Zur Methodik des arithmetischen Unterrichts.

Jeder Unterricht ist in gewissem Sinn eine Kunst, und hat daher eine individuelle Seite, über welche sich streiten läßt. Nichts desto weniger wirkt eine vorurtheilsfreie Kenntnißnahme von verschiedenen Ansichten über diese Kunst stets anregend und fruchtbringend, auch wenn man hierbei nur der eigenen, individuell wohlbegründeten Meinungsverschiedenheit sich bewußt wird. Von diesem Gesichtspunkt aus beabsichtige ich nachstehend diejenige Methode des arithmetischen Unterrichts näher darzulegen, welche theils im Gegensatz, theils in Uebereinstimmung mit vielen Berufsgenossen ich bewährt gefunden habe.

Unsere höheren Lehranstalten bezwecken nicht nur die Mittheilung und Eruirung gewisser Kenntnisse und Fertigkeiten, sowie hierdurch praktische und formale Ausbildung der Geisteskräfte, sondern darüber hinaus Erziehung zu verständiger, thatkräftiger Sittlichkeit mittelst Bereicherung der jugendlichen Seele dergestalt an ihr bislang noch unbekannten sittlichen Empfindungen — in des Wortes weitester Bedeutung —, daß unter ihnen die zu bekämpfenden Triebe und Neigungen ersticken oder doch in einem Maße geschwächt werden, daß ihre gelegentliche Befolgung eine wirkliche Befriedigung niemals hinterläßt. Die gedachte Bereicherung geschieht auf Grund jener Kenntnisse und Fertigkeiten und gibt sich zu erkennen an der Freudigkeit, mit welcher sie gewonnen werden. Denn die glückliche Bewältigung auch des gesammten Unterrichtsstoffes aus bloß äußeren Gründen und selbst aus Pflichtgefühl würde nur auf eine gewisse Zähigkeit und Ausdauer des Geistes schließen lassen, welche für jede spätere Thätigkeit des Schülers allerdings auch eine werthvolle Errungenschaft bildet; sie würde dagegen sein Empfindungsleben nicht bereichert, noch veredelt haben und daher auch keine Gewähr bieten für sein späteres sittliches Verhalten. Wie indeß eine solche Einseitigkeit eines Schülers nirgend sich finden dürfte, so wirken umgekehrt auch nicht die höheren Lehranstalten allein erziehlich. Erziehliche Wirkung kommt vielmehr auch den Elementar- und Fachschulen, selbst dem großen, öffentlichen Leben zu in Staat und Kirche, Kunst und Wissenschaft, im weltumspannenden Handel und in dem durch die völkerverbindenden Eisenbahnen und Dampfer ermöglichten persönlichen Verkehr, überhaupt Allem, was den geistigen Horizont des Einzelnen in geeigneter Weise zu erweitern vermag. Die höheren Lehranstalten dienen vor allen anderen derartigen Veranstaltungen der sittlichen Befreiung des Menschen nur deßhalb vorzugsweise und mit der möglichst großen Sicherheit, weil sie ihre Zöglinge längere Zeit hindurch behalten und mit reicheren, das gesammte Geistesleben umfassenden Mitteln methodisch arbeiten, mit einem Wort, weil sie und insoweit sie Pflegstätten allgemeiner Bildung sind.

Der historisch-philologische Unterricht entnimmt hierbei seine Bildungsmittel wesentlich der Culturgeschichte der civilisirten Völker und führt somit die Jugend in eine sowohl dem Inhalt, wie dem Umfange nach unendliche Ideenwelt ein, durch welche sie zwar vielfach zu eigener Gedankenproduktion angeregt und zu idealem Streben begeistert wird, in welcher sie aber auch leicht den Boden unter den Füßen verliert. Dieser Gefahr und dem vorzugsweise receptiven und reproduktiven Verhalten der Schüler bei jener Einführung wirkt als nothwendiges Correctiv der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht entgegen, indem er einerseits den Geist stets nur mit solchen Eindrücken bereichert, welche dem Denken von allen Seiten zugänglich sind und von ihm vollständig erfaßt werden können, anderseits in ihm die Schüler durch absichtlich hierauf gerichtete Thätigkeit der Sinne (Beobachtung) und des vergleichenden Verstandes die bezüglichen Kenntnisse durch eigene Kraft sich erwerben müssen.

