

Beitrag zur Begründung der Erscheinung, daß gerade Linien sich gekrümmt zeigen, wenn sie durch ein gläsernes dreiseitiges Prisma, dessen Kanten jenen Linien parallel liegen, betrachtet werden.

Der Zweck der nachfolgenden Abhandlung ist, eine eigenthümliche, durch ein dreiseitiges Glasprisma bewirkte Erscheinung zu erklären, welche meines Wissens bis jetzt noch nicht hinreichend begründet ist. Unter dem von Brandes bearbeiteten Artikel „Brechung der Lichtstrahlen“ im ersten Bande der neuen Bearbeitung des Gehlerschen physikalischen Wörterbuches heißt es nämlich S. 1150:

„Nichtet man seinen Blick durch das immer noch horizontal gehaltene Prisma auf einen horizontal begrenzten Gegenstand, z. B. auf die horizontalen Begrenzungen der Fensterscheiben, so erscheinen diese nicht als horizontal, sondern als bogenförmig gekrümmt, und zwar an den Seiten aufwärts gebogen, wenn die Brechung den Gegenstand hinaufwärts gerückt zeigt, oder des Prisma's brechender Winkel nach oben gekehrt ist. Dies rührt daher, weil das Auge die Gegenstände, welche in der auf die Axe senkrechten Ebene CAB liegen, weniger gebrochen sieht, als die, welche sich in der durch das Auge O gelegten schiefen Ebene FDE befinden; obgleich nun die Brechung nicht ganz so erfolgt, wie in einem Prisma, dessen senkrechter Querschnitt FDE wäre ²⁾, wo wegen des größern Winkels EDF die Brechung stärker ist, so reicht doch diese oberflächliche Betrachtung hin, um zu zeigen, woher diese Bogenform entsteht.“

Fig. 1.

Und im siebenten Bande S. 932 lesen wir:

„Wenn man durch das Prisma sehend eine mit den Kanten des Prisma's parallele gerade Linie betrachtet, so erscheint sie gekrümmt. Dieses kommt daher, weil da, wo man ein größeres Gesichtsfeld übersieht, die Strahlen nicht sämmtlich, wie wir bisher es angenommen haben, in der Ebene des Neigungswinkels jener beiden brechenden Ebenen liegen. Der Winkel α kommt für die seitwärts liegenden Strahlen nicht genau so, wie für die aus der Mitte des Gesichtsfeldes zu uns gelangenden Strahlen vor, und es ließen sich leicht die genauen Bestimmungen auch für die seitwärts liegenden Punkte angeben.“

²⁾ Die Ebene DEF ist nämlich nicht gegen die brechenden Flächen senkrecht.“

Fast eben so wie in den angeführten Stellen wird die hier besprochene Erscheinung, daß eine gerade Linie, durch ein Prisma betrachtet, sich gekrümmt zeigt, von dem Professor und Director Dr. August in der zweiten Auflage seines Auszuges aus Fischer's Lehrbuch der mechanischen Naturlehre S. 408 erklärt, wo er sagt:

„In dieser Formel ($\beta = (n - 1) \alpha$) erkennt man am einfachsten die Zunahme der Ablenkung mit dem Brechungswinkel, wodurch zum Theil die Erscheinung begründet ist, daß gerade Linien durch ein mit ihnen parallel gehaltenes Prisma betrachtet sich gekrümmt zeigen; denn für ein schräg durch das Prisma blickendes Auge wird der Brechungswinkel im Glase in einer das Prisma schief durchschneidenden Ebene liegen und größer sein, als der in der senkrechten Lage des Durchchnitts gebildete.“

Daß aber die erwähnte Erscheinung durch die von Brandes und August beigebrachten Gründe nicht genügend erklärt wird, ist leicht zu ersehen, wenn man nur berücksichtigt, daß die Brechungsebene immer auf der brechenden Ebene senkrecht steht, und zwei gegen einander geneigte Ebenen von einer dritten auch so geschnitten werden können, daß ein Winkel entsteht, welcher kleiner ist als der Neigungswinkel. Ist nämlich $GHK < 90^\circ$ der Neigungswinkel der Ebenen $ABCD$ und $EBCF$, also die Kante BC senkrecht auf der Ebene GHK , und zugleich $GH = KH$, so ist, wenn man noch die Linien GO und KO zieht, der Winkel $GOK < \angle GHK$. Denn es sind die Dreiecke GHO und KHO rechtwinklig und congruent, daher $GO > GH$, $KO > KH$ und $GO = KO$, zieht man also die Linie GK , so entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke GHK und GOK auf derselben Grundlinie GK , in welchen der $\angle GOK < \angle GHK$. Die Durchschnitzebene GOK giebt also einen Winkel, welcher kleiner ist, als der Neigungswinkel. Zieht man aber HM und HN , so ist allerdings sowohl der Winkel GHN als MHN größer als GHK . Die erstere Behauptung folgt unmittelbar daraus, daß GHK als Neigungswinkel senkrecht auf AC und zugleich $< 90^\circ$ ist. Die zweite läßt sich aber so beweisen. Die Winkel MHN , MHG , GHN bilden eine dreiseitige Ecke, in welcher die Seite MHN einem größeren Winkel gegenüberliegt als GHN , also $\angle MHN > \angle GHN$, der wieder $> \angle GHK$ ist. Hieraus ist nun ersichtlich, daß sich nicht allgemein behaupten läßt, eine das Prisma schief durchschneidende Ebene gebe einen größeren Brechungswinkel EDF , als ein senkrechter Durchchnitt CAB . Außerdem kommen bei denjenigen Punkten der durch das Prisma gesehenen geraden Linie, nach denen das Auge schräg durch das Prisma blickt, auch zwei einander schneidende auf den beiden brechenden Ebenen senkrechte Brechungsebenen in Betracht. Nach diesen Bemerkungen ist es einleuchtend, daß zur Erklärung der uns hier beschäftigenden Erscheinung andere Beweisgründe beigebracht werden müssen. In der folgenden Abhandlung soll nun dieselbe auf elementare, den Schülern der obersten Gymnasialklasse verständliche Art begründet werden.

§. I.

Fig. 3. Gehen von einer in der Fläche AF des Prismas $ACEBDF$, auf dessen Seitenflächen der Schnitt GHI senkrecht steht, der Kante AB parallel laufenden geraden Linien ST die Lichtstrahlen MN und PR in einer gegen AD geneigten Lage aus, und treffen sie nach ihrer Brechung in dem Punkte O zusammen, so läßt sich aus den Brechungsgesetzen die gegenseitige Lage der Einfallspunkte M und R in der brechenden Fläche AD genau bestimmen. Fällt man nämlich die Linien NK , PL

Fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 3.

senkrecht auf AD, so sind sie in derselben Ebene und, da $ST \parallel AB$, einander gleich, weshalb auch die durch die Punkte K, L bestimmte gerade Linie $KL \parallel AB$ ist; und zieht man noch OQ senkrecht auf die erweiterte Ebene AD, so liegen nach dem ersten Brechungsgesetze (S. Gehler's phys. Wörterb. Bd. 1. S. 1130 a.) die Perpendikel OQ und NK mit dem einfallenden und gebrochenen Strahle MN und MO in der durch den Neigungswinkel IGH , und die Perpendikel OQ und PL mit den Strahlen PR , OR in der durch den Winkel QUP bestimmten Brechungsebene. Daher trifft auch die verlängerte GI den Punkt Q , und die Einfallspunkte M und R befinden sich in den die Punkte K und L mit Q verbindenden geraden Linien. Zugleich ersieht man leicht, daß von den mit den Buchstaben α , β , γ , δ bezeichneten Winkel KNM , LPR , QOM , QOR die beiden ersten α , β den Einfallswinkeln für die Strahlen MN und PR , die andern beiden, γ , δ aber den Brechungswinkeln gleich sind.

Um nun die Lage der Punkte M und R noch genauer zu bestimmen, sei KN so wie $PL = p$ Zoll (p''), $OQ = q''$, $MQ = m''$, $KM = k''$, $QR = y''$ und $LR = x''$. Dann ist, weil die Dreiecke MKN , MOQ , LPR , OQR rechtwinklig sind, $k = p \cdot \operatorname{tg.} \alpha = p \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = p \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$, $m = q \cdot \operatorname{tg.} \gamma = q \cdot \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}}$, $x = p \cdot \operatorname{tg.} \beta = p \cdot \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$ und $y = q \cdot \operatorname{tg.} \delta = q \cdot \frac{\sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}}$. Ferner ist, wenn man das Brechungsverhältniß $= n : 1$ annimmt, $\sin. \gamma : \sin. \alpha = n : 1$ und auch $\sin. \delta : \sin. \beta = n : 1$, also $\sin. \gamma = n \cdot \sin. \alpha$ und $\sin. \delta = n \cdot \sin. \beta$. Durch Gleichsetzung der Verhältnisse $\sin. \gamma : \sin. \alpha$ und $\sin. \delta : \sin. \beta$ erhält man aber die Proportion $\sin. \gamma : \sin. \alpha = \sin. \delta : \sin. \beta$, welche geeignet ist, den Zusammenhang, in welchem die Winkel α und β stehen, näher nachzuweisen. Denn wollte man $\beta = \alpha$ annehmen, so würde auch $\delta = \gamma$, $\operatorname{tg.} \beta = \operatorname{tg.} \alpha$, $\operatorname{tg.} \delta = \operatorname{tg.} \gamma$ und daher $p \cdot \operatorname{tg.} \beta + q \cdot \operatorname{tg.} \delta = p \cdot \operatorname{tg.} \alpha + q \cdot \operatorname{tg.} \gamma$, oder $x + y = k + m$ sein, was jedoch unmöglich ist, da in dem rechtwinkligen $\triangle K L Q$ die LQ als Hypotenuse $> KQ$ ist; es kann also β nicht $= \alpha$ sein. Eben so wenig ist $\beta < \alpha$, weil sonst auch $\delta < \gamma$ und $p \cdot \operatorname{tg.} \beta + q \cdot \operatorname{tg.} \delta < p \cdot \operatorname{tg.} \alpha + q \cdot \operatorname{tg.} \gamma$ oder $x + y < k + m$ sein müßte, was ebenfalls unmöglich ist. Folglich muß $\beta > \alpha$ und demnach auch $R L > M K$ oder $x > k$, so wie $\delta > \gamma$ und $Q R > Q M$ oder $y > m$ sein.

