II.

Sätze über die Apollonischen Kreise des Dreiecks.

Unter den ebenen Örtern des Apollonius*) findet sich als 2. Satz des 2. Buches folgender:

> Wenn aus zwei gegebenen Punkten A, B zwei gerade Linien AC, BC, die ein gegebenes Verhältnis unter einander haben, an einen dritten Punkt C hingezogen werden, so berührt der Punkt C, in dem sie zusammenstoßen, eine der Lage nach gegebene gerade Linie oder einen der Lage nach gegebenen Kreis.

Setzt man die Seiten des Dreiecks als in ihrer Länge von einander verschieden voraus, so giebt es für jede Dreiecksseite und das Verhältnis der beiden andern einen solchen Kreis als geometrischen Ort der Punkte, deren Entfernungen von den Endpunkten einer Seite im Verhältnis der andern Seiten stehen. Diese Kreise werden die Apollonischen Kreise des Dreiecks genannt. Nun teilt die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten nach innen und die Halbierungslinie des Außenwinkels dieselbe in dem nämlichen Verhältnis nach außen. Ferner stehen diese beiden Halbierungslinien auf einander senkrecht. Folglich muß der Abstand der Schnittpunkte der Halbierungslinien mit der Gegenseite der Durchmesser und die Entfernung des Mittelpunktes dieses Abstandes von der Spitze der Radius des zu der einen Seite gehörenden Apollonischen Kreises sein. Wir haben somit den Satz:

> Der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, die dieselbe Grundlinie haben und deren andere Seiten in demselben Verhältnis zu einander stehen, ist der Apollonische Kreis d. i. derjenige Kreis, der die Grundlinie in den beiden Punkten senkrecht schneidet, in denen dieselbe im Verhältnis der anderen Seiten nach außen und innen geteilt wird.

Die Länge der Radien der Apollonischen Kreise**) im Verhältnis zu den Dreiecksseiten und anderen Bestimmungsstücken des Dreiecks, die Lage ihrer Mittelpunkte auf den verlängerten Dreiecksseiten, ihre gegenseitige Lage zu einander soll im folgenden näher untersucht werden.

1.

Algebraische Beziehungen der Radien der A. Kr. zu den Dreiecksseiten.

Es werde vorausgesetzt, daß $a > b > c$.

Teilt w_a die Seite a in die Abschnitte x und $a-x$, sodaß x an der Seite c liegt, so verhält sich

---

*) Apollonius von Pergae ebene Örter. Wiederhergestellt von Robert Simson. Aus dem Lateinischen übersetzt 2c. von Joh. Wilh. Camerer. Leipzig 1796. Seite 211.

**) Im folgenden mit A. Kr. bezeichnet.

$(a-x): x = b : c.$ Hieraus folgt

$$x = \frac{a\,c}{b+c}$$

Trifft ferner die Halbierende des Außenwinkels von α die Verlängerung von a in der Entfernung y von B, so verhält sich $(y+a): y = b : c.$ Daraus folgt

$$y = \frac{a\,c}{b-c}$$

Folglich $x+y = \frac{a\,c}{b+c} + \frac{a\,c}{b-c} = \frac{2\,a\,b\,c}{b^2-c^2}$. Somit ist der Radius des zu a gehörigen Apollonischen Kreises, der mit r_a bezeichnet werde,

$r_a = \frac{a\,b\,c}{b^2-c^2}$. Analog $r_b = \frac{a\,b\,c}{a^2-c^2}$ und $r_c = \frac{a\,b\,c}{a^2-b^2}$. Hieraus ergeben sich als unmittelbare Folgerungen:

I. Werden 2 Seiten des Dreiecks einander gleich, so wird der Radius des der 3. Seite zugehörigen A. Kr. ∞ d. i. der Kreis selbst wird eine Gerade. (conf. den an die Spitze gestellten Satz des Apollonius u. zw. den 1. Fall.)

II. Im rechtwinkligen Dreieck wird die Hypotenuse das geometrische Mittel der Radien der zu den Katheten gehörigen A. Kr. Ist a die Hypotenuse, so ist

$$r_b = \frac{a\,b\,c}{a^2-c^2} = \frac{a\,b\,c}{b^2} = \frac{a\,c}{b} \text{ und}$$

$$r_c = \frac{a\,b\,c}{a^2-b^2} = \frac{a\,b\,c}{c^2} = \frac{a\,b}{c}. \text{ Somit ist}$$

$$r_b.\ r_c = a^2.$$

III. Der Durchmesser des kleinsten der 3 A. Kr. eines Dreiecks ist gleich dem harmonischen Mittel der Radien der beiden andern.

Es ist $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{b^2-c^2+a^2-b^2}{a\,b\,c} = \frac{a^2-c^2}{a\,b\,c} = \frac{1}{r_b}$ *)

Bezeichnet d_b den Durchmesser des kleinsten der 3 A. Kr., so ist also

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{d_b} \text{ und hieraus}$$

$$d_b = \frac{2r_a\,r_c}{r_a+r_c}.$$

2.

Der Winkel, den der Radius des A. Kr. nach der entsprechenden Ecke mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite einschließt. (Figur 3.)

Schlägt man den umbeschriebenen Kreis und zieht

AD $\parallel$ BC, fällt

AE $\perp$ BC und ist AH_a der Radius des zu a gehörenden A. Kr., so ist

$\cos ADF = \frac{DA}{2r}$ und

*) Hieraus folgt $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} = 0$ siehe Aufg. Nr. 1542 (gestellt von Moser-Breslau) in Hoffmanns Zeitschrift für math. u. nat. Unterricht XXVII, 7. Seite 507.

$$\cos E A H_a = \frac{h_a}{A H_a}.$$ Nun ist

$$\begin{aligned} DA &= a - 2BE = a - 2c\cos\beta \\ &= 2r\sin\alpha - 4r\sin\gamma\cos\beta \\ &= 2r[\sin(\beta+\gamma) - 2\sin\gamma\cos\beta] \\ &= 2r(\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) \\ &= 2r\sin(\beta-\gamma),\ \text{somit} \end{aligned}$$

$$\cos ADF = \sin(\beta-\gamma)$$ und ferner

$$\cos E A H_a = \frac{2r\sin\beta\sin\gamma(b^2-c^2)}{a\ b\ c}.$$ Da nun

$$b^2-c^2 = \frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha},$$ so wird

$$\cos E A H_a = \frac{2r\sin\beta\sin\gamma.\ a^2\sin(\beta-\gamma)}{a\ b\ c\ \sin\alpha} = \sin(\beta-\gamma).$$

Folglich ist $\sphericalangle ADF = \sphericalangle E A H_a$ *).

Hieraus folgt ferner, daß

$\sphericalangle A H_a B = \beta-\gamma$. Also schließt AH_a mit a den Winkel $\beta-\gamma$, analog BH_b mit b den Winkel $\alpha-\gamma$ und CH_c mit c den Winkel $\alpha-\beta$ ein.

Dasselbe hätte man auch durch Vergleichung der Winkel direct finden können. Da AG die Winkelhalbierende von α, so ist $\sphericalangle AGB = \gamma + \frac{\alpha}{2}$; also

$$\sphericalangle A H_a G = 2R - 2\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha + \beta + \gamma - 2\gamma - \alpha = \beta - \gamma.$$

Daraus folgt ferner, daß

$$\sphericalangle B A H_a = \sphericalangle G A H_a - \sphericalangle G A B = \gamma + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \gamma.$$

Demnach ist AH_a eine Tangente an den Umkreis im Punkte A.**)

Verlängert man $H_a A$ über A, entsprechend $H_b B$ über B und $H_c C$ über C hinaus, so wird $\sphericalangle B'AC = \beta$, $\sphericalangle A'BC = \alpha$ und $\sphericalangle C'BA = \gamma$. (Figur 4.)

Construiert man demnach auf den Seiten des Dreiecks nach außen die gleichschenkligen Dreiecke B'AC, C'AB und A'BC, deren Basiswinkel den gegenüberliegenden Dreieckswinkeln gleich sind, so schneidet je ein Schenkel dieser gleichschenkligen Dreiecke die verlängerte Gegenseite im Mittelpunkt des A. Kr.

B'A schneidet BC in H_a,
C'B schneidet CA in H_b und
A'C schneidet AB in H_c.

Ferner sind die Winkel des Dreiecks A'B'C': $2R-2\alpha$, $2R-2\beta$ und $2R-2\gamma$ und somit den Winkeln des Höhenfußpunktdreiecks des Urdreiecks gleich.***) Demnach kann man folgende Constructionen zur Auffindung der Mittelpunkte der A. Kr. verwenden:

I. Man verlängert die Tangenten an den umbeschriebenen Kreis in den Eckpunkten des Dreiecks bis zum Durchschnittspunkt mit den Gegenseiten.

---

*) Siehe Aufgabe Nr. 1540 in Hoffmanns Zeitschrift XXVII, 7 S. 506.

**) conf. Auflösung der Aufgabe Nr. 353 in Hoffmanns Zeitschrift XV S. 353.

***) Siehe oben S. 4.

II. Man construiert über den Dreiecksseiten nach außen gleichschenklige Dreiecke, deren Basiswinkel gleich den gegenüberliegenden Dreieckswinkeln und verlängert je einen Schenkel bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite.