Hierdurch werden diese Kenntnisse des Realen ausnahmslos zu Erkenntnissen, die math.-naturw. Lectionen ein Zuchtmittel zur Wahrhaftigkeit, hierdurch wird wissenschaftlicher Geist, der Sinn für folgerechte Entwicklung, sowie insonderheit die Fähigkeit geweckt, bestimmtes, klares Wissen von Vermuthung und Wahrscheinlichkeit, von Vorurtheilen mit aller Schärfe zu unterscheiden. Dieser Unterricht bewahrt den Schüler mithin vor der, durch den hist.-phil. Unterricht nicht hinlänglich bekämpften, ja vielfach genährten Versuchung, über Dies und Jenes unverstandene Worte, hohle Phrasen zu machen oder vorschnell abzuurtheilen über Dinge, die außerhalb seiner Erfahrung und der Grenzen seiner sicheren Erkenntniß liegen, er macht ihn bescheiden in Bezug auf alle diese Dinge und erzeugt in ihm das Gefühl der Verantwortlichkeit für seine Rede, weil dieselbe hier ganz und gar der Ausdruck nur seiner eigenen Gedanken ist. Ueberdies befähigt er ihn zu deutlicher, unzweideutiger Ausprägung der Letzteren, wie kein anderer Unterricht.

Obwohl nämlich schon die kleinsten Kinder an Selbstthätigkeit, an eigenem Schaffen ihre größte Freude haben, und selbst mechanisches Rechnen in allen Classen stets Wetteifer hervorruft, nimmt der hist.-phil. Unterricht seiner Natur gemäß zu wenig der Schüler Produktivität in Anspruch. Gedächtnißmäßige Aneignung und Wiedergabe fremder Behauptungen bildet ja eben seinen Schwerpunkt. Hierzu kommt, daß in ihm nothwendigerweise vielfach Gegenstände zur Besprechung kommen, für welche die Jugend als solche noch kein hinlängliches Interesse und Verständniß haben kann. Während ein guter mathematischer Unterricht die Schüler nicht ohne Erkenntniß, ohne Anregung und lebendige Theilnahme läßt, fühlen sie im besten historisch-philologischen aus den angegebenen Ursachen sich oft gelangweilt, und dem entspricht in diesem Unterricht auch die Energie und Präcision ihrer Sprache.

Man vergleiche nur einmal ihre Redefertigkeit hier mit jener anderen (s. Oppels vorzügliche Abhandlung über den Einfluß des math. Unterrichts auf sprachliche Bildung in der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht von Hoffmann, Bd. I), welche sie von freien Stücken in ihren eigenen Lebenskreisen zeigen, wo es gilt, dem Mitschüler oder den Geschwistern gegenüber eine Meinung, die sie wirklich haben, zu vertreten oder zur Geltung zu bringen, eine Ansicht, welche wirklich die ihrige ist, mit Nachdruck als die richtige zu vertheidigen, oder sich durch Aufstellung von Fragen, Zweifeln und Problemen über einen Gegenstand, der sie persönlich interessirt, Belehrung zu verschaffen. Derselbe Schüler, der daheim in einer Disputation mit den Geschwistern und Gespielen oder selbst den Eltern, über Dinge des alltäglichen Lebens, über Zweckmäßigkeit oder Unzweckmäßigkeit eines Vorhabens, über Personen oder Gegenstände seiner persönlichen Sympathie oder Antipathie eine Zungenfertigkeit entwickelt, die Nichts zu wünschen übrig läßt, als vielleicht etwas größere Mäßigkeit und Ruhe, und an der seine Gegner nicht selten schlagenden Witz und Scharfsinn still bewundern, — wie ungeschickt und hölzern, wie steif und gezwungen drückt der sich aus, wenn er über die philosophischen Ansichten oder juristischen Leistungen Cicero's, über die Politik Philipps von Macedonien oder Julius Cäsars, über den Charakter des Pompejus oder des Octavianus, über den poetischen Werth der horazischen Satiren oder Episteln u. s. w. „seine Gedanken“ zu Papier bringen oder gar — mündlich vortragen soll! Warum? — Es sind eben nicht seine Gedanken, sondern fremde Gedanken, die er mehr oder minder gewissenhaft eingelernt oder bei der Lectüre vorgefunden, jedenfalls nicht völlig sich angeeignet hat: seine Gedanken, falls er solche hat, wird er verschweigen, weil er Mangels Beweis fürchten muß, daß sie ihm als unreif zurückgewiesen werden; oft auch wird er keine darüber haben, weil ihn die Sache noch nicht in dem Grad interessirt, daß dies Interesse entfernt zu vergleichen wäre mit demjenigen eines Gegenstandes, der ihn persönlich angeht, oder auch eines solchen, von dem er fühlt, daß er ihn selbständig (ohne Rücksicht auf althergebrachte Darstellungen oder Auffassungen) zu bewältigen im Stande, daß er bei Anwendung seines alltäglichen gesunden Menschenverstandes nicht in Gefahr ist, irre zu gehen. Gegenstände der letzteren Art bietet ihm aber — fast kein Unterrichtszweig, als der der Mathematik.

