Konstruktionsaufgaben

zur

Geometrie des Brocardschen Kreises.

Von

Dr. A. Emmerich.

Beilage zum 34. Jahresbericht des Realgymnasiums zu Mülheim (Ruhr).

Mülheim (Ruhr).
1887.

1887. Programm No. 450.

Im Jahre 1880 veröffentlichte Herr Brocard, capitaine du Génie in Montpellier, damals in Constantine, im Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht einige Sätze, denen zufolge 7 ausgezeichnete Punkte des Dreiecks auf der Peripherie eines Kreises gelegen sind, nämlich

1) der Mittelpunkt H des Umkreises;
2) der Grebesche Punkt K, definiert als Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes E, so dass $\sphericalangle KAB = EAC$, $\sphericalangle KBC = EBA$, $\sphericalangle KCA = ECB$;
3) die beiden Segmentärpunkte O, O', definiert durch die Gleichungen
$\sphericalangle AOB = 2R - B$, $\sphericalangle BOC = 2R - C$, $(\sphericalangle COA = 2R - A,)$
$\sphericalangle AO'C = 2R - C$, $\sphericalangle BO'A = 2R - A$, $(\sphericalangle CO'B = 2R - B)$;
4) die Punkte A_1, B_1, C_1, definiert als Schnittpunkte von BO und CO′, CO und AO′, AO und BO′.

Diese und spätere Entdeckungen Brocards, sowie die durch sie veranlassten zahlreichen Untersuchungen ausländischer und einheimischer Mathematiker, haben unsere Kenntnis von den Eigenschaften des Dreiecks in einem der interessantesten Kapitel, dem der merkwürdigen Punkte, in ungeahnter Weise gefördert. Eine grosse Zahl jener wichtigen Sätze nebst ihren Beweisen findet man in dem genannten Aufgaben-Repertorium vom Jahrgange 1881 an; zudem hat der Redakteur desselben, Herr Professor Dr. Lieber, sich der dankenswerten Mühe unterzogen, die Sätze und Beweise zusammenzustellen und in Programmabhandlungen zu veröffentlichen. Die erste dieser Abhandlungen, „Über die Gegenmittellinie und den Grebeschen Punkt" (Progr. des Friedrich-Wilhelm-Realgymnasiums in Stettin, 1886), berücksichtigt auch die von Grebe (1804–1874) gefundenen Sätze und die von den oben berührten Forschungen unabhängigen Untersuchungen des Herrn Direktor Dr. Kiehl in Bromberg.

Nachdem nun die Theorie des Brocardschen Kreises in ihren mehr elementaren Teilen zu einem gewissen Abschlusse gelangt ist, liegt der Gedanke nicht fern, die bereits gewonnenen Wahrheiten nach einer bestimmten Seite hin auf ihre Anwendbarkeit zu prüfen, die Sätze zur Aufstellung und Lösung von Konstruktionsaufgaben zu verwerten. So hat auch Herr Prof. Lieber seiner Abhandlung im § 31 eine Anzahl von Aufgaben beigefügt, „in denen eine Gegenmittellinie oder durch eine Gegenmittellinie bedingte Winkel gegeben und welche durch eine einfache geometrische Konstruktion zu lösen sind".

Nach meinem Dafürhalten verdienen nun diejenigen Dreiecksaufgaben eine ganz besondere Beachtung, in welchen verlangt wird, aus gewissen ausgezeichneten Punkten die ganze Figur herzustellen, und zwar hauptsächlich deshalb, weil die Determinationen solcher Aufgaben einen besonderen Gewinn versprechen; denn jede Grenze für die Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus 3 Punkten ergiebt eine eigentümliche Beziehung zwischen diesen, deckt die Fäden auf, mit welchen 2 Punkte den dritten umschlingen oder absperren, und lehrt damit eine bemerkenswerte Eigenschaft des Dreiecks kennen. Auf diesem Wege findet man z. B die bekannten Sätze, dass der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks gefesselt ist an die 3 Kreisflächen, deren Diameter die Seiten sind; dass die Mittelpunkte der 3 Ankreise aus diesen Flächen verbannt sind; dass das Zentrum des Feuerbachschen Kreises nicht in die 3 Kreisflächen eintreten kann, welche um die Seitenmitten mit den Seitenvierteln als Radien beschrieben sind.

Vorliegende Arbeit sucht aus der Reihe

$$A, B, H, E, K, O, O', A_1$$

Gruppen von je 3 Punkten auszulesen, welche als gegeben vorausgesetzt eine Zeichnung des $\triangle$ ABC mit Lineal und Zirkel gestatten. Im ganzen befinden sich in dieser Reihe nach Abscheidung von 20 Wiederholungen und von 7 identischen Gruppen d. h. solchen, die eine Gerade, ein gleichschenkliges oder ein rechtwinkliges Dreieck darstellen, 29 verschiedene Probleme. Diese ordnen sich nun nach 2 Kategorieen, je nachdem der Zusammenhang zwischen den gegebenen Punkten und den unbekannten Ecken des $\triangle$ ABC durch Gleichungen 1. oder 2. Grades oder durch höhere Gleichungen vermittelt wird. Die Probleme der letzteren Art, wie z. B. ABA_1, HEK, EKO, sind als der Konstruktion mit Lineal und Zirkel unzugänglich von unserer Betrachtung ausgeschlossen.

Den mit ihren Lösungen dargebotenen Aufgaben seien diejenigen Sätze aus der Geometrie des Brocardschen Kreises vorangestellt, welche im folgenden Verwendung finden.

1. Die Verbindungslinien der Seitenmitten mit den zugehörigen Höhenmitten gehen durch K.
2. HK ist Durchmesser des Brocardschen Kreises; $OO' \perp HK$.
3. Die Dreiecke über AB, BC, CA mit den Spitzen C_1, A_1, B_1 sind gleichschenklig und ähnlich; ihr Basiswinkel ϑ ist gleich $\sphericalangle$ OHK.
4. Das Brocardsche Dreieck $A_1B_1C_1$ ist ähnlich dem $\triangle$ ABC und hat mit ihm den Schwerpunkt gemeinsam.
5. Die Verbindungslinien des Grebeschen Punktes mit den Ecken des $\triangle$ $A_1B_1C_1$ sind parallel den Seiten des $\triangle$ ABC und werden durch die Mittellinien des letzteren halbiert.
6. Die Potenzlinie des Umkreises und des Brocardschen Kreises geht durch die 3 Punkte, in denen die Tangenten in A, B, C die Gegenseiten BC, CA, AB schneiden.
7. Die Potenz eines Segmentärpunktes bezüglich des Umkreises ist gleich dem Quadrate über der Sehne, die zum Peripheriewinkel ϑ gehört.

Aufgaben.

Bemerkung. Die Aufgaben No. 1 und 2 sind bekannt und nur der Vollständigkeit halber aufgenommen; ferner findet sich die Analysis von No. 8 bereits in dem Programm von Lieber, Seite 14 am Schlusse.

No. 1. ABE.

C teilt die Verbindungslinie von E mit der Mitte von AB aussen im Verhältnisse 2 : 3. — Denkt man sich in den Ecken eines Dreiecks gleiche Massen angebracht, so ist der Schwerpunkt der 3 Punkte derselbe wie der des Dreiecks. Fällt nun E in die Gerade AB, so genügt der konstruierte Punkt C der Bedingung, dass E Schwerpunkt der 3 gleichbelasteten Punkte A, B, C bleibt.

No. 2. AHE.

Diese Aufgabe findet man mit anderer Analysis in den „Geom. Konstruktionsaufgaben von Lieber und v. Lühmann", § 64a, 9. — Durch A und E ist P, die Mitte von BC, bestimmt. Der erste Ort für B und C ist der Kreis um H durch A, der zweite das Lot auf HP in P. — Die Lösung ist nur möglich, wenn P innerhalb des Kreises liegt. Errichtet man also in dem Punkte I, der AE im Verhältnisse 3 : 1 teilt, auf AE das Lot, so muss H auf derselben Seite des Lotes liegen wie E. Um diese Bedingung durch eine Beziehung zwischen den Seiten AH = r, HE = e, EA = d des gegebenen △ AHE auszudrücken beachten wir, dass

$$AH^2 - EH^2 > AI^2 - EI^2$$

sein muss und finden

$$r^2 - e^2 > \tfrac{1}{2}d^2.$$

Umgekehrt kann diese Relation benutzt werden, um die Bezirke ausfindig zu machen, welche bei fest gewähltem AH oder HE für E resp. A zur Verfügung stehen. Am zweckmässigsten bedienen wir uns hierzu der Koordinatengeometrie. Wir wählen z. B. A zum Anfangspunkte, AH zur + X-achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Bezeichnen wir die Koordinaten von E mit x, y, so wird

$$d^2 = x^2 + y^2,\ e^2 = (r - x)^2 + y^2,$$

und die Bedingung $r^2 > e^2 + \tfrac{1}{2}d^2$ gestaltet sich zu

$$(x - \tfrac{2}{3}r)^2 + y^2 < (\tfrac{2}{3}r)^2$$

d. h. Teilt man AH durch D im Verhältnisse 2 : 1, so ist DE < DA. In derselben Weise kann die Ungleichung $e^2 < r^2 - \tfrac{1}{2}d^2$ behandelt werden. Nehmen wir EH zur + X-achse, ein Lot auf EH, etwa in E fussend, zur Y-achse, so ergiebt sich für die Koordinaten x, y des Punktes A die Bedingung

$$(x - 2e)^2 + y^2 > 4e^2$$

d. h. Verlängert man EH um sich selbst bis G, so ist AG > EG.