Nun läßt sich auch darthun, daß die Verbindungslinie der Einfallspunkte M , R gegen die Linie KL convergirt.

Denn wäre $MR \parallel KL$, so müßte $m : k = y : x$, und da $m : k = q \cdot \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} : p \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = q \cdot \frac{n \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} : p \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = q \cdot n \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} : p \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}$, so wie $y : x = q \cdot \frac{\sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}} : p \cdot \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = q \cdot n \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \beta} : p \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}$ ist, auch $q \cdot n \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} : p \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} = q \cdot n \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \beta} : p \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}$ sein, woraus der Reihe nach $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$; $(1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 - n^2 \sin^2 \beta) = (1 - n^2 \sin^2 \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \beta)$; $1 - n^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$

$= 1 - \sin \beta^2 - n^2 \sin \alpha^2 - n^2 \sin \alpha^2 \sin \beta^2$; $(n^2 - 1) \sin \alpha^2 = (n^2 - 1) \sin \beta^2$ folgen würde, was aber unmöglich ist, da $\alpha < \beta$ ist. Demnach können die Linien MR und KL nicht parallel sein, noch weniger aber divergiren sie nach der rechten Seite hin, weil sonst $\frac{m}{k} > \frac{y}{x}$ und durch eine der unmittelbar vorausgehenden ähnliche Schlussreihe $(n^2 - 1) \sin \alpha^2 > (n^2 - 1) \sin \beta^2$ hervorgehen würde, was dem vorhin gefundenen Resultate, daß $\beta > \alpha$ ist, widerspricht. Hieraus folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung, daß MR gegen die Linie KL convergire.

Vergleicht man jetzt die Winkel HGQ und PUQ , so findet man $PUQ <$ den brechenden Winkel HGQ , da GUQ und GUP spitze Winkel sind. Es ist also eine unrichtige Behauptung, daß durch ein Prisma betrachtete gerade Linien sich darum gekrümmt zeigen, weil für ein schräg durch das Prisma blickendes Auge der Brechungswinkel größer werde, als der in der senkrechten Lage des Durchschnitte gebildete.

Ferner sei $P'L' \perp AD$, $P'R'$ ein anderer einfallender Strahl, welcher nach seiner Brechung ebenfalls den Punct O treffen möge, und von der in der Brechungsebene $OQP'L'$ liegenden geraden Linien QL' der obere Theil $QR' = y$ Zoll, und der untere $R'L' = x$ Zoll. Dann läßt sich auf ähnliche Weise, wie $\beta > \alpha$ und $\frac{y}{x} > \frac{m}{k}$ gefunden ist, beweisen, daß $\mathcal{B}. R'P'L' > RPL$ und $\frac{QR'}{L'R'} > \frac{QR}{LR}$ oder $\frac{y}{x} > \frac{y}{x}$ ist, woraus wieder die Senkung der Linie RR' gegen KL' folgt. Eben so findet man für den Einfallspunct R'' auch $\frac{QR''}{L''R''} > \frac{QR'}{L'R'}$ oder $\frac{y}{x} > \frac{y}{x}$.

§. 2.

Fig. 3. Die Einfallspuncte $M, R, R', R'' \dots$ liegen in einer krummen Linie.

Fig. 4. Lagen sämmtliche Einfallspuncte in einer geraden Linie MZ , welche nach §. 1. gegen KL'' convergiren müßte, so ließe sich durch die Verbindung des Punctes K mit R ein gleichschenkliges ΔKMR construiren, wosfern nur R in der gehörigen Nähe von M angenommen wird. Da aber $\mathcal{B}. QMR > 90^\circ$ und $\mathcal{B}. KMR < 90^\circ$ ist, und wegen der willkürlichen Lage des Punctes O in der Linie MO die $QM > MK$ vorausgesetzt werden darf, so ist $QR > KR$, also auch $\mathcal{B}. QKR > \mathcal{B}. KQR$ und daher in dem rechtwinkligen Dreiecke KLQ der $\mathcal{B}. KLR > \mathcal{B}. LKR$, woraus wieder $KR > LR$ folgt, und ist nun $KR = KM$, so müßte auch $KM > LR$ sein, was aber nach §. 1. unmöglich ist. Folglich können die Einfallspuncte, sobald nur $QM > MK$ ist, nicht in einer geraden Linie MZ liegen, und es müssen wenigstens die dem Puncte M zunächst liegenden sich in einer krummen Linie befinden, da ja unter der Voraussetzung, daß $QM > KM$, die KR stets $> LR$ ist, und KR mit in gerader Linie fortschreitender Annäherung des Punctes R an M immer kleiner wird, so lange nämlich $\mathcal{B}. KRM$ nicht $> 90^\circ$ ist, und nicht nur $= KM$, sondern auch $< KM$ werden kann. Liegen aber die dem M benachbarten Einfallspuncte in einer krummen Linie, so läßt sich mit ziemlicher Gewißheit erwarten, daß auch die übrigen einer solchen zugehören werden, da ihre Lage in der Ebene AD ebenso bestimmt wird, wie die jener benachbarten. Wollte man indeß annehmen, daß

nur die Einfallspunkte von M bis R in frummer, die übrigen R', R'' ... aber mit R in gerader Linie Fig. 5. lägen, so müßten die beiden Dreiecke RQR' und R'QR'' zusammen ein Dreieck RQR'' bilden und daher $\Delta RQR' + \Delta R'QR'' = \Delta RQR''$ sein. Setzt man also $\mathcal{B}. MQR = \varphi, MQR' = \varphi$ und $MQR'' = \varphi$, so müßte, da in §. 1. $QR = y', QR' = y''$ und $QR'' = y'''$ angenommen ist, immer $\frac{1}{2} y. y. \sin(\varphi - \varphi) + \frac{1}{2} y. y. \sin(\varphi - \varphi) = \frac{1}{2} y. y. \sin(\varphi - \varphi)$, oder auch $y. y. \sin(\varphi - \varphi) + y. y. \sin(\varphi - \varphi) = y. y. \sin(\varphi - \varphi)$ werden. Um nun zu sehen, ob die letzte Gleichung stattfindet, oder nicht, wollen wir die Werthe von y, y', y'' und von $\varphi, \varphi, \varphi$ für einen speciellen Fall berechnen. Es sei zu dem Ende $NK = p'' = \frac{1}{2}$ Zoll, $QM = m'' = 6''$, $MK = k'' = 0, 3''$, so daß $m + k = 6, 3$ und $\text{tg. } \alpha = \frac{k}{p} = \frac{0, 3}{0, 5} = 0, 6$ ist, mithin wird, da das Brechungsverhältniß $n : 1 = 3 : 2$, also $\sin \gamma = \frac{2}{3} \sin \alpha$ ist, $MO = \frac{6''}{\sin \gamma} = \frac{6''}{\frac{2}{3} \sin \alpha} = \frac{4''}{\sin \alpha}$

und $q = \frac{6}{\text{tg } \gamma}$ sein. Folglich ist $\log. \text{tg. } \alpha = \log. 0, 6 = 9, 7781513 - 10$, also $\alpha = 30^\circ 57' 49, 52''$, ferner $\log. \sin \gamma = \log. 1, 5 + \log. \sin \alpha = 0, 1760913 + 9, 7113818 - 10 = 9, 8874731 - 10$, also $\gamma = 50^\circ 30' 38, 61''$, endlich $\log. q = \log. 6 - \log. \text{tg. } \gamma = 0, 7781513 - 0, 0840611 = 0, 6940902$ und $q = 4, 944134$.

Nach §. 1. ist $y = q. \text{tg. } \delta$, also $\text{tg. } \delta = \frac{y}{q}$ und $\log. \text{tg. } \delta = \log. y - \log. q$. Wird nun $y = 6, 001734$ gesetzt, so folgt $\log. \text{tg. } \delta = \log. 6, 001734 - \log. 4, 944134 = 0, 7782768 - 0, 6940902 = 10, 0841866 - 10$ und $\delta = 50^\circ 31' 7, 8''$.

Auch ist nach §. 1. $\sin \delta = n \sin \beta$ und $x = p. \text{tg. } \beta$, folglich wird, da $n = \frac{2}{3}$ und $p = \frac{1}{2}$ ist, $\sin \beta = \frac{3}{2} \sin \delta$, $x = \frac{1}{2} \text{tg. } \beta$; $\log. \sin \beta = \log. 2 + \log. \sin \delta - \log. 3 = 0, 3010300 + 9, 8875238 - 10 - 0, 4771213 = 9, 7114325 - 10$, $\beta = 30^\circ 58' 3'', 96''$; $\log. x = \log. \text{tg. } \beta - \log. 2 = 9, 7782201 - 10 - 0, 3010300 = 0, 4771901 - 1$, $x = 0, 3000475$.