Denn die einfachen Beziehungen der Zahlengrößen und der Raumgebilde innerhalb der Grenzen der Elementar-Mathematik liegen ganz in der dem Verstande des Schülers zugänglichen Sphäre; hier vermag er über alle Einzelheiten, die da vorkommen, eine eigene Meinung zu haben, sich wirklich ein Urtheil zu bilden, aller Prämissen dieses Letzteren sich bewußt zu werden und alle Folgerungen (bei geschickter Führung seitens des Lehrers für sein Bewußtsein) selbständig zu ziehen, überhaupt alle Fragen, die der Gegenstand an ihn richtet, aus sich heraus zu beantworten. Dies geistige Schaffen wirkt anregend, wie gut geleitetes Kopf- und wie das mechanische Tafel-Rechnen, die Schüler freuen sich der gewonnenen Erkenntniß und empfinden das Bedürfniß des richtigen Gedankenausdrucks hier lebhafter als sonst, weil der Ausdruck um einer Sache willen erfordert wird, die sie als ihre eigenste interessirt. Wenn aber der Ausdruck dem Bedürfniß nach demselben auch nicht völlig entsprechen oder, was seltener der Fall ist, der ihm zu Grund liegende Gedanke zum Theil oder ganz falsch sein sollte, so hat dann der math. Unterricht vor jedem anderen noch den Vortheil voraus, die Antwort doch nur höchst selten einfach als „falsch" zurückweisen zu müssen. Er hat dies nicht nöthig, weil jede Unvollkommenheit, wie gänzliche Untauglichkeit einer Antwort stets logisch aufgefunden und nachgewiesen werden muß, er kann an diesem Nachweis, in welchen Punkten und warum hier die Antwort falsch, in welchen anderen sie richtig gewesen, sämmtliche Schüler betheiligen, und er wird hierbei, was die Hauptsache ist, dem wenigstens vorausgesetzten Streben des irrenden Schülers nach Wahrheit gerecht, weil die richtige Antwort ihm nichts nützen kann, so lange die einfach für „falsch" erklärte in seinem Bewußtsein noch eine verborgene Coexistenz fristet, und weil die kritische Besprechung der letzteren zugleich eine allseitige Anerkennung des „Richtigen" derselben mit sich bringt, dergestalt daß die schließlich aufgefundene correcte Antwort vorwiegend als nur verbesserte Auflage der ursprünglichen erscheint. Es ist dies dem irrenden, aber strebsamen Schüler um so mehr eine Genugthung, als bei der Beleuchtung seiner Antwort meistens sich herausstellt, daß keiner seiner Mitschüler im Vollbesitz der Wahrheit sich befand, keiner derselben mithin ihm absolut überlegen sich erweist, auch nach Ansicht seines Lehrers, nicht der Besitz der Wahrheit, sondern das Ringen nach, die Auffindung des richtigen Weges zu ihr die meiste Anerkennung verdiene. So gereichen die falschen Antworten dem mathematischen Unterricht gerade zu seiner Belebung, und ist in ihm das allmälige Herausbilden des Gedankens und seiner Form zugleich eine fortwährende, fruchtbare Stilübung. Wenn die Praxis dem häufig zu widersprechen scheint, so vergesse man nicht, die dem math. Unterricht ausgeworfene Stundenzahl mit derjenigen für den sprachlichen und die diesbezüglichen Erfolge beider eingehend zu vergleichen.