Wir stellen die Resultate unserer Determination in folgenden Sätzen zusammen:

Die Lote in den Mitten der Mittellinien des △ ABC bilden ein Dreieck, welches auch den Mittelpunkt des Umkreises des △ ABC umschliesst. — Die 3 kongruenten Kreise durch die Ecken des △ ABC, deren Mittelpunkte auf den Eckradien des Umkreises, von H um $\tfrac{1}{3}r$ entfernt, liegen, bilden ein krummliniges Dreieck, welches auch den Schwerpunkt des △ ABC enthält. — Verlängert man EH um sich selbst (über H hinaus) und beschreibt den Kreis um den Endpunkt der Verlängerung durch E, so liegen die Ecken des △ ABC ausserhalb dieses Kreises.

Da H, E und der Höhenschnittpunkt H′ in gerader Linie liegen und zwar so, dass HH′ durch E im Verhältnisse 1 : 2 geteilt wird, so sind die beiden Aufgaben AHH′, AEH′ von der vorhergehenden nicht wesentlich verschieden. Die vollständige Determination derselben ist analog der obigen auszuführen und bietet für Lernende eine nützliche Übung. Dasselbe gilt von 3 weiteren Aufgaben, die durch Kombination von A mit dem Mittelpunkte des Feuerbachschen Kreises d. i. der Mitte von HH′ und je einem der Punkte E, H, H′ entstehen.

No. 3. AEK.

a. A, E, K liegen nicht in gerader Linie. Durch A und E ist P bestimmt. Da K auf der Geraden durch P und die zugehörige Höhenmitte T gelegen ist, so ist ein Ort für T bekannt; der andere Ort für T ist der Kreis über AI als Diameter, wo I die Mitte von AP bezeichnet. Da ferner K und E, H′ und H Winkelgegenpunkte sind, so ist $\sphericalangle$ EAH = KAT und somit ein Ort für H ermittelt; der andere ist die Parallele durch P zu TA. B und C sind nunmehr wie in No. 2 bestimmt.

Soll die Konstruktion möglich sein, so sind 2 Bedingungen zu erfüllen; 1) muss die Gerade PK den Kreis über AI treffen; ferner muss AH > PH oder $\sphericalangle$ APH > PAH, also 2) $\sphericalangle$ EAT > KAT sein. Aus letzterem ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen:

Bei ungleichen Schenkeln ist die Gegenmittellinie zur Basis (Ecktransversale durch A und K) kürzer als die zugehörige Mittellinie; die Höhe und Gegenmittellinie liegen deshalb immer auf derselben Seite der Mittellinie. $\sphericalangle$ KAH ist jederzeit ein spitzer Winkel; denn er ist gleich dem $\sphericalangle$ PAL, wo L den Fusspunkt der Höhe bezeichnet. P und H liegen stets auf derselben Seite von AK; denn P und H liegen auf derselben Seite der Halbierenden des $\sphericalangle$ A.

Um die Bedingung 1) darzustellen ziehen wir von P an den Kreis über AI die Tangenten; es muss dann K in dem Winkelraume dieser Tangenten einschl. der Schenkel liegen. (Die Lage von K im Scheitelwinkelraume wird durch die Bedingung 2) ausgeschlossen.) Der grösste Wert, den $\sphericalangle$ KPA erreichen kann, wird also erzielt, wenn PK den Kreis berührt; dieses Maximum ergiebt sich leicht zu arc sin $(= 1/3) = 19^0\ 28,'3$. (S. d. Anm.) Steht nun für K der ganze Tangentenwinkelraum zur Verfügung, oder bannt AE den Punkt in eine bestimmte Nähe? Angenommen die Gerade durch P und K treffe den Kreis nacheinander in den Punkten T_1 und T_2. Liegt K zwischen P und dem Kreise, so erhalten wir, da der Bedingung 2) zweimal entsprochen wird, augenscheinlich 2 Lösungen unserer Aufgabe. Andererseits kann offenbar K jenseit T_2 soweit entfernt gewählt werden, dass keine Lösung möglich ist. Um die Frage zu entscheiden ziehen wir die Radien MT_1, MT_2 und zu ihnen Parallelen durch A bis zum Schnitt mit PT_1T_2 in U_1, U_2. Es ist dann $\sphericalangle\ U_1A_1T_1 = EAT_1$, $\sphericalangle\ U_2AT_2 = EAT_2$. Somit finden wir, immer die Bedingung 2) berücksichtigend: Liegt K zwischen P und U_1, so gestattet die Aufgabe 2 Lösungen; liegt K auf U_1 oder zwischen U_1 und U_2, so haben wir 1 Lösung; unmöglich wird die Lösung, wenn K auf U_2 oder über U_2 hinaus fällt. Denken wir uns nun die Sekante PT_1T_2 um P gedreht und beachten, dass AU_1 und AU_2 gleich $4/3$ AM, also unabhängig von der besonderen Lage der Sekante sind, so erkennen wir, dass U_1 und U_2 einen Kreis um A beschreiben, dessen Radius $= 4/3$ AM $= 1/3$ AP $= 1/2$ AE ist, und für welchen die Tangenten von P aus dieselben sind wie für den Kreis um M.

Hiernach finden wir als Ergebnis unserer Determination: Ist zur Konstruktion eines Dreiecks eine Ecke A, der Schwerpunkt E und der Grebesche Punkt K ausserhalb AE gegeben, so muss K gelegen sein in dem sektorförmigen Raume, den man erhält, wenn man um A mit $1/2$ AE als Radius den Kreis beschreibt, und von P, dem Punkte, der AE aussen im Verhältnisse 3 : 1 teilt, die Tangenten zieht; auch die Lage von K auf dem geradlinigen Teile der Begrenzung dieser Fläche ist gestattet. Dabei resultieren 2 Lösungen, wenn K innerhalb des Raumes vor dem Kreise liegt; sonst ist nur eine Lösung vorhanden. Liegt insbesondere K auf dem Kreise über AI, so ist das resp. das eine der entstehenden Dreiecke bei A rechtwinklig. Zugleich ergiebt sich, dass im rechtwinkligen Dreieck der Grebesche Punkt die Mitte der Hypotenusenhöhe ist, wie auch aus Satz 1 unmittelbar erhellet.

b. A, E, K liegen in gerader Linie, $\triangle$ ABC wird also gleichschenklig. Hier müssen wir einen anderen Weg einschlagen. Wir fällen KR $\perp$ AB und verlängern RK bis zum Schnitt mit BC in S. Da BK und BE symmetrisch gegen die Halbierende des $\sphericalangle$ B verlaufen, so erkennen wir die Ähnlichkeit der Dreiecke BKR und BEP, BKS und BEA, gewinnen daher die Proportion RK : KS = 1 : 2. Wird nun RN $\parallel$ BC bis zum Schnitt mit AP gezogen, so ist Punkt N und zugleich ein Ort für R bestimmt; der andere ist der Kreis über AK. — Die Konstruktion ist möglich, so lange N zwischen A und K liegt, also nicht über A hinaus fällt. K muss demnach auf derselben Seite von A wie E liegen, von A um mehr als $^1/_2$ AE entfernt. In der oben konstruierten Fläche darf also K nicht auf dem durch E gehenden Durchmesser, sondern nur auf seiner Verlängerung bis P hin liegen.

Anmerkung. Welches ist in einem rechtwinkligen Δ APL das Maximum des Winkels zwischen der Hypotenuse AP und der Mittellinie PT der einen Kathete? Bezeichnen wir $\sphericalangle$ TPA mit x, $\sphericalangle$ TAP mit y, so ist

$$2\operatorname{tg}y = \operatorname{tg}(x + y),\ \operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{tg}y}{1 + 2\operatorname{tg}y^2}.$$

Vermittels Differentialrechnung findet man, dass tgx ein Maximum wird, wenn $\operatorname{tg}y = {}^1/_2\sqrt{2}$ und $y = 35^0\ 15',9$. Für diesen Fall ergiebt sich $\operatorname{tg}x = {}^1/_4\sqrt{2}$, also, wie oben, $\sin x = {}^1/_3$.

