Der Umstand, daß keine der bisher bekannten Methoden der Auflösung der numerischen gemischten Gleichungen vom dritten und von einem höheren Grade zu einer leichten Berechnung der Werthe der Unbekannten führt, veranlaßte den Unterzeichneten, eine zu einer solchen Berechnung geeignetere Auflösungs-Methode aufzusuchen.

Das gefundene Verfahren enthalten die nachfolgenden Paragraphen:

§. 1.

Da sich jede vollständige kubische Gleichung von der Form $y^3 + py^2 + qy = r$ dadurch, daß man $y = x - \frac{1}{3}p$ setzt, in die Gleichung $x^3 + (q - \frac{1}{3}p^2)\, x = r - \frac{2}{27}p^3 + \frac{1}{3}pq$ verwandeln, also auf eine Gleichung von der Form $x^3 + bx = c$ zurückführen läßt, so ist es zunächst nur nöthig nachzuweisen, wie die Gleichung $x^3 + bx = c$, die sogenannte **reducirte** kubische Gleichung aufgelös't werden kann.

§. 2.

Setzt man in der Gleichung $x^3 + bx = c$ die Unbekannte $x = \frac{c}{n}$, so kann man aus ihr die Gleichung $x^2 . \frac{c}{n} + b . \frac{c}{n} = c$, und aus dieser $x^2 + b = n$ herleiten, so daß sich auch $x = \sqrt{(n - b)}$ ergiebt. Hieraus folgt, daß man jedesmal in $\frac{c}{n}$ oder in $\sqrt{(n - b)}$ einen Werth von x gefunden hat, sobald die Zahl n so bestimmt ist, daß die Gleichung $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b)}$ Statt findet.

§. 3.

Ist für die Gleichung $x^3 + bx = c$ die Gleichung $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b)}$ gefunden, so sind außer $\frac{c}{n}$ auch die Ausdrücke $-\frac{c}{2n} + \frac{1}{2}\sqrt{(-b - 3n)}$ und $-\frac{c}{2n} - \frac{1}{2}\sqrt{(-b - 3n)}$ Werthe von x oder Wurzeln der Gleichung $x^3 + bx = c$:

Wird die Gleichung $x^3 + bx = c$ in $x^3 + bx - c = o$ umgeformt, dann $x^3 + bx - c$ durch $x - \frac{c}{n}$ dividirt, wie folgt:

$$\begin{array}{c|l|l}
x - \frac{c}{n} & x^3 + bx - c & x^2 + \frac{c}{n}x + b + \left(\frac{c}{n}\right)^2 \\
 & \underline{x^3 - \frac{c}{n}x^2} & \\
 & + \frac{c}{n}x^2 + bx & \\
 & \underline{+ \frac{c}{n}x^2 - \left(\frac{c}{n}\right)^2 x} & \\
 & \left(b + \left(\frac{c}{n}\right)^2\right) x - c & \\
 & \underline{\left(b + \left(\frac{c}{n}\right)^2\right) x - \frac{c}{n}\left(b + \left(\frac{c}{n}\right)^2\right)} & \\
 & \frac{c}{n}\left(b + \left(\frac{c}{n}\right)^2\right) - c, &
\end{array}$$

so ist wegen $\frac{c}{n} = \sqrt{(n-b)}$, woraus $\left(\frac{c}{n}\right)^2 = n - b$ und $b + \left(\frac{c}{n}\right)^2 = n$ folgt, der Rest $\frac{c}{n}\left(b + (c/n)^2\right) - c = \frac{c}{n} . n - c = c - c = o$, also geht die Division auf und es ist der Quotient $x^2 + \frac{c}{n} x + b + \left(\frac{c}{n}\right)^2 = o$. Die zuletzt gefundene Gleichung giebt, wenn man n statt $b + \left(\frac{c}{n}\right)^2$ setzt, $x^2 + \frac{c}{n} x = - n$, weshalb $x = - \frac{c}{2n} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{c}{n}\right)^2 - n\right)}$. Hieraus erhält man, wenn $n - b$ für $\left(\frac{c}{n}\right)^2$ substituirt wird, $x = - \frac{c}{2n} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} n - \frac{1}{4} b - n\right)} = - \frac{c}{2n} \pm \sqrt{\left(- \frac{1}{4} b - \frac{3}{4} n\right)} = - \frac{c}{2n} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(- b - 3 n)}$, also einmal $x = - \frac{c}{2n} + \frac{1}{2} \sqrt{(- b - 3 n)}$ und dann auch $x = - \frac{c}{2n} - \frac{1}{2} \sqrt{(-b - 3 n)}$.

§. 4.

1. Sind b und c in der Gleichung $x^3 + b x = c$ positiv, so ist n in der den ersten Werth von x bestimmenden Gleichung $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b)}$ positiv, und dieser Werth eine positive reelle Zahl, während die anderen beiden Werthe von x, nämlich $- \frac{c}{2n} + \frac{1}{2} \sqrt{(- b - 3 n)}$ und $- \frac{c}{2n} - \frac{1}{2} \sqrt{(- b - 3 n)}$ imaginär sind.

2. Ist b negativ und c positiv, hat also die aufzulösende Gleichung die Form $x^3 - b x = c$, so ist 1. $x = \frac{c}{n} = \sqrt{(n + b)}$; 2. $x = - \frac{c}{2n} + \frac{1}{2} \sqrt{(b - 3 n)}$ und 3. $x = - \frac{c}{2n} - \frac{1}{2} \sqrt{(b - 3 n)}$. In diesem Falle sind die beiden letzen Werthe von x imaginär, wenn n positiv und $b < 3 n$ ist

3. Ist b positiv und c negativ, ist also die Gleichung $x^3 + b x = - c$ aufzulösen, so ergiebt sich 1. $x = \frac{-c}{n} = \sqrt{(n - b)}$; 2. $x = + \frac{c}{2n} + \frac{1}{2} \sqrt{(- b - 3 n)}$ und 3. $x = + \frac{2}{2n} - \frac{1}{2} \sqrt{(- b - 3 n)}$, mithin ist wie in No. 1 der erste Werth von x reell, die andern beiden aber sind imaginär.

4. Sind b und c beide negativ, ist also die Gleichung $x^3 - b x = - c$ aufzulösen, so erhält man 1. $x = \frac{-c}{n} = \sqrt{(n + b)}$; 2. $x = + \frac{c}{2n} + \frac{1}{2} \sqrt{(b - 3 n)}$; 3. $x = + \frac{c}{2n} - \frac{1}{2} \sqrt{(b - 3 n)}$. Auch hier sind wie in No. 2 die beiden letzten Werthe von x imaginär, wenn n positiv und $b < 3 n$ ist.

§. 5.

1. Hat eine numerische reducirte kubische Gleichung eine, oder lauter rationale Wurzeln, so lassen sich diese nach dem in §. 2 — 4 Angegebenen leicht und sicher finden, wie dies die nachfolgenden Beispiele zeigen werden.

a. Für $x^3 + 6 x = 20$ ist $n = 10$ in $\frac{20}{n} = \sqrt{(n - 6)}$, also $x = \frac{20}{10} = + 2$; $x = - 1 + {}^1/_2 \sqrt{(- 6 - 30)} = - 1 + 3 \sqrt{(- 1)}$; $x = - 1 - 3 \sqrt{(- 1)}$.

b. Für $x^3 + 9 x = {}^{170}/_{27}$ ist $n = {}^{85}/_9$ in $\frac{170/27}{n} = \sqrt{(n - 9)}$, also $x = {}^2/_3$; $x = - {}^1/_3$

$+ \frac{1}{2} \sqrt{(- 9 - \frac{85}{3})} = - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{(- \frac{112}{3})}$; $x = - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sqrt{(- \frac{112}{3})}$.

c. Für $x^3 - 3x = 52$ ist $n = 13$ in $\frac{52}{n} = \sqrt{(n + 3)}$, also $x = \frac{52}{13} = + 4$; $x = - 2 + \frac{1}{2} \sqrt{(3 - 39)} = - 2 + 3 \sqrt{(- 1)}$; $x = - 2 - 3 \sqrt{- 1}$.

d. Für $x^3 - 7x = 6$ ist $n = 2$ in $6/n = \sqrt{(n + 7)}$, also $x = 6/2 = 3$; $x = - 3/2 + 1/2 \sqrt{(7 - 6)} = - 3/2 + 1/2 = - 1$; $z = - 3/2 - 1/2 = - 2$.

e. Für $x^3 + 15x = - 72$ ist $n = 24$ in $\frac{-72}{n} = \sqrt{(n - 15)}$, also $x = \frac{-72}{24} = - 3$; $x = \frac{72}{48} + 1/2 \sqrt{(- 15 - 72)} = 3/2 + 1/2 \sqrt{(- 87)}$; $x = 3/2 - 1/2 \sqrt{- 87}$.

f. Für $x^3 + 1/12\, x = - 1/6$ ist $n = 1/3$ in $\frac{1/6}{n} = \sqrt{(n - 1/12)}$, also $x = - 1/2$; $x = + 1/4 + 1/2 \sqrt{(- 1/12 - 1)} = 1/4 + 1/2 \sqrt{(- 13/12)}$; $x = 1/4 - 1/2 \sqrt{(- 13/12.)}$

g. Für $x^3 - 19x = - 30$ ist $n = 6$ in $\frac{-30}{n} = \sqrt{(n + 19)}$, also $x = \frac{-30}{6} = - 5$; $x = 5/2 + 1/2 \sqrt{(+ 19 - 18)} = 5/2 + 1/2 = 3$; $x = 5/2 - 1/2 = 2$.

h. Für $x^3 - 73/144\, x = - 1/24$ ist $n = 8/144 = 1/18$ in $- \frac{1/24}{n} = \sqrt{(n + \frac{73}{144})}$, also $x = - 3/4$; $x = + 3/8 + 1/2 \sqrt{(\frac{73}{144} - \frac{24}{144})} = 3/8 + 1/2 \sqrt{(\frac{49}{144})} = 3/8 + 7/24 = 2/3$; $x = 3/8 - 7/24 = 2/24 = 1/12$.

2. Sind alle drei Werthe der Unbekannten in einer numerischen reducirten kubischen Gleichung reell und rational, was bei Gleichungen von der Form $x^3 - bx = c$ oder $x^3 - bx = - c$ zufolge der im §. 4 No. 2. und 4. gefundenen Gleichungen möglich ist, so kann man sie alle durch die eine Gleichung $\frac{c}{n} = \sqrt{(n + b)}$ oder $\frac{-c}{n} = \sqrt{(n + b)}$ finden.

So ergeben sich z. B. für $x^3 - 7x = 6$ die drei Werthe von x aus $\frac{6}{n} = (\sqrt{n} + 7)$, wenn man der Reihe nach $n = 2$, $n = - 3$, $n = - 6$ setzt, nämlich $x = 6/2 = 3$; $x = \frac{6}{-3} = - 2$; $x = \frac{6}{-6} = - 1$.

Ebenso erhält man für $x^3 - 19x = - 30$ aus $\frac{-30}{n} = \sqrt{(n + 19)}$, wenn man der Reihe nach $n = + 6$, $n = - 10$, $n = - 15$ setzt, $x = \frac{-30}{6} = - 5$; $x = \frac{-30}{-10} = 3$; $x = \frac{-30}{-15} = 2$.

§. 6.

Die rationalen Wurzeln einer vollständigen numerischen gemischten Gleichung vom dritten Grade findet man, nachdem aus ihr nach §. 1. eine reducirte hergeleitet ist, nach §§. 2—4. Hat man also z. B: aus $y^3 + 6y^2 - 15^1/_4\, y = - 6$ nach §. 1. mittelst $y = x - 2$ die Gleichung $x^3 - 27^1/_4\, x = - 52^1/_2$ hergeleitet, so ist, weil $n = 8^3/_4$ in $\frac{-52^1/_2}{n} = \sqrt{(n + 27^1/_4)}$, $x = - 6$; $x = 3 + 1/2 \sqrt{(27^1/_4 - 26^1/_4)} = 3 + 1/2 = 3^1/_2$; $x = 3 - 1/2 = 2^1/_2$, folglich $y = - 6 - 2 = - 8$; $y = 3^1/_2 - 2 = 1^1/_2$; $y = 2^1/_2 - 2 = 1/2$

§. 7.

Ist keine Wurzel einer numerischen reducirten kubischen Gleichung rational, so wird der Quotient $\frac{c}{n}$ nie dem Zahlausdruck $\sqrt{(n-b)}$ oder $\sqrt{(n+b)}$ völlig gleich, sondern man findet nur von $\frac{c}{n}$ und $\sqrt{(n-b)}$, oder von $\frac{c}{n}$ und $\sqrt{(n+b)}$ eine gewisse Anzahl der Anfangsziffern übereinstimmend, die man dann auch nur zur Bestimmung der Wurzeln der jedesmal gegebenen kubischen Gleichung benutzen kann. Ob nun aber eine reducirte kubische Gleichung rationale, oder irrationale Wurzeln hat, läßt sich aus den Gleichungen $\frac{c}{n} = \sqrt{(n-b)}$ und $\frac{c}{n} = \sqrt{(n+b)}$ nicht immer gleich im Anfange erkennen, denn es ist möglich, daß man erst, nachdem für n ein Decimalbruch mit mehreren Decimalen gewählt ist, $\frac{c}{n} = \sqrt{(n-b)}$ oder $\frac{c}{n} = \sqrt{(n+b)}$ erhält. Aus diesem Grunde ist im Folgenden noch näher anzugeben, wie man nach und nach den richtigen, oder doch möglichst richtigen Werth von n und $\frac{c}{n}$ oder x auffinden kann.