Der math.-naturw. Unterricht allein vermittelt zugleich die nothwendige Bekanntschaft und Freundschaft eines jeden Gebildeten mit der Natur; nur er lehrt, wie ihre Kräfte zum Besten der menschlichen Gesellschaft nutzbar zu machen sind, und nur er erzeugt durch den Nachweis ihrer unwandelbaren, Alles, auch den Menschen beherrschenden Gesetze in diesem selbst allmälig jenen gesetzlichen Sinn, welcher — ihm selbst meist unbewußt — vor Willkür ihn bewahrt und unüberlegten Handlungen. Denn von der unfehlbaren Zuverlässigkeit und Wirkungskraft der Naturgesetze überzeugt sich der Schüler, er erkennt auch und hat im späteren Leben unausgesetzt vor Augen, daß wir in den mannigfaltigsten Beziehungen unser Verhalten nach jenen Gesetzen ordnen und dieselben niemals ungestraft übertreten. Die gegentheilige Erfahrung glaubt er dagegen bezüglich der göttlichen und menschlichen Gesetze an sich selbst und Anderen häufig zu machen und schlägt dieselben daher leicht in den Wind, bezweifelnd, daß ihre Verletzung an ihm sich rächen werde. Dieser Zweifel wird geschwächt durch die Kenntniß untrüglicher Gesetze; — die beständige Berücksichtigung dieser gibt eine gewisse Uebung in der Beachtung jener und schärft die Wahrnehmungsgabe für die aus ihrer Uebertretung sich ergebenden Folgen. Doch genügt hierzu nicht die bloße Kenntniß jener Gesetze; es ist vielmehr — wie schon angedeutet — ihre Erkenntniß aus den Erscheinungen auf induktivem Weg erforderlich, und sie kommen erst dann nachhaltig zum Bewußtsein, imponiren erst dann mit ihrer ganzen Machtfülle, wenn sie durch mathematische Formeln ausgedrückt werden, und auf Grund derselben ihre Wirkungen unter gegebenen Umständen schon zum Voraus mit einer Sicherheit und Genauigkeit berechnet werden können, welche auch dem Anfänger eine nachfolgende Prüfung durch den Versuch überflüssig erscheinen läßt.

Der mathematische Unterricht insonderheit ist überdies noch von unschätzbarem Werth für die Weckung des ästhetischen Gefühls.

Denn mathematische Druckschriften sind bekanntlich viel theurer als die gewöhnlichen, weil ihr Satz so außerordentlich zeitraubend ist. Es ist dies aber nicht der Fall wegen der häufigen Verwendung von Zahlen und anderer math. Zeichen anstatt der Buchstaben, sondern in Folge der Verschiedenheit der einzelnen Zeilen nach Länge und Abstand, der complicirten Zusammensetzung math. Ausdrücke in der Richtung dieses Abstandes, sowie in Folge der erforderlichen symmetrischen Anordnung der Zeilen, der Zeichen der Gleichheit und der Interpunktionszeichen u. s. w. zu den Gleichungen. Alle diese Schwierigkeiten solcher Darstellungen liegen vor, auch wenn sie mit Feder und Tinte ausgeführt werden sollen, und können ohne ästhetisches Gefühl und Urtheil nicht überwunden werden. Wer mit diesen Schwierigkeiten vertraut ist, der empfindet beim Anblick einer solchen gelungenen Darstellung eine lebhafte, künstlerische Befriedigung, und es hat daher die Erzielung äußerer Schönheit bei schriftlichen math. Arbeiten in der Schule einen sehr hohen Werth. Zwar hat man hierauf früher wenig gegeben, man begnügte sich besten Falles mit der Ausbildung des Bedürfnisses nach logischer Erfassung und Durchdringung der Abhängigkeit gegebener Größen von einander, mit der Ausbildung des Bedürfnisses nach wissenschaftlicher Einsicht. Auch scheinen heute noch viele Vertreter des math. Unterrichts hiermit sich zu begnügen. Seitdem aber immer mehr die Geschäftswelt auf schöne Handschrift hält und die Mathematiker mit Rücksicht auf Schüler und Schriftsetzer häufiger Veranlassung haben zur Achtsamkeit auf elegante äußere Formen, verschwindet auch immer mehr die berüchtigte Gelehrten-Handschrift, und werden die Schmierhefte auch in der Schule immer seltner.