III. Man construiert das Höhenfußpunktdreieck, legt durch die Ecken des Urdreiecks Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten des Höhenfußpunktdreiecks und verlängert dieselben bis zum Durchschnitt mit den Gegenseiten des Urdreiecks.

3.

Trigonometrische Beziehungen der Radien der A. Kr. zu den Winkeln, Winkelhalbierenden, Höhen und dem Flächeninhalt des Dreiecks.

Aus dem vorhergehenden ergeben sich leicht folgende Beziehungen:

a) $w_a = 2\, r_a \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$, $w_b = 2\, r_b \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$ und $w_c = 2\, r_c \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Ferner:

b) $h_a = r_a \sin(\beta-\gamma)$, $h_b = r_b \sin(\alpha-\gamma)$ und $h_c = r_c \sin(\alpha-\beta)$.

c) Drückt man in dem Ausdruck:

$$r_a = \frac{a\,b\,c}{b^2-c^2}$$

$a\,b\,c$ durch den Inhalt Δ des Dreiecks und r, den Radius des umbeschriebenen Kreises, ferner $b^2-c^2 = (b+c)\,(b-c)$ durch Anwendung der Mollweideschen Gleichungen aus, so erhält man

$$a\,b\,c = 4\,r\,\Delta \text{ und}$$

$$b^2-c^2 = \frac{a^2 \sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}. \quad \text{Also}$$

$$r_a = \frac{4\,r\,\Delta\,\sin\alpha}{a^2\sin(\beta-\gamma)} = \frac{2\,a\,\Delta}{a^2\sin(\beta-\gamma)} = \frac{2\,\Delta}{a\sin(\beta-\gamma)}$$

4.

Die Lage der Mittelpunkte der 3 A. Kr. zu einander.

Ist $P_{,}$ der eine und $P_{,,}$ der andere Schnittpunkt der beiden A. Kr., die zu a und c gehören, deren Mittelpunkte H_a und H_c also auf CB und BA liegen; verbindet man ferner $P_{,}$ mit A, B und C, so gelten die Proportionen:

$P_{,}C : P_{,}B = b : c$ und
$P_{,}B : P_{,}A = a : b$. Daraus folgt
$P_{,}C : P_{,}A = a : c$. Ebenso folgt für den 2. Schnittpunkt:
$P_{,,}C : P_{,,}A = a : c$.

Daraus folgt, daß auch der dritte A. Kr., dessen Mittelpunkt H_b auf b, also auf der Verlängerung von CA liegt, durch $P_{,}$ und $P_{,,}$ hindurchgeht. Es sei gestattet, diese beiden den 3 A. Kr. gemeinschaftlichen Punkte als den inneren und äußeren Apollonischen Pol des Dreiecks zu bezeichnen.*)

Da die 3 A. Kr. also eine gemeinschaftliche Sehne haben, so folgt, daß ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegen.

---

*) Dieselben Punkte bezeichnet Emmerich, die Brocardschen Gebilde § 49 als isodynamische Punkte. Dort ist auch mitgeteilt, daß Crelle zuerst gefunden, daß sich die 3 A. Kr. in einem Punkte schneiden und daß Kiehl (1881) auf die Zweizahl der Punkte hingewiesen.

5.

Die Entfernung der Mittelpunkte der 3 A. Kr. von einander.

Berechnet man $H_a H_c$ aus dem Dreieck $B H_a H_c$, worin nach 1:

$$BD = \frac{a\,c}{b+c}, \text{ also (siehe Fig. 4.)}$$

$$B H_a = r_a - \frac{a\,c}{b+c} = \frac{a\,b\,c}{b^2-c^2} - \frac{a\,c}{b+c} = \frac{a\,c^2}{b^2-c^2}; \text{ ferner}$$

$$B H_c = r_c + BE = \frac{a\,b\,c}{a^2-b^2} + \frac{a\,c}{a+b} = \frac{a^2\,c}{a^2-b^2}; \text{ endlich}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c} = -\cos H_c B H_a, \text{ so folgt aus}$$

$$H_a H_c = \sqrt{B H_a^2 + B H_c^2 + 2 . B H_a .\ B H_c \cos\beta}$$

$$H_a H_c = \sqrt{\left(\frac{a\,c^2}{b^2-c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2\,c}{a^2-b^2}\right)^2 + 2 . \frac{a\,c^2}{b^2\ c^2} . \frac{a^2\,c}{a^2-b^2} . \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c}}$$

$$= \frac{a\,b\,c}{(a^2-b^2)\ (b^2-c^2)} \sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}\ .$$