§. 8.

1. Ist für die Gleichung $x^3 + bx = c$, in welcher b und c sowohl positive als negative Zahlen sein können, durch Einsetzung einer bestimmten Zahl für n nicht $\frac{c}{n} = \sqrt{(n-b)}$, sondern entweder $\frac{c}{n} > \sqrt{(n-b)}$, oder $\frac{c}{n} < \sqrt{(n-b)}$ gefunden, so möge im ersten Falle $\frac{c}{n+u} = \sqrt{(n+u-b)}$ und im zweiten $\frac{c}{n-u} = \sqrt{(n-u-b)}$ sein. Setzt man hier $\frac{c}{n} = q$, $n - b = p$ u. $\sqrt{(n-b)} = w$, berechnet sodann den Quotienten

$$\frac{c}{n+u} = \frac{c}{n} - \frac{c}{n} \cdot \frac{u}{n} + \frac{c}{n} \cdot \frac{u^2}{n^2} - \ldots \text{ und}$$

$$\frac{c}{n-u} = \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \cdot \frac{u}{n} + \frac{c}{n} \cdot \frac{u^2}{n^2} + \ldots, \text{ ferner}$$

$\sqrt{(n+u-b)} = \sqrt{(n-b+u)} = \sqrt{(p+u)} = (p+u)^{1/2} = p^{1/2} + \frac{1}{2} p^{-1/2} u + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} p^{-3/2} u^2 + \ldots$ und

$\sqrt{(n-u-b)} = \sqrt{(p-u)} = (p-u)^{1/2} = p^{1/2} - \frac{1}{2} p^{-1/2} u + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} p^{-3/2} u^2 - \ldots$

so erhält man durch Substitution $\frac{c}{n+u} = q - q \cdot \frac{u}{n} + q \cdot \frac{u^2}{n^2} - \ldots$; $\frac{c}{n-u} = q + q \cdot \frac{u}{n} + q \cdot \frac{u^2}{n^2} + \ldots$; $\sqrt{(n+u-b)} = w + \frac{u}{2w} - \frac{1}{8} \frac{u^2}{w^3} + \ldots$ und

$\sqrt{(n-u-b)} = w - \frac{u}{2w} - \frac{1}{8} \cdot \frac{u^2}{w^3} - \ldots$

Ist nun u ein kleiner Bruch, so kann man in den entwickelten Reihen die Glieder, welche u^2 und höhere Potenzen von u enthalten, weglassen, so daß man näherungsweise $\frac{c}{n+u} = q - q \cdot \frac{u}{n}$; $\frac{c}{n-u} = q + q \cdot \frac{u}{n}$; $\sqrt{(n+u-b)} = w + \frac{u}{2w}$; $\sqrt{(n-u-b)} = w - \frac{u}{2w}$ bekommt. Es wurde aber einmal $\frac{c}{n+u} = \sqrt{(n+u-b)}$ und dann auch $\frac{c}{n-u} = \sqrt{(n-u-b)}$ angenommen, folglich ist auch näherungsweise $q - q \cdot \frac{u}{n} = w + \frac{u}{2w}$ und $q + q \cdot \frac{u}{n} = w - \frac{u}{2w}$, wenn anders u ein kleiner Bruch ist. Aus der ersten von den beiden letzten Gleichungen folgt $q - w = \frac{u}{2w} + q\frac{u}{n} = u.\frac{n + 2wq}{2wn}$, also $u = \frac{2wn(q - w)}{n + 2wq}$ und ebenso aus der zweiten $u = \frac{2wn(w - q)}{n + 2wq}$.

Erwägt man noch genauer die Beschaffenheit der in den oben entwickelten Reihen weggelassenen Glieder, so ersieht man, daß eigentlich $q - q.\frac{u}{n} < w + \frac{u}{2w}$ und $q + q.\frac{u}{n} < w - \frac{u}{2w}$, also im ersten Falle $u > \frac{2wn(q - w)}{n + 2wq}$, im zweiten aber $u < \frac{2wn(w - q)}{n + 2wq}$ sein muß. Es wird daher angemessen sein, den Nenner von $\frac{2wn(w - q)}{n + 2wq}$ etwas zu verkleinern, den Nenner von $\frac{2wn(w - q)}{n + 2wq}$ aber etwas zu vergrößern, um genauere Werthe für u zu finden. Da nun im ersten Falle $2p < 2wq$, im zweiten aber $2p > 2wq$ ist, so wird man dort $u = \frac{2wn(q - w)}{n + 2p}$ und hier $u = \frac{2wn(w - q)}{n + 2p}$ setzen können, vorausgesetzt, daß der Unterschied zwischen q und w nur ein kleiner Bruch ist.

Findet man nach der Berechnung von u nicht $\frac{c}{n + u} = \sqrt{(n + u - b)}$ und auch nicht $\frac{c}{n - u} = \sqrt{(n - u - b)}$, so kann man dadurch, daß man $n + u$ und $n - u = n'$, $n + u - b$ und $n - u - b = p'$, $\frac{c}{n'} = q'$, $\sqrt{p'} = w'$ setzt und $\frac{c}{n' + u'} = \sqrt{(n' + u' - b)}$ für $q' > w'$, und $\frac{c}{n' - u'} = \sqrt{(n' - u' - b)}$ für $w' > q'$ annimmt, auf dem vorhin angegebenen Wege $u' = \frac{2w'n'(q' - w')}{n' + 2p'}$ für $q' > w'$ und $u' = \frac{2w'n'(w' - q')}{n' + 2p'}$ für $w' > q'$ herleiten. Ergiebt sich noch nicht $\frac{c}{n' + u'} = \sqrt{(n' + u' - b)}$ und auch nicht $\frac{c}{n' - u'} = \sqrt{(n' - u' - b)}$, so ist $u'' = \frac{2w''n''(q'' - w'')}{n'' + 2p''}$ für $q'' > w''$ und $u'' = \frac{2w''n''(w'' - q'')}{n' + 2p'}$ für $w'' > q''$ zu bestimmen und die Berechnung eines neuen u so lange fortzusetzen, bis man einen Quotienten $\overset{r}{q}$ und eine Wurzel $\overset{r}{w}$ erhält, welche entweder völlig gleich oder doch so wenig verschieden sind, daß man sie einander gleich setzen kann.

2. Da bei der Herleitung der Formeln für u dieses u als ein so kleiner Bruch vorausgesetzt worden ist, daß in den für q' und w' entwickelten Reihen die mit u^2 und höhern Potenzen von u behafteten Glieder weggelassen werden konnten, so sind bei der Berechnung von u in der Regel höchstens nur doppelt so viele Decimalen der für q und w gefundenen Decimalbrüche zu wählen, als die Stelle angiebt, auf welcher der Rest $q - w$, oder $w - q$ zuerst eine Ziffer > 0 enthält. Auch hat man im Allgemeinen von u nicht mehr Decimalen zu berechnen, als von q und w benutzt sind; nur in dem Falle kann u mehrere Decimalen bekommen, wenn in $q - w$ oder $w - q$ die erste die Null übersteigende Ziffer klein und $n + 2p$ größer als $2n$ oder doch nicht viel kleiner als $2n$ ist.

Bei der Berechnung der Werthe von q, w, u, q', w' u. s. w. ist die Benutzung der Logarithmen zu empfehlen. Wünscht man jedoch in den Resultaten mehr als 7 Ziffern zu haben, so müssen die Operationen, welche in den für $\frac{c}{n}$ und u gefundenen Gleichungen angedeutet sind, ohne Logarithmen ausgeführt werden.

§. 9.

Zur Verdeutlichung des in §. 8. beschriebenen Verfahrens folgt hier die Berechnung für einige bestimmte Fälle.

1. Für $x^3 + 3{,}08x = 9{,}024$ soll $\frac{9{,}024}{n} = \sqrt{(n - 3{,}08)}$ sein; setzt man nun zunächst $n = 5{,}5$, so ist $\frac{9{,}024}{5{,}5} = 1{,}64070\ldots = q$ und $\sqrt{(5{,}5 - 3{,}08)} = \sqrt{(2{,}42)} = 1{,}55563\ldots = w$, mithin $u = \frac{2wn(q-w)}{n+2p} = \frac{2.\ 1{,}555.\ 5{,}5.\ 0{,}085}{5{,}5 + 2.\ 2{,}42} = \frac{3{,}11.\ 0{,}4675}{5{,}5 + 4{,}84} = \frac{1{,}45303}{10{,}34} = 0{,}140$, folglich $n + u = 5{,}5 + 0{,}14 = 5{,}64$.

Nun ist aber sowohl $\frac{9{,}024}{5{,}64} = 1{,}6$, als auch $\sqrt{(5{,}64 - 3{,}08)}$ d. i. $\sqrt{(2{,}56)} = 1{,}6$, daher $x = 1{,}6$.

2. Für $x^3 + 4x = -8{,}5$ soll $\frac{-8{,}5}{n} = \sqrt{(n - 4)}$ sein; setzt man hier zunächst $n = 6$, so erhält man $\frac{8{,}5}{6} = 1{,}416666\ldots = q$ und $\sqrt{(6 - 4)} = \sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots = w$, mithin $u = \frac{2wn(q-w)}{n+2p} = \frac{2.\ 1{,}4142.\ 6.\ 0{,}002453}{6 + 2.2} = \frac{2{,}8284.\ 0{,}014718}{10} = 0{,}0041628$; folglich $n + u = 6 + 0{,}0041628 = 6{,}0041628$; aber $\frac{8{,}5}{6{,}0041628} = 1{,}4156844\ldots$ und $\sqrt{(6{,}0041628 - 4)} = \sqrt{(2{,}0041628)} = 1{,}4156845\ldots$, so daß der Unterschied zwischen q' und w' sehr unbedeutend ist, und der eine Werth von $x = -1{,}4156844$ gesetzt werden darf.

3. Nimmt man in der für $x^3 - 3x = -5$ geltenden Gleichung $\frac{-5}{n} = \sqrt{(n + 3)}$ zunächst $n = 2{,}2$ an, so bekommt man $^5/_{2,2} = 2{,}2727\ldots = q$ und $\sqrt{(2{,}2 + 3)} = \sqrt{(5{,}2)} = 2{,}2803508\ldots = w$, mithin $u = \frac{2wn(w-q)}{n+2p} = \frac{2.2{,}28035.\ 2{,}2(2{,}28035 - 2{,}27272)}{2{,}2 + 2.\ 5{,}2} = \frac{4{,}5607.\ 2{,}2.\ 0{,}00763}{12{,}6} = \frac{4{,}5607.\ 0{,}016786}{12{,}6} = 0{,}006075$. Daher ist $n - u = 2{,}2 - 0{,}006075 = 2{,}193925$, aber $\frac{5}{2{,}193925} = 2{,}2790204$ und $\sqrt{(2{,}193925 + 3)} = \sqrt{5{,}193925} = 2{,}2790184$, demnach näherungsweise $x = -2{,}2790184\ldots$.

4. Wird in der für $x^3 + 6{,}23403x = 24{,}1$ geltendenden Gleichung $\frac{24{,}1}{n} = \sqrt{(n - 6{,}23403)}$ zunächst $n = 11$ gesetzt, so hat man $q = \frac{24{,}1}{11}$; $p = 11 - 6{,}23403 = 4{,}76597$;

$$\begin{aligned}
\log 24{,}1 &= 1{,}3820170 \\
\log 11 &= 1{,}0413927 \\
\hline
\log q &= 0{,}3406243;\quad q = 2{,}1909090\ldots \\
\log \sqrt{p} = \log w &= \frac{\log 4{,}76597}{2} \\
&= 0{,}3390756;\quad w = 2{,}18311\ldots
\end{aligned}$$

mithin $u = \frac{2.\ 2{,}18311.\ 11.\ 0{,}007798}{20{,}53194} = \frac{2wn(q-w)}{n+2p}$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log w = 0,3390756$$
$$\log n = 1,0413927$$
$$\log(q - w) = 0,8919832 - 3$$
$$1,5734815 - 2$$
$$\log(n + 2p) = 1,3124301$$
$$\log u = 0,2610514 - 2$$
$$u = 0,01824$$
$$n + u = 11,01824$$

$$\log 24,1 = 1,3820170$$
$$\log(n + u) = 1,0421123$$
$$\log q' = 0,3399047$$
$$q' = 2,187281$$
$$p' = 11,01824 - 6,23403 = 4,78421$$
$$\log \sqrt{p'} = \log w' = 0,3399051$$
$$w' = 2,187283$$

Wegen der geringen Differenz der Werthe von w' und q' kann man näherungsweise $x = 2,187282$ annehmen.

5. Wenn man in der für $x^3 + 3,4\,x = -48$ geltenden Gleichung $\frac{-48}{n} = \sqrt{(n - 3,4)}$ zunächst $n = 14,4$, setzt, so daß $q = \frac{48}{14,4}$, $p = 14,4 - 3,4 = 11$ und $n + 2p = 36,4$ ist, so ergiebt sich

$$\log 48 = 1,6812412$$
$$\log 14,4 = 1,1583625$$
$$\log q = 0,5228787$$
$$q = 3,33333\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} \log 11 = 0,5206963 = \log w$$
$$w = 3,316624$$
$$q - w = 0,01670$$
$$u = \frac{2wn(q - w)}{n + 2p}$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log w = 0,5206963$$
$$\log n = 1,1583625$$
$$\log(q - w) = 0,2227165 - 2$$
$$2,2028053 - 2$$
$$\log(n + 2p) = 1,5611014$$
$$\log u = 0,6417039 - 2$$
$$u = 0,04382$$
$$n + u = 14,44382$$

$$\log 48 = 1,6812412$$
$$\log(n + u) = 1,1596821$$
$$\log q' = 0,5215591$$
$$q' = 3,323220$$
$$p' = 14,44382 - 3,4 = 11,04382$$
$$\log \sqrt{p'} = \log w' = 0,5215596$$
$$w' = 3,323223$$

Will man nun für x nicht mehr als fünf Decimalstellen haben, so kann man $x = -3,32322$ setzen.

§. 10.

1. Da aus den in §. 8 No. 1 für q' und w' entwickelten Reihen für den Fall, daß u ein kleiner Bruch ist, $q' = q - q.\frac{u}{n} = w + \frac{u}{2w} = w'$ für $q > w$ und $q' = q + q$

$\frac{u}{n} = w - \frac{u}{2w} = w'$ für $w > q$ gefolgert werden darf, so ist es zur Bestimmung von q und w' nicht nöthig, erst u zu berechnen, sondern man kann wegen der zweiten für u gefundenen Gleichungen sogleich $\frac{u}{2w}$ durch den Quotienten $\frac{n(q-w)}{n+2p}$ für $q > w$ und durch den Quotienten $\frac{n(w-q)}{n+2p}$ für $w > q$ bestimmen und aus w und dem Werthe von $\frac{u}{2w}$ den Werth von w' herleiten.

2. Wird das in No. 1 zur Bestimmung von w' angegebene Verfahren bei den in §. 9. No. 1 — 5. behandelten Gleichungen in Anwendung gebracht, so wird

a. Der Quotient $\frac{u}{2w} = \frac{n(q-w)}{n+2p} = \frac{5,5.0,085}{10,34} = 0,045$, mithin $w' = w + \frac{u}{2w} = 1,555 + 0,045 = 1,6$, also eben so groß, als w' in §. 9. No. 1. gefunden wurde.

b. Nach §. 9. No. 2 wird $\frac{u}{2w} = \frac{6.0,002453}{10} = 0,0014718$, mithin $w' = w + \frac{u}{2w} = 1,4142135 + 0,0014718 = 1,4156853$, also größer als der in §. 9. No. 2. für w' gefundene Werth 1,4156845. Hätte man hier von w' nur sechs Decimalen berechnet, so hätte man $w' = 1,415684$, also von der richtigen Größe gefunden.

c. Nach §. 9 No. 3 wird $\frac{u}{2w} = \frac{2,2.0,00763}{12,6} = \frac{0,016786}{12,6} = 0,0013322$, mithin $w' = 2,2803508 - 0,0013322 = 2,2790186$, also etwas größer, als der früher zu klein gefundene Werth 2,2790184.

d. Nach §. 9 No. 4 wird $\frac{u}{2w} = \frac{11.0,007798}{20,53194} = 0,004177$, mithin $w' = 2,183110 + 0,004177 = 2,187287$, also wieder etwas größer, als der in §. 9 berechnete Werth von w'.

e. Nach §. 9. No. 5. wird $\frac{u}{2w} = \frac{14,4.\ 0,0167}{36,4} = 0,006606$, mithin $w' = 3,31662 + 0,006606 = 3,323226$, also wiederum etwas größer, als die früher berechnete Wurzel w'

3. Die Abweichung der in No. 2 berechneten Werthe von w' von den in §. 9. gefundenen hat ihren Grund darin, daß eigentlich $w' < w + \frac{u}{2w}$ für $q > w$ und auch $w' < w - \frac{u}{2w}$ für $w > q$ ist. Will man daher richtigere Werthe von w' haben, so muß im ersten Falle $\frac{u}{2w}$ verkleinert, im zweiten aber $\frac{u}{2w}$ vergrößert werden. Um dies zu erreichen, könnte man auf den Gedanken kommen, für u die zuerst in §. 9. No. 1 gefundenen Ausdrücke $\frac{2w\,n(q-w)}{n+2wq}$ und $\frac{2w\,n(w-q)}{n+2wq}$ zu substituiren, so daß man $\frac{u}{2w} = \frac{n(q-w)}{n+2wq}$ für $q > w$ und $\frac{u}{2w} = \frac{n(w-q)}{n+2wq}$ für $w > q$

erhielte; doch ist die Benutzung der so für $\frac{u}{2\,w}$ gewonnenen Ausdrücke nicht zu empfehlen, da die Berechnung von $2\,w\,q$ viel weitläuftiger, als die von $2\,p$ ist, und sich nicht allgemein bestimmen läßt, wie viele Decimalen w, q und $2\,m\,q$ bei der Bestimmung von $\frac{u}{2\,w}$ haben müssen. Die bei den aus $\frac{n\,(q - w)}{n + 2\,b}$ und $\frac{n\,(w - q)}{n + 2\,p}$ berechneten Werthe von $\frac{u}{2\,w}$ nöthigen Veränderungen lassen sich einigermaßen dadurch erreichen, daß man für $q > m$ eine Decimale weniger, für $w > q$ aber eine Decimale mehr berechnet, als für u nach §. 8. No. 2. zu berechnen sind. Zweckmäßig ist es aber, in jedem Falle gleich Anfangs für n eine solche Zahl zu wählen, daß u und $\frac{u}{2\,w}$ kleine Brüche werden.

Hat man nun nach der für $x^3 - 5\,x = 18$ geltenden Gleichung $\frac{18}{n} = \sqrt{(n+5)}$ durch $n = 5,5$ zunächst $q = 3,27272\ldots$ und $\log w = \frac{1}{2} \log 10,5 = 0,5105946$, also $w = 3,24037$ berechnet, so daß $q - w = 0,0324$ und $\frac{u}{2w} = \frac{5,5 .\, 0,0324}{5,5 + 2 .\, 10,5}$ $= \frac{0,178200}{26,5} = 0,00672$ ist, so kann man von $0,00672$ die letzte Decimale weglassen, und $w' = w + \frac{u}{2\,w} = 3,24037 + 0,0067 = 3,24707$ setzen. Der gefundene Werth von w' ist nur sehr wenig zu groß, denn zufolge der Gleichung $\sqrt{(n + u + 5)} = w'$ ist $\log(n + u + 5) = 2 \log 3,24707 = 2.\; 0,5114917 = 1,0229834$, woraus $n + u + 5 = 10,54346$, also $n + u = 5,54346$ folgt; mithin wegen

$$\log 18 = 1,2552725$$

und $\log(n + u) = \log 5,54346 = 0,7437809$

$$\log q' = 0,5114916 \text{ und } q' = 3,247069,$$

also nur wenig kleiner als w', so daß man $x = 3,247069$ setzen kann.

Berechnet man die Ausdrücke $\frac{18}{5,54346}$ und $\sqrt{(10,54346)}$ ohne Logarithmen, so ergiebt sich $q' = 3,4706952$ und $w' = 3,4706944$, wo $w' < q'$ ist, während vorher $w' > q'$ war. Die Verschiedenheit der aus beiden Berechnungen entstandenen Werthe von w' und q' kommt daher, weil bei der logarithmischen Berechnung von $n + u + 5$ nur sechs Decimalen berechnet sind.

Nimmt man hier $n = 5,588$ an, so daß man $\frac{18}{5,588} = 3,221188$ und $\sqrt{(5,588 + 5)} = \sqrt{(10,588)} = 3,253920$, mithin $- q = 0,0328$ und $\frac{u}{2\,w} = \frac{5,588 .\; 0,0328}{5,588 + 2 .\, 10,588} = \frac{0,1832864}{26,764} = 0,006848$ erhält, so wird $w' = 3,253920 - 0,006848 = 3,247072$, also nur wenig größer als vorher, wo $q - w = 0,0324$ war, während hier $w - q = 0,0328$ gefunden wurde.

4. Ist w' nach No. 1. und No. 3. berechnet, so erhält man aus der in §. 8. No. 1. gefundenen Gleichung $\sqrt{(p')} = w'$, in welcher $p' = n + u - b$, oder $p' = n - u - b$ ist, $n + u$, oder $n - u$ d. i. $n' = p' + b$. Es läßt sich aber n' auch dadurch finden, daß man $w' = q'$ setzt, denn

so bekommt man die Gleichung $\frac{c}{n'} = w'$, aus welcher $n' = \frac{c}{w'}$ hervorgeht. Ist nun w' entweder zu groß, oder zu klein, so ist auch n' aus $\sqrt{(p')} = w'$ bezüglich zu groß, oder zu klein, aus $\frac{c}{n'} = w'$ aber zu klein, oder zu groß, so daß man einen richtigeren Werth von n'' in dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden aus $\sqrt{(p')} = w'$ und aus $\frac{c}{n'} = w'$ berechneten Werthen von n' finden kann. Hat dann der so gewonnene Werth von n'' noch nicht eine solche Größe, daß man $\frac{c}{n''} = \sqrt{(n'' - b)}$ setzen darf, so muß man in der Art, wie am Schlusse von No. 1. in §. 8. angegeben ist, weiter operiren.

Beispiele.

a. Ist für die Gleichung $x^3 + 18\,x = 60$ gefunden $q = \frac{60}{24,1} = 2,48962$ und $w = \sqrt{(24,1 - 18)} = \sqrt{(6,1)} = 2,469818$, so ist $\frac{u}{2\,w} = \frac{n\,(q - w)}{n + 2\,p} = \frac{24,1.\ 0,0198}{24,1 + 12,2} = \frac{0,47718}{36,3} = 0,0131$, mithin $w' = w + \frac{u}{2w} = 2,482918$, daher

$$\log.\ w' = \log.\ 2,482918 = 0,3949624$$
$$\log.\ p' = \log.\ (n' - b) = 0,7899248$$
$$n' - b = 6,1648$$
$$n' = 24,1648$$

$$\log.\ 60 = 1,7781513$$
$$\log.\ w' = 0,3949624$$
$$\log.\ n' = 1,3831886$$
$$n' = 24,1651$$

$$n' = 24,1648 \text{ aus } \sqrt{(p')} = w'$$
$$n' = 24,1651 \text{ aus } \frac{c}{w'} = n'$$

$n'' = 24,16495$ als arithmetisches Mittel zwischen $24,1648$ und $24,1651$.

$$\log.\ 60 = 1,7781513$$
$$\log.\ n'' = \log.\ 24,16495 = 1,3831859$$
$$\log.\ q'' = 0,3949654$$
$$q'' = 2,482935$$

$$\log.\ \sqrt{p''} = \frac{\log.\ 6,16495}{2} = \frac{0,7899296}{2} = 0,3949648 = \log w''.$$
$$w'' = 2,482932$$

Da nun $x < q''$ und $> w''$ ist, so kann man näherungsweise $x = \frac{q'' + w''}{2} = 2,4829335$ setzen. Hätte man q'' und w'' ohne Logarithmen berechnet, so hätte man $q'' = 2,48293499$ und $w'' = 2,48293173$ gefunden, mithin $q'' - w'' = 0,00000326$, daher $\frac{u''}{2\,w''} = \frac{n''(q - w'')}{n'' + 2\,p''} = \frac{24,16495.\ 0,00000326}{24,16495 + 2.\ 6,16495} =$

$0,00000215$, folglich $w''' = w'' + \frac{u''}{2\,w''} = 2{,}48293173 + 0{,}00000215 = 2{,}48293388$, so daß $2{,}4829339$ ein noch genauerer Werth von x wird, wie auch die weitere Berechnung von u''' und q''' zeigt.

b. Ist für $x^3 + 4\,x = 100$ gefunden $q = \frac{100}{23} = 4{,}34782$ und $w = \sqrt{(23 - 4)} = \sqrt{19} = 4{,}35889$, so hat man $w - q = 0{,}01107$, wo fünf Decimalen berechnet sind, weil hier $\frac{u}{2\,w}$ fünf Decimalen bekommen muß. Demnach ist $\frac{u}{2\,w} = \frac{n\,(w - q)}{n + 2\,p} = \frac{23.\ 0{,}01107}{23 + 38} = \frac{0{,}25461}{61} = 0{,}00417$, mithin $w' = w - \frac{u}{2\,w} = 4{,}35889 - 0{,}00417 = 4{,}35472$.