Soviel über diejenige Bedeutung und somit auch Ziele des math. Unterrichts, welche — wie mir scheint — nicht immer hinlänglich gewürdigt und beachtet werden. Das Letztere ist leider allzusehr entschuldbar, weil mit Rücksicht auf die gegebene Zeit die officiellen Anforderungen an math. Wissen und Können zu hoch gegriffen sind, um durchweg die nothwendige Muße zur richtigen Erzeugung desselben erübrigen zu können. Und ich leugne nicht, daß ich selbst häufig genug dem Reglement zu Lieb in diesen Fehler verfalle; die weite Aussicht über das noch zu absolvirende Pensum drängt oft zu einer Eile, bei welcher, um nur rascher vorwärts zu kommen, alle Genetik und Heuristik zeitweise über Bord geht. Nun will ich zwar nicht in Abrede stellen, daß auch Mangel an Lehrgeschick hieran sein Theil hätte — denn welcher Mensch wäre vollkommen —; doch aber glaube ich die Behauptung aufrecht halten zu können, daß der Werth des math.-naturw. Unterrichts für die Jugendbildung noch lange nicht völlig erkannt, und demgemäß ihm auch die nöthige Stundenzahl noch nicht zugewiesen ist. Oder wem verdanken wir den außerordentlichen Aufschwung auf allen Gebieten der menschlichen Thätigkeit und unser menschenwürdigeres Dasein, wenn nicht dem der Berücksichtigung der realen, faßbaren Verhältnisse immer mehr sich zukehrenden Sinne der Neuzeit?

Nach der noch gültigen „Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und höheren Bürgerschulen vom 6. October 1859" beginnt der math. Unterricht in Quarta mit wöchentlich 4 Stunden, setzt sich in Tertia und Sekunda mit je 4 fort und schließt in Prima mit wöchentlich 5 Stunden. Doch lassen die Unterr.-Ord. sowohl als auch die „Erläuternde Bemerkungen" zu derselben dahin gestellt, ob in Quarta der geom. und arith. Unterricht Beide gleichzeitig beginnen sollen oder nicht, und es hat sich in Folge dessen eine verschiedene Praxis ausgebildet. Wenn einer entgegenstehenden Directorial-Bestimmung ich nicht mich unterzuordnen hatte, habe in Quarta ich stets nur Geometrie durchgenommen und hierbei unter Beschränkung auf die wesentlichsten Sätze diese Lehre bis zur Aehnlichkeit gründlich erledigt, auch hinlänglich Zeit erübrigt zu den nothwendigen Repetitionen und der Durchnahme zahlreicher Constructions-Aufgaben. In Tertia konnten dann während des ersten Vierteljahres die für Math. und Rechnen ausgeworfenen 6 Stunden wöch. fast ausschließlich auf Arithmetik verwandt wenden ohne Schaden für das praktische Rechnen und die vorschriftsmäßige Absolvirung der Planimetrie in dieser Classe — nur die Rectification des Kreises war, was aus der Schwierigkeit des Gegenstandes selbst sich erklärt, in Sekunda stets nochmals einzuüben. Die vier Species und die linearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten bildeten das zu erledigende arith. Pensum der Tertia während eines jeden Schuljahres. Bei diesem Verfahren entwickelte sich eine freudige Theilnahme der Schüler an dem Unterricht und eine große Regsamkeit, es zeigte sich mithin ein sittlicher Gewinn, welchen unter übrigens gleichen Umständen ich wesentlich einerseits dem ermöglichten rascheren Fortschritt über die ersten schwierigen Anfänge hinaus zuschreiben zu dürfen glaube, anderseits der in Quarta vorausgegangenen hinlänglichen Befestigung im praktischen Rechnen und der verstandesmäßigen Uebung im Auflösen einfacher Regeldetri-Aufgaben.

Ist es nämlich schon im Allgemeinen bedenklich, die Unterrichtsfächer einer Classe gegen die der vorhergehenden Stufe gleichzeitig um zwei zu vermehren, so muß dies namentlich dann gelten, wenn für dieselben, wie für Geom. und Arith., zum ersten Male vorwiegend wissenschaftliche Thätigkeit und die Gewinnung zahlreicher, relativ durchaus neuer und dem Anfänger z. Th. sehr schwierigen Vorstellungen in Anspruch genommen wird. Muthet man doch demgemäß der Jugend nirgend zu, in einer Classe auch nur zwei Sprachen zugleich anzufangen, wohl aber den Gymnasial-Quartanern allenthalben Griechisch und Geometrie, den Real-Quartanern häufig gar Arithmetik und Geometrie, als ob die Anfänge dieser Disciplinen leichter zu bewältigen seien als Vocabeln und Declinationen. Wenn dann die Leistungen unbefriedigend ausfallen, allzuviel Schüler hinter dem Classenziel zurückbleiben, dann glaubt man wohl, der Lehrer trage die Schuld oder Mathematik erfordere ein absonderliches Talent. Wer dagegen erwägt, daß, wie der geographische Unterricht in Sexta vor Allem eine sorgfältige Unterweisung und Uebung im Gebrauch des Atlas geben muß, so der erste mathematische Unterricht in Quarta eine solche Unterweisung und Uebung im wissenschaftlichen Gebrauch der mit ihm verbundenen eigenthümlichen Vorstellungen, der wird von der Schwierigkeit dieser Leistung überzeugt sein, wenn dieselbe Uebung nur zweimal wöchentlich wiederkehrt und überdies noch gekreuzt wird von einer solchen an einem zweiten Gegenstand mit abermals neuen Vorstellungskreisen. Erst dann, wenn man es dahin gebracht hat — und hierzu gehört mehr Zeit per Woche als in irgend einem anderen Lehrfache — daß bei dem Hören und Sehen eines mathematischen Ausdrucks auch sofort der ihm adäquate Begriff dem Schüler zum Bewußtsein kommt, erst dann, aber auch nur erst dann hört die Mathematik auf dem sonst verständigen Schüler irgend schwierig oder gar ein Buch mit sieben Siegeln zu sein. Hiermit stimmt auch die Erfahrung, daß gedächtnißschwache Quartaner, welche in Folge dieser Eigenschaft an tiefere Geistesarbeit schon anderweitig sich gewöhnt haben, in der Mathematik unter übrigens gleichen Umständen bessere Fortschritte machen als andere, daß dieselben Schüler in den unteren und mittleren Classen in den Sprachen wohl zurückstehen, in den oberen dagegen durch eingehenderes Verständniß der Schriftsteller sich auszeichnen, daß dagegen vorzugsweise gedächtnißmäßig arbeitende Schüler, obwohl sie in den unteren und mittleren Classen bezüglich ihrer sprachlichen Leistungen vollständig genügen, später in den oberen in dieser Hinsicht ebenso abfallen, wie schon gleich anfänglich in der Mathematik. Hierher gehört auch die Erfahrung, daß verständigen Schülern, welchen der Unterricht in der Mathematik nach Maßgabe ihrer Aufmerksamkeit, sowie ihres Auffassungsvermögens zu rasch fortschritt, oft jahrelang jedes mathematische Verständniß verschlossen bleibt, bis dann späterhin in Folge zufällig eintretender Umstände, z. B. eines willigeren Eingehens auf den Unterricht oder (mit Rücksicht auf die Abgangs-Prüfung) eines besonderen Fleißes, ihnen oft plötzlich, wie man sagt, ein „Licht" aufgeht und sie das Wesentlichste des bisher Versäumten verhältnißmäßig rasch nachholen, was allerdings nur möglich ist, weil auch hier zutrifft: semper aliquid haeret. Zu einem gedeihlichen Unterricht in der Mathematik haben demnach die Schüler durchaus kein besonderes Talent nöthig, sie bedürfen nur der gewöhnlichen Auffassungsgabe und des gewöhnlichen Verstandes, obwohl einer größeren Aufmerksamkeit, wenn in Quarta auf Geometrie wenigstens volle 4 St. wöch., und in Tertia auf die Arithmetik während des ersten Vierteljahres wenigstens 4 bis 6 St. wöch. verwandt werden. Hierbei überwiegen in dieser Klasse Englisch und Französisch die beiden math. Disciplinen doch mit 4 St., gemäß der Unterrichts-Ordnung vom 6. Oct. 59, und das bereits in Quinta begonnene Französisch der Quarta die Geometrie daselbst mit 1 St. Wollte man aber Arith. und Geom. in Quarta gar gleichzeitig betreiben, so würden diese Fächer gegen Latein und Französisch derselben Klasse wöch. sogar mit 7 Stunden zurückstehen. Nun könnte zwar entgegnet werden, daß ja auch die Sextaner mit zwei ihnen noch unbekannten Disciplinen, dem Latein und der Geographie gleichzeitig beginnen müßten, und daß bei Befolgung meines Verfahrens dies auch in Tertia nicht zu vermeiden sei bezüglich der Arithmetik und des Englischen. Man beachte indeß, daß dem lat. Unterricht in Sexta wöch. 8 St. zugewiesen sind, auch Heimathskunde bereits voraufgegangen ist, und daß einem Tertianer vermöge der schon erlangten Kenntnisse in der deutschen, lateinischen und französischen Sprache gerade die englische höchstens bezüglich ihrer Aussprache Schwierigkeiten bereitet, daß endlich ein Tertianer die arith. Elemente viel leichter bewältigt als ein Quartaner, sowohl wegen seines höheren Alters, als der in Quarta erlangten größeren Fertigkeit im praktischen Rechnen. Die Erfahrungsthatsache einzelner Collegen, daß sie bei gleichzeitigem Beginn der Arithm. und Geom. in Quarta mit wöch. je 2 St. durchaus Befriedigendes geleistet haben, will ich nicht bezweifeln, rechne ihnen dies vielmehr zur großen Auszeichnung an und behaupte nur, daß ihre Erfolge bei Innehaltung meines Verfahrens noch ungleich bedeutender sein müßten, insonderheit würden solch energische Lehrkräfte in Folge des alsdann rascheren Fortschritts unzweifelhaft größere Freudigkeit und mehr selbständige Thätigkeit in den Schülern hervorrufen. — Wieder an anderen Anstalten pflegt in Quarta während des ersten Semesters nur die eine und während des zweiten nur die andere der beiden in Frage stehenden math. Disciplinen gelehrt zu werden, eine Einrichtung, über deren Erfolge praktische Erfahrung ich nicht besitze, ich jedoch dasselbe fürchte, was von den Erfolgen des Rechnens mit Brüchen in Gymnasial-Quarta so allgemein bekannt ist. Jedenfalls erleidet nach meinem Verfahren der geom. Unterricht nicht eine halbjährige, sondern eine Unterbrechung von höchstens drei Monaten und das auch erst in einem reiferen Alter der Schüler. — Es bliebe nun die Frage noch zu erörtern, ob es sich nicht empfehle, anstatt mit Geometrie — in Quarta mit Arithmetik zu beginnen und erst in Tertia die Geometrie folgen zu lassen. Wenn diese Lehre nach der „Unterrichts-Ordnung" nicht schon in Tertia absolvirt werden müßte, würde den letzteren Modus eines praktischen Versuches ich durchaus werth halten. Zwar scheint die wissenschaftliche Erfassung der arithmetischen Elemente mir schwieriger als diejenige der geometrischen bei zweckmäßiger Behandlung derselben, dagegen glaube ich, daß man, wenn irgend möglich, von Quartanern intensive wissenschaftliche Thätigkeit überhaupt noch nicht fordern sollte und in diesem Falle vorwiegend mit der mechanischen Einübung des Calculs sich genügen lassen dürfte. Seine wissenschaftliche Begründung würde in Tertia unbeschadet der Methode, ja zu ihrem Vortheil um so leichter nachzuholen sein, als eben dann die ersten, dem Anfänger nächstliegenden Schwierigkeiten bereits überwunden sind. Der gesammte Unterricht in Quarta gewänne an Einheit, alle blos mechanischen Fertigkeiten könnten hier so zu einer noch größeren Befestigung gelangen, das natürliche Bedürfniß nach theoretischer Einsicht würde zwischenzeitlich einigermaßen erwachen, die Kräfte zu seiner Befriedigung in Tertia ausreichender sich erweisen, und es entspräche die Entwickelung überhaupt mehr der historisch feststehenden und daher psychologisch wohl begründeten Thatsache, daß selbst die größten Mathematiker längst schon vertrauensvoll nach Methoden und mit Größen rechneten, z. B. den negativen, den imaginären u. a. m., bevor sie noch über deren Theorie sich einigen konnten. Indeß haben wir Lehrer vorläufig die Vorschriften der Unterrichts-Ordnung vom 6. October 1859 zu befolgen, und kann daher der gedachte Versuch des Weiteren hier unerörtert bleiben.

Nicht minder steht historisch fest, daß die Materien der verschiedenen Wissenschaften ursprünglich nicht um der theoretischen Einsicht willen, sondern aus praktischen Gründen Bearbeitung fanden, und erst an dieser Bearbeitung der wissenschaftliche Geist, obwohl auch nur sehr langsam, sich entwickelte. Demgemäß soll man am wenigsten Kindern zumuthen, die ersten Elemente einer Wissenschaft vom wissenschaftlichen Standpunkt aus sich anzueignen. Bezüglich der Arithmetik bestätigt sich diese Bemerkung fast in jeder Lehrstunde, selbst noch in den obersten Classen. Nicht die Theorie ist es, welche den jugendlichen Geist zumeist fesselt, sondern ihre Nutz-Anwendung: die Auflösung von Aufgaben, die Beantwortung von Problemen. Wenn das „Resultat" stimmt, erst dann fühlt der Schüler seine Thätigkeit nicht nutzlos verloren; das „Resultat" ist das Ziel seiner Anstrengungen, die „Richtigkeit" desselben sein Lohn, seine Freude, der Sporn zu erneuter Thätigkeit, leider auch häufig genug die erste Ursache seines unbedingten Vertrauens in die „vorausgeschickte" Theorie. Der geometrische Unterricht sollte daher von Problem zu Problem, nicht von Lehrsatz zu Lehrsatz fortschreiten, und dem arithmetischen Unterricht aus gleicher Veranlassung stets nur eine Aufgaben-Sammlung, nicht ein Lehrbuch zu Grund gelegt werden.

Als einer solchen Sammlung bediene ich mich derjenigen von Heis, nicht als der vielleicht besten, doch aber jedenfalls als einer sehr guten, und weil bis jetzt an jeder Lehranstalt, an welcher ich noch nicht wirkte, dieselbe bei meinem Antritt schon eingeführt war.

Ohne ein einleitendes und deshalb nicht ganz verständliches Wort über Wesen und Zweck der Arithmetik u. s. w. an die erwartungsvolle Jugend zu verlieren, gehe ich, mit der Aufgaben-Sammlung in der Hand, sofort medias in res. Theorie, Ueberschriften, Formeln und hierauf bezügliche Fragen der einzelnen Paragraphen, soweit möglich, vorläufig unberücksichtigt lassend, werden sogleich die leichtesten Uebungsbeispiele in Angriff genommen. So lange dieselben seitens der Neulinge und Schwächeren, welche immer zunächst herangezogen werden, während die älteren und intelligenteren Schüler ihr „Licht" einstweilen nicht leuchten lassen dürfen, gleichviel ob mit oder ohne wissenschaftliches Verständniß, jedoch ohne Verstoß ihre Erledigung finden, begnüge auch ich mich mit dieser Thatsache. Sobald jedoch, was früher oder später sicher eintritt, Nachhülfe erforderlich wird, erforsche ich zunächst die Ursache der Stockung.

Sie beruht sehr häufig darin, daß der rechnende Schüler „vor lauter Bäumen den Wald nicht sieht," er sieht wohl Ziffern und stellvertretende Buchstaben, der mathematische Ausdruck aber, zu welchem sie verbunden sind, kommt ihm weder im Ganzen, noch in seinen Theilen deutlich zum

Bewußtsein: er erkennt daher nicht das Problem, nicht die Aufgabe, welche an dieser Stelle zu lösen ist. Die mangelnde Erkenntniß hat er durch Beantwortung zweckmäßig gestellter Fragen ev. noch durch Substituirung bestimmter Zