsprechenden Apollonischen Kreise harmonisch geschnitten.

Zusatz: Die Mittelpunkte der Apollonischen Kreise sind die äußeren Ähnlichkeitspunkte der beiden entsprechenden Beikreise.

20.

Construction des Brocardschen Winkels.

In Nr. 18 ist gezeigt, wie man mit Hülfe des Grebeschen Punktes die Brocardschen Punkte auffinden kann. Hieraus folgt natürlich der Brocardsche Winkel. Umgekehrt läßt sich aber auch der Brocardsche Winkel auf einfache Weise direct auffinden:

Nachdem man den Grebeschen Punkt des Dreiecks gefunden, legt man durch denselben die kleinste Sehne im Umkreis, die zugleich Tangente an den Brocardschen Kreis ist. Die Hälfte dieser Sehne ist $\sqrt{r^2 - 4\,r_,^2}$.

$$\text{Nun ist} \quad r_, = \frac{r}{2}\sqrt{1 - 3\,t_g^2\,\omega}, \quad \text{also}$$
$$4\,r_,^2 = r^2 - 3\,r^2\,t_g^2\,\omega. \quad \text{Somit}$$
$$\sqrt{r^2 - 4\,r_,^2} = r\,t_g\,\omega\,\sqrt{3}.$$

Construiert man nun ferner die Seite des regulären Dreiecks im Umkreis $= r\sqrt{3}$ und bildet aus jener halben Sehne und der regulären Dreiecksseite als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck, so ist der der ersteren gegenüberliegende Winkel der Brocardsche. Denn die Tangente dieses Winkels ist

$$r\,t_g\,\omega\,\sqrt{3} \;:\; r\sqrt{3} \;=\; t_g\,\omega.$$

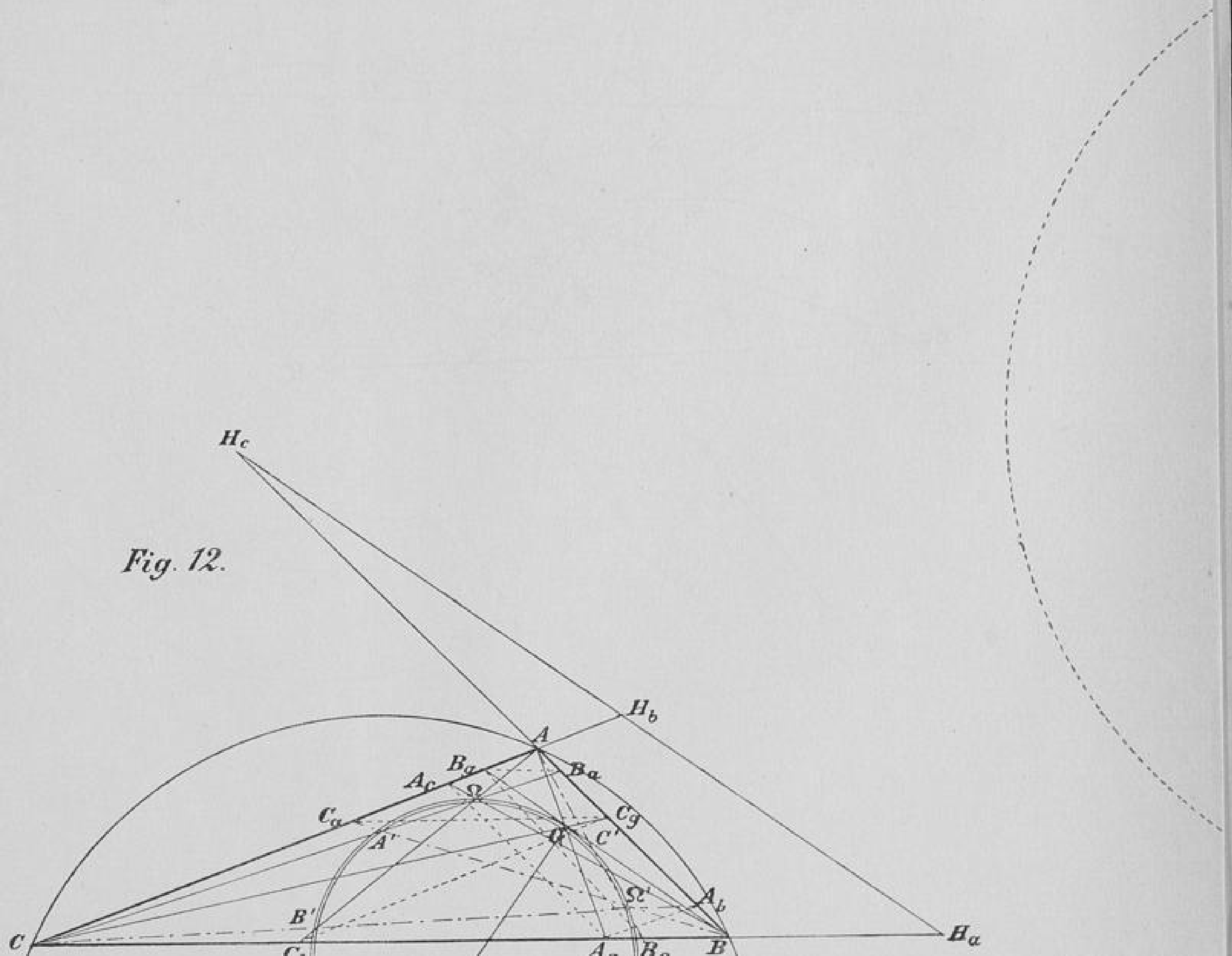

Fig. 12.

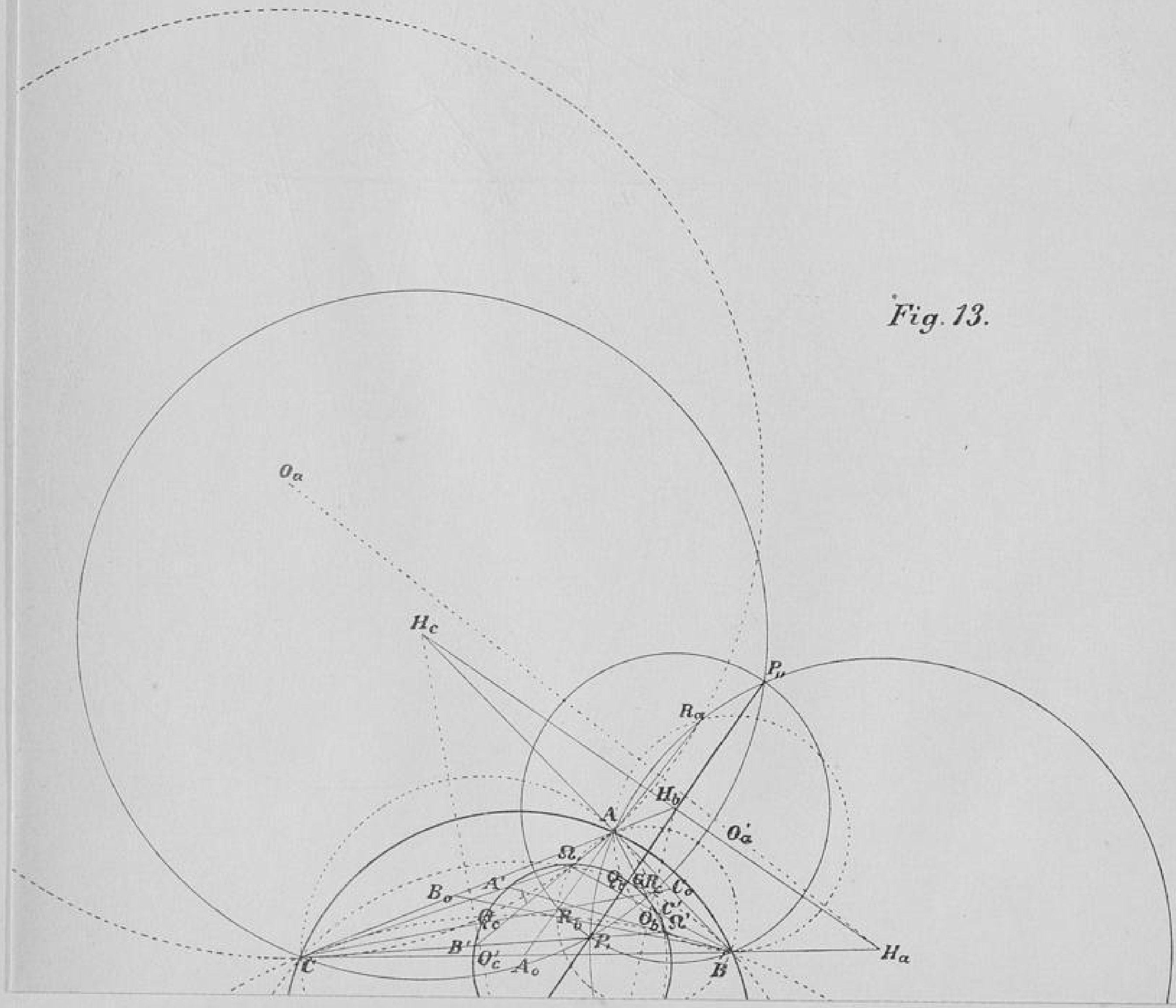

Fig. 13.