No. 4. AEA_1.

Wenn A, E, A_1 in gerader Linie liegen, so wird Δ ABC gleichschenklig, A_1 fällt mit K zusammen, und die Aufgabe reduziert sich auf No. 3b. Wir analysieren daher nur den Fall, wo A, E, A_1 nicht in gerader Linie liegen. — P ist bekannt, und da $A_1K \perp A_1P$ und A_1K nach Kiehl durch AP halbiert wird, so kennen wir auch K. Weiterhin ist uns bekannt der Fusspunkt L der Höhe zur Grundlinie; und da $\sphericalangle$ HAP = LAK, so ergeben sich 2 Örter für H, welche das gesuchte Dreieck eindeutig bestimmen.

Die Bedingung für die Möglichkeit der Konstruktion, AH > HP, kann leicht umgeformt werden in AG > AK, wenn G den Schnittpunkt des Lotes auf PA_1 in A_1 mit AP bezeichnet. Es folgt daraus, dass $\sphericalangle$ AGK < R; andererseits ist in dem rechtwinkligen Δ PGA_1 $\sphericalangle$ PGA_1 ebenfalls < R. Nun liegen A_1, G, K, ebenso A, G, P in einer Geraden, und da A_1 und K zu verschiedenen Seiten von G liegen, so liegen auch A und P zu verschiedenen Seiten von G d. h. G muss zwischen A und P liegen. Kann G jede beliebige Lage auf AP annehmen? Man bezeichne den Schnittpunkt von AL und A_1G mit U. Die Bedingung AG > AK zieht dann die andere GU > $^1/_2$ GK nach sich, also auch GU > $^1/_2$ GA_1. Daraus folgt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke AGU, PGA_1, dass AG > $^1/_2$ GP oder dass der Punkt G beschränkt ist auf die Strecke VP, wo V die Mitte von AE bezeichnet. Hieraus ist zu schliessen, dass der Scheitel des rechten Winkels GA_1P gefesselt ist an die Kreisfläche um E mit dem Radius EP. Wir finden also: Ist zur Konstruktion eines Dreiecks neben einer Ecke A und dem Schwerpunkte E die korrespondierende Ecke A_1 des Brocardschen Dreiecks gegeben, so ist A_1 angewiesen auf die Kreisfläche um E mit $^1/_2$ EA. Bedenken wir, dass E der entsprechend gemeinsame Punkt der ähnlichen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ist, so ergiebt sich, dass alle Linien des Brocardschen Dreiecks kleiner sind als die Hälften der entsprechenden Linien des Urdreiecks, woraus dann weiter folgt, dass der Brocardsche Kreis ganz innerhalb des Umkreises liegt.

Dem gewonnenen Resultate können noch folgende Formen gegeben werden: Der Kreis, welcher mit den Endpunkten seines Diameters die Verbindungslinie einer Ecke des $\triangle$ ABC mit der entsprechenden Ecke des $\triangle$ $A_1B_1C_1$ harmonisch im Verhältnisse 2 : 1 teilt, umschliesst den gemeinsamen Schwerpunkt beider Dreiecke. — Beschreibt man um eine Ecke des $\triangle$ $A_1B_1C_1$ mit ihrer doppelten Entfernung von E einen Kreis, so liegt die entsprechende Ecke des $\triangle$ ABC ausserhalb dieses Kreises.

No. 5. AKA_1.

P ist leicht zu bestimmen und damit die Aufgabe auf No. 4 reduziert. — Aus der Bedingung AG > AK folgt: Teilt man KA_1 im Verhältnisse 1 : 3 und errichtet im Teilpunkte das Lot, so liegt A auf derselben Seite des Lotes wie K. — K liegt innerhalb des Kreises durch A_1, dessen Zentrum AA_1 im Verhältnisse 1 : 2 teilt. — A liegt ausserhalb des Kreises durch K, dessen Mittelpunkt der Endpunkt der Verlängerung von KA um sich selbst ist.

No. 6. EKA_1.

S. No. 4. — Da U über die Mitte von GK hinaus nach K hin liegen muss, so muss die Projektion des Punktes E, der AP im Verhältnisse 2 : 1 teilt, über die Mitte von A_1G hinaus nach K hin liegen.

Wir geben dieser Bedingung andere Formen, wenn wir sagen: Verlängert man A_1E um sich selbst und beschreibt um den Endpunkt der Verlängerung einen Kreis durch A_1, so liegt K innerhalb dieses Kreises. — Teilt man EK im Verhältnisse 1 : 2 und beschreibt um den Teilpunkt einen Kreis durch K, so liegen die Ecken des Brocardschen Dreiecks ausserhalb dieses Kreises.

No. 7. AHK.

a. A, H, K liegen in gerader Linie, $\triangle$ ABC wird also gleichschenklig. Wir ziehen in B und C Tangenten an den Umkreis, welche die Seiten AC und AB bezüglich in B′ und C′ treffen. Nach Satz 6 ist dann die Gerade $\mathfrak{P}$ durch B′ und C′ die Potenzlinie des Umkreises und des Brocardschen Kreises, also bekannt. Schneidet AK den Umkreis noch in Q und $\mathfrak{P}$ in R, so hat man, da $\triangle$ CB′C′ gleichschenklig und BQRC′ ein Kreisviereck ist,

$$1)\ 4\ AC'^2 = CC'^2 + 4\ AR^2,$$

$$2)\ BC'.\ AC' = CC'^2,$$

$$3)\ AB.\ AC' = AQ.\ AR.$$

Aus 2) und 3) folgt durch Addition oder Subtraktion, je nachdem AK > AH oder < AH ist,

$$4)\ AC'^2 = CC'^2 \pm AQ.\ AR.$$

Elimination von AC′ aus 1) und 4) ergiebt in beiden Fällen

$$3\ CC'^2 = 4\ AR.\ QR = 4\ RS^2,$$

wenn S der Berührungspunkt einer Tangente von R an den Umkreis oder den Brocardschen Kreis ist. CC′ ist mithin die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Höhe RS ist. Da B′C′ = CC′ ist, so sind die Punkte B′, C′ und damit B und C selbst bestimmt.

b. A, H, K liegen nicht in gerader Linie. Da AH und AT, AK und AE Gegentransversalen sind, so ist ∢ TAE = HAK, worin zugleich die Bedingung enthalten ist, dass ∢ HAK < R sein muss. Ferner ist ∢ APH = H′AE, also = HAK oder = 2 R — HAK, je nachdem ∢ APH spitz oder stumpf ist. Schneidet daher der Umkreis die Gerade AK noch in W, so ist AWHP ein Kreisviereck und folglich ein Ort für P der Kreis durch A, W, H. Bezeichnen wir wieder den Fusspunkt der Höhe von A auf BC mit L, so ist das rechtwinklige △ ALP seiner Form nach eindeutig bestimmt, ebenso also ∢ APT oder APK. Damit ist als zweiter Ort für P der Kreisbogen gewonnen, der über AK als Sehne ∢ APK als Peripheriewinkel fasst und zwar auf derjenigen Seite von AK, auf welcher H liegt. (S. No. 3.)

Sobald der Kreis durch A, W, H und der Bogen über AK wirklich einen zweiten Schnittpunkt P haben, ist HP < HA und die Aufgabe lösbar. Der Punkt P ist aber dann und nur dann vorhanden, wenn 1) AK < AW und 2) ∢ APK < AHW ist. Die Bedingung 1) verlangt nur, dass K innerhalb des Umkreises gelegen ist; mit ihr ist auch die Bedingung 2) erfüllt, da ∢ AHW = 2 APL ist.

No. 8. ABK.

Da K Winkelgegenpunkt von E ist, so sind bekannt ∢ EAC = λ und ∢ EBC = μ; zieht man daher durch C Parallelen zu EA und EB, wodurch auf der verlängerten Grundlinie AB = c die Strecken AL = BM = c abgeschnitten werden, so ist Punkt C angewiesen auf die beiden Kreisbogen über AL und BM, welche, mit K auf derselben Seite von AB gelegen, ∢ λ resp. ∢ μ als Peripheriewinkel fassen.

