I.

Verallgemeinerung des Satzes von den „lunulae Hippocratis“.

Der unter dem Namen „lunulae Hippocratis“ bekannte Satz, daß die Summe der Möndchen über den Katheten gleich dem Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, bleibt für das letztere bestehen, wenn wir an die Stelle des Halbkreises über der Hypotenuse den umbeschriebenen Kreis setzen und dann Halbkreise auf allen 3 Seiten nach außen construieren; denn der Inhalt des Möndchens über der Hypotenuse wird 0, da sich der Halbkreis über derselben mit dem halben umbeschriebenen Kreis deckt. In dieser Form läßt sich der Satz auf das schiefwinklige Dreieck verallgemeinern. Im folgenden soll die Summe der bei einem beliebigen Dreieck entstehenden Möndchen gesucht werden.

Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks mit a, b, c, den Radius des Umkreises mit r, die Fläche des Dreiecks mit Δ, so ist jene Summe:

$\Delta+\frac{\pi}{8}(a^2+b^2+c^2)-r^2\pi=\Delta+\frac{r^2\pi}{2}[\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2]$. Nun ist $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$=1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$=2-\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\cos^2\beta(1-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$=2-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$=2-2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta);$$ da nun
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma,$$ folglich
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Demnach ist obige Summe:

$$\Delta+r^2\pi\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Der Ueberschuß der Summe der 3 mondförmigen Flächen über den Inhalt des Dreiecks kann dargestellt werden als der Kreis, dessen Durchmesser die mittlere geometrische Proportionale zu den Abschnitten einer Höhe des Dreiecks ist. Die durch den Höhenschnittpunkt gebildeten Abschnitte z. B. von h_c sind: $2r\cos\gamma$ und $2r\cos\alpha\cos\beta$. Somit ist die mittlere geometrische Proportionale zu denselben: $2r\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Also ist der Inhalt des Kreises, welcher diese mittlere geometrische Proportionale zum Durchmesser hat:

$$r^2\pi\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Ferner ist der Radius des Umkreises des Höhenfußpunktdreiecks (d. i. der Feuerbachsche Kreis) gleich der Hälfte des Radius des Umkreises des Urdreiecks und die Winkel des Höhenfußpunktdreiecks sind gleich den Supplementen der doppelten Dreieckswinkel. (Beim stumpfwinkligen Dreieck ist statt des

Supplementwinkels des doppelten stumpfen Winkels der Überschußwinkel desselben über 2R zu nehmen; also statt $2R-2\gamma$: $2\gamma-2R$). Die der Seite c des Urdreiecks gegenüberliegende Seite des Höhenfußpunktdreiecks ist $c.\cos\gamma$. Wenn nun der dieser gegenüberliegende Winkel in letzterem mit γ' bezeichnet wird, so muß

$$r\sin\gamma' = c.\cos\gamma = 2r\sin\gamma.\cos\gamma \text{ sein, also}$$
$$\sin\gamma' = \sin 2\gamma.$$

Da nun die Winkel des Höhenfußpunktdreiecks nicht gleich den doppelten Winkeln des Urdreiecks sein können, so müssen sie gleich den Supplementwinkeln der doppelten Winkel sein. (Beim stumpfen Winkel ist der Überschußwinkel des doppelten stumpfen Winkels über 2R zu nehmen.)

Drückt man nun den Radius des dem Höhenfußpunktdreieck einbeschriebenen Kreises aus nach der Formel:

$$\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \text{ so erhält man hier:}$$
$$\varrho = 2r\sin\frac{2R-2\alpha}{2}\sin\frac{2R-2\beta}{2}\sin\frac{\pm(2R-2\gamma)}{2}$$

(das untere Zeichen beim letzten Faktor gilt für $\gamma > R$); also

$$\varrho = 2r\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma.$$

Somit ist das Produkt der Radien des ein- und umbeschriebenen Kreises des Höhenfußpunktdreiecks $= r^2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma$.

Also ist auch der Inhalt der Ellipse, welche diese beiden Radien zu Halbachsen hat, $= r^2\pi\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma$ und somit dem Überschuß der drei mondförmigen Flächen über den Inhalt des Dreiecks gleich. (Fig. 1. und 2.)

Bemerkenswert scheint auch der im vorstehenden enthaltene Satz:

Das Produkt der durch den Höhenschnittpunkt gebildeten Abschnitte einer Höhe des Dreiecks ist gleich dem vierfachen Produkt der Radien des ein- und umbeschriebenen Kreises des Höhenfußpunktdreiecks.