$$\log. w' = \log. 4{,}35472 = 0{,}6389602$$
$$\underline{\qquad\qquad 2}$$
$$\log. p' = \log. (n' - b) = 1{,}2779204$$
$$n' - b = 18{,}963583$$
$$n' = 22{,}963583$$

$$\log. 100 = 2$$
$$\log. w' = \underline{0{,}6389602}$$
$$\log. n' = 1{,}3610398$$
$$n' = 22{,}96359$$

$$n'' = \frac{22{,}963583 + 22{,}96359}{2} = 22{,}963587.$$
$$q'' = \frac{100}{22{,}963587} = 4{,}3547203.$$
$$w'' = \sqrt{(18{,}963587)} = 4{,}35472008.$$

Es kann daher $x = 4{,}3547201$ gesetzt worden.

c. Hat man für $x^3 - 8\,x = 10$ gefunden $q = \frac{10}{3} = 3{,}3333\ldots$ und $w = \sqrt{(3 + 8)} = 3{,}3166247$, also $q - w = 0{,}0167$, so kann man von $\frac{u}{2\,w} = \frac{3.\ 0{,}0167}{3 + 2.\ 11} = \frac{0{,}0501}{25}$ mehrere Decimalen als gewöhnlich berechnen, weil $25 > 8.\ 3$ und zugleich $q - w$ mit $0{,}01$ anfängt (§. 8. No. 2.). Berechnet man daher $\frac{u}{2\,w}$ $0{,}002004$, so ist $w' = w + \frac{u}{2\,w} = 3{,}3166247 + 0{,}002004 = 3{,}3186287$.

$$\log. w' = 0{,}5209586$$
$$\underline{\qquad\qquad 2}$$
$$\log. (n' - b) = 1{,}0419172$$
$$n' - b = 11{,}0132935$$
$$n' = 3{,}0132935$$

weil $b = -8$.

$$\log. 10 = 1$$
$$\log. w' = \underline{0{,}5209586}$$
$$\log. n' = 0{,}4790414$$
$$n' = 3{,}0132928$$

Demnach $n'' = \frac{3{,}0132935 + 3{,}0132928}{2} = 3{,}0132931$,

$$q'' = \frac{10}{3{,}0132931} = 3{,}3186283,$$

$w'' = \sqrt{(11{,}0132931)} = 3{,}3186281$, mithin ist $x = 3{,}3186282$ zu setzen.

§. 11.

Da nach §. 1 jede vollständige kubische Gleichung in eine reducirte verwandelt werden kann, so ist durch die in den §§. 2 — 10 angegebene Auflösung der numerischen reducirten kubischen Gleichungen zugleich die Auflösung aller vollständigen numerischen Gleichungen vom dritten Grade ermöglicht, aber man kann diese auch, ohne sie zu verwandeln, auf folgende Art auflösen.

1. Setzt man in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx = c$ die Unbekannte $x = \frac{c}{n}$, so kann man aus ihr die Gleichung $x^2 . \frac{c}{n} + a x . \frac{c}{n} + b . \frac{c}{n} = c$ und aus dieser die quadratische Gleichung $x^2 + a x + b = n$ herleiten, nach welcher $x = - \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ ist. Werden nun die Werthe von x gleich gesetzt, so ergiebt sich zur Bestimmung der Werthe von x in $x^3 + a x^2 + b x = c$ die Gleichung $\frac{c}{n} = - \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$, aus welcher zugleich die Beschaffenheit der reellen Werthe von x folgt.

a. Aus der für $x^3 + a x^2 + b x = c$ geltenden Gleichung $\frac{c}{n} = - \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ ersieht man leicht, daß sie für ein positives n in $\frac{c}{n} = - \frac{1}{2} a + \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ übergeht und daß die letzte Gleichung nur für einen einzigen reellen Werth von n Statt findet; denn vergrößert man n, so wird $\frac{c}{n}$ kleiner, aber $-\frac{1}{2} a + \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ größer, und verkleinert man n, so wird $\frac{c}{n}$ größer, aber $- \frac{1}{2} a + \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ kleiner. Es hat demnach die Gleichung $x^3 + a x^2 + b x = c$ nur **eine** positive Wurzel.

b. Für $x^3 + a x^2 + b x = - c$ erhält man $x^2 + a x + b = - n$, also $\frac{c}{n} = - \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(- n - b + \frac{1}{4} a^2)}$, eine Gleichung, welche für $+ n$ gar nicht Statt findet, da $\frac{1}{2} a > \sqrt{(- n - b + \frac{1}{4} a^2)}$, also die rechte Seite $- \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(-n-b + \frac{1}{4} a^2}$ stets negativ wird, wenn die linke $\frac{c}{n}$ positiv ist. Die Gleichung $x^3 + a x^2 + b x = - c$ hat also gar keine positive Wurzel.

c. Die Gleichung $x^3 + a x^2 - b x = c$ giebt $x^2 + a x - b = n$, also $\frac{c}{n} = - \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n + b + \frac{1}{4} a^2)}$, woraus wie in a. nur **ein** positiver Werth von x folgt.

d. Die Gleichung $x^3 - a x^2 + b x = c$ giebt $x^2 - a x + b = n$, also $\frac{c}{n} = + \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2}$. Da hier n nicht negativ sein kann, weil in keinem Falle $- \frac{c}{n} = \frac{1}{2} a - \sqrt{(- n - b + \frac{1}{4} a^2}$ ist, so hat die Gleichung $x^3 - a x^2 + b x = c$ keine negative Wurzel.

e. Aus $x^3 + a x^2 - b x = - c$ folgt $x^2 + a x - b = - n$, also $\frac{c}{n} = - \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(- n + b + \frac{1}{4} a^2)}$ eine Gleichung, welche für ein negatives n in $- \frac{c}{n} = - (\frac{1}{2} a + \sqrt{(n + b + \frac{1}{4} a^2)}$ übergeht. Hier kann aber n nur **einen** Werth haben, folglich giebt es für $x^3 + a x^2 - b x = - c$ nur **einen** negativen Werth von x.

f. Die Gleichung $x^3 - ax^2 - bx = c$ giebt $\frac{c}{n} = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n + b + \frac{1}{4} a^2)}$, und hat nur **eine** positive Wurzel, weil hier n nur **einen** positiven Werth haben kann.

g. Aus $x^3 - ax^2 + bx = -c$ erhält man $\frac{c}{n} = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(-n - b + \frac{1}{4} a^2)}$, also für ein negatives n die Gleichung $-\frac{c}{n} = \frac{1}{2} a - \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ oder $-\frac{c}{n} = -(\sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)} - \frac{1}{2} a)$, weshalb es nur **einen** Werth von $-\frac{c}{n}$, und daher auch nur **einen** negativen Werth von x giebt.

h. Aus $x^3 - ax^2 - bx = -c$ folgt $\frac{c}{n} = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(-n + b + \frac{1}{4} a^2)}$ und $-\frac{c}{n} = \frac{1}{2} a - \sqrt{(n + b + \frac{1}{4} a^2)} = -(\sqrt{(n + b + \frac{1}{4} a^2)} - \frac{1}{2} a)$, so daß es auch hier wie in g. nur **einen** negativen Werth von x giebt.

2. Hat man nach No. 1 aus $x^3 + ax^2 + bx = c$ durch $x = \frac{c}{n}$ die Gleichung $x^2 + ax + b = n$ hergeleitet, so erhält man durch Substitution auch $x^2 + a.\frac{c}{n} + b = n$ und hieraus $x = \sqrt{(n - b - a\frac{c}{n})}$. Durch Gleichsetzung der vorstehenden Werthe von x ergiebt sich nun die Gleichung $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b - a\frac{c}{n})}$ zur Bestimmung der Werthe von x in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx = c$, und schreibt man zur Vereinfachung q statt $\frac{c}{n}$ unter dem Wurzelzeichen, so erhält man $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b - aq)}$.

§. 12.

Daß nach den in §. 11. für $x^3 + ax^2 + bx = c$ zur Bestimmung der Werthe von x durch $x = \frac{c}{n}$ gefundenen zwei Gleichungen

1. $\frac{c}{n} = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ und 2. $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b - aq)}$,

wo $q = \frac{c}{n}$, die rationalen Wurzeln der vollständigen numerischen kubischen Gleichungen bei gehöriger Ueberlegung leicht zu finden sind, soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden.

1. Für $x^3 + 8x^2 + 9x = 18$ soll $x = \frac{18}{n} = -4 \pm \sqrt{(n - 9 + 16)}$, oder $x = \frac{18}{n} = \sqrt{(n - 9 - 8.\frac{18}{n})}$ sein. Hier hat x nach §. 11. No. 1. a. nur **einen** positiven Werth, welcher aus $\frac{18}{n} = -4 + \sqrt{(n + 7)}$ gefunden wird, wenn man $n = 18$ setzt, also $= \frac{18}{18} = -4 + \sqrt{(18 + 7)} = -4 + \sqrt{25} = -4 + 5 = 1$ ist. Die andern Werthe von x ergeben sich aus $-\frac{18}{n} = -4 \pm \sqrt{(-n + 7)}$, wenn man statt n die Zahlen 6 und 3 einsetzt, denn $-\frac{18}{6} = -4 + \sqrt{(-6 + 7)} = -4 + 1 = -3$ und $-\frac{18}{3} = -4 - \sqrt{(-3 + 7)} = -4 - 2 = -6$. Die drei Werthe von x sind also $+1$, -3,

— 6, welche sich auch aus der Gleichung $\frac{18}{n} = \sqrt{(n - 9 - 8 . \frac{18}{n})}$ ergeben, wenn man der
Reihe nach 18, — 6, — 3 für n einsetzt.

2. Für $x^3 + 2x^2 - 120x = 576$ soll $\frac{576}{n} = -1 \pm \sqrt{(n + 120 + 1)} =$
$-1 \pm \sqrt{(n + 121)}$ sein, und hiernach ist $\frac{576}{48} = -1 + \sqrt{(48 + 121)} = -1 +$
$\sqrt{169} = -1 + 13 = 12$ für $n = 48$, ferner $\frac{576}{-96} = -1 - \sqrt{(-96 + 121)} = -$
$1 - \sqrt{25} = -6$ für $n = -96$, endlich $\frac{576}{-72} = -1 - \sqrt{(-72 + 121)} = -1 -$
$\sqrt{49} = -8$ für $n = -72$, so daß 12, — 6, — 8 die drei Werthe von x sind.

3. Für $x^3 - 10x + 1 = -120$ hat man $\frac{120}{n} = 5 \pm \sqrt{(-n - 1 + 25)}$
$= 5 \pm \sqrt{(-n + 24)}$ zur Bestimmung der Werthe von x. Hier findet man $\frac{120}{24} = 5 +$
$\sqrt{(-24 + 24)} = 5$ für $n = 24$; $\frac{120}{15} = 5 + \sqrt{(-15 + 24)} = 5 + \sqrt{9} = 8$ für n
$= 15$; $\frac{120}{-40} = 5 - \sqrt{(40 + 24)} = 5 - \sqrt{64} = 5 - 8 = -3$ für $n = -40$;
daher 5, 8, — 3 die drei Werthe von x.

4. Für $x^3 + 6\frac{1}{4}x^2 + 6\frac{3}{4}x = 9$ soll $\frac{9}{n} = -3\frac{1}{8} \pm \sqrt{(n - 6\frac{3}{4} + \frac{625}{64})}$
$= -3\frac{1}{8} \pm \sqrt{(n + {}^{193}/_{64})}$ sein. Ist nun $n = 12$, so ergiebt sich ${}^{9}/_{12} = -3\frac{1}{8} +$
$\sqrt{({}^{768}/_{64} + {}^{193}/_{64})} = -3\frac{1}{8} + \sqrt{({}^{961}/_{64})} = -3\frac{1}{8} + {}^{31}/_{8} = {}^{6}/_{8} = {}^{3}/_{4}$; ist ferner $n =$
-3, so ist $\frac{9}{-3} = -3 = -3\frac{1}{8} + \sqrt{(-\frac{192}{64} + \frac{193}{64})} = -3\frac{1}{8} + \sqrt{{}^{1}/_{64}} = -3\frac{1}{8} +$
${}^{1}/_{8} = -3$; und ist $n = -{}^{9}/_{4}$, so ist $9 : (-{}^{9}/_{4}) = -4 = -3\frac{1}{8} - \sqrt{(-\frac{144}{64} + \frac{193}{64})}$
$= -3\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{49}{64}} = -3\frac{1}{8} - {}^{7}/_{8} = -4$. Daher sind ${}^{3}/_{4}$, — 3 und — 4 die drei Wurzeln
der Gleichung $x^3 + 6\frac{1}{4}x^2 + 6\frac{3}{4}x = 9$.

5. Will man die Gleichung $y^3 + 6y^2 - 15\frac{1}{4}y = -6$, welche in §. 6. durch die
aus ihr hergeleitete reducirte Gleichung $x^3 - 27\frac{1}{4}x = -52\frac{1}{2}$ aufgelöst wurde, ohne Reduci-
rung auflösen, so hat man entweder $y = \frac{6}{n} = -3 \pm \sqrt{(-n + 15\frac{1}{4} + 9)}$, oder $y = \frac{6}{n}$
$= \sqrt{(-n + 15\frac{1}{4} - 6 . \frac{6}{n})}$ zu setzen. Es ist aber $\frac{6}{n} = -3 + \sqrt{(-n + 24\frac{1}{4})}$, wenn
$n = 12$, oder $n = 4$, weil $\frac{6}{12} = -3 + \sqrt{(-12 + 24\frac{1}{4})} = -3 + \sqrt{(12\frac{1}{4})} = -3$
$+ \sqrt{(\frac{49}{4})} = -3 + \frac{7}{2} = {}^{1}/_{2}$ und auch $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2} = -3 + \sqrt{(-4 + 24\frac{1}{4})} = -3$
$+ \sqrt{(20\frac{1}{4})} = -3 + \sqrt{(\frac{81}{4})} = -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Nach §. 11. No. 1. e.
muß auch noch $-\frac{6}{n} = -(3 + \sqrt{(n + 24\frac{1}{4})})$ sein, und dies ist der Fall für $n = {}^{3}/_{4}$, weil
$6 : {}^{3}/_{4} = 8$ und auch $3 + \sqrt{({}^{3}/_{4} + 24\frac{1}{4})} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$ ist.

Benutzt man die Gleichung $\frac{6}{n} = \sqrt{(-n + 15\frac{1}{4} - 6.\frac{6}{n})}$, so hat man für $n = 12$ auch $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \sqrt{(-12 + 15\frac{1}{4} - 3)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,
für $n = 4$ auch $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \sqrt{(-4 + 15\frac{1}{4} - 9)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$,
für $n = -\frac{3}{4}$ auch $6 : (-\frac{3}{4}) = -8 = \sqrt{(\frac{3}{4} + 15\frac{1}{4} + 48)} = \sqrt{64} = -8$.
Es hat also y die drei Werthe $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ und -8 (§. 6.).

§. 13.

Da die den Gleichungen $\frac{c}{n} = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ und $\frac{c}{n} = \sqrt{(n - b - aq)}$ genügenden Werthe von n, auch wenn $x^3 + a x^2 + b x = c$ lauter rationale Wurzeln hat, oft nicht sogleich, und wenn die Wurzeln alle irrational sind, nie genau gefunden werden können, so ist noch näher anzugeben, wie sich die richtigen, oder doch möglichst richtigen Werthe nach und nach finden lassen.

Bezeichnet man die durch die verschiedenen Werthe von n hervorgehenden Werthe von $\frac{c}{n}$ mit $q, q', q'', q''' \ldots$ und die entsprechenden von $-\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n - b + \frac{1}{4} a^2)}$ und von $\sqrt{(n - b - aq)}$ mit $w, w', w'', w''' \ldots$, so kann, je nach dem die Zahlen $q, q', q'' \ldots$ abnehmen, während die Zahlen $w, w', w'' \ldots$ wachsen, oder beide zugleich abnehmen,

für $\log q > \log q'$ 1. $\log q > \log w$ 2. $\log q > \log w$
und $\log w < \log w'$ $\log q' < \log w'$ $\log q' > \log w'$
für $\log q > \log q'$ 3. $\log q > \log w$ 4. $\log q > \log w$
und $\log w > \log w'$ $\log q' < \log w'$ $\log q' > \log w'$

sein. Hat man nun in den beiden ersten Fällen $\log q - \log q'$ etwa $= r (\log w' - \log w)$ und in den beiden letzten $\log q - \log q' = r (\log w - \log w')$ gefunden, so läßt sich unter der Voraussetzung, daß die durch Einführung anderer Werthe von n bei $\log q$ und $\log w$ eintretenden Aenderungen immer in gleichem Verhältniß zu einander stehen, jenachdem der Unterschied zwischen $\log q$ und $\log w$, oder der zwischen $\log q'$ und $\log w'$ der kleinere ist, im ersten Falle $\log q - r.v = \log w + v$, oder $\log q + r.v = \log w' - v$ setzen und daraus $v = \frac{\log q - \log w}{r + 1}$, oder $v = \frac{\log w' - \log q'}{r + 1}$ herleiten. Im dritten Falle ergiebt sich so $\log q - r.v = \log w - v$, oder $\log q' + r.v = \log w' + v$, also $v = \frac{\log q - \log w}{r - 1}$, oder $v = \frac{\log w' - \log q'}{r - 1}$; im zweiten aber nur $\log q' - r.v = \log w' + v$ und hieraus $v = \frac{\log q' - \log w'}{r + 1}$; im vierten endlich auch nur $\log q' - r.v = \log w' - v$, und daher $v = \frac{\log q' - \log w'}{r - 1}$.

Wird nun im ersten Falle $\log w + v$, oder $\log w' - v = \log q'' = \log c - \log n'$ gesetzt, so daß man $\log n' = \log c - \log q''$ erhält, sodann n' und $-\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(n' - b + \frac{1}{4} a^2)} = w''$, oder $\sqrt{(n' - b - a q'')} = w''$ berechnet, so ist entweder $q'' = w''$, oder nicht. Im dritten Falle hat man entweder $\log w - v$, oder $\log w' + v = \log q'' = \log c - \log n$, im zweiten $\log w' + v = \log q'' = \log c - \log n'$ und im vierten $\log w' - v = \log q'' = \log c - \log n'$ zu setzen und alsdann auch n' und w'' zu berechnen. Ist in keinem Falle $q'' = w''$ geworden, so muß man, jenachdem q'', n' und w'' aus $\log q$ und $\log w$, oder aus $\log q'$ und $\log w'$ berechnet sind, $\log q''$ und $\log w''$ mit $\log q$ und $\log w$, oder mit $\log q'$ und $\log w'$ verbinden und dann ebenso verfahren, wie vorhin für $\log q$, $\log w$, $\log q'$, $\log w'$ angegeben ist, um wo möglich $q''' = w'''$ zu finden. Läßt sich aber noch nicht $q''' = w'''$ setzen, so muß das beschriebene Verfahren von neuem in Anwendung gebracht und so oft wiederholt werden, bis sich solche Werthe von q und w ergeben, die man als gleich annehmen darf. Um hier aber nicht zu lange zu rechnen, ist es angemessen, zur Bestimmung von $\log q$, $\log w$, $\log q'$ und $\log w'$ für n nicht sehr verschiedene Zahlen zu wählen.

Sollte r in den zu seiner Bestimmung aufgestellten Gleichungen $\log. q - \log. q' = r(\log. w' - \log. w)$ und $\log. q - \log. q' = r(\log. w - \log. w')$ ein echter Bruch werden, so kann man auch $\log. w' - \log. w = r(\log. q - \log. q')$ und $\log. w - \log. w' = r(\log. q - \log. q')$ setzen und darnach die weitere Berechnung gehörig umändern.

Wie man in dem Falle, daß nicht nur $\log. q' < \log. w'$, sondern auch $\log. q < \log. w$ geworden ist, r, v und n' zu finden hat, ist nach dem Vorstehenden leicht zu ersehen.

§. 14.

Beispiele zur Anwendung des in §. 13. beschriebenen Verfahrens.

1. Für die Gleichung $x^3 - 2{,}34\, x^2 - 0{,}09\, x = -0{,}2106$ soll $x = \frac{0{,}2106}{n} = 1{,}17 \pm \sqrt{(-n + 0{,}09 + 1{,}3689)}$ sein. Setzt man $n = 0{,}7$, so hat man $\log. q = \log. 0{,}2106 - \log. 0{,}7 = (0{,}3234584 - 1) - (0{,}8450980 - 1) = 0{,}4783604 - 1$; $1{,}17 - \sqrt{(-0{,}7 + 0{,}09 + 1{,}3689)} = 1{,}17 - \sqrt{0{,}7589}$; $\frac{\log. 0{,}7589}{2} = \frac{0{,}8801846 - 1}{2} = 0{,}9400923 - 1$; $\sqrt{0{,}7589} = 0{,}8711488$; $1{,}17 - 0{,}8711488 = 0{,}2988511 = w$; $\log. w = 0{,}4754550 - 1$. Setzt man $n = 0{,}8$, so ist $\log. q' = (0{,}3234584 - 1) - (0{,}9030900 - 1) = 0{,}4203684 - 1$; $1{,}17 - \sqrt{(-0{,}8 + 1{,}4589)} = 1{,}17 - \sqrt{0{,}6589}$; $\frac{\log. 0{,}6589}{2} = \frac{0{,}8188195 - 1}{2} = 0{,}9094097 - 1$; $\sqrt{0{,}6589} = 0{,}8117266$; $1{,}17 - \sqrt{0{,}6589} =$

$0{,}3582734 = w'$; $\log.\ w' = 0{,}5542146 - 1$.

$$\log.\ q = 0{,}4783604 - 1 > 0{,}4754550 - 1 = \log.\ w$$

$$\log.\ q' = 0{,}4203684 - 1 < 0{,}5542146 - 1 = \log.\ w'$$

$\log.\ q - \log.\ q' = 0{,}0579920 < 0{,}0787596 = \log.\ w' - \log.\ w$; $\log.\ w' - \log.\ w = 1{,}35\ (\log.\ q - \log.\ q')$; $v = \frac{\log.\ q - \log.\ w}{1{,}35 + 1} = \frac{0{,}0029054}{2{,}35} = 0{,}0012363$; $\log.\ q - v = 0{,}4783604 - 1 - 0{,}0012363 = 0{,}4771241 - 1 = \log.\ q'' = \log.\ 0{,}2106 - \log n'$; $\log.\ n' = (0{,}3234584 - 1) - (0{,}4771241 - 1) = 0{,}8463343$; $n' = 0{,}7019955$; $\sqrt{(-n' + 1{,}4589)} = \sqrt{0{,}7569045}$; $\frac{\log.\ 0{,}7569045}{2} = \frac{0{,}8790411 - 1}{2} = 0{,}9395205 - 1$; $1{,}17 - \sqrt{0{,}7569045} = 1{,}17 - 0{,}8700025\ldots = 0{,}2999974 = w''$.

$$\log q = 0{,}4783604 - 1 > 0{,}4754550 - 1 = \log w$$

$$\log q'' = \underline{0{,}4771241 - 1} > \underline{0{,}4771176 - 1} = \log w''$$

$$0{,}0012363 \,.\, 1{,}34 = 0{,}0016626\text{, wo } 1{,}34 = r\,;$$

$v = \frac{\log q'' - \log w''}{2{,}34} = \frac{0{,}0000065}{2{,}34} = 0{,}0000028$; $\log q'' - v = 0{,}4771241 - 1 - 0{,}0000028 = 0{,}4771213 - 1 = \log q'''$; also $q''' = 0{,}3 = \frac{0{,}2106}{n''}$, daher $n'' = 0{,}702$, und $1{,}17 - \sqrt{(-0{,}702 + 1{,}4589)} = 1{,}17 - \sqrt{0{,}7569} = 1{,}17 - 0{,}87 = 0{,}3 = w'''$. Da nun hier $q''' = w''' = 0{,}3$ gefunden ist, so ist $0{,}3$ der eine Werth von x.

Setzt man $n = 0{,}09$, so ist $q = \frac{0{,}2106}{0{,}09} = 2{,}34$ und $w = 1{,}17 + \sqrt{(-0{,}09 + 0{,}09 + 1{,}3689)} = 1{,}17 + \sqrt{1{,}3689} = 1{,}17 + 1{,}17 = 2{,}34$, also $2{,}34$ der zweite positive Werth von x.

Setzt man $n = -0{,}702$, so ist $-q = -\frac{0{,}2106}{0{,}702} = -0{,}3$ und $w = 1{,}17 - \sqrt{(0{,}702 + 1{,}4589)} = 1{,}17 - \sqrt{2{,}1609} = 1{,}17 - 1{,}47 = -0{,}3$, daher $-0{,}3$ der dritte Werth von x.