Um zu entscheiden, unter welchen Bedingungen △ ABC möglich ist, führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, in Bezug auf welches die Abscisse von A : — $\frac{1}{2}$ c, die von B : $\frac{1}{2}$ c und die Ordinate von K positiv ist. Wir finden dann für die Kreise über AL und BM die Gleichungen

$$1)\ (x + c)^2 + (y - \tfrac{1}{2} c \cot \lambda)^2 = \tfrac{1}{4} c^2 (1 + \cot \lambda^2),$$
$$2)\ (x - c)^2 + (y - \tfrac{1}{2} c \cot \mu)^2 = \tfrac{1}{4} c^2 (1 + \cot \mu^2).$$

Daraus ergiebt sich für die Potenzlinie des Büschels, dem 1) und 2) angehören, die Gleichung:

$$3)\ 4\,x - y\,(\cot \lambda - \cot \mu) = o$$

und für den Kreis des Büschels, dessen Zentrum auf der Y-achse liegt:

$$4)\ x^2 + y^2 - \tfrac{1}{2}\,cy\,(\cot \lambda + \cot \mu) + \tfrac{3}{4} = o.$$

Aus Gl. 3) erkennen wir, dass wenn reelle Schnittpunkte der Kreise 1) und 2) existieren, dieselben mit der Mitte von AB in gerader Linie liegen; aus Gl. 4), in welcher $\cot \lambda + \cot \mu$ = cot KAB + cot KBA, also > o ist, dass diese Schnittpunkte mit K auf derselben Seite von AB liegen. Als Bedingung aber für das Vorhandensein reeller Schnittpunkte erhalten wir

$$\cot \lambda^2 + 14 \cot \lambda \cot \mu + \cot \mu^2 \geqq 48,$$

wo das Gleichheitszeichen den Fall der Berührung betrifft. Um diese Bedingung vermittels der Seiten des △ ABK, der gegebenen Strecken AB = c, AK = l, BK = m, auszudrücken, beachten wir, dass

$$\cot \lambda = \frac{c^2 + l^2 - m^2}{4\,\triangle},\ \cot \mu = \frac{c^2 + m^2 - l^2}{4\,\triangle},$$
$$16\,\triangle^2 = -c^4 - l^4 - m^4 + 2\,l^2m^2 + 2\,c^2l^2 + 2\,c^2m^2$$
ist, und finden
$$16\,c^4 + 9\,l^4 + 9\,m^4 - 18\,l^2m^2 - 24\,c^2l^2 - 24\,c^2m^2 \geqq o,$$
eine Relation, welche die einfacheren Formen annehmen kann:
$$(4\,c^2 - 3\,l^2 - 3\,m^2)^2 - 36\,l^2m^2 \geqq o,$$
$$[4\,c^2 - 3\,(l + m)^2]\,[4\,c^2 - 3\,(l - m)^2] \geqq o.$$

Der zweite Faktor ist grösser als
$$3\,c^2 - 3\,(l - m)^2 = 3\,(c + l - m)\,(c - l + m),$$
ist folglich positiv; der erste Faktor kann weiter zerlegt werden in
$$(2\,c + \sqrt{3}\,l + \sqrt{3}\,m)\,(2\,c - \sqrt{3}\,l - \sqrt{3}\,m).$$
Da nun ein Produkt sein Zeichen nicht ändert, wenn man positive Faktoren weglässt, so erhält unsere Bedingung die folgende Form:
$$c \geqq {}^1/_2\,\sqrt{3}\,(l + m).$$

Erinnern wir uns der Fundamentaleigenschaft der Ellipse, so erkennen wir, dass der Schnittpunkt der Seiten l und m in einer Ellipse $\mathfrak{C}$ (die Peripherie eingeschl.) liegen muss, deren Brennpunkte A und B sind, und von deren Nebenscheiteln aus die Seite AB unter Winkeln von 120^0 erscheint. Die halben Achsen dieser Ellipse sind ${}^1/_3\,\sqrt{3}\,c$, ${}^1/_6\,\sqrt{3}\,c$.

Somit lautet das Ergebnis unserer Determination: Die Aufgabe ABK hat 2 Lösungen, eine oder keine, je nachdem der Punkt K innerhalb der Ellipse $\mathfrak{C}$, auf ihrer Peripherie, oder ausserhalb derselben gelegen ist.

Dieses Resultat liefert uns folgende Sätze: Der Grebesche Punkt eines Dreiecks ist jederzeit gefesselt an die Flächen der 3 Ellipsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, deren Exzentrizitäten die Dreiecksseiten sind und deren Achsen sich wie 2 : 1 verhalten. — Beschreibt man um die Mitten der Seiten eines Dreiecks die Kreise durch die Nebenscheitel der zugehörigen Ellipsen und zieht in den Schnittpunkten mit den Seiten die Tangenten, so liegt der Mittelpunkt Z des Brocardschen Kreises in jedem der 3 von den Tangenten gebildeten Parallelstreifen, mithin in einem Sechseck, um welches sich ein dem Umkreise konzentrischer Kreis beschreiben lässt, dessen Radius sich zu ${}^1/_3\,\sqrt{3}\,r$ ergiebt.

No. 9. BKA$_1$.

Der Gleichmässigkeit der Bezeichnung halber behandeln wir das äquivalente Problem AKC$_1$. — Da $C_1K \parallel AB$ und $AC_1 = BC_1$, so ist Punkt B bekannt, mithin die Aufgabe reduziert auf No. 8.

Aufgabe der Determination ist es nun, die Bedingung, dass K in der unter No. 8 gefundenen Ellipse liegen muss, durch die Seiten $AK = l$, $AC_1 = n$, $C_1K = p$ des $\triangle$ AKC$_1$ auszudrücken. Bezeichnen wir noch AB mit c, BK mit m, das Lot von C$_1$ auf AB mit q, so sind c und m durch l, n, p darzustellen. Dabei setzen wir zunächst voraus, dass $\sphericalangle\ AC_1K < R$. Da
$$q^2 = n^2 - ({}^1/_2\,c)^2,\ q^2 = l^2 - ({}^1/_2\,c - p)^2,$$
so ist zuerst

$$c = \frac{p^2 + n^2 - l^2}{p}$$

und demnach die Hauptachse der Ellipse $\mathfrak{C}$: $^2/_3 \sqrt{3}\, \frac{p^2 + n^2 - l^2}{p}$.

Es ist ferner

$$m^2 = q^2 + (^1/_2\, c + p)^2 = 2\, p^2 + 2\, n^2 - l^2.$$

Soll nun K in $\mathfrak{C}$ liegen, so muss die Relation stattfinden

$$l + m < {^2/_3} \sqrt{3}\, \frac{p^2 + n^2 - l^2}{p}.$$

Durch Transposition von l, Quadrieren und Benutzung des Wertes von m^2 folgt hieraus

$$2\,(p^2 + n^2 - l^2) < {^4/_3}\, \frac{(p^2 + n^2 - l^2)^2}{p^2} - {^4/_3} \sqrt{3}\, \frac{l\,(p^2 + n^2 - l^2)}{p}.$$

Division durch den positiven Faktor $2\,(p^2 + n^2 - l^2)$ und leichte Umformungen führen dann zu

$$2 \sqrt{3}\; lp < 2\, n^2 - 2\, l^2 - p^2.$$

Zuvörderst ergiebt sich aus dieser Beziehung, dass $n^2 - l^2 > {^1/_2}\, p^2$ ist, d. h. Teilt man KC_1 im Verhältnisse 1 : 3 und errichtet im Teilpunkte ein Lot, so liegt A auf derselben Seite des Lotes wie K. Führen wir nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, in Bezug auf dessen Y-achse C_1 und K symmetrisch liegen, C_1 auf der positiven, K auf der negativen Hälfte der X-achse, so finden wir, mit x, y die Koordinaten von A bezeichnend,

a. $$^2/_3 \sqrt{3} \sqrt{(^1/_2\, p + x)^2 + y^2} < -\,(4\, x + p).$$

Ehe wir fortfahren, diese Ungleichung weiter zu vereinfachen, suchen wir ihr Analogon, dem Falle entsprechend, dass $\sphericalangle\, AC_1K > R$. Rechnungen, die den vorhergehenden ähnlich sind, liefern zunächst

$$2 \sqrt{3}\; lp < -\,(2\, n^2 - 2\, l^2 - p^2).$$

Dadurch wird der Punkt A auf diejenige Seite des Lotes verwiesen, auf welcher C_1 liegt. Statt a. erhalten wir

b. $$^2/_3 \sqrt{3} \sqrt{(^1/_2\, p + x)^2 + y^2} < 4x + p.$$

Dieselbe Kraft wie die Relationen a. und b. zusammen besitzt die durch Quadrieren aus ihnen hervorgehende

$$2\, x^2 - 2\, px - 6\, y^2 > p^2.$$

Hiernach ist der Punkt A in seiner Bewegung auf die Fläche einer Hyperbel beschränkt. Geben wir unserer Bedingung nach einander die Formen

$$(x - {^1/_2}\, p)^2 - 3\, y^2 > {^3/_4}\, p^2,$$

$$\frac{(x - {^1/_2}\, p)^2}{({^1/_2}\, p \sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{({^1/_2}\, p)^2} > 1,$$

so erkennen wir Gestalt und Lage der Kurve. Punkt C_1 ist der Mittelpunkt, Punkt K der eine Brennpunkt der Hyperbel, deren Asymptoten die Hauptachse unter Winkeln von 30° schneiden. In der Fläche oder auf der Peripherie der so definierten Hyperbel liegen jederzeit die Punkte A und B, A in dem einen, B in dem anderen Teile. Interessant ist noch das Ergebnis, dass von den beiden Winkeln AC_1K, BC_1K der eine stets $< 30°$ und der andere $> 150°$ sein muss;

daraus erhellet zugleich, dass der Basiswinkel ϑ der ähnlichen gleichschenkligen Dreieche ABC_1, BCA_1, $CAB_1 < 30^0$ ist, und dass deren Spitzen in den Ellipsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegen, wie auch schon aus der Determination von No. 8 zu folgern war.

No. 10. ABO.

Da $\sphericalangle OBC = OCA = OAB = \vartheta$, so ist der erste Ort des Punktes C der freie Schenkel des $\sphericalangle OBC = \vartheta$, der zweite der Kreis durch A und O, der AB in A berührt.

Zur Determination führen wir ein System rechtwinkliger Koordinaten mit dem Anfangspunkte A ein; AB sei die X-achse. Ferner setzen wir $AO = g$, $BO = h$, $\sphericalangle OBA = \eta$. Für den Kreis durch O, der AB in A berührt, finden wir dann die Gleichung

$$(x^2 + y^2) \sin \vartheta - gy = o$$

und für die Gerade BC

$$x + y \cot (\eta + \vartheta) = c.$$

Reelle Schnittpunkte der beiden Örter ergeben sich nur, wenn

$$\sin (\eta + 2 \vartheta)^2 - 4 \sin \vartheta^2 \geqq o.$$

Da nun

$$\sin (\eta + 2 \vartheta) + 2 \sin \vartheta = 2 \sin \vartheta (1 + \cos (\eta + \vartheta)) + \sin \eta,$$

also $> o$ ist, so kann die Bedingung vereinfacht werden zu

$$1) \sin (\eta + 2 \vartheta) \geqq 2 \sin \vartheta.$$

Daraus ist zu ersehen, dass ϑ sein zulässiges Maximum in 30^0 erreicht. Für diesen Fall ist auch $\eta = 30^0$ und die Figur ein gleichseitiges Dreieck.

Um die Bedingung 1) durch eine Beziehung zwischen den Seiten des $\triangle$ ABO zu ersetzen schreiben wir zuerst

$$\sin (\eta + \vartheta) \cos \vartheta + \cos (\eta + \vartheta) \sin \vartheta \geqq 2 \sin \vartheta.$$

Weil nun

$$\cos \vartheta = \frac{c^2 + g^2 - h^2}{2 \, cg}, \cos \eta = \frac{c^2 + h^2 - g^2}{2 \, ch}$$

$$\sin (\eta + \vartheta) : \sin \vartheta = c : h$$

ist, so nimmt die Relation 1) die Gestalt an

$$2) \; c^2 \geqq h^2 + 2 \, gh.$$

Mit dieser Formel wird uns die Frage vorgelegt: In welcher Weise beeinflusst jede der Seiten des $\triangle$ ABO die Lage der gegenüberliegenden Ecke? Nehmen wir an, AB sei fest, wählen A zum Anfangspunkte, AB zur X-achse rechtwinkliger Koordinaten, so wird

$$g^2 = x^2 + y^2, \; h^2 = (c - x)^2 + y^2,$$

und für die Koordinaten des Punktes O erhalten wir die Bedingung

$$2 \, cx - x^2 - y^2 \geqq 2 \sqrt{(x^2 + y^2)(c^2 - 2 \, cx + x^2 + y^2)}.$$

Die hierin enthaltene Forderung

$$2 \, cx - x^2 - y^2 \geqq o,$$

gleichbedeutend mit $c \geqq h$, besagt, dass O in dem Kreise um B durch A gelegen ist. Quadrieren und Ordnen geben unserer Bedingung die Form

$$3 (x^2 + y^2)^2 - 4 \, cx (x^2 + y^2) + 4 \, c^2y^2 \leqq o \text{ oder kurz } f \leqq o,$$

derzufolge O in seiner Bewegung durch eine Kurve 4. Ordnung beschränkt ist. Da die Gleichung $f = o$ nur gerade Potenzen von y enthält, so liegt diese Kurve symmetrisch gegen die X-achse. Für $y = o$ ergiebt sich $x = o$ und $x = \frac{4}{3}c$; die Kurve schneidet also die Seite AB in A und in dem Punkte A′, der AB aussen im Verhältnisse 4 : 1 teilt. Für $x < o$ und $x > \frac{4}{3}c$ wird $f > o$ d. h. Errichtet man in A und A′ Lote auf AB, so liegt die Kurve zwischen diesen Loten. Dass dieselbe ganz im Endlichen belegen ist, wurde schon vorhin bemerkt. Behufs weiterer Diskussion empfiehlt es sich, Polarkoordinaten : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ einzuführen. Nach Abscheidung des Faktors r^2, entsprechend dem Doppelpunkte A, erhalten wir

$$3 r^2 - 4 cr \cos \varphi + 4 c^2 \sin \varphi^2 = o$$

$$r = \frac{2}{3} c (\cos \varphi \pm \sqrt{1 - 4 \sin \varphi^2})$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Geraden durch A, welche gegen AB unter 30° geneigt sind, die Kurve berühren und einschliessen; die Berührungspunkte sind identisch mit den Nebenscheiteln der in No. 8 gefundenen Ellipse 𝔈. Die Kurve, welche O umschliesst, hat in A eine Spitze und gleicht in ihrer Gestalt dem Umrisse einer Birne. Deutlicher ergiebt sich ihr Verlauf aus folgendem Verzeichnisse zusammengehöriger Koordinatenwerte:

$c = 6, x = o$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$	$x = 8$
$y = o$	$y = \pm 0{,}41$	$y = \pm 1{,}08$	$y = \pm 1{,}73$	$y = \pm 2{,}20$	$y = \pm 2{,}42$	$y = \pm 2{,}36$	$y = \pm 1{,}91$	$y = o$

Der zweite Segmentärpunkt O′ ist gefesselt an die Kurve, welche zu der betrachteten symmetrisch liegt in Bezug auf die Mittelsenkrechte von AB als Symmetrieachse.

Wählen wir nun zweitens $AO = h$ fest, nehmen O zum Anfangspunkte, AO zur X-achse rechtwinkliger Koordinaten, so erhält die Bedingung 2) die Gestalt

$$y^2 + (h - x)^2 \geqq h^2 + 2 h \sqrt{x^2 + y^2}$$

und nach einigen Umformungen

$$(y^2 + x^2)^2 - 4 hx (y^2 + x^2) - 4 h^2 y^2 \geqq o \text{ oder kurz } f \geqq o.$$

Die Gleichung $f = o$ stellt aber eine Herzlinie dar. Konstruieren wir also um B den Kreis durch O und lassen auf diesem Kreise einen zweiten, gleich grossen, rollen, so beschreibt derjenige Punkt der Peripherie des rollenden Kreises, welcher mit O zusammenfällt, wenn beide Kreise sich in O berühren, die Kurve, in deren Fläche die Ecke A keinen Einlass findet.

Drittens sollen nun A und O fest, B dagegen beweglich sein. Wird AO als X-achse, die Mitte von AO zum Koordinatenanfang genommen, so unterliegen x, y der Bedingung

$$(\tfrac{1}{2} g + x)^2 + y^2 - (\tfrac{1}{2} g - x)^2 - y^2 \geqq 2 g \sqrt{y^2 + (\tfrac{1}{2} g - x)^2},$$

welche in die Form

$$y^2 \leqq gx - \tfrac{1}{4} g^2$$

gebracht werden kann. Nun gehört die Gleichung

$$y^2 = gx - \tfrac{1}{4} g^2$$

einer Parabel an, deren Scheitel die Strecke AO im Verhältnisse 3 : 1 teilt und deren Parameter $= g$ ist. Ziehen wir von A eine Tangente an die Kurve, so ergiebt sich deren Länge zu $\sqrt{3}\, g$, während die Ordinate des Berührungspunktes $\frac{1}{2} \sqrt{3}\, g$ ist. Darin liegt wieder die Thatsache ausgesprochen, dass $\vartheta \gtreqless 30^0$ ist.

Sind also A und O fest gegeben, so ist der Eckpunkt B angewiesen auf die Fläche und die Peripherie einer Parabel, deren Punkte von O und der Mittelsenkrechten auf AO gleichweit entfernt sind.

Anmerkung. Eine Ecktransversale durch einen Segmentärpunkt und die Seite, welche mit ihr den Winkel ϑ bildet, bestimmen ein Dreieck, in welchem die dem genannten Winkel gegenüberliegende Seite die kleinste, und zwar kleiner ist als die Hälfte der anstossenden Seite des gegebenen Dreiecks.

No. 11. $BO'A_1$.

Der Übereinstimmung in der Bezeichnung halber lösen wir die gleichwertige Aufgabe: BOC_1. — Da $C_1A = C_1B$ ist, und da A mit C_1 und O in gerader Linie liegt, so ist A vorläufig zweideutig bestimmt und die Aufgabe reduziert auf No. 10. Die Zweideutigkeit wird gehoben, wenn wir ein Resultat von No. 9 benutzen, demzufolge $\sphericalangle\, BC_1A > 120^0$ sein muss. Soll die Konstruktion möglich sein, so muss also $\sphericalangle\, BC_1O < 60^0$ oder $> 120^0$ sein. Diese Bedingung ist jedoch nicht ausreichend. Bezeichnen wir den Fall, wo C_1O und C_1A aneinanderstossen, als den ersten, den Fall, wo C_1O und C_1A sich teilweise decken, als den zweiten. Setzen wir $C_1O = i$ und wie früher $AC_1 = n$, $AO = g$, $BO = h$, so finden wir als exakte Bedingung für die Lösbarkeit zunächst wie oben

$$c^2 \geqq h^2 + 2\, gh.$$

Da $c > h$, so muss im zweiten Falle $i < n$ sein, O zwischen C_1 und A liegen. Im 1. Falle ist nun

$$n + i = g,\ c : 2\, n = c^2 + g^2 - h^2 : 2\, cg,$$

so dass die Beziehung zwischen h, i, n die Form erhält

$$1)\ (n + h + i)\ (n - h) \geqq hi,$$

woraus zu ersehen, dass alsdann $n > h$ ist. Im 2. Falle erhalten wir

$$2)\ (n + h - i)\ (h - n) \geqq hi,$$

was $h > n$ zur Voraussetzung hat. Die Bedingungen 1) und 2) schliessen einander aus; ist die Aufgabe also überhaupt lösbar, so hat sie nicht mehr als 2 Auflösungen.

Wählt man eine der Seiten des $\triangle\, BOC_1$ fest, so ist die gegenüberliegende Ecke durch eine Kurve höherer Ordnung in ihrer Bewegung beschränkt.

Nun ist es nicht ohne Interesse, aus den Beziehungen 1) und 2) direkt zu beweisen, dass $\sphericalangle\, BC_1O$ aus dem Intervall von 60^0 bis 120^0 ausgeschlossen ist. Wir setzen Kürze halber

$$\sphericalangle\, BC_1O = \varepsilon,\ \sphericalangle\, C_1BO = \varsigma,\ \sphericalangle\, BOC_1 = \delta.$$

1) kann dann ersetzt werden durch

$$(\sin \delta + \sin \varepsilon + \sin \varsigma)\ (\sin \delta - \sin \varepsilon) \geqq 2 \sin \varepsilon \sin \varsigma.$$

Formen wir hier Summe und Differenz in Produkte um und führen zunächst überall die halben Winkel ein, so finden wir

$$2 \cos {}^1/_2\, \delta \sin {}^1/_2\, (\delta - \varepsilon) \geqq \sin {}^1/_2\, \varepsilon,$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\, \varepsilon \leqq \frac{\sin \delta}{2 + \cos \delta}.$$

Welches ist der grösste Wert, dessen der Bruch fähig ist? Man zeichne in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 einen Durchmesser AB und verlängere denselben um 1 bis C. Ist nun der hohle Centriwinkel $AOD = \delta$, so ist $\operatorname{tg} DCA = \dfrac{\sin \delta}{2 + \cos \delta}$, folglich $\varepsilon \leqq 2\, DCA$. $\sphericalangle\, DCA$

erreicht sein Maximum in 30^0, also ist $\varepsilon \leqq 60^0$. In entsprechender Weise kann aus 2) gefolgert werden, dass im zweiten Falle $\varepsilon \geqq 120^0$ ist.

Anmerkung. Von den Segmentärpunkten aus erscheinen die Seiten unter Winkeln, die $> 2\,\vartheta$ sind.

No. 12. AHO.

Zunächst ist Q, der Punkt, wo HO den Umkreis trifft, bekannt; vermittels des Satzes 7 ist dann auch R, der Punkt, wo AO′ den Umkreis schneidet, bestimmt. Damit sind aber O′, K, der Brocardsche Kreis, C_1, B_1, endlich C, B gewonnen.

Nur lösbar, wenn O innerhalb des Kreises um H durch A gelegen; in diesem Falle 2 Lösungen, da HR auf beiden Seiten von HO angelegt werden kann. Gleichschenklig mit der Spitze A wird $\triangle$ ABC, wenn A auf dem Radius durch K resp. seiner Verlängerung gelegen. Rechtwinklig bei A wird $\triangle$ ABC, wenn AK = KL, wo L den zweiten Schnittpunkt von AK mit dem Brocardschen Kreise bezeichnet. Soll Punkt A dementsprechend bestimmt werden, so hat man nur nötig, HK um sich selbst bis I zu verlängern und über KI als Durchmesser den Kreis zu beschreiben. Man kann fragen, welche Beziehungen zwischen den Seiten AH = r, HO = s, AO = g des gegebenen Dreiecks stattfinden müssen, damit $\triangle$ ABC die erwähnten speziellen Formen annimmt. Wir bezeichnen noch die Mitte von QR mit S; es ist dann

$$QS = {}^1/_2 \sqrt{r^2 - s^2},\ \sin OHS = \tfrac{1}{2r} \sqrt{r^2 - s^2},\ \cos OHS = \pm \tfrac{1}{2r} \sqrt{3\,r^2 + s^2},$$

somit, wenn A in die Gerade HK fällt,

$$g^2 = r^2 + s^2 \mp s \sqrt{3\,r^2 + s^2}$$

oder ohne Radikal und Doppelzeichen

$$\text{a. } g^4 - 2\,(r^2 + s^2)\,g^2 + r^2\,(r^2 - s^2) = o.$$

Die Beantwortung der anderen Frage, unter welcher Bedingung $\triangle$ ABC bei A rechtwinklig wird, erfordert eine längere Rechnung; man gelangt schliesslich zu der Gleichung

$$\text{b. } g^4\,(3\,r^2 + s^2) - g^2\,(r^2 - s^2)\,(3\,r^2 + s^2) + (r^2 - s^2)^3 = o.$$

Die Gleichung a. liefert, da $r > s$ vorausgesetzt ist, stets 2 brauchbare Werte für g. Die Gleichung b. liefert reelle Werte für g nur dann, wenn $5\,s^2 \geqq r^2$. Im Falle der Ungleichheit giebt es 2 symmetrisch zu HK gelegene kongruente rechtwinklige Dreiecke. Die Gleichung $5\,s^2 = r^2$ hat zur Folge, dass a. übergeht in

$$(g^2 - 2\,s^2)\,(g^2 - 10\,s^2) = o,$$

b. dagegen in

$$(g^2 - 2\,s^2)^2 = o.$$

Demnach ist $r : g : s = \sqrt{5} : \sqrt{2} : 1$ die Bedingung für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. In einem solchen hat die Tangente des kritischen Winkels ϑ den Wert $^1/_2$, ϑ selbst ist also $= 26^0 33',9$.

No. 13. A_1OO'.

Der Brocardsche Kreis, H und K sind bekannt. Man verlängere KO über O hinaus bis zum Schnitt mit dem Umkreise in T und fälle von O das Lot OV auf HT. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke HOV und HTO folgt dann:

$$HO : OV = HT : TO.$$

Schneiden HO und HO′ den Umkreis in Q und R, so verhält sich ferner

$$HO : OO' = HQ : QR.$$

Nach Satz 7 ist nun $TO = QR$; somit ist auch $OV = OO'$ und Punkt V durch 2 Örter (den Kreis über HO als Diameter und den Kreis um O durch O′) festgelegt. HV und KO liefern den Punkt T, somit den Umkreis des $\triangle$ ABC. Durch A_1 sind B und C, vermittels C und O ist B_1, endlich durch O′ und B_1 Punkt A zu finden.

Soll die Konstruktion prinzipiell möglich sein, so ist für H der von OO′ entferntere Endpunkt des auf OO′ senkrechten Durchmessers zu wählen. Aber auch dann bleibt die Konstruktion unmöglich, wofern $OO' > HO$, wenn also $\sphericalangle\, OA_1O'$ zwischen 60^0 und 120^0 liegt. Beschreibt man deshalb über OO′ Kreise, welche Peripheriewinkel von 60^0 und 120^0 fassen, so liegen die Ecken des Brocardschen Dreiecks ausserhalb der beiden Sicheln. Fällt A_1 auf die Peripherie eines der beiden Kreise, so rückt Punkt T und damit $\triangle$ ABC ins Unendliche. Sobald Punkt A_1 ausserhalb der beiden Sicheln gelegen ist, führt unsere Konstruktion zu 2 Punktepaaren V und T; man beweist jedoch leicht, dass $HT_1 = HT$, dass also der Umkreis eindeutig bestimmt bleibt. Insofern nun die Geraden A_1O und A_1O' den Umkreis in 2 Punktepaaren schneiden, gewinnen wir 2 verschiedene unter sich parallele Lagen der Grundlinie BC, 2 verschiedene Lösungen der Aufgabe. Ist $\triangle\, A_1OO'$ gleichschenklig mit der Spitze A_1, so ergeben sich nur dann gleichschenklige Dreiecke mit der Spitze A, wenn $\sphericalangle\, A_1 > 120^0$ ist; ist jedoch $\sphericalangle\, A_1 < 60^0$, so resultieren 2 kongruente ungleichseitige spitzwinklige Dreiecke, deren Winkel die Relation erfüllen $\cot \alpha^2 = \cot \beta \cot \gamma$. Welcher Bedingung muss nun $\triangle\, A_1OO'$ genügen, damit $\triangle$ ABC bei A rechtwinklig werde? Es muss dann $BH \parallel A_1K$ verlaufen. Setzen wir

$$\sphericalangle\, OA_1O' = 2\,\vartheta,\ \sphericalangle\, A_1OO' = \delta,\ \sphericalangle\, A_1O'O = \delta',$$

so finden wir als analytischen Ausdruck für diese Thatsache

$$\sin {}^1/_2\,(\delta - \delta')^2 = \frac{\sin \vartheta^2}{1 - 4 \sin \vartheta^2}.$$

Diese Gleichung wird, wenn A_1 auf dem grösseren Bogen des Brocardschen Kreises wandert, zweimal erfüllt.

Die Probleme

No. 14. A_1HO, No. 15. A_1KO

kommen, da O′ leicht zu finden, auf das vorhergehende zurück. Sind A_1, H, O gegeben, so steht für $\sphericalangle\, A_1$ der Spielraum von 60^0 bis 120^0 zur Verfügung, KO hingegen schliesst $\sphericalangle\, KA_1O$ aus dem Bereiche von 30^0 bis 150^0 aus.

No. 16. BHA_1.

Da C und B symmetrisch gegen HA_1 liegen, so ist C bekannt. Schneidet BA_1 den Umkreis noch in C′, so folgt aus dem Satze 7, dass CC'^2 gleich der Potenz der Segmentärpunkte ist; HO oder HO′ ist mithin bestimmt als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Radius r des Umkreises und dessen andere Kathete CC′ ist. Da O auch auf BA_1, O′ auch auf CA_1 gelegen ist, so sind die beiden Segmentärpunkte bestimmt. Also ist der Brocardsche Kreis, damit B_1 und hierdurch A gewonnen.

Soll die Konstruktion möglich sein, so muss A_1 in der Fläche des Umkreises liegen und $CC' < BH$, also $\sphericalangle A_1BC < 30^0$ sein, mithin $\sphericalangle HA_1B$ zwischen 60^0 und 120^0 liegen. Fernere Bedingung ist, dass das Lot HY von H auf BA_1 kürzer ist als die für HO gewonnene Strecke. Es lässt sich beweisen, dass die eine Bedingung schon in der anderen enthalten ist. Setzen wir $A_1H = t$, $\sphericalangle A_1BH = \tau$, $\sphericalangle BA_1H = \sigma$, so wird

$$CC_1 = \mp 2\, r \cos \sigma,\ HO = r \sqrt{1 - 4 \cos \sigma^2},\ HY = t \sin \sigma,$$

und die zweite Bedingung erhält die Gestalt

$$r \sqrt{1 - 4 \cos \sigma^2} > t \sin \sigma$$

oder nach leichten Umformungen

$$(\cos \tau + 2 \cos \sigma)(\cos \tau - 2 \cos \sigma) > o.$$

Für $\sigma > 90^0$ gilt daher, weil dann $\tau < 90^0$ ist,

$$\text{a. } \cos \tau + 2 \cos \sigma > o.$$

Für $\sigma < 90^0$ gilt

$$\text{b. } \cos \tau - 2 \cos \sigma > o.$$

Können nicht in diesem zweiten Falle beide Faktoren negativ sein? Soll, σ als spitz vorausgesetzt, $\cos \tau + 2 \cos \sigma$ negativ ausfallen, so müssen wir annehmen, dass τ stumpf ist. Nun ist von den beiden spitzen Winkeln σ und $180^0 - \tau$ der erste kleiner als der zweite, mithin $\cos \sigma > - \cos \tau$, a potiori wäre also $\cos \tau - 2 \cos \tau < o$, was der Voraussetzung widerspricht. Aus a) und b) ist nun zu folgern, dass τ in jedem Falle $< \sigma$ ($A_1H < BH$) sein muss und dass $\cos \sigma$ die Grenzen $+ \frac{1}{2}$ und $- \frac{1}{2}$ nicht zu überschreiten vermag.

Verzeichnis der behandelten Probleme.

1. ABE.	2. AHE.	3. AEK.	4. AEA_1.
5. AKA_1.	6. A_1EK.	7. AHK.	8. ABK.
9. AKC_1.	10. ABO.	11. BOC_1.	12. AHO.
13. A_1OO'.	14. A_1HO.	15. A_1KO.	16. BHA_1.

Anhang.

Für Leser, welche noch keine Gelegenheit hatten, sich mit dem Brocardschen Kreise zu beschäftigen, füge ich ein geordnetes Verzeichnis derjenigen Sätze bei, welche die Beweise der eingangs erwähnten stufenweise vermitteln. Die Sätze gehören den Herren Brocard und Kiehl, die Ideeen zu den Beweisen den Herren Kiehl, Fuhrmann und Godt. S. Zeitschr. f. math. u. natw. Unterr., Jahrg. 1881 u. 82. Für eingehendere Studien sei auch noch auf die diesjährige Programmabhandlung des Herrn Lieber verwiesen.

1. Schneiden AO, BO, CO; AO', BO', CO' den Umkreis zum zweitenmale bezüglich in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, so sind die Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ kongruent dem $\triangle$ ABC. (Bew. $\sphericalangle \mathfrak{B} = B$; denn $\sphericalangle BOC = 2\,R - C = \mathfrak{B} + A$, also $2\,R = A + \mathfrak{B} + C$, etc.)

2. O ist der zweite Segmentärpunkt des $\triangle\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, O' der erste Segmentärpunkt des $\triangle\ \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$. (Denn $\sphericalangle \mathfrak{A}O\mathfrak{B} = AO'B$, etc.)

3. Die Dreiecke 𝔄𝔅ℭ, 𝔄′𝔅′ℭ′ können durch Drehungen um H von entgegengesetzter Richtung und gleichem Drehungsmasse $OHO' = 2\,\vartheta$ in die Lage des $\triangle$ ABC übergeführt werden; $O'H = OH$.

4. Satz 3a, S. 4. (Bew. arc ℭC = arc B𝔅′ = ϑ, etc.)

5. A_1, B_1, C_1 liegen auf dem Kreise durch H, O, O′. (Denn $\sphericalangle$ ℭOH = CO′H, also HOA_1O' ein Kreisviereck, etc.)

6. Die Entfernungen des Punktes K von den Seiten sind denselben proportional. (Denn die Abstände seines Winkelgegenpunktes E von den Seiten sind denselben umgekehrt proportional.)

7. Die Entfernungen der Punkte A_1, B_1, C_1 von den zugehörigen Seiten sind diesen proportional. (4.)

8. Die Verbindungslinien der Punkte A_1, B_1, C_1 mit dem anderen Endpunkte des durch H gehenden Diameters des Brocardschen Kreises sind parallel den Seiten des $\triangle$ ABC.

9. Der zweite Endpunkt des durch H gehenden Diameters des Brocardschen Kreises ist der Punkt K. (6) (7) (8).

10. $OO' \perp HK$. (3).

11. AK halbiert die Antiparallelen zu BC.

12. Zieht man in A und B Tangenten an den Umkreis, welche einander in N schneiden, so liegen C, K, N in einer Geraden. (6).

13. A (C, K, B, N) ist ein harmonisches Büschel; C, K, T, N (T auf AB gelegen) sind 4 harm. Punkte. (CN ist antip. zu BC.)

14. Satz 1, S. 4. (Man projiziere C, K, T, N von R, der Mitte von AB, aus auf die Höhe CF.)

15. Satz 5b, S. 4. (Man projiziere C, K, T, N von R aus auf C_1K.)

16. Satz 4a, S. 4. (Man vergleiche $\sphericalangle A_1B_1C_1$ mit A_1KC_1, 8.)

17. M_1, die Mitte von B_1C_1, ist gleichweit entfernt von AH′ und A_1H. (Ist $B_1Q \parallel AC_1$, $C_1Q \parallel AB_1$, so sind die Dreiecke BC_1Q, QB_1C kongruent wegen Gleichheit zweier Seiten und des Zwischenwinkels; mithin liegt Q auf A_1H.)

18. Satz 4b, S. 4. (Der Schwerpunkt des $\triangle A_1B_1C_1$ liegt (17) auf den Parallelen durch E zu HA_1, HB_1, HC_1.)

19. 𝔄, der Schnittpunkt der Tangente in A an den Umkreis mit BC, ist Pol von AK. (13.) Analoges gilt von den entsprechend zu definierenden Punkten 𝔅, ℭ.

20. 𝔄𝔅ℭ ist die Polare von K in Bezug auf den Umkreis. (19.)

21. Satz 6, S. 4. (Ist I der Schnittpunkt von HK mit 𝔄𝔅ℭ, so ist (20) $HK.\ HI = r^2$, $HI\,(HI - KI) = r^2$, $HI^2 - r^2 = IH.\ IK.$)

22. $AO = 2\,r \sin\vartheta \sin\beta : \sin\alpha$, $AO' = 2\,r \sin\vartheta \sin\gamma : \sin\alpha$.

23. $OO' = 2\,r \sin\vartheta \sqrt{1 - 4 \sin\vartheta^2}$. (Anw. des Cosinussatzes auf $\triangle AOO'$.)

24. $HO = r \sqrt{1 - 4 \sin\vartheta^2}$.

25. Satz 7, S. 4. (24.)

3. Die Dreiecke 𝔄𝔅ℭ, 𝔄'𝔅 [illegible] egengesetzter Richtung und gleichem Drehungsmasse OHO' $= 2\,\vartheta$ i [illegible]; O'H = OH.

4. Satz 3a, S. 4. (Bew. a [illegible]

5. A_1, B_1, C_1 liegen auf d [illegible] = CO'H, also HOA_1O' ein Kreisviereck, etc.)

6. Die Entfernungen des P [illegible] roportional. (Denn die Abstände seines Winkelgegenpunktes E von de [illegible] nal.)

7. Die Entfernungen der P [illegible] sind diesen proportional. (4.)

8. Die Verbindungslinien [illegible] dpunkte des durch H gehenden Diameters des Brocardschen Kreises [illegible]

9. Der zweite Endpunkt [illegible] dschen Kreises ist der Punkt K. (6) (7) (8).

10. OO' $\perp$ HK. (3).

11. AK halbiert die Antip [illegible]

12. Zieht man in A und B [illegible] er in N schneiden, so liegen C, K, N in einer Geraden. (6).

13. A (C, K, B, N) ist ein [illegible] B gelegen) sind 4 harm. Punkte. (CN ist antip. zu BC.)

14. Satz 1, S. 4. (Man pr [illegible], aus auf die Höhe CF.)

15. Satz 5b, S. 4. (Man [illegible]

16. Satz 4a, S. 4. (Man v [illegible]

17. M_1, die Mitte von B_1C [illegible] (Ist $B_1Q \parallel AC_1$, $C_1Q \parallel AB_1$, so sind die Dreiecke BC_1Q, QB_1C kongr [illegible] s Zwischenwinkels; mithin liegt Q auf A_1H.)

18. Satz 4b, S. 4. (Der S [illegible] den Parallelen durch E zu HA_1, HB_1, HC_1.)

19. 𝔄, der Schnittpunkt d [illegible] st Pol von AK. (13.) Analoges gilt von den entsprechend zu definier [illegible]

20. 𝔄𝔅ℭ ist die Polare vo [illegible]

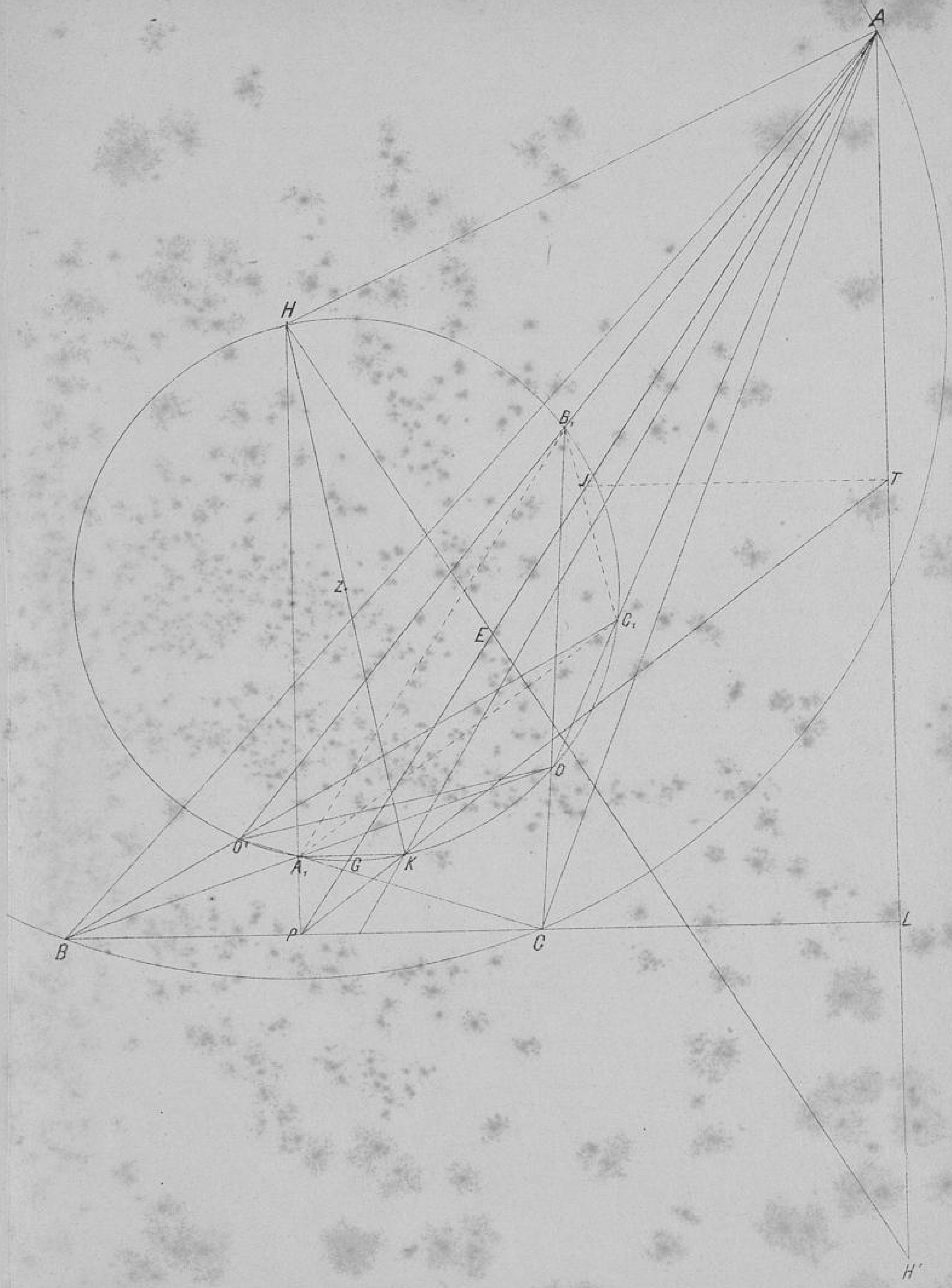
21. Satz 6, S. 4. (Ist I [illegible] 20) HK. $HI = r^2$, HI (HI — KI) $= r^2$, $HI^2 - r^2 = IH.\ IK.$)

22. AO $= 2\,r \sin \vartheta \sin$ [illegible]

23. OO' $= 2\,r \sin \vartheta \sqrt{1}$ [illegible] $\triangle$ AOO'.)

24. HO $= r\sqrt{1 - 4 \sin}$ [illegible]

25. Satz 7, S. 4. (24.)



A
H
B_1
J
T
Z
E
C_1
O
O'
A_1
G
K
P
B
C
L
H'