Der Ausdruck:

$\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}$ läßt sich umformen in

$$a\ b\ c \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2c^2} + \frac{(a^2-c^2)^2}{a^2b^2c^2} + \frac{(b^2-c^2)^2}{a^2b^2c^2}\right\}} \text{ und dies}$$

$$= a\ b\ c \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r_a^{\ 2}} + \frac{1}{r_b^{\ 2}} + \frac{1}{r_c^{\ 2}}\right\}}, \text{ somit ist}$$

$$H_a H_c = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{(a^2-b^2)\ (b^2-c^2)} \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r_a^{\ 2}} + \frac{1}{r_b^{\ 2}} + \frac{1}{r_c^{\ 2}}\right\}}$$

$$= r_a\,r_c \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r_a^{\ 2}} + \frac{1}{r_b^{\ 2}} + \frac{1}{r_c^{\ 2}}\right\}}. \text{ Analog:}$$

$$H_a H_b = r_a\,r_b \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r_a^{\ 2}} + \frac{1}{r_b^{\ 2}} + \frac{1}{r_c^{\ 2}}\right\}}$$

$$H_b H_c = r_b\,r_c \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r_a^{\ 2}} + \frac{1}{r_b^{\ 2}} + \frac{1}{r_c^{\ 2}}\right\}}$$

Zusatz: Hieraus ergiebt sich wiederum, daß

$$H_b H_c + H_b H_a = H_c H_a,$$

wodurch von neuem bestätigt wird, daß H_a, H_b und H_c auf einer Geraden liegen.

6.

Die Winkel, welche die vom Apollonischen Pol nach den Mittelpunkten der A. Kr. gezogenen Radien einschließen. (Figur 5.)

Aus den im vorigen gefundenen Werten folgt: $H_a H_b : H_b H_c = r_a : r_c$. Also ist im $\Delta\ P, H_a H_c$ P, H_b die Winkelhalbierende des $\sphericalangle\ H_c P, H_a$. Ferner verhält sich auch im $\Delta\ P, H_a H_b$

$$H_a H_c : H_b H_c = r_a : r_b\,,$$

also ist $P_, H_c$ die Winkelhalbierende des Außenwinkels von $H_b P_, H_a$.

Daraus folgt, daß die vom Apollonischen Pol ausgehenden Radien der A. Kr. Winkel von 60^0 einschließen.

Projiciert man ferner den Mittelpunkt eines A. Kr. auf die vom Apollonischen Pol ausgehenden Radien der beiden andern A. Kr., so bilden die Fußpunkte mit jenem Mittelpunkt ein gleichseitiges Dreieck. Man erhält z. B. für $P_,$ die 3 gleichseitigen Dreiecke $H_a F'_a F''_a$, $H_b F'_b F''_b$ und $H_c F'_c F''_c$.

Da ferner deren Symmetrielinien $P_, H_a$, $P_, H_b$ und $P_, H_c$ bei $P_,$ Winkel von 60^0 einschließen, so folgt, daß ihre Seiten paarweis parallel laufen.

$$H_a F'_a \parallel H_b F'_b \parallel F'_c F''_c$$
$$H_a F''_a \parallel F'_b F''_b \parallel H_c F''_c \text{ und}$$
$$F'_a F''_a \parallel H_b F''_b \parallel H_c F'_c$$

Zusatz: Nachdem bewiesen, daß die Winkel $H_a P_, H_b$ und $H_b P_, H_c = 60^0$, kann die Entfernung der Punkte H_a, H_b, H_c von einander auch in folgender Form dargestellt werden:

$$H_a H_b = \sqrt{r_a^{\,2} + r_b^{\,2} - r_a r_b}\,,$$
$$H_b H_c = \sqrt{r_b^{\,2} + r_c^{\,2} - r_b r_c} \quad \text{und}$$
$$H_a H_c = \sqrt{r_a^{\,2} + r_c^{\,2} + r_a r_c}$$

Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke z. B. für $H_a H_b$ gleich, so folgt

$$\sqrt{r_a^{\,2} + r_b^{\,2} - r_a r_b} = r_a r_b \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r_a^{\,2}} + \frac{1}{r_b^{\,2}} + \frac{1}{r_c^{\,2}}\right\}}. \text{ Hieraus folgt}$$

$$r_a^{\,2} - 2 r_a r_b + r_b^{\,2} = \frac{r_a^{\,2}\, r_b^{\,2}}{r_c^{\,2}}; \text{ also}$$

$$r_a - r_b = \frac{r_a r_b}{r_c}$$ und hieraus ergiebt sich wieder die schon auf Seite 6 angegebene Relation:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} = 0.$$

7.

Die A. Kr. und der Umkreis. (Figur 4.)

Zieht man $P_,A$, $P_,B$ und $P_,C$ und ebenso $P_{,,}A$, $P_{,,}B$ und $P_{,,}C$, d. h. verbindet man die Apollonischen Pole mit den Eckpunkten des Dreiecks, so verhalten sich in den Dreiecken $P_, P_{,,} A$ und $P_, P_{,,} B$

$$AP_, : BP_, = AP_{,,} : BP_{,,} \text{ also auch}$$
$$AP_, : AP_{,,} = BP_, : BP_{,,}.$$ Folglich liegen A und B auf der Peripherie eines den beiden Dreiecken $AP_, P_{,,}$ und $BP_, P_{,,}$ gemeinschaftlichen A. Kr.

Ebenso verhalten sich in den Dreiecken $AP_, P_{,,}$ und $CP_, P_{,,}$

$$AP_, : CP_, = AP_{,,} : CP_{,,} \text{ oder}$$
$$AP_, : AP_{,,} = CP_, : CP_{,,}$$

Also liegen auch C und A auf einem den Dreiecken $AP_{,}P_{,,}$ und $CP_{,}P_{,,}$ gemeinschaftlichen A. Kr. Da derselbe somit durch A, B und C hindurchgehen muß, so kann es nur der Umkreis des Dreiecks ABC sein. Daraus folgt:

Sind $P_{,}$ und $P_{,,}$ die A. Pole eines Dreiecks ABC, so ist der um ABC beschriebene Kreis der den Dreiecken $AP_{,}P_{,,}$, $BP_{,}P_{,,}$ und $CP_{,}P_{,,}$ gemeinschaftliche A. Kr.

Weil nun der A. Kr. die den 3 Dreiecken gemeinschaftliche Basis $P_{,}P_{,,}$ senkrecht schneiden muß, so folgt ferner hieraus:

Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf der Verbindungslinie der Apollonischen Pole.

Da ferner die A. Kr. die jenen 3 Dreiecken $P_{,}P_{,,}A$, $P_{,}P_{,,}B$ und $P_{,}P_{,,}C$ umschriebenen Kreise sind, die Radien des A. Kr. nach den Ecken des Dreiecks aber Tangenten an den Umkreis sind, so folgt daraus, daß OA, OB und OC Tangenten an die A. Kr. sind. Daraus ergiebt sich der Satz:

> Der Mittelpunkt des Umkreises ist das Potenz-Centrum der A. Kr., und der Umkreis selbst ist der Orthogonalkreis der A. Kr.

Es bilden demnach, da die A. Kr. mit ihren Centren auf einer Geraden liegen und von dem Umkreis rechtwinklig geschnitten werden, dieselben einen Büschel.[1])

Zusatz. Daß der Mittelpunkt des Umkreises auf der Verbindungslinie der Apollonischen Pole liegt, ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung:

Weil AO und CO Tangenten an die A. Kr. sind, ist

$$
\begin{aligned}
H_a O^2 &= r_a^{\,2} + r^2 \\
H_c O^2 &= r_c^{\,2} + r^2, \text{ folglich} \\
H_a O^2 - H_c O^2 &= r_a^{\,2} \quad r_c^{\,2}, \text{ somit} \\
H_a O^2 - H_c O^2 &= H_a P_{,}^2 - H_c P_{,}^2.
\end{aligned}
$$

Folglich liegen O und $P_{,}$ auf einer Senkrechten auf $H_a H_c$ d. i. die den A. Kr. gemeinschaftliche Sehne $P_{,}P_{,,}$ nach dem Satze:

> Wenn zwei Dreiecke dieselbe Basis und dieselbe Differenz der Quadrate der anderen Seiten haben, so liegen ihre Spitzen auf derselben Senkrechten zur Basis.

8.

Auf der Verbindungslinie der Apollonischen Pole liegt auch der Grebesche Punkt.

(Figur 6.)

Konstruiert man zu dem Dreieck ABC dasjenige Dreieck A′B′C′, dessen Seiten die Tangenten in den Punkten A, B, C an den Umkreis sind, und verbindet man A mit A′, B mit B′ und C mit C′, so schneiden sich diese Linien im Grebeschen Punkte G[2]), d. h. in demjenigen Punkte, dessen Abstände von a und b im Verhältnis dieser Seiten stehen.[3]) Denn fällt man z. B. von C′ auf CA und CB die Lote C′D und C′E, so ist

$$
\begin{aligned}
C'D &= C'B \sin\alpha \text{ und} \\
C'E &= C'A \sin\beta; \text{ da nun}
\end{aligned}
$$

[1]) Baltzer, Elemente der Mathematik. 4. Buch. Planimetrie § 14. 10. S. 114.
[2]) cf. G. Hoffmann, Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben, No. 1105. S. 162.
[3]) Emmerich, die Brocardschen Gebilde § 17. S. 35.

$$C'B = C'A, \text{ so verhält sich}$$
$$C'D : C'E = \sin\alpha : \sin\beta = a : b$$

Somit liegt G auf C C'. Ebenso läßt sich beweisen, daß G auf A A' und B B' liegt. Zieht man ferner durch G

$$U U' \parallel B' C'$$
$$V V' \parallel A' C' \text{ und}$$
$$W W' \parallel A' B',$$

so sind diese Linien antiparallel[1]) zu den Seiten des Dreiecks A B C und werden daher als solche in G halbiert nach dem Satze[2]): Der Grebesche Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher je 2 Seiten des Dreiecks ABC unter einem Durchmesser schneidet. Da nun auch die Seiten des Höhenfußpunktdreiecks 𝔄𝔅ℭ den Seiten des Dreiecks A' B' C' und damit auch U U', V V' und W W' parallel sind, so wird z. B. 𝔅ℭ von A G halbiert. Daher sind A C, A B, A G, und A H_a ein harmonisches Büschel. Denn 𝔅ℭ ist nach dem früheren parallel A H_a, und es wird das von den zugeordneten Strahlen A C und A B begrenzte Stück 𝔅ℭ einer Parallelen zu dem Strahl A H_a durch den diesem zugeordneten Strahl A G halbiert. Somit ist A G die Potenzlinie für den Umkreis und den einen A. Kr., dessen Mittelpunkt H_a. Analog ist B G die Potenzlinie für den Umkreis und den 2. A. Kr., dessen Mittelpunkt H_b, und C G die Potenzlinie für den Umkreis und den 3. A. Kr., dessen Mittelpunkt H_c. Demnach liegt G auf der Potenzlinie der drei A. Kr., d. i. $P, P_{,}, P_{,,}$[3]).

9.

Eine Beziehung der Apollonischen Kreise zu den Winkelgegentransversalen.

(Figur 7.)

Nimmt man auf der Peripherie des durch A gehenden A. Kr. einen beliebigen Punkt O an und legt 2 Kreise, den einen durch A, O und B, den andern durch A, O und C, so schneiden dieselben B C in 2 Punkten P und Q, sodaß A P und A Q Winkelgegentransversalen des Dreiecks ABC sind.[4])

Da O auf dem durch A gehenden A. Kr. liegt, verhält sich O B : O C = A B : A C. Folglich haben die Dreiecke A B O und A C O einen gemeinschaftlichen zu A O gehörigen A. Kr., dessen Mittelpunkt auf der Verlängerung von A O liegt. Da nun A O die Potenzlinie der Kreise A O B und A O C, so sind die Tangenten von jedem Punkt der Verlängerung von A O an die beiden Kreise gleich und da die Tangenten in B und C an jene Kreise die Verlängerung von A O in dem Mittelpunkt des gemeinschaftlichen A. Kr. schneiden, so ist

$$BD = CD. \text{ Daher auch}$$
$$\sphericalangle DBC = DCB \text{ und folglich}$$
$$\sphericalangle BAP = CAQ.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

[1]) Zwei gerade Linien heißen nach Leibniz antiparallel bezüglich eines Winkels, wenn sie von demselben 2 ungleichwendig ähnliche Dreiecke abschneiden.

[2]) G. Hoffmann, l. c. 3. Teil XVI.

[3]) Hoffmanns Zeitschrift XV. Aufg. No. 353 S. 39 (gestellt von Fuhrmann-Königsberg i. P.)

[4]) Hoffmanns Zeitschrift XXVII, 2. Seite 110 Aufg. No. 1480 (gestellt von Stoll-Bensheim).

10.

Die Entfernung des Mittelpunktes des A. Kr. von dem Mittelpunkt des Umkreises.

Legt man in A die Tangente an den Umkreis und verlängert sie bis zum Durchschnitt H_a mit der verlängerten Grundlinie a, fällt vom Mittelpunkt O des Umkreises O D senkrecht auf B C und zieht O A, so erhält man das Sehnenviereck $O A H_a D$, dessen Seiten

$$OA = r, \; AH_a = r_a, \; OD = r \cos\alpha = r \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$$

und $DH_a = \frac{a}{2} . \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}$; denn

$$DH_a = BH_a + \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$BH_a = r_a - \frac{a c}{b + c} \text{ (s. oben II, 1 S. 6)}$$

$$= \frac{a b c}{b^2 - c^2} - \frac{a c}{b + c} = \frac{a c^2}{b^2 - c^2}; \text{ also}$$

$$DH_a = \frac{a c^2}{b^2 - c^2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} . \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}.$$

Die Diagonalen des Sehnenvierecks $O A H_a D$ sind die seitenhalbierende Transversale von a, also t_a und die Entfernung des Punktes H_a von O, die mit d_a bezeichnet werde. Somit ist nach dem Ptolemäischen Lehrsatz:

$$t_a d_a = \frac{a r}{2} . \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \frac{a b c}{b^2 - c^2} . r . \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$$

$$= \frac{a r}{2} . \frac{2 b^2 + 2 c^2 - a^2}{b^2 - c^2}. \text{ Nun ist}$$

$$4 t_a^2 = 2 b^2 + 2 c^2 - a^2; \text{ also}$$

$$t_a d_a = \frac{a r . \; 2 t_a^2}{b^2 - c^2}; \text{ somit}$$

$$d_a = \frac{2 a r t_a}{b^2 - c^2}.$$

Man erhält demnach für

$$\frac{a r_a t_a}{d_a} = \frac{a^2 b c (b^2 - c^2) t_a}{(b^2 - c^2) 2 a r t_a} = \frac{a b c}{2 r} = 2 \Delta$$

Gleiche Ausdrücke lassen sich für r_b, t_b und d_b sowie für r_c, t_c und d_c ableiten. Es ist daher der Wert dieses Bruches constant und zwar $= 2 \Delta$:

$$\frac{a r_a t_a}{d_a} = \frac{b r_b t_b}{d_b} = \frac{c r_c t_c}{d_c} = 2 \Delta$$

Löst man eine dieser Gleichungen nach t auf, so erhält man z. B.

$$t_a = \frac{2 d_a \Delta}{a r_a}.$$

Setzt man darin den oben auf S. 8 abgeleiteten Wert:

$$r_a = \frac{2\,\Delta}{a \sin(\beta-\gamma)}$$

ein, so erhält man folgende einfache Beziehung zwischen d_a, t_a und dem Winkel $\beta-\gamma$:

$$t_a = d_a \sin(\beta-\gamma).$$

Nun schließt $A\,H_a$ mit der verlängerten Grundlinie a den Winkel $\beta-\gamma$ ein (s. o. S. 7), es ist daher auch $\sin(\beta-\gamma) = \frac{h_a}{r_a}$; folglich

$$t_a = d_a \,.\, \frac{h_a}{r_a} \text{ oder}$$

$$r_a : d_a = h_a : t_a. \text{ Daraus folgt:}$$

Der Winkel zwischen d_a und r_a ist gleich dem zwischen h_a und t_a.

II.

Specielle Fälle für das Verhältnis des Radius oder Durchmessers eines A. Kr. zu der entsprechenden Dreiecksseite.

Der Ausdruck:

$r_a = \frac{a\,b\,c}{b^2 - c^2}$ geht, wenn man $b : c = 1 : n$ setzt, über in

$$r_a = \frac{a\,n}{1-n^2}.$$

Daraus ist ersichtlich — was ja auch schon aus der geometrischen Construction folgt —, daß der Radius eines A. Kr. aus der zugehörigen Dreiecksseite und dem Verhältnis der beiden andern folgt. Ist also z. B. $n = \frac{1}{2}$, so folgt, daß $r_a = \frac{2}{3}\,a$. —

Wir betrachten noch einige specielle Fälle.

1.

Der Radius eines A. Kr. sei gleich der zugehörigen Dreiecksseite, also z. B.

$$r_a = a. \text{ Dann wird}$$

$$\frac{a\,n}{1-n^2} = a \text{ und hieraus}$$

$$n = \frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})$$

Da sich die Abschnitte, welche die Winkelhalbierende auf a bildet, ebenso verhalten wie $b : c$, so folgt, daß

$$u : v = 2 : (1+\sqrt{5}). \text{ Da nun}$$

$$2 : (1+\sqrt{5}) = (1+\sqrt{5}) : (3+\sqrt{5}),$$

so haben wir den Satz:

Wenn der Radius eines A. Kr. der entsprechenden Dreiecksseite gleich ist, so teilt die Halbierende des Gegenwinkels dieselbe nach dem goldenen Schnitt.

2.

Der Durchmesser eines A. Kr. sei gleich der entsprechenden Dreiecksseite, also z. B.

$2\,r_a = a$. Dann erhält man aus

$$\frac{2\,a\,n}{1-n^2} = a$$

$$n = \sqrt{2} - 1.$$

Also ist das Verhältnis des größeren zu dem kleineren der durch die Winkelhalbierende auf a gebildeten Abschnitte:

$$u : (a - u) = 1 : (\sqrt{2} - 1)$$

$$u = \frac{a}{2}\,\sqrt{2} \text{ d. h.}$$

Ist der Durchmesser eines A. Kr. gleich der entsprechenden Dreiecksseite, so ist der größere durch die Winkelhalbierende auf a gebildete Abschnitt gleich der Diagonale des Quadrates, dessen Seite gleich $\frac{a}{2}$ ist.

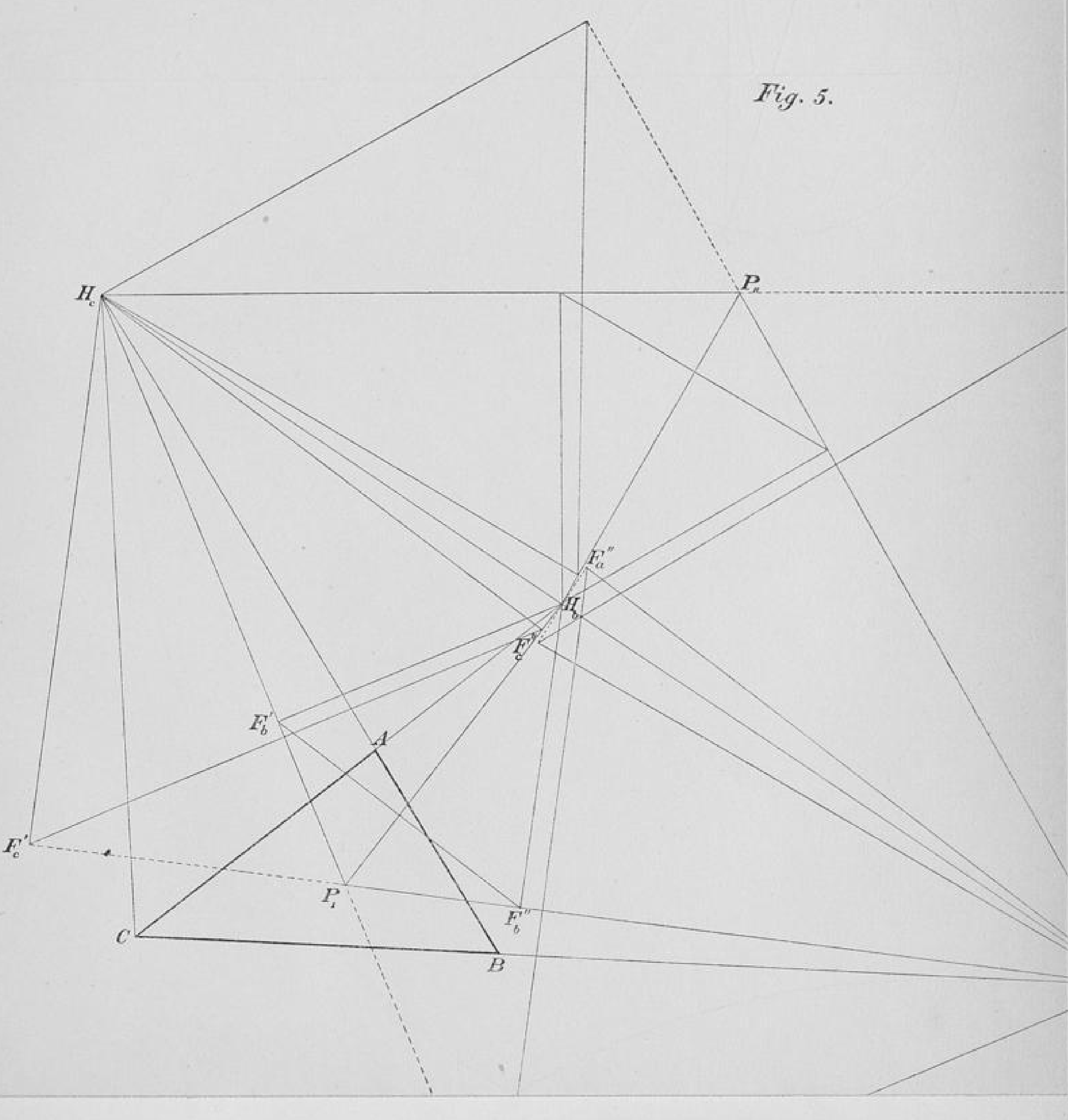

Fig. 5.

Fig. 6.