2. Für $x^3 - 12\,x^2 - 8\,x = 24$ soll $x = \frac{24}{n} = 6 \pm \sqrt{(n + 8 + 36)}$ sein. Setzt man in die den positiven Werth von x bestimmende Gleichung $\frac{24}{n} = 6 + \sqrt{(n + 44)}$ statt n die Zahlen $1{,}87$ und $1{,}9$, so erhält man aus $\log 24 = 1{,}3802112$, $\log 1{,}87 = 0{,}2718416$, $\log 1{,}9 = 0{,}2787536$, $\frac{\log 45{,}87}{2} = \frac{1{,}6615287}{2} = 0{,}8307643\ldots$, $\frac{\log 45{,}9}{2} = \frac{1{,}6618127}{2} = 0{,}8309063\ldots$, weil

$q = \frac{24}{1{,}87}$, $q' = \frac{24}{1{,}9}$, $w = 6 + \sqrt{45{,}87} = 12{,}772738$ und $w' = 6 + \sqrt{45{,}9} = 12{,}774954$,

$$\log q = 1{,}1083696 > 1{,}1062840 = \log w$$

$$\log q' = 1{,}1014576 < 1{,}1063593 = \log w'$$

$$0{,}0069120 : 0{,}0000753 = 91{,}79 = r;$$

$v = \frac{\log q - \log w}{92{,}79} = \frac{0{,}0020856}{92{,}79} = 0{,}0000224$; $\log w + v = 1{,}1063064 = \log q'' = \log 24 - \log n'$; $\log n' = 0{,}2739048$; $n' = 1{,}878905$; $\sqrt{(n' + 44)} = \sqrt{45{,}878905}$; $\frac{\log 45{,}878905}{2} = \frac{1{,}6616130}{2} = 0{,}8308065 = \log \sqrt{(n' + 44)}$; $\sqrt{(n' + 44)} = 6{,}773396$; $6 + 6{,}773396 = 12{,}773396 = w''$. Da nun aber aus $\log q'' = 1{,}1063064$ sich $q = 12{,}773397$ ergiebt, so hat man $x = 12{,}773396$ zu setzen.

Die andern beiden Werthe von x sind imaginär, weil die zu ihrer Bestimmung hier aufzustellende Gleichung $-\frac{24}{n} = 6 - \sqrt{(-n + 44)}$ für keinen reellen Werth von n Statt findet.

Zu dem vorhin gefundenen Werthe von x kommt man durch die Gleichung $\frac{24}{n} = \sqrt{(n + 8 + 12q)}$ auf folgende Weise.

$$\begin{array}{rcl} \log 24 - \log 1{,}87 = & 1{,}1083696 = \log q & n = 1{,}87 \\ & 1{,}0791812 = \log 12 & 8 = 8 \\ \hline & 2{,}1875508 = \log 12q; & 12q = 154{,}0106 \\ \hline \log. w^2 = & 2{,}2145276 = \log & 163{,}8806 \\ 2) & & \\ \hline \log w = & 1{,}1072638 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 24 - \log. 1{,}9 = & 1{,}1014576 = \log. q' & n = 1{,}9 \\ & 1{,}0791812 = \log. 12 & 8 = 8 \\ \hline & 2{,}1806388 = \log. 12q'; & 12q' = 151{,}5789 \\ \hline \log. w'^2 = & 2{,}2081157 = \log. & 161{,}4789 \\ 2) & & \\ \hline \log w' = & 1{,}1040578 & \end{array}$$

$(\log q - \log q' = 0{,}0069120) : (\log w - \log w' = 0{,}0032060) = 2{,}155 = r$; $v = \frac{\log q - \log w}{r - 1} = \frac{0{,}0011058}{1{,}155} = 0{,}0009574$, daher $\log w - v = 1{,}1072638 - 0{,}0009574 = 1{,}1063064 = \log. q'' = \log. 24 - \log. n'$; $\log. n' = 0{,}2739048$; $n' = 1{,}878905$; $\log. 12q'' = 2{,}1854876$; $12q'' =$

$153{,}28074$; $\sqrt{(n' + 8 + 12\,q'')} = \sqrt{163{,}159645} = w''$; $\log w'' = \frac{2{,}21261272}{2} = 1{,}10630636$ also $w'' = 12{,}773396$, sowie vorhin.

Für $x^3 + 12\,x^2 - 8x = 60$ soll $x = \frac{60}{n} = -6 \pm \sqrt{(n + 44)}$, sein. Zur Bestimmung des positiven Werthes von x hat man also $\frac{60}{n} = -6 + \sqrt{(n + 44)}$, woraus, wenn man 25 und 26 für n setzt, $\log q = \log 60 - \log .25$; $\log q' = \log 60 - \log 26$; $w = -6 \pm \sqrt{69}$; $w' = -6 + \sqrt{70}$ folgt. Da nun $\frac{\log 69}{2} = 0{,}9194245$ und $\frac{\log 70}{2} = 0{,}9225490$, mithin $\sqrt{69} = 8{,}306624$ und $\sqrt{70} = 8{,}3666$, so ist $w = 2{,}306624$ und $w' = 2{,}3666$, daher

$$\log q = 0{,}3802113 > 0{,}3629769 = \log w$$

$$\log q' = \underline{0{,}3631780} < \underline{0{,}3741249} = \log w'$$

$$0{,}0170333 : 0{,}0111480 = 1{,}527 = r.$$

$v = \frac{\log w' - \log q'}{r+1} = \frac{0{,}0109469}{2{,}527} = 0{,}0043319$; $\log w' - v = 0{,}3741249 - 0{,}0043319 = 0{,}3697930 = \log q'' = \log 60 - \log n'$; $\log n' = \log 60 - \log q'' = 1{,}7781513 - 0{,}3697930 = 1{,}4083583$; $n' = 25{,}60698$; $\sqrt{(n' + 44)} = \sqrt{69{,}60698}$; $\log \sqrt{(n' + 44)} = \frac{1{,}8426528}{2} = 0{,}9213264$; $w'' = -6 + \sqrt{(n' + 44)} = 2{,}34308$.

$$\log q = 0{,}3631780 < 0{,}3741249 = \log w$$

$$\log q'' = \underline{0{,}3697930} > \underline{0{,}3697871} = \log w''$$

$$0{,}0066150 : 0{,}0043378 = 1{,}524 = r.$$

$v = \frac{\log q'' - \log w''}{r+1} = \frac{0{,}0000059}{2{,}524} = 0{,}0000023$; $\log w'' + v = 0{,}3697894 = \log q''' = \log 60 - \log n''$; $\log n'' = \log 60 - \log q''' = 1{,}7781513 - 0{,}3697894 = 1{,}4083619$; $n'' = 25{,}607188$; $\sqrt{(n'' + 44)} = \sqrt{69{,}607188}$; $\log \sqrt{(n''+44)} = \frac{1{,}8426540}{2} = 0{,}9213270$; $w''' = -6 + 8{,}343092 = 2{,}343092$. Da nun $\log w''' = \log 2{,}343092 = 0{,}3697894 = \log q'''$ wird, so ist $x = 2{,}343092$ zu setzen.

Will man die beiden negativen Werthe von x auf ähnlichem Wege berechnen, so muß man von den Gleichungen $-\frac{60}{n} = -6 + \sqrt{(-n + 44)}$ und $-\frac{60}{n} = -(6 + \sqrt{(-n + 44)})$

ausgehen und für n bei der ersten 28,7 und 28,8, bei der zweiten aber 4,8 und 4,9 einsetzen. So erhällt man im ersten Falle $\log q = 0,3202694$; $\log q' = 0,3187588$; $\log w = 0,3198300$; $\log w' = 0,3224844$; $r = \frac{0,0015106}{0,0026544} = 0,569$; $v = \frac{\log q - \log w}{r + 1} = \frac{0,0004394}{1,569} = 0,00028005$; $\log w + v = 0,32011005 = \log q''$; $n' = 28,71053$; $w'' = 2,089825$, während $q'' = 2,0898255$, also $x = -2,089825$.

Im zweiten Falle ist $\log.\, q = 1,0969100$; $\log.\, q' = 1,0879552$; $\log.\, w = 1,0885256$; $\log.\, w' = 1,0882424$; $r = 31,62$; $v = \frac{\log. w' - \log. q'}{r - 1} = \frac{0,0002872}{30,62} = 0,0000094$; $\log.\, w' + v = 1,0882518 = \log.\, q''$; $n' = 4,896655$; $\sqrt{(-n' + 44)} = 6,253266$; $w'' = 12,253266$; $\log.\, w'' = 1,0882518 = \log.\, q''$, daher $x = -12,253266$.

Hätte man hier $n = 4,9$ und $= 5$ gesetzt, so wäre

$\log.\, q = 1,0879552 < 1,0882424 = \log.\, w$ und auch

$\log.\, q' = \underline{1,0791812} < \underline{1,0879588} = \log.\, w'$ geworden,

also $0,0087740 : 0,0002836 = 30,94 = r$;

$v = \frac{\log. w - \log. q}{r - 1} = \frac{0,0002872}{29,94} = 0,0000095$, weil man $\log.\, q + r\,v = \log.\, w + v$ zu setzen hat. Daher $\log.\, w + v = 1,0882519 = \log.\, q''$; $n' = 4,896653$; $w'' = 12,253266$, während $q'' = 12,253267$, also wiederum $x = -12,253266$.

§. 15.

Verfährt man ähnlich, wie in §. 11. No. 2 und in §. 13. für die kubischen Gleichungen angegeben ist, mit den Gleichungen vom vierten, fünften, sechsten und einem höhern Grade, so gelangt man auch zu einer einfachen Auflösung der nummerischen Gleichungen von diesen Graden.

1. Wird in der biquadratischen Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d$ die Unbekannte $x = \frac{d}{n}$ angenommen, so ergiebt sich aus ihr durch Substitution $x^3 \frac{d}{n} + ax^2 . \frac{d}{n} + bx . \frac{d}{n} = d$ und hieraus $x^3 + ax^2 + bx + c = n$, so daß man $x = \sqrt[3]{(n - c - bx - ax^2)}$ oder wenn $\frac{d}{n}$ für x und unter dem Wurzelzeichen q statt $\frac{d}{n}$ gesetzt wird, $\frac{d}{n} = \sqrt[3]{(n - c - bq - aq^2)}$ zur Bestimmung der Werthe von x erhält.

2. Für die Gleichung vom fünften Grade $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$ ergiebt sich durch $x = \frac{e}{n}$ zur Bestimmung von x die Gleichung $\frac{e}{n} = \sqrt[4]{(n - d - cq - bq^2 - aq^3)}$

3. Für die Gleichung vom sechsten Grade $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex = f$ erhält man durch $x = \frac{f}{n}$ zur Bestimmung von x die Gleichung $\frac{f}{n} = \sqrt[5]{(n - e - dq - cq^2 - bq^3 - aq^4)}$.

4. Wendet man bei einer Gleichung vom siebenten, oder von einem höhern Grade dasselbe Verfahren an, so findet man in jedem Falle eine Gleichung zur Bestimmung der Werthe der Unbekannten.

5. Bei der Berechnung der Wurzeln der in No. 2.—4. genannten Gleichungen ist nach §. 13. zu verfahren, doch müssen die Ausdrücke $q, q', q'', q''' \ldots ; w, w', w'', w''' \ldots ; r, v, n, n', n'' \ldots$ in der durch jeden besondern Fall bedingten Bedeutung genommen werden.

6. Da aus jeder vollständigen Gleichung auf ähnliche Weise, wie in §. 1. an einer vollständigen kubischen Gleichung gezeigt ist, eine **reducirte** hergeleitet werden kann, so wird es genügen bei der in §. 16. folgenden Auflösung numerischer, den dritten Grad übersteigender Gleichungen hauptsächlich nur reducirte Gleichungen zu berücksichtigen.

7. Hat man aus $x^4 + b\,x^2 + c\,x = d$ durch $x = \frac{d}{n}$ die Gleichung $x^3 + b\,x + c = n$ hergeleitet, so ist $x^3 + b\,x = n - c$, woraus durch $x = \frac{n-c}{m}$ die Gleichung $x^2 + b = m$, mithin auch $x = \sqrt{(m - b)}$ folgt. Man hat also $x = \frac{d}{n} = \frac{n-c}{m} = \sqrt{(m-b)}$, so daß man die Werthe von x auch dadurch finden kann, daß man zwei Zahlen n und m sucht, für welche $\frac{d}{n} = \frac{n-c}{m} = \sqrt{(m-b)}$ ist.

Die Auffindung der erforderlichen Werthe von n und m ist aber ziemlich weitläuftig, daher wird in §. 16. von den Ausdrücken $\frac{d}{n}$, $\frac{n-c}{m}$ und $\sqrt{(m-b)}$ kein Gebrauch gemacht werden, und darum mag auch die Herleitung ähnlicher Ausdrücke für die Gleichungen vom fünften, sechsten Grade u. s. w. unterbleiben. Sind nun auch jene Ausdrücke nicht zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung $x^4 + b\,x^2 + c\,x = d$ zu empfehlen, so verdienen sie doch insofern Beachtung als nach ihnen in vielen Fällen leicht entschieden werden kann, ob die Wurzeln reell, oder imaginär, ob positiv, oder negativ sind. So ersieht man z. B. aus $\frac{d}{n} = \frac{n-c}{m} = \sqrt{(m-b)}$ und dem auch möglichen $-\frac{d}{n} = -\frac{n+c}{m} = \sqrt{(m-b)}$, wo m für reelle Werthe stets positiv sein muß, daß die Gleichung $x^4 + b\,x^2 + c\,x = d$, in welcher b, c, d positiv sind, nur **eine** positive, **eine** negative und zwei imaginäre Wurzeln hat.

§. 16.

Beispiele.

I. Numerische biquadratische Gleichungen.

a. Für $x^4 + 10\,x^3 + 35\,x^2 + 50\,x = -24$ soll $x = \frac{24}{n} = \sqrt[3]{(-n - 50 - 35\,q - 10\,q^2)}$ sein. Um hier aber q = w zu finden, hat man n negativ zu setzen, so daß man $-\frac{24}{n} = \sqrt[3]{(n - 50 + 35\,q - 10\,q^2)}$ zur Bestimmung der Werthe von x erhält. Setzt man nun für n der Reihe nach die Zahlen 24, 12, 8, 6 ein, so ergiebt sich $-\frac{24}{24} = \sqrt[3]{(24 - 50 + 35 - 10)} = \sqrt[3]{-1} = -1$; $-\frac{24}{12} = \sqrt[3]{(12—50+70—40)} = \sqrt[3]{-8} = -2$; $-\frac{24}{8} = \sqrt[3]{(8 - 50 + 105 - 90)} = \sqrt[3]{-27} = -3$; $-\frac{24}{6} =$

$\sqrt[3]{(6-50+140-160)}=\sqrt[3]{-64}=-4$. Demnach sind -1, -2, -3, -4 die vier Werthe von x

b. Für $x^4+2x^3-31x^2-32x=-60$ erhält man zur Bestimmung von x die Gleichungen $\frac{60}{n}=\sqrt[3]{(-n+32+31q-2q^2)}$ und $-\frac{60}{n}=\sqrt[3]{(n+32-31q-2q^2)}$. Die erstere giebt $\frac{60}{60}=\sqrt[3]{(-60+32+31-2)}=\sqrt[3]{1}=1$ für $n=60$; $\frac{60}{12}=\sqrt[3]{(-12+32+155-50)}=\sqrt[3]{125}=5$ für $n=12$; die zweite $-\frac{60}{30}=\sqrt[3]{(30+32-62-8)}=\sqrt[3]{-8}=-2$ für $n=30$; und $-\frac{60}{10}=\sqrt[3]{(10+32-186-72)}=\sqrt[3]{-216}=-6$ für $n=10$. Daher $+1$, $+5$, -2, -6 die 4 Werthe von x.

c. Ist die Gleichung $x^4-\frac{19}{4}x^3+\frac{49}{8}x^2-\frac{11}{4}x=-\frac{3}{8}$ aufzulösen, so kann man aus ihr durch Multiplikation mit 4^4 die Gleichung $(4x)^4-19.(4x)^3+98.(4x)^2-176.(4x)=-96$ herleiten. Substituirt man nun z für 4x, so erhält man $z^4-19z^3+98z^2-176z=-96$, also $4x=z=\frac{96}{n}=\sqrt[3]{(-n+176-98q+19q^2)}$. Hier ist aber $^{96}/_{96}=\sqrt[3]{(-96+176-98+19)}=\sqrt[3]{1}=1$ für $n=96$; $^{96}/_{48}=\sqrt[3]{(-48+176-196+76)}=\sqrt[3]{8}=2$ für $n=48$; $^{96}/_{24}=\sqrt[3]{(-24+176-392+304)}=\sqrt[3]{64}=4$ für $n=24$; $^{96}/_{8}=\sqrt[3]{(-8+176-1176+2736)}=\sqrt[3]{1728}=12$ für $n=8$. Da hiernach z die Werthe 1, 2, 4, 12 hat, so sind $^1/_4$, $^1/_2$, 1, 3 die vier Werthe von x.

d. Für $x^4+2x^2+4x=100$ soll $x=\frac{100}{n}=\sqrt[3]{(n-4-2q}$ sein, woraus $\frac{100}{n}=\sqrt[3]{(n-4-2q)}=\sqrt[3]{p}$ für den positiven und $-\frac{100}{n}=\sqrt[3]{(-n-4+2q)}$ für den negativen Werth von x folgt. Wählt man nun für n die Zahlen 34 und 34,4, so hat man

$\log 100=2$	$\log 2=0,3010300$
$\log 34=1,5314789$	$\log 2q=0,7695511$; $\log 2q'=0,7644716$
$\log 34{,}4=1,5365584$	$2q=5,882353$; $2q'=5,813954$
$\log q=\log 100-\log 34$	$n-4-2q=24,117647=p$
$\log q'=\log 100-\log 34{,}4$	$n-4-2q'=24,586046=p'$
	$\log p=1,3823349$; $\log p'=1,3906887$

$$\log q=0,4685211 > 0,4607783=\log w={}^1/_3\log p$$
$$\log q'=0,4634416 < 0,4635629=\log w'={}^1/_3\log p'$$
$$0,0050795 : 0,0027846=1,824=r$$

$v = \frac{\log w' - \log q'}{r+1} = \frac{0,0001213}{2,824} = 0,0000429$; $\log w' - v = 0,4635200 = \log q'' = \log 100 - \log n'$; $\log n' = 1,5364800$; $n' = 34,39378$. $\log 2q'' = 0,7645500$; $2q'' = 5,815004$; $n' - 4 - 2q'' = 24,578776 = p''$; $\log p'' = 1,39056024$; $\log w'' = \frac{1}{3} \log p'' = 0,46352008$; mithin $w'' = 2,9075025$, während $q'' = 2,907502$ ist. Der positive Werth von x ist also $= 2,907502 \ldots$ zu setzen.

Da $\sqrt[3]{(-n - 4 + 2q)} = \sqrt[3]{(-1.(n + 4 - 2q))} = -\sqrt[3]{(n + 4 - 2q)}$ ist, so hat man $-\frac{100}{n} = -\sqrt[3]{(n + 4 - 2q)}$, also auch $\frac{100}{n} = \sqrt[3]{(n + 4 - 2q)} = \sqrt[3]{p}$ für den negativen Werth von x. Nun sei $n = 32$ und $n = 32,2$, so ist

$\log q = \log 100 - \log 32$	$\log 2q = 0,7958800$; $\log 2q' = 0,7931741$
$\log q' = \log 100 - \log 32,2$	$2q = 6,25 \qquad 2q' = 6,21118$
$\log 32 = 1,5051500$	$n + 4 - 2q = 36 - 6,25 = 29,75 = p$
$\log 32,2 = 1,5078559$	$n + 4 - 2q' = 36,2 - 6,21118 = 29,98882 = p'$
	$\log p = 1,4734870$; $\log p' = 1,4769594$

$$\log q = 0,4948500 > 0,4911623 = \log w = \tfrac{1}{3} \log p$$
$$\log q' = \underline{0,4921441} < \underline{0,4923198} = \log w' = \tfrac{1}{3} \log p'$$
$$0,0027059 : 0,0011575 = 2,333 = r$$

$v = \frac{\log w' - \log q'}{r+1} = \frac{0,0001757}{3,333} = 0,0000527$; $\log w' - v = 0,4922671 = \log q'' = \log 100 - \log n'$; $\log. n' = 1,5077329$; $n' = 32,19088$; $\log 2q'' = 0,7932971$; $2q'' = 6,212939$; $n' + 4 - 2q'' = 29,977941 = p''$; $\log p'' = 1,4768019$.

$$\log q' = 0,4921441 < 0,4923198 = \log w'$$
$$\log q'' = \underline{0,4922671} < \underline{0,4922673} = \log w'' = \tfrac{1}{3} \log p''$$
$$0,0001230 : 0,0000525 = 2,34 = r$$

$v = \frac{\log w'' - \log q''}{r+1} = \frac{0,0000002}{3,34} = 0,00000006$; $\log w'' - v = 0,49226724 = \log q'''$. Hiernach läßt sich $\log q''' = 0,4922672 = \log w'''$ setzen, so daß $q''' = 3,10647$, also $x = -3,10647$ wird.

Die andern beiden Werthe von x sind imaginär, weil jede der beiden Gleichungen $\frac{100}{n} = \sqrt[3]{(n - 4 - 2q)}$ und $\frac{100}{n} = \sqrt[3]{(n + 4 - 2q)}$ nur **einen** Werth von x liefert.

II. Numerische Gleichungen vom fünften Grade.

a. Für $x^5 - 12x^3 + 8x^2 - 10x = 80$ soll $x = \frac{80}{n} = \sqrt[4]{(n + 10 - 8q + 12q^2)}$ sein. Hier ist nun $\log q = \log 80 - \log 24 = 0,5228788$ für $n = 24$ und $\log q' = \log 80 - \log 23,3 = 0,5357341$ für $n = 23,3$. Aus $q = {}^{80}/_{24} = {}^{10}/_{3}$ folgt aber $n + 10 - 8q + 12q^2 = 24 + 10 - {}^{80}/_{3} + {}^{400}/_{3} = 140{}^{2}/_{3} = {}^{422}/_{3} = p$, also $\log p = \log 422 - \log 3 = 2,1481912$. Ferner ist

$\log. 8 = 0,9030900$	$\log. 8q' = 1,4388241;\ 8q' = 27,46782$
$\log q'^2 = 1,0714682$	$\log. 12q'^2 = 2,1506494;\ 12q'^2 = 141,4651$
$\log. 12 = 1,0791812$	$p' = n + 10 - 8q' + 12q'^2 = 147,29728$
	$\log. p' = 2,1681947$

$$\log. q = 0,5228788 < 0,5370478 = \log. w = {}^{1}/_{4} \log. p$$
$$\log. q' = 0,5357341 < 0,5420487 = \log. w' = {}^{1}/_{4} \log. p'$$
$$0,0128553 : 0,0050009 = 2,5 = r$$

$v = \frac{\log. w' - \log q'}{r - 1} = \frac{0,0063146}{1,5} = 0,0042097;\ \log. w' + v = 0,5462584 = \log. q'' = \log. 80 - \log. n';\ \log. n' = 1,9030900 - 0,5462584 = 1,3568316;\ n' = 22,74215;\ \log q''^2 = 1,0925168.$

$$\log. 8q'' = \log. 8 + \log. q'' = 1,4493484;\quad 8q'' = 28,14157;$$
$$\log. 12q''^2 = \log. 12 + \log. q''^2 = 2,1716980;\ 12q''^2 = 148,4903;$$

$n' + 10 - 8q'' + 12q''^2 = 181,23245 - 28,14157 = 153,09088 = p'';\ \log. p'' = 2,1849493.$

$$\log. q' = 0,5357341 < 0,5420487 = \log. w'$$
$$\log. q'' = 0,5462584 > 0,5462373 = \log. w'' = {}^{1}/_{4} \log. p''$$
$$0,0105243 : 0,0041886 = 2,5 = r$$

$v = \frac{\log. q'' - \log. w''}{r - 1} = \frac{0,0000211}{1,5} = 0,00001406;\ \log w'' - v = 0,54622324 = \log. q''' = \log. 80 - \log. n'';\ \log. n'' = 1,9030900 - 0,54622324 = 1,35686676;\ n'' = 22,74399;\ \log. q'''^2 = 1,09244648.$

$\log 8\,q''' = \log 8 + \log q''' = 1,44931324$; $8q''' = 28,13929$; $\log 12\,q'''^2 = \log 12 + \log q'''^2 = 2,17162768$; $12q'''^2 = 148,46623$; $n'' + 10 - 8q'' + 12\,q'''^2 = 181,21022 - 28,13929 = 153,07093 = p'''$; $\log p''' = 2,1848927$; $\frac{1}{4}$ $\log.\ p''' = \log w''' = 0,5462232$.

Da nun $\log w'''$ nur sehr wenig kleiner als $\log q'''$ ist, so kann man $\log q''' = \log w''' = 0,5462232$ setzen, so daß man $x = q''' = 3,517411\ldots$ erhält.

Für einen negativen Werth von x hat man $-\frac{80}{n} = \sqrt[4]{(-n + 10 + 8q + 12\,q^2)}$ und wählt man hier zunächst die Zahlen 23 und 22 für n, so ergiebt sich aus log 80, log 23, log 22, log 8, log 12 der Reihe nach $\log q = 0,5413622$; $\log q' = 0,5606673$; $\log 8\,q = 1,4444522$; $\log 12q^2 = 2,1619056$; $\log 8\,q' = 1,4637573$; $\log 12\,q'^2 = 2,2005158$; $8\,q = 27,82609$; $12q^2 = 145,1796$; $p = -23 + 10 + 8\,q + 12\,q^2 = 160,00569$; $\log.\ p = 2,2041354$; $8\,q' = 29,0909$; $12q'^2 = 158,6777$; $p' = -22 + 10 + 8\,q' + 12\,q'^2 = 175,7686$; $\log p' = 2,2449413$.

$$\log q = 0,5413622 < 0,5510338 = \log w = \tfrac{1}{4} \log p$$
$$\log q' = 0,5606673 < 0,5612353 = \log w' = \tfrac{1}{4} \log p'$$
$$0,0193051 \ : \ 0,0102015 = 1,892 = r$$

$v = \frac{\log w' - \log q'}{r - 1} = \frac{0,0005680}{0,892} = 0,0006367$; $\log w' + v = 0,5618720 = \log q'' = \log 80 - \log n'$; $\log n' = 1,3412180$; $n' = 21,93906$; $\log 8\,q'' = 1,4649620$; $\log 12\,q''^2 = 2,2029252$; $8\,q'' = 29,17172$; $12\,q''^2 = 159,56044$; $p'' = -n' + 10 + 8\,q'' + 12\,q''^2 = 176,7931$; $\log p'' = 2,2474654$

$$\log q' = 0,5606673 < 0,5612353 = \log w'$$
$$\log q'' = 0,5618720 > 0,5618663 = \log w'' = \tfrac{1}{4} \log p''$$
$$0,0012047 \ : \ 0,0006310 = 1,9 = r$$

$v = \frac{\log q'' - \log w''}{r - 1} = \frac{0,0000057}{0,9} = 0,0000063$; $\log w'' - v = 0,5618600 = \log q''' = \log 80 - \log n''$; $\log n'' = 1,3412300$; $n'' = 21,93966$; $\log 8\,q'''$

$= 1,4649500$; $\log 12\,q'''^2 = 2,2029012$; $8\,q''' = 29,17091$; $12\,q'''^2 = 159,55162$; $p''' = -n'' + 10 = 8\,q''' + 12\,q'''^2 = 176,78287$; $\log p''' = 2,474401$; $\frac{1}{4} \log p''' = \log w''' = 0,5618600 = \log q'''$, mithin $q''' = w''' = 3,646364$, und $x = -3,646364$.

Durch $n = 48$ und $n = 48,5$ findet man

$$\log q = 0,2218488 < 0,2344630 = \log w$$

$$\log q' = 0,2173483 > 0,2165049 = \log w'$$

$$(\log w - \log w') : (\log q - \log q') = r = 3,99;$$

$v = \frac{0,0008434}{2,99} = 0,0002820$; $\log q'' = 0,2176303$; $n' = 48,46851$; $8\,q'' = 13,20445$; $12\,q''^2 = 32,69202$; $p'' = 7,42796$; $\log p'' = 0,8708695$.

$$\log q' = 0,2173483 > 0,2165049 = \log w'$$

$$\log q'' = 0,2176303 < 0,2177174 = \log w'' = \tfrac{1}{4} \log p''$$

$(\log. w'' - \log. w') : (\log. q'' - \log. q') = r = 4,299$; $v = \frac{0,0000871}{3,299} = 0,0000264$; $\log. q''' = \log. q'' - v = 0,2176037 = \log. w'''$; $q''' = w''' = 1,650455$, mithin $x = -1,650455$.

Die übrigen beiden Werthe von x sind imaginär.

b. Für $x^5 + 4x^3 + 12x^2 + 10x = 72$ soll $x = \frac{72}{n} = \sqrt[4]{(n - 10 - 12\,q - 4\,q^2)}$ sein. Setzt man hier $n = 45$, so ist $q = \frac{72}{45} = 1,6$ und $w = \sqrt[4]{(45 - 10 - 19,2 - 10,24)} = \sqrt[4]{5,56}$; $n = 45,5$ giebt aber $\log. q' = 0,1993211$; $\log. 12\,q' = 1,2785023$; $\log. 4\,q'^2 = 1,0007022$; $12\,q' = 18,98901$; $4\,q'^2 = 10,01618$; $p' = 6,49481$; $\log. p' = 0,8125665$.

$$\log. q = 0,2041200 > 0,1862687 = \log. w$$

$$\log. q' = \underline{1,1993211} < \underline{0,2031416} = \log. w' = \tfrac{1}{4} \log. p'$$

$$0,0047989.\ r = 0,0168729;\ r = 3,515;$$

$v = \frac{0,0038205}{4,515} = 0,0008461$; $\log. q' + v = \log. q'' = 0,2001672 = \log. 72 - \log. n'$; $\log. n' = 1,6571653$; $n' = 45,41144$; $\log. 12\,q' = 1,2793484$; $\log. 4\,q''^2 = 1,0023944$; $12\,q'' = 19,02604$; $4\,p''^2 = 10,05528$; $p'' = 6,33012$; $\log. p'' = 0,8014120$.

$\log.\ q' = 0,1993211 < 0,2031416 = \log.\ w'$

$\log.\ q'' = 0,2001672 < 0,2003530 = \log.\ w'' = \frac{1}{4} \log.\ p''$

$0,0008461 . r = 0,0027886;\ r = 3,295;$

$v = \frac{0,0001858}{4,295} = 0,0000432;$ $\log.\ q'' + v = \log.\ q''' = 0,2002104 = \log.\ 72 - \log.\ n'';$ $\log.\ n'' = 1,6571221;$ $n'' = 45,40693;$ $\log.\ 12 q''' = 1,2793916;$ $\log.\ 4 q'''^2 = 1,0024808;$ $12 q''' = 19,02793;$ $4 q'''^2 = 10,05728;$ $p''' = 6,32172;$ $\log.\ p''' = 0,8008353.$

$\log.\ q'' = 0,2001672 < 0,2003530 = \log.\ w''$

$\log.\ q''' = 0,2002104 > 0,2002088 = \log.\ w''' = \frac{1}{4} \log.\ p'''$

$0,0000432 . r = 0,0001442;\ r = 3,337.$

$v = \frac{0,0000016}{4,337} = 0,00000036 \ldots;$ $\log.\ q''' - v = \log.\ q'''' = 0,20021003 \ldots = \log 72 - \log n''';$ $\log n''' = 1,65712246 \ldots;$ $n''' = 45,40697;$ $\log 12 q'''' = 1,27939123;$ $\log 4 q''''^2 = 1,00248006;$ $12 q'''' = 19,02791;$ $4 q''''^2 = 10,05727;$ $p'''' = 6,32179;$ $\log p'''' = 0,8008401;$ $\log w'''' = \frac{1}{4} \log p'''' = 0,20021002.$ Man kann also $\log q'''' = \log w'''' = 0,2002100$ setzen, so daß man $q'''' = w'''' = 1,58566$, also auch $x = 1,58566$ erhält.

Wird n negativ angenommen, so soll $-\frac{72}{n} = \sqrt[4]{(-n - 10 + 12q - 4q^2)} = \sqrt[4]{(-n - 1 - (9 - 12q + 4q^2))} = \sqrt[4]{(-n - 1 - (3 - 2q)^2)}$ sein, was aber unmöglich ist. Daher hat die Gleichung $x^5 + 4x^3 + 12x^2 + 10x = 72$ keine reelle negative Wurzel, und da nur für einen einzigen positiven Werth von n der Quotient $\frac{72}{n} = \sqrt[4]{(n - 10 - 12q - 4q^2)}$ ist, so hat sie auch nur **eine** reelle positive Wurzel.

III. Numerische Gleichungen vom sechsten Grade.

a. Für die Gleichung $x^6 + 8x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 27x = 120$ hat man $x = \frac{120}{n} = \sqrt[5]{(n - 27 - 16q - 9q^2 - 8q^3)}$. Setzt man hier $n = 90$, so ist $q = \frac{120}{90} = \frac{4}{3}$, und $w = \sqrt[5]{(90 - 27 - \frac{64}{3} - 16 - \frac{512}{27})} = \sqrt[5]{(90 - 83\frac{8}{27})} = \sqrt[5]{6\frac{19}{27}} = \sqrt[5]{\frac{181}{27}}$. Wird aber

$n = 89$ gesetzt, so ist $q' = \frac{120}{89};$ $\log q' = 0,1297912;$ $\log 16 q' = 1,3339112;$ $\log 9 q'^2 = 1,2138249;$ $\log 8 q'^3 = 1,2924636;$ $16 q' = 21,573034;$ $9 q'^2 = 16,361567;$ $8 q'^3 = 19,609367;$ $p' = 4,456032;$ $\log p' = 0,6489483.$

$$\begin{array}{l} \log q = 0{,}1249387 < 0{,}1652629 = \log w \\ \log q' = \underline{0{,}1297912} > \underline{0{,}1297897} = \log w' = \tfrac{1}{5} \log p' \\ \qquad 0{,}0048525 \,.\, r = 0{,}0354732;\ r = 7{,}312;\ v = \dfrac{0{,}0000015}{8{,}312} \end{array}$$

$= 0{,}00000018$; $\log q' - v = \log q'' = 0{,}12979102 = \log 120 - \log n'$; $\log n' = 1{,}94939018$; $n' = 89{,}00003$; $\log 16\, q'' = 1{,}33391102$; $\log 9\, q''^2 = 1{,}21382454$; $\log 8\, q''^3 = 1{,}29246306$; $16\, q'' = 21{,}573026$; $9\, q''^2 = 16{,}361554$; $8\, q''^3 = 19{,}609343$; $p'' = 4{,}456107$; $\log p'' = 0{,}6489556$; $\tfrac{1}{5} \log p'' = 0{,}12979112 = \log w''$. Wegen der sehr geringen Verschiedenheit von $\log q''$ und $\log w''$ läßt sich $\log q'' = \log w'' = 0{,}1297911$ setzen, so daß sich $1{,}348314$ als positiver Werth von x ergiebt.

Wird n negativ angenommen, so soll $-\frac{120}{n} = \sqrt[5]{(-n - 27 + 16q - 9\, q^2 + 8\, q^3)}$ oder $-\frac{120}{n} = -\sqrt[5]{(n + 27 + 9\, q^2 - 16\, q - 8\, q^3)}$ sein. Aus $n = 60$ und $n = 61$ findet man hier

$$\begin{array}{l} \log q = 0{,}3010300 > 0{,}2862728 = \log w \\ \log q' = 0{,}2938514 < 0{,}2967171 = \log w' \end{array}$$

$r = 1{,}454$; $v = 0{,}0011677$; $\log q' + v = \log q'' = 0{,}2950191 < 0{,}2951232 = \log w''$; $r' = 1{,}365$; $v' = 0{,}0000440$; $\log q'' + v' = \log q''' = 0{,}2950631 > 0{,}2950623 = \log w'''$; $r'' = 1{,}384$; $v'' = 0{,}0000003$; $\log q''' - v'' = \log q'''' = 0{,}2950628 > 0{,}2950627 = \log w''''$, so daß man wegen $0{,}2950627 = \log 1{,}972708$ ohne erheblichen Fehler $x = -1{,}972708$ erhält.

b. Für $x^6 - 12\, x^4 - 18\, x = 144$ soll $x = \frac{144}{n} = \sqrt[5]{(n + 18 + 12\, q^3)}$ sein. Setzt man hier $n = 40$, so wird $\log q = \log 144 - \log 40 = 0{,}5563025$; $\log 12\, q^3 = 1{,}0791812 + 1{,}6689075 = 2{,}7480887$; $12\, q^3 = 559{,}872$; $p = 18 + 40 + 559{,}872 = 617{,}872$; $\log p = 2{,}7908985$; $\log w = \tfrac{1}{5} \log.\ p = 0{,}5581797$. Wird nun $\log w = \log q' = \log 144 - \log n'$ angenommen, so ergiebt sich $\log n' = 1{,}6001828$; $n' = 39{,}82747$; $\log 12\, q'^3 = 2{,}7537203$; $12\, q'^3 = 567{,}1793$; $p' = 625{,}00677$; $\log p' = 2{,}7958847$.

$$\begin{array}{l} \log q = 0{,}5563025 < 0{,}5581797 = \log w \\ \log q' = \underline{0{,}5581797} < \underline{0{,}5591769} = \log w' = \tfrac{1}{5} \log p' \\ \qquad 0{,}0018772 \ :\ 0{,}0009972 = 1{,}882 = r \end{array}$$

$v = \frac{0,0009972}{0,882} = 0,0011305$; $\log w' + v = 0,5603074 = \log q'' = \log 144 - \log n''$; $\log n'' = 1,5980551$; $n'' = 39,63284$; $\log 12\,q''^3 = 2,7601034$; $12\,q''^3 = 575,577$; $p'' = 633,20984$; $\log p'' = 2,8015477$.

$$\log q' = 0,5581797 < 0,5591769 = \log w'$$

$$\log q'' = \underline{0,5603074} < \underline{0,5603095} = \log w'' = \tfrac{1}{5} \log p''$$

$$0,0021277 \;:\; 0,0011326 = 1,966 = r$$

$v = \frac{0,0000021}{0,966} = 0,00000217$; $\log. w'' + v' = 0,56031167 = \log. q''' = \log. 144 - \log. n'''$; $\log. n''' = 1,59805083$; $n''' = 39,63244$; $\log. 12\,q'''^3 = 2,7601162 1$; $12\,q'''^3 = 575,594$; $p''' = 633,22644$; $\log. p''' = 2,8015590$; $\tfrac{1}{5} \log. p''' = \log. w''' = 0,5603118$. Hiernach läßt sich $\log. q''' = \log. w''' = 0,5603118$, also $x = 3,633388$ setzen.

Ist n negativ, so erhält man $-\frac{144}{n} = -\sqrt[5]{(n - 18 + 12q^3)}$ und hiernach durch $n = 40$, $n = 41$ zunächst $\log. q = 0,5563025$; $\log. q' = 0,5455784$; $\log. w = 0,5529655$; $\log. w' = 0,5469593$; dann $\log. q'' = 0,5487184$; $\log. w'' = 0,5487020$; $\log. q''' = 0,5486816$; $\log. w''' = 0,5486814$; endlich $\log. q'''' = 0,5486812 = \log. w''''$, so daß $x = -3,537376$ gefunden wird.