Nun läßt sich auch der Winkel MQR oder φ berechnen, denn es ist $\sin \varphi = \frac{KL}{LQ} = \frac{\sqrt{(y+x)^2 - (m+k)^2}}{y+x} = \frac{\sqrt{(y+x+m+k)(y+x-m-k)}}{y+x}$. Da aber $m+k = 6, 3$,

$y+x = \frac{6, 001734}{0, 3000475} = 6, 3017815$, also $y+x+m+k = 12, 6017815$ und $y+x-m-k = 0, 0017815$ ist, so hat man $\log. \sin \varphi = \frac{1}{2} (\log. 12, 6017815 + \log. 0, 0017815) - \log. 6, 3017815 = \frac{1}{2} \left(\frac{1, 1004320}{0, 2507858} - 3 \right) - 0, 7994633 = \frac{0, 1756089}{-0, 7994633} - 1 = 8, 3761456 - 10$, mithin $\varphi = 1^\circ 21' 44, 6''$.

Wird ferner $y = 6, 00176$ angenommen, so ist $\log. \text{tg. } \delta = \log. y - \log. q = 0, 7782786 - 0, 6940902 = 10, 0841884 - 10$, $\delta = 50^\circ 31' 8, 27''$; $\log. \sin \beta = \log. 2 + \log. \sin \delta - \log. 3 = 0, 3010300 + 9, 8875245 - 10 - 0, 4771213 = 9, 7114332 - 10$, $\beta = 30^\circ 58' 4, 16''$; $\log. x = \log. \text{tg. } \beta - \log. 2 = 9, 7782210 - 10 - 0, 3010300 = 0, 4771910 - 1$, $x = 0, 3000482$;

$$y \mp x = \frac{6,00176}{\mp 0,3000482} = 6,3018082, \quad y \mp x \mp m \mp k = 12,6018082, \quad y \mp x - m - k$$

$$= 0,0018082, \text{ also } \log. \sin \varphi = \frac{1}{2} (\log. 12,6018082 \mp \log. 0,0018082) - \log. (y \mp x) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1,1004329}{\mp 0,2572465} - 3 \right) - \log. 6,3018082 = \frac{0,1788397}{-0,7994652} - 1 = 8,3793745 - 10 \text{ und } \varphi =$$

$$1^\circ 22' 21,3''.$$

Setzt man endlich „y = 6,0018, so ist $\log. \operatorname{tg.} \delta = \log. „y - \log. q = \frac{0,7782815}{0,6940902} =$

$$10,0841913 - 10, \text{ also } \delta = 50^\circ 31' 8,94''; \log. \sin \beta = \log. 2 \mp \log. \sin \delta - \log. 3 =$$

$$0,3010300 \mp 9,8875257 - 10 - 0,4771213 = 9,7114344 - 10, \beta = 30^\circ 58' 4,5'';$$

$$\log. „x = \log. \operatorname{tg.} \beta - \log. 2 = \frac{9,7782227}{0,3010300} - 10 = 0,4771927 - 1 \text{ und } „x = 0,3000493.$$

Daher ist „y \mp „x = $\frac{6,0018}{\mp 0,3000493} = 6,3018493, „y \mp „x \mp m \mp k = 12,6018493, „x \mp „y - m - k$

$$= 0,0018493, \text{ folglich } \log. \sin „\varphi = \frac{1}{2} (\log. 12,6018493 \mp \log. 0,0018493) - \log. („y \mp „x)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1,1004343}{\mp 0,2670074} - 3 \right) - \log. 6,3018493 = \frac{0,1837208}{-0,7994680} - 1 = 8,3842528 - 10, \text{ und}$$

$$„\varphi = 1^\circ 23' 17,12''.$$

Aus den für $\varphi, „\varphi, „\varphi$ gefundenen Werthen folgt nun weiter $\varphi - „\varphi = 36,7'', „\varphi - „\varphi = 55,82'', „\varphi - \varphi = 1' 32,52''$, und da $y = 6,001734, „y = 6,00176, „y = 6,0018$ ist, so haben wir

$$\log. \sin (\varphi - „\varphi) = 6,2502409 - 10; \log. \sin („\varphi - „\varphi) = 6,4323647 - 10$$

$$\log. „y = 0,7782786$$

$$\log. „y = 0,7782815$$

$$\log. y = 0,7782768$$

$$\log. „y = 0,7782786$$

$$\log. y. „y. \sin (\varphi - „\varphi) = 0,8067963 - 3; \log. „y. „y. \sin („\varphi - „\varphi) = 0,9889248 - 3$$

mithin $y. „y. \sin (\varphi - „\varphi) = 0,00640909; „y. „y. \sin („\varphi - „\varphi) = 0,009748209$; und $y. „y. \sin (\varphi - „\varphi) \mp „y. „y. \sin („\varphi - „\varphi) = 0,016157299$.

Aus den Werthen von „ $\varphi - \varphi, y$ und „ y ergibt sich aber $\log. \sin („\varphi - \varphi) = 6,6518105 - 10$

$$\log. „y = 0,7782815$$

$$\log. y = 0,7782768$$

$$\text{also } \log. y. „y. \sin („\varphi - \varphi) = 0,2083688 - 2$$

$$\text{und } y. „y. \sin („\varphi - \varphi) = 0,0161573.$$

Da nun das letzte Resultat sehr wenig von 0,016157299 abweicht, so könnte man wohl die Gleichheit von $y. „y. \sin („\varphi - \varphi)$ und der Summe $y. „y. \sin (\varphi - „\varphi) \mp „y. „y. \sin („\varphi - „\varphi)$ behaupten. Berechnet man aber aus „ $y = 6,00174$ den Winkel „ $\varphi = 1^\circ 21' 53,2''$, so hat man $\varphi - „\varphi = 8,6'', „\varphi - „\varphi = 1' 23,92''$, und daraus $y. „y. \sin (\varphi - „\varphi) = 0,001501852, „y. „y. \sin („\varphi - „\varphi) = 0,014655443$, also $y. „y. \sin (\varphi - „\varphi) \mp „y. „y. \sin („\varphi - „\varphi) = 0,016157295$, welcher Werth von 0,016153 schon etwas mehr übertroffen wird. Und berechnet man endlich aus $y = 6,001734, „y = 6,00174, „y = 6,00176$ und aus $\varphi = 1^\circ 21' 44,6'', „\varphi = 1^\circ 21' 53,2'', „\varphi = 1^\circ 22' 21,3''$ die Werthe von $y. „y. \sin (\varphi - „\varphi)$ und „ $y. „y.$

$\sin(\varphi - \varphi)$, so erhält man $y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi) + y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi) = \frac{0,001501852}{+0,004907236}$
 $= 0,006409088$, also wieder etwas kleiner als $y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi)$, dessen Werth oben
 $= 0,00640909$ gefunden ist.

Auch die zuletzt gewonnenen Resultate lassen immer noch einigen Zweifel, ob nicht allgemein $y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi) + y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi)$ gleich $y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi)$ zu setzen, und dem gemäß auch die Einfallspunkte $R, R', R'', R''' \dots$ in gerader Linie anzunehmen seien. Dieser Zweifel schwindet jedoch, wenn man die Winkel QRR', QRR'', QRR''' , welche durch die von R nach R', R'', R''' gezogenen geraden Linien entstehen, aus den Dreiecken QRR', QRR'', QRR''' berechnet.

Behalten wir für QR, QR', QR'', QR''' die oben angenommenen Werthe bei, so ist $\mathfrak{B} \cdot RQR' = 8,6''$, $\mathfrak{B} \cdot RQR'' = 36,7''$, $\mathfrak{B} \cdot RQR''' = 1' 32,52''$ und daher $(6,00174 + 6,001734) : (6,00174 - 6,001734) = \text{tg. } \frac{1}{2} (180^\circ - 8,6'') : \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR' - QR'R)$ oder $12,003474 : 0,000006 = \text{tg. } 89^\circ 59' 55,3'' : \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR' - QR'R)$ aus dem $\Delta QRR'$,
 $(6,00176 + 6,001734) : (6,00176 - 6,001734) = \text{tg. } \frac{1}{2} (180^\circ - 36,7'') : \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR'' - QR''R)$
 oder $12,003494 : 0,000026 = \text{tg. } 89^\circ 59' 41,65'' : \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR'' - QR''R)$ aus dem $\Delta QRR''$,
 $(6,0018 + 6,001734) : (6,0018 - 6,001734) = \text{tg. } \frac{1}{2} (180^\circ - 1' 32,52'') : \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR''' - QR'''R)$
 oder $12,003534 : 0,000066 = \text{tg. } 89^\circ 59' 13,74'' : \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR''' - QR'''R)$ aus dem $\Delta QRR'''$.
 Hieraus folgt aber $\log. \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR' - QR'R) = \log. 0,000006 + \log. \text{tg. } 89^\circ 59' 55,3'' - \log. 12,003474 = \frac{0,7781513}{+14,6809567} - 6 - 1,0793069 = \frac{9,4591080}{-1,0793069} - 10 = 8,3798011 - 10$,
 also $\frac{1}{2} (QRR' - QR'R) = 1^\circ 22' 24,7''$, welche Größe zu $89^\circ 59' 55,7''$, dem Werthe von $\frac{1}{2} (QRR' + QR'R)$ addirt den $\mathfrak{B} \cdot QRR' = 91^\circ 22' 20,4''$ giebt.

Ferner ist $\log. \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR'' - QR''R) = \log. 0,000026 + \log. \text{tg. } 89^\circ 59' 41,65'' - \log. 12,003494 = \frac{0,4149733}{+14,0507890} - 5 - 1,0793077 = \frac{9,4657623}{1,9793077} - 10 = 8,3864546 - 10$,
 also $\frac{1}{2} (QRR'' - QR''R) = 1^\circ 23' 41''$, und $QRR'' = 91^\circ 23' 22,65''$.

Endlich ist $\log. \text{tg. } \frac{1}{2} (QRR''' - QR'''R) = \log. 0,000066 + \log. \text{tg. } 89^\circ 59' 13,74'' - \log. 12,003534 = \frac{0,8195439}{+13,6492195} - 5 - 1,0793091 = \frac{9,4687634}{-1,0793091} - 10 = 8,3894543 - 10$,
 also $\frac{1}{2} (QRR''' - QR'''R) = 1^\circ 24' 15,8''$, und $QRR''' = 91^\circ 23' 29,54''$.

Da nun von den Winkeln QRR', QRR'', QRR''' jeder folgende größer als der vorhergehende ist, so folgt hieraus eben so wie aus der Ungleichheit von $y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi) + y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi)$ und $y \cdot y \cdot \sin(\varphi - \varphi)$, daß die Einfallspunkte $R, R', R'' \dots$ nicht in einer geraden Linie liegen, und da die dem M benachbarten Einfallspunkte sich in einer krummen Linie befinden, so darf wohl mit Grund geschlossen werden, daß sämtliche Einfallspunkte einer solchen angehören; auch würde eine möglichst genaue Bestimmung ihrer Abstände von Q , so wie aller Winkel $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''' \dots$ gewiß zeigen, daß auch nicht drei unmittelbar auf einander folgende Einfallspunkte in gerader Linie liegen. *)

*) Einen völlig erschöpfenden Elementarbeweis für den im Anfange des §. 2. aufgestellten Satz habe ich bis jetzt nicht auffinden können.

§. 3.

Fig. 3. Die Krümmung der Linie, in welcher die Einfallspuncte M, R, R', R'' . . . liegen, ist nur und 6. gering, sie wächst aber mit der Zunahme des Einfallswinkels α und mit der Verkleinerung der Linien MO und MQ.

Hat für den von dem rechten Endpunkte der Linie ST ausgehenden Strahl TR'' der Abstand des Einfallspunctes R'' von Q eine Länge von 6,66162 Zoll, so ist unter der Voraussetzung, daß die Linien NK, QM und MK die in §. 2. angenommene Größe haben, tg. QOR'' oder tg. $\delta =$

$$\frac{{}^n y}{q} = \frac{6,66162}{4,944134} \text{ und } \log. \text{tg. } \delta = \log. 6,66162 - \log. 4,944134 = \frac{0,8235799}{0,6940902} =$$

$$\frac{10,1294897}{0,3010300} - 10, \text{ also } \delta = 53^\circ 25' 4,3'', \log. \sin \beta = \log. 2. + \log. \sin \delta - \log. 3 =$$

$$\frac{10,2057473}{0,4771213} - 10 = 9,7286260 - 10 \text{ und } \beta = 32^\circ 22'. \text{ Nun ist}$$

$$\text{tg. } 32^\circ 22' = \frac{{}^n x}{2}, \text{ folglich } \log. {}^n x = \log. \text{tg. } 32^\circ 22' - \log. 2 = \frac{9,8019546}{0,3010300} - 10 =$$

$$0,5009246 - 1 \text{ und } {}^n x = 0,3169017, \text{ welcher Werth zu dem von } {}^n y \text{ addirt die Summe } {}^n x + {}^n y =$$

$$6,9785217 \text{ giebt.}$$

Fig. 6. Zieht man jetzt in der Fläche AD die Linien MX und ZR'' parallel der Kante AB, so bestimmt MZ den Abstand der Parallelen MX, ZR'', und ist zugleich ein Maaß für die Senkung des äußersten Einfallspunctes R''. Um aber die Größe von MZ zu berechnen, sei MZ = z Zoll. Dann ist nämlich, weil ZR'' || KL'', $(m + z) : (m + k) = {}^n y : ({}^n x + {}^n y)$, also $(m + z) =$

$$\frac{(m + k) {}^n y}{{}^n x + {}^n y}, \text{ und } \log. (m + z) = \log. (m + k) + \log. {}^n y - \log. ({}^n x + {}^n y) = \log. 6,3$$

$$+ \log. 6,66162 - \log. 6,9785217 = \frac{0,7993405}{0,8437634} - 0,8437634 = \frac{1,6229204}{0,8437634} = 0,7791570,$$

$$\text{folglich } m + z = 6,01391, \text{ aber } m = 6, \text{ mithin } z = 0,01391.$$

Nehmen wir nun an, daß der Punkt N in der Mitte der Linie ST liegt, so müssen sämtliche Einfallspuncte der von ST ausgehenden und nach der Brechung in O zusammentreffenden Strahlen in einer zwischen zwei nur 0,01391 Zoll von einander abstehenden Parallellinien gelegenen krummen Linie sich befinden, vorausgesetzt, daß NK = $\frac{1}{2}$ Zoll, QM = 6'' und MK = 0,3'' ist. Hier fragt sich aber, welche Länge das Prisma oder die Linie ST in diesem Falle haben müsse. Diese Länge läßt sich finden, indem man KL'', die Hälfte von ST berechnet.

Setzt man KL'' = u Zoll, so ist wegen des rechtwinkligen Dreiecks KL''Q $u^2 = ({}^n x + {}^n y)^2 - (m + k)^2 = ({}^n x + {}^n y + m + k) \cdot ({}^n x + {}^n y - m - k) = 13,2785217 \times 0,6785217$

$$\text{also } \log. u = \frac{1}{2} (\log. 13,2785217 + \log. 0,6785217) = \frac{1}{2} \left(\frac{1,1231498}{-0,8315637} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot 0,9547135 =$$

$$0,4773368 \text{ und } u = 3,001627.$$

Aus den für z und u erhaltenen Werthen folgt nun, daß bei einem sechs Zoll langen Prisma für $p = \frac{1}{2}$, $m = 6$ und $k = 0,3$ der Abstand der äußersten Einfallspuncte, welche durch die von S und T ausgehenden und nach ihrer Brechung in O zusammentreffenden Strahlen entstehen, von der durch M der AB parallel gezogenen Linie noch nicht 0,01391 Zoll beträgt, und daß also die Krümmung der Curve, in welcher die Einfallspuncte M, R, R', R'', . . . liegen, sehr gering ist.

Die Krümmung wächst aber mit der Vergrößerung des Winkels α . Denn setzt man $\alpha = 40^\circ$, während p , wie vorher $= \frac{1}{2}$ und $m = 6$ ist, so wird $k = \frac{1}{2} \operatorname{tg.} 40^\circ = 0,4195498$; $\sin. \gamma = \frac{3}{2}$.
 $\sin. 40^\circ$, $\log. \sin. \gamma = \log. 1,5 + \log. \sin 40^\circ = + 0,1760913 + 9,8080675 - 10 = 9,9841588 - 10$,
 $\gamma = 74^\circ 37' 6,9''$; $q = \frac{6}{\operatorname{tg.} \gamma}$, $\log. q = \log. 6 - \log. \operatorname{tg.} \gamma = \frac{0,7781513}{-0,5605142} = 0,2176371$.

Und nimmt man „ $y = 6,648$ an, so ist $\operatorname{tg.} \delta = \frac{y}{q} = \frac{6,648}{q}$ und $\log. \operatorname{tg.} \delta = \log. 6,648 - \log. q = \frac{0,8226910}{-0,2176371} = 10,6050539 - 10$, also $\delta = 76^\circ 3' 23''$; $\log. \sin \beta = \log. 2 + \log. \sin \delta - \log. 3 = \frac{0,3010300}{+ 9,9870104} - 10 - \log. 3 = \frac{10,2880404 - 10}{-0,4771213} = 9,8109191 - 10$, $\beta = 40^\circ 19' 2,82''$; $\log. „x = \log. \operatorname{tg.} \beta - \log. 2 = \frac{9,9286955 - 10}{0,3010300} = 0,6276655 - 1$, „ $x = 0,4242927$. Ferner ist nun „ $x + „y = 7,0722927$, $m + k = 6,4195498$, „ $x + „y + m + k = 13,4918425$, „ $x + „y - m - k = 0,6527429$, folglich, da $m + z = \frac{(m+k) „y}{„x + „y}$ und $u = \sqrt{ („x + „y)^2 - (m+k)^2 } = \sqrt{ („x + „y + m+k) \cdot („x + „y - m-k) }$ ist, $\log. (m+z) = \log. (m+k) + \log. „y - \log. („x + „y) = \frac{0,8075045}{+ 0,8226910} - \log. („x + „y) = \frac{1,6301955}{-0,8495602} = 0,7806353$, $m + z = 6,034417$, also $z = 0,034417$, und $\log. u = \frac{1}{2} \cdot (\log. 13,4918425 + \log. 0,6527429) = \frac{1}{2} \left(+ 0,8147421 - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot 0,9448133 = 0,4724066$, also $u = 2,96761$.

Vergleicht man nun die für $p = \frac{1}{2}$, $m = 6$ und $\alpha = 40^\circ$ gefundenen Werthe von z und u mit den aus $p = \frac{1}{2}$, $m = 6$ und $\alpha = 30^\circ 57' 49,52''$ berechneten Werthen von z und u , so ist ersichtlich, daß die Krümmung der Curve, in welcher die Einfallspuncte liegen, zugleich mit dem Winkel α zunimmt, indem ja $0,034417 > 0,01391$, aber $2,96761 < 3,001627$ ist.

Bei den bisherigen Berechnungen ist auf die Länge der OM , d. i. die Entfernung des Auges vom dem Einfallspuncte M keine Rücksicht genommen. Diese ist jedoch leicht zu bestimmen, denn sie ist für $m = 6$ nach §. 2. $= \frac{4}{\sin \alpha}$ Zoll, also $= 7,7746$ Zoll für $\alpha = 30^\circ 57' 49,52''$ und $= 6,222896$ Zoll für $\alpha = 40^\circ$. Hier ist nun $6,222896 < 7,7746$, und vorhin wurde z für $\alpha = 40^\circ$ größer gefunden als für $\alpha = 30^\circ 57' 49,52''$, mithin erhellt die Richtigkeit der im Anfange des Paragraphen aufgestellten Behauptung, daß die Krümmung der Curve der Einfallspuncte mit der Zunahme des Winkels α und der Verkleinerung der Linie MO wachse, doch darf hiebei nicht übersehen werden, daß MQ unverändert geblieben ist. Es wächst indeß die Krümmung auch, wenn der Winkel α seinen Werth behält, und beide Linien MO und MQ abnehmen. Um dies zu beweisen, sei $MQ = 1$ Zoll, oder $m = 1$, während dem p , k und α die in §. 2. bestimmten Werthe bleiben mögen. Dann ist $MO = \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{1}{\frac{3}{2} \sin \alpha} = \frac{2}{3 \sin \alpha} = 1,295767$ Zoll, weil $\log. \frac{2}{3 \sin \alpha} = \log. 2 - (\log. 3 + \log. \sin \alpha) = \log. 2 - \left(+ 0,4771213 + 9,7113818 - 10 \right) = -0,1885031$

$$= 0,1125269, \text{ und } q = 0,824022, \text{ weil } q = \sqrt{\left(\frac{2}{3 \sin \alpha}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3 \sin \alpha} + 1\right) \cdot \left(\frac{2}{3 \sin \alpha} - 1\right)}$$

$$\text{und } \log. q = \frac{1}{2} \left(\log. \left(\frac{2}{3 \sin \alpha} + 1\right) + \log. \left(\frac{2}{3 \sin \alpha} - 1\right) \right) = \frac{1}{2} (\log. 2,295767 + \log. 0,295767) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} 0,3609278 \\ + 0,4709497 - 1 \end{array} \right) = \frac{1}{2} (0,8318775 - 1) = 0,9159388 - 1 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt nun, wenn man $y = 2,6$ annimmt, $\log. \operatorname{tg.} \delta = \log. y - \log. q$

$$= \begin{array}{l} 0,4149733 \\ - 0,9159388 + 1 \end{array} = 10,4990345 - 10, \delta = 72^\circ 24' 53,8''; \log. \sin \beta = \log. 2 + \log. \sin \delta - \log. 3 = \left(\begin{array}{l} 0,3010300 \\ + 9,9792157 - 10 \end{array} \right) - \log. 3 = \begin{array}{l} 10,2802457 - 10 \\ - 0,4771213 \end{array} = 9,8031244 - 10, \beta = 39^\circ 27' 28,9''; \log. x = \log. \operatorname{tg.} \beta - \log. 2 = \begin{array}{l} 9,9154562 - 10 \\ - 0,3010300 \end{array} = 0,6144262 - 1, x = 0,411553. \text{ Daher ist denn weiter } x + y = 3,011553, m + k = 1,3, x + y + m + k = 4,311553, x + y - m - k = 1,711553, \text{ also, da allgemein } m + z = \frac{(m+k) \cdot y}{x+y} \text{ und } u = \sqrt{(x+y+m+k) \cdot (x+y-m-k)} \text{ ist, } \log. (m+z) = \log. 1,3 + \log. 2,6 - \log. 3,011553 = \begin{array}{l} 0,1139434 \\ + 0,4149733 \end{array} - 0,4787905 = \begin{array}{l} 0,5289167 \\ - 0,4787905 \end{array} = 0,0501262, m+z = 1,122344 \text{ und } z = 0,122344; \log. u \text{ aber} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \log. 4,311553 \\ + \log. 1,711553 \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} 0,6346338 \\ + 0,2333904 \end{array} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0,8680242 = 0,4340121, \text{ und } u \text{ selbst} = 2,716515.$$

Eine Vergleichung der so eben gefundenen Werthe von z und u mit den zuerst für $m = 6$ berechneten zeigt nun, daß der Einfallspunct R' für $m = 1$, auch wenn NP' erst $= 2,716515$ Zoll, also noch < 3 Zoll ist, einen weit bedeutenderen Abstand von der Linie MX hat, als der Einfallspunct R'' für $m = 6$, und somit ist erwiesen, daß die Krümmung der Curve der Einfallspuncte auch wächst, wenn bei unverändertem Winkel α die Linien OM und QM abnehmen.

§. 4.

Fig. 3. Die in §. 2. und 3. aufgestellten Sätze werden auch durch Experimente bestätigt. Denn zieht man auf der einen Seitenfläche AF eines etwa sechs Zoll langen Glasprisma's eine farbige gerade Linie ST parallel der Kante AB , und betrachtet dieselbe durch die Fläche AD , während der brechende Winkel HGI nach unten gerichtet ist, so sieht man sie als eine convexe Linie, und dreht man das Prisma während der Betrachtung um seine Achse, so daß der Einfallswinkel α wächst, so wird die Krümmung immer deutlicher. Nähert man aber zugleich das Prisma dem Auge, so zeigt sich die Linie immer mehr gekrümmt. Bei den hier beschriebenen Experimenten ist es jedoch angemessen, die hintere Fläche des Prisma's mit einem undurchsichtigen Körper zu bedecken, damit man nicht durch die gleichzeitige Betrachtung entfernter Linien, welche zufällig hinter dem Prisma liegen, irregeleitet werde.

§. 5.

Fig. 7. Da die von der geraden Linie ST ausgehenden Strahlen $NM, PR, P'R' \dots$ die Fläche AD auch so treffen können, daß die Perpendikel $NK, PL, P'L' \dots$ über ihnen liegen, so scheint es nicht überflüssig, auch Einiges über die Lage der Einfallspuncte $M, R, R' \dots$ zu sagen, wenn sie sich auf der untern Seite jener Perpendikel befinden.

Wird die siebente Figur ähnlich der dritten beschrieben und mit ihr eine ähnliche Berechnung wie in §. 2. und 3. verbunden, so ergibt sich, daß die Einfallspuncte $M, R, R', R'' \dots$ ebenfalls in einer krummen Linie liegen, welche jedoch in diesem Falle concav ist. Da die Krümmung der Curve auch hier von dem Winkel α abhängig ist, so kann sie bei einem gleichseitigen Prisma, wo der brechende Winkel $HGI = 60^\circ$, also $\alpha < 30^\circ$ ist, nur sehr unbedeutend sein, und nicht so deutlich wahrgenommen werden, wie im ersten Falle.

§. 6.

Liegen die Einfallspuncte $M, R, R', R'' \dots$ in einer geraden Linie YX , welche $\parallel AB$ ist, so befinden sich die leuchtenden Puncte $N, P, P', P'' \dots$, von welchen die durch Brechung nach O gelangenden Strahlen $NM, PR, P'R', P''R''$ ausgehen, in einer concaven Linie. Fig. 8.

Ist die achte Figur analog der dritten gebildet, und werden dieselben Bezeichnungen, welche in §. 1. eingeführt sind, beibehalten, so hat man, weil $\angle QMR = 90^\circ$ ist, $y > m$, also auch $\frac{y}{q}$

oder $\text{tg. } \delta > \frac{m}{q}$ oder $\text{tg. } \gamma$, und daher $\delta > \gamma$; aber $\sin \delta : \sin \beta$ ist $= \sin \gamma : \sin \alpha$, folglich auch $\beta > \alpha$ und $\sin \alpha^2 < \sin \beta^2$, weshalb $(n^2 - 1) \sin \alpha^2 < (n^2 - 1) \sin \beta^2$ oder $n^2 \sin \alpha^2 - \sin \alpha^2 < n^2 \sin \beta^2 - \sin \beta^2$ ist. Nach §. 1. kann man aber für $n^2 \sin \alpha^2$ und $n^2 \sin \beta^2$ beziehlich $\sin \gamma^2$ und $\sin \delta^2$ einsetzen, mithin wird auch $\sin \gamma^2 - \sin \alpha^2 < \sin \delta^2 - \sin \beta^2$ sein, woraus wieder $\sin \gamma^2 + \sin \beta^2 < \sin \delta^2 + \sin \alpha^2$ folgt. Werden nun diese Summen von $1 + \sin \beta^2 \sin \gamma^2$ und $1 + \sin \delta^2 \sin \alpha^2$, welche beiden Ausdrücke wegen der Proportion $\sin \delta : \sin \beta = \sin \gamma : \sin \alpha$ gleich sind, subtrahirt, so muß $1 + \sin \beta^2 \sin \gamma^2 - \sin \gamma^2 - \sin \beta^2 > 1 + \sin \delta^2 \sin \alpha^2 - \sin \delta^2 - \sin \alpha^2$, oder $(1 - \sin \beta^2) \cdot (1 - \sin \gamma^2) > (1 - \sin \alpha^2) \cdot (1 - \sin \delta^2)$, d. i. $\cos. \beta^2 \cdot \cos. \gamma^2 > \cos. \alpha^2 \cdot \cos. \delta^2$, also auch $\cos. \beta \cdot \cos. \gamma > \cos. \alpha \cdot \cos. \delta$ sein. Es ist aber $\sin \beta \sin \gamma = \sin \alpha \sin \delta$, folglich erhält man durch Division $\frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos. \beta \cos. \gamma} < \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\cos. \alpha \cos. \delta}$ oder $\text{tg. } \beta \text{ tg. } \gamma < \text{tg. } \alpha \text{ tg. } \delta$ und hieraus endlich $\frac{\text{tg. } \gamma}{\text{tg. } \alpha} < \frac{\text{tg. } \delta}{\text{tg. } \beta}$.

Betrachten wir nun die Figur, so ist $\text{tg. } \gamma = \frac{m}{q}$, $\text{tg. } \alpha = \frac{k}{p}$, $\text{tg. } \delta = \frac{y}{q}$, und setzen wir PL

den Abstand des Punctes P von der Fläche $AD = 1$ Zoll, so wird $\text{tg. } \beta = \frac{x}{1}$. Hieraus folgt $\frac{\text{tg. } \gamma}{\text{tg. } \alpha} = \frac{m p}{k q}$ und $\frac{\text{tg. } \delta}{\text{tg. } \beta} = \frac{y}{q \frac{x}{1}}$, es war aber $\frac{\text{tg. } \gamma}{\text{tg. } \alpha} < \frac{\text{tg. } \delta}{\text{tg. } \beta}$, mithin ist auch $\frac{m p}{k q} < \frac{y}{q \frac{x}{1}}$

und $m : k < y : x \frac{p}{1}$. Soll aber $m : k < y : x \frac{p}{1}$ sein, so kann die Verbindungslinie der Puncte K, L weder mit der MR parallel laufen, weil sonst $NK = PL$ oder $p = 1$ und

$m : k = y : x = y : x \frac{p}{1}$ sein würde, noch von der MR divergiren, indem dann $m : k > y : x$, $p > 1$, mithin $\frac{p}{1} > 1$, $x \frac{p}{1} > x$, also $y : x > y : x \frac{p}{1}$ und daher um so mehr $m : k > y : x \frac{p}{1}$

sein müßte. Es liegt also jene Verbindungslinie oberhalb der durch K zur MR gezogenen Parallele KV , und PL ist $> NK$ oder $l > p$.

Setzt man nun für einen andern Einfallspunct R' die $QR' = y$, $R'L' = x$, $P'L' = l$, $\mathcal{W}. R'OQ = \delta$ und $\mathcal{W}. R'P'L' = \beta$, so ist, weil $y > y$, $\delta > \delta$, also auch wegen der Proportion $\sin \delta : \sin \beta = \sin \delta : \sin \beta$ $\mathcal{W}. \beta > \beta$, und dann läßt sich, indem man nämlich $\delta, \delta, \beta, \beta, y, y, x, x, l, l$ beziehlich für $\gamma, \delta, \alpha, \beta, m, y, k, x, p, l$ substituirt, auf dieselbe Weise, wie so eben $\frac{\text{tg. } \gamma}{\text{tg. } \alpha} < \frac{\text{tg. } \delta}{\text{tg. } \beta}$ und $m : k < y : x \frac{p}{l}$ gefunden ist, nachweisen, daß $\frac{\text{tg. } \delta}{\text{tg. } \beta} < \frac{\text{tg. } \delta}{\text{tg. } \beta}$ und $y : x < y : x \frac{1}{l}$ ist, und hieraus wieder folgern, daß die Verbindungslinie der Punkte L und L' oberhalb derjenigen Linie liegt, welche durch L parallel der MR gezogen werden kann, und daß $P'L' > PL$ oder $l > l$ ist.

Ist aber $l > l$, so wie $l > p$, so muß, da $\text{tg. } \beta > \text{tg. } \alpha$ und $\text{tg. } \beta > \text{tg. } \beta$, oder $\frac{x}{l} > \frac{k}{p}$ und $\frac{x}{l} > \frac{x}{l}$ ist, auch $x > k$ und $x > x$ sein, also ist in der Figur stets $R'L' > RL$ und $RL > MK$. Hiernach kann nun die Lage der Punkte $L, L', L' \dots$, von welchen wir aus dem Voraufgehenden wissen, daß sie zwischen den Parallelen MR und KV sich befinden, noch genauer bestimmt werden.

Fig. 9. Beschreibt man nämlich mit QK einen Kreisbogen KT , so kann dieser, da $QR'', QR', QR > MQ$ und $R''L', R'L', RL > KM$ sind, die Linien QV'', QV', QV nur zwischen den Punkten R'', R', R und L'', L', L in Z'', Z', Z schneiden; es liegen also die Punkte L, L', L'' zwischen dem Bogen KT und der denselben in K berührenden Linie KV'' und daher mit K in einer krummen Linie.

Fig. 10. Es läßt sich aber auch unabhängig von K beweisen, daß die Punkte L, L', L'' einer krummen Linie angehören. Denn wird durch L die DE und durch Q die QQ' parallel der MT gezogen, auf DE das die MT in M' schneidende Perpendikel LQ' errichtet und mit LQ' der Kreisbogen LF beschrieben, sodann $M'R' = M'R$ gemacht, von Q durch R' die QS gezogen und S mit Q' und L verbunden, so ist $\triangle LM'R \cong \triangle LM'R'$, also $LR = LR'$ und $\mathcal{W}. RLM' = R'LM'$, ferner $QQ' : LQ' = \sin QLQ' : \sin LQQ'$ und $QQ' : QS = \sin QSQ' : \sin SQQ'$. Es ist aber, da $LQ' = QS$, das Verhältniß $QQ' : LQ' = QQ' : QS$, folglich auch $\sin QLQ' : \sin LQQ' = \sin QSQ' : \sin SQQ'$. In dieser Proportion ist nun $\sin LQQ' > \sin SQQ'$, weil $\mathcal{W}. LQQ' > \mathcal{W}. SQQ'$, mithin auch $\sin QLQ' > \sin QSQ'$, und hieraus folgt $\mathcal{W}. QLQ' > \mathcal{W}. QSQ'$, also ist wegen der vorhin gefundenen Gleichheit der Winkel QLQ' und $M'LR'$ auch $M'LR' > QSQ'$. Zieht man jetzt von den gleichen Winkeln QLS und $Q'SL$ beziehlich die ungleichen Winkel $M'LR'$ und QSQ' ab, so bleibt $\mathcal{W}. R'LS < \mathcal{W}. R'SL$, folglich ist $R'S < R'L$ oder $R'S < RL$, da $R'L = RL$ ist. Nun können aber die beiden Winkel $M'LR'$ und QSQ' , da bei fortschreitender Annäherung des Punktes R' an M' der erste ab, der zweite hingegen zunimmt, bei einer gewissen Lage von R' auch einander gleich werden, und ist $M'LR' = QSQ'$ geworden, so ist auch $\mathcal{W}. R'LS = \mathcal{W}. R'SL$ und damit zugleich $R'S = R'L$. Bevor aber dieser Fall eintritt, ist immer $R'S < R'L$,

wogegen bei noch größerer Annäherung des Punctes R' an M' die $R'S > R'L$ wird. Rückt endlich R' zwischen M' und R , so ist, weil dann $\mathfrak{B}. R'LS = R'LM + Q'LS$, $\mathfrak{B}. R'SL$ aber wie vorhin $= Q'SL - QSQ'$ wird, $\mathfrak{B}. R'LS$ jedesmal $> \mathfrak{B}. R'SL$, folglich auch $R'S$ stets $> R'L$. Da nun aber auf beiden Seiten von LM' immer zwei gleiche, durch $R'L$ ausgedrückte Linien liegen, und da $R'S$, so lange noch R' auf der rechten Seite von M' sich befindet, in mehreren Fällen $< R'L$, jedoch so bald als R' zwischen M' und R gerückt ist, stets $> R'L$ ist, so folgt, daß die $R'S$ mit der Annäherung an die RL wächst. Dieses Wachsen lehrt auch schon der Augenschein, indem man leicht übersieht, daß die $R'S$ bei größerer Entfernung des Punctes S von L immer kleiner wird, und zuletzt ganz verschwindet, wenn S mit F zusammenfällt. Findet aber ein solches Wachsen der $R'S$ statt, so muß diese Linie, welche zuletzt in RL übergeht, nicht nur in den Fällen, für welche es vorhin nachgewiesen ist, sondern stets $< RL$ sein, und hieraus geht denn auch mit Nothwendigkeit hervor, daß die Puncte L', L'' , deren Abstände von R' und R'' größer als RL sind, zwischen dem Bogen LF und dessen Tangente LE , also mit L in einer krummen Linie liegen müssen.

Nachdem nun vollständig erwiesen ist, daß die Puncte $K, L, L', L'' \dots$, in welchen die aus $N, P, P', P'' \dots$ auf $ABCD$ gefällten Perpendikel diese Ebene treffen, sich zwischen den Parallelen YX und $V''V''$ in einer concaven Linie befinden, so ist auch einleuchtend, daß die leuchtenden Puncte $N, P, P', P'' \dots$ in einer concaven Linie liegen.

§. 7.

Aus §. 6. ergibt sich als leichte Folgerung nachstehender Satz:

Gehen von einem Puncte O Lichtstrahlen aus, so daß sie die ihm zugekehrte Fläche AD des Prismas $ACEBDF$ in einer geraden, der Kante AB parallelen Linie YX treffen, so werden sie durch das Prisma so gebrochen, daß die Einfallspuncte auf der abgekehrten Fläche AF in einer concaven Linie ENF liegen.

Fig. 8.

§. 8.

Geht von einem in der Fläche AF zwischen der Kante AB und der geraden Linie ST befindlichen Puncte ein Lichtstrahl aus, so daß er durch die Brechung nach O gelangt, so liegt der Einfallspunct in der Fläche AD unterhalb der krummen Linie $R''MR''$.

Fig. 3.
u. 6.

Stellt V einen solchen Punct vor, und trifft das von V auf die Ebene AD gefällte Perpendikel VW die QU , so ist zu erweisen, daß der Einfallspunct Y zwischen R und W fällt. Man ziehe daher noch YV und YO , so ist YVW gleich dem Einfallswinkel für den Strahl VY und QOY gleich dem Brechungswinkel, folglich verhält sich $\sin QOY : \sin YVW = \sin ROQ : \sin LPR$. Wollte man nun annehmen, daß Y mit R zusammenfiel, so würde $\mathfrak{B}. QOY = \mathfrak{B}. QOR$ und $\sin QOY = \sin QOR$, also auch $\sin YVW = \sin LPR$, und $\mathfrak{B}. YVW = \mathfrak{B}. LPR$ sein, was aber unmöglich ist, da ja $VW < PL$ und daher der $\mathfrak{B}. YVW > \mathfrak{B}. LPR$ ist, sobald $YW = RW$ wird. Es kann also Y nicht mit R zusammenfallen, noch viel weniger aber fällt Y zwischen Q und R , weil sonst $\mathfrak{B}. QOY < \mathfrak{B}. QOR$ wäre, und dann auch $\mathfrak{B}. YVW < \mathfrak{B}. LPR$ sein müßte, was ebenfalls unmöglich ist, da in diesem Falle $\mathfrak{B}. YVW > \mathfrak{B}. RVW$ sein

Fig. 11.

würde, welcher wieder \sphericalangle W. LPR ist. Da nun der Einfallspunct Y weder in R, noch zwischen Q und R liegen kann, so muß er zwischen R und W fallen, und damit ist die oben aufgestellte Behauptung erwiesen.

§. 9.

Fig. 12. Liegt eine gerade Linie ST außerhalb des Prisma's ACEBDF parallel mit der Kante AB, so erscheint sie, aus einem in der Fläche AD gelegenen Punkte O betrachtet, als concave Linie.

Nimmt man an, daß der Punkt O und N, die Mitte der Linie ST, in einer die Seitenflächen des Prisma's senkrecht durchschneidenden Ebene liegen, und stellt GHI den Durchschnitt des Prisma's vor, steht ferner OQ senkrecht auf der Ebene AF, so wie NK, PL, P'L' senkrecht auf deren Erweiterung, und sind NM, PR, P'R' Strahlen, welche nach ihrer Brechung in O zusammenkommen, so liegen die Punkte K, L, L' in einer der ST oder der AB parallelen Linie, und die Perpendikel NK, PL, P'L' sind unter sich, die Winkel KNM, LPR, L'P'R' aber den Einfallswinkeln und die Winkel MOQ, ROQ, R'OQ den Brechungswinkeln gleich. Wird also wie in §. 1. $NK = p''$, $OQ = q''$, $KM = k''$, $MQ = m''$, $LR = x''$, $QR = y''$, W. $KNM = \alpha$, W. $LPR = \beta$, W. $MOQ = \gamma$, W. $ROQ = \delta$ gesetzt, so ist auch hier wie dort $k = p \operatorname{tg.} \alpha$, $m = q \operatorname{tg.} \gamma$, $x = p \operatorname{tg.} \beta$, $y = q \operatorname{tg.} \delta$, hingegen $\sin \alpha = n \sin \gamma$ und $\sin \beta = n \sin \delta$, weil hier α und β die in der Luft, γ und δ aber die im Glase liegenden Winkel sind. Auch läßt sich jetzt wie oben darthun, daß $\beta > \alpha$, $\delta > \gamma$, $LR > MK$, $QR > QM$, ferner daß W. $L'P'R' > \beta$, W. $R'OQ > \delta$, $L'R' > LR$, $R'Q > RQ$ ist, und daß sich verhält $m : k = q \operatorname{tg.} \gamma : p \operatorname{tg.} \alpha = q \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma^2}} : p \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha^2}}$
 $= q \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma^2}} : p \frac{n \sin \gamma}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma^2}} = q \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma^2} : p n \sqrt{1 - \sin^2 \gamma^2}$ und
 $y : x = q \operatorname{tg.} \delta : p \operatorname{tg.} \beta = q \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \delta^2} : p n \sqrt{1 - \sin^2 \delta^2}$. Denkt man sich nun die Punkte M und R durch eine gerade Linie verbunden, so entsteht die Frage, ob dieselbe der KL parallel ist, oder nicht. Wäre aber $MR \parallel KL$, so müßte $m : k = y : x$, also auch $q \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma^2} : p n \sqrt{1 - \sin^2 \gamma^2} = q \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \delta^2} : p n \sqrt{1 - \sin^2 \delta^2}$, und daher der Reihe nach $\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma^2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \delta^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma^2} \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \delta^2}$; $(1 - n^2 \sin^2 \gamma^2) \cdot (1 - \sin^2 \delta^2) = (1 - \sin^2 \gamma^2) \cdot (1 - n^2 \sin^2 \delta^2)$; $1 - \sin^2 \delta^2 - n^2 \sin^2 \gamma^2 + n^2 \sin^2 \gamma^2 \sin^2 \delta^2 = 1 - n^2 \sin^2 \delta^2 - \sin^2 \gamma^2 + n^2 \sin^2 \gamma^2 \sin^2 \delta^2$; $(n^2 - 1) \cdot \sin^2 \delta^2 = (n^2 - 1) \cdot \sin^2 \gamma^2$ sein, was jedoch unmöglich ist da $\sin \delta > \sin \gamma$ ist. Folglich sind die Linien MR und KL nicht parallel, noch weniger aber convergiren sie nach der rechten Seite hin, weil sonst $\frac{m}{k} < \frac{y}{x}$ u. demgemäß auch $(n^2 - 1) \sin^2 \delta^2 < (n^2 - 1) \sin^2 \gamma^2$ sein müßte, was aus dem vorhin angeführten Grunde ebenfalls unmöglich ist. Hieraus folgt denn, daß die Einfallspuncte R, R' . . . unterhalb der durch M der AB parallel gezogenen Linie UV liegen.

Fig. 13. Beschreibt man jetzt mit QM den Kreisbogen MX, so müssen, da QR, QR' . . . größer als QM, der Halbmesser des Kreisbogens sind, die dem Punkte M benachbarten Einfallspuncte sich zwischen diesem Bogen und dessen Tangente MV, also in einer von M ausgehenden convergen Linie befinden.

Es liegen jedoch auch sämtliche Einfallspuncte in einer krummen Linie, was ähnlich wie in §. 2. bewiesen werden kann. Haben aber die Einfallspuncte eine solche Lage, so muß auch die von O aus betrachtete gerade Linie ST als convexe Linie erscheinen.

§. 10.

Liegt die gerade Linie FG hinter dem Prisma ABCDE parallel mit der Kante AB, und Fig. 14. befindet sich der von H, der Mitte der FG, ausgehende Lichtstrahl HK in einer die Seitenflächen des Prisma's senkrecht durchschneidenden Ebene, so können die übrigen von FG ausgehenden Lichtstrahlen, welche nach ihrem Durchgange durch das Prisma mit dem durch die zweimalige Brechung bei K und N in die Lage KNO gerückten Strahl HK in O zusammenkommen, die der Linie FG zugekehrte Fläche AD des Prisma's weder in der durch K der AB parallel laufenden Linie IL, noch in Puncten über denselben treffen.

Zieht man noch durch N die $MP \parallel AB$, so wird der gegen HK convergirende Lichtstrahl QR nach §. 7. durch das Prisma so gebrochen, daß er die Fläche AC in einem über der Linie MP gelegenen Puncte S trifft, da ja nur der HK parallel laufende Strahl QX nach seiner Brechung in X einen Punct Z dieser Linie treffen kann. Es tritt also der Strahl QR aus dem Prisma in einer zu weit aufwärts gehenden, den Strahl NO nicht treffenden Richtung heraus, da in §. 2. erwiesen ist, daß die von einer geraden Linie IL ausgehenden Lichtstrahlen, welche in O zusammenkommen sollen, die Fläche AC in einer convergen, die MP nur in N berührenden Linie treffen müssen. Geht aber von Q der Strahl QT aus, so kann man $TU \parallel AB$ ziehen, und sich den Strahl HU vorstellen, welcher durch die Brechung in die Lage UVW gerückt wird. Dann ist nach dem so eben über die Strahlen HK und QR Gesagten einleuchtend, daß der Strahl QT nach seinem Heraustrreten aus dem Prisma den Strahl VW nicht treffen kann, sondern in einer zu weit nach oben gelenkten Richtung fortgeht. Da indeß VW und NO divergiren, so kann der Strahl QT, nachdem er das Prisma verlassen, noch viel weniger NO treffen. Die Strahlen QR und QT werden also durch das Prisma so gebrochen, daß sie nicht nach O gelangen, was aber von diesen beiden Strahlen dargethan ist, gilt auch von allen übrigen ähnlich liegenden, folglich ist der vorangestellte Satz erwiesen.

§. 11.

Aus diesem Satze ergiebt sich nun unmittelbar folgender:

Wird der Strahl HK durch die zweimalige Brechung in die Lage KNO gerückt, so können Fig. 14. die übrigen von FG ausgehenden Strahlen, welche durch das Prisma nach O gelangen sollen, die Fläche AD nur in Puncten zwischen IL und AB treffen.

Da nun aber die von IL ausgehenden und nach ihrer Brechung in O zusammenkommenden Strahlen nach §. 2. aus der Fläche AC schon so hervortreten, daß die gerade Linie IL abwärts gebogen erscheint, und da nach §. 8. die Strahlen, welche von Puncten zwischen IL und AB ausgehend nach O gelangen, die Fläche AC unterhalb der krummen Linie treffen, in welcher die Einfallspuncte der von IL ausgehenden und in O sich vereinigenden Strahlen liegen, so ist einleuchtend, daß auch die FG von O aus betrachtet nicht als gerade Linie erscheinen könne, und daß die beiden Theile HF und HG

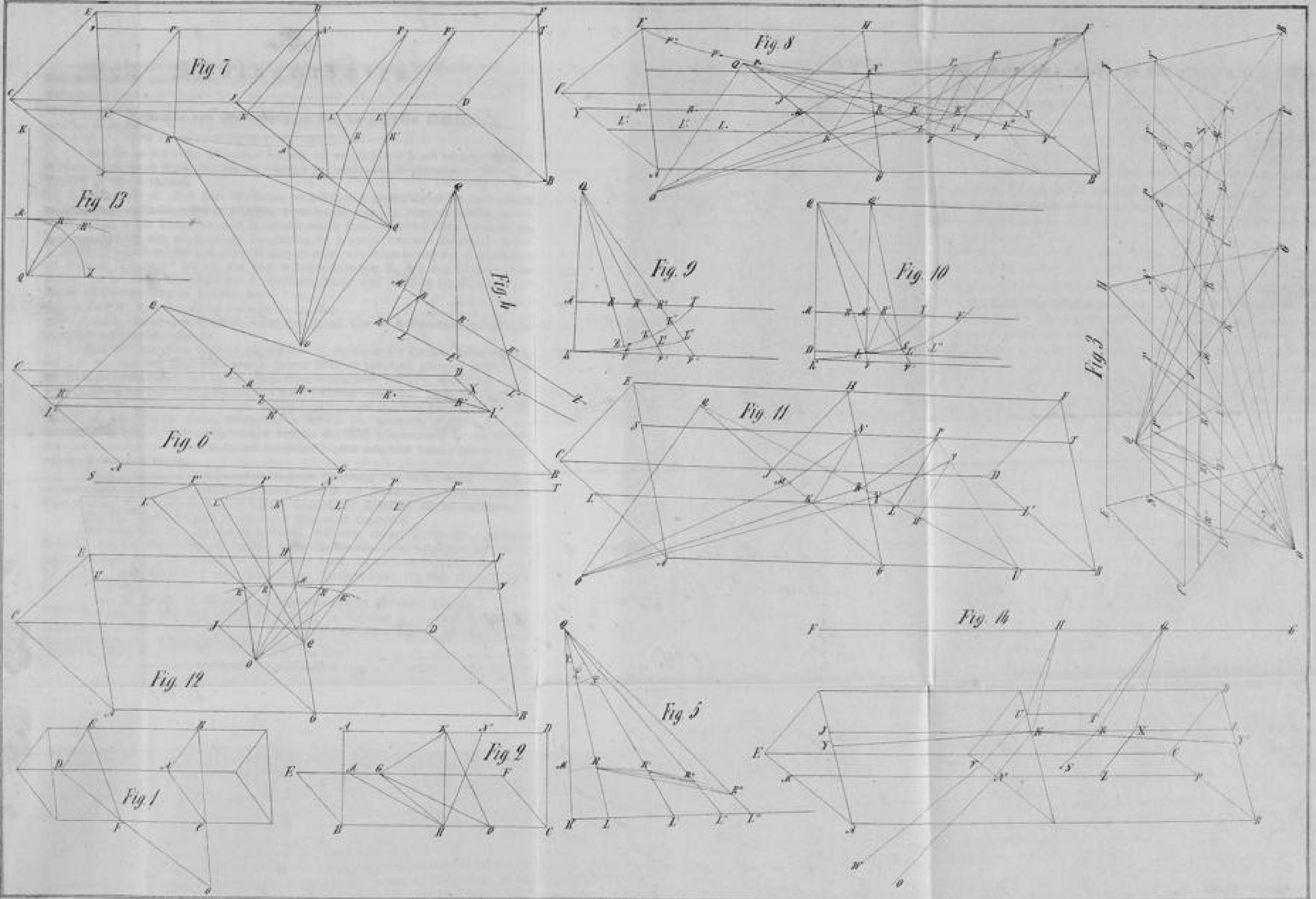
derselben durch das Prisma noch mehr abwärts gerückt werden, als die beiden Theile $K I$ und $K L$ der Linie $I L$.

Hiernach liegt also der eigentliche Grund, warum gerade Linien, durch ein Prisma betrachtet, gekrümmt erscheinen, in der eigenthümlichen, vorhin angegebenen Lage der Einfallspuncte in der jenen Linien zugekehrten Fläche des Prisma's *).

Fig. 14.

*) Ob diese Einfallspuncte in einer krummen oder gebrochenen Linie liegen, läßt sich nach dem Voraufgehenden noch nicht entscheiden. Man kann jedoch mit Hülfe der Elementarmathematik erweisen, daß die Fläche $A C$ auch, wenn jene Einfallspuncte sich in einer gebrochenen Linie $Y K Y'$ befinden, von den in O zusammenkommenden Strahlen in einer concaven Linie getroffen wird; nur ist der vollständige Beweis sehr weitausföhrig, und kann daher diesmal hier nicht mitgetheilt werden.

Beyer.



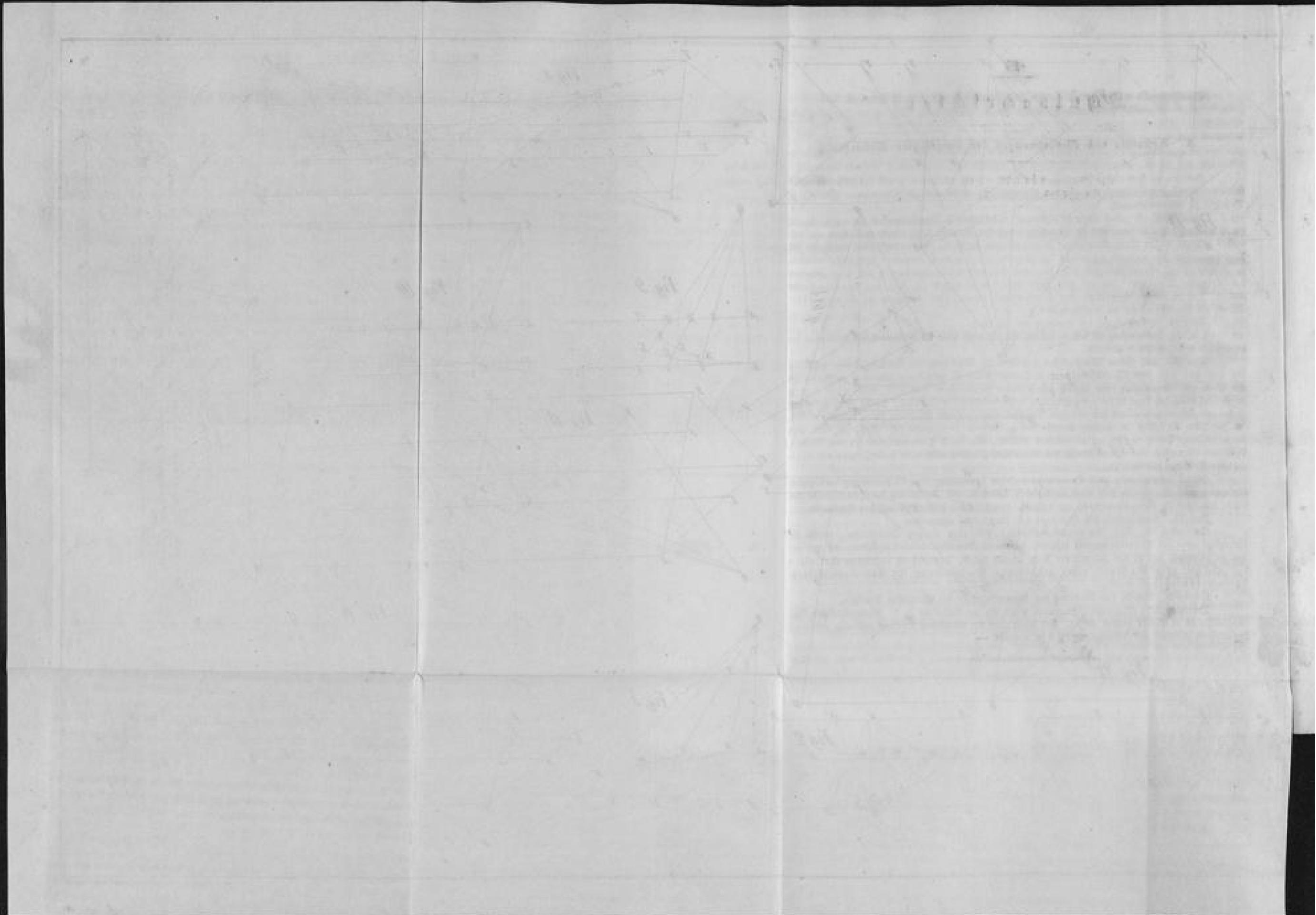


Fig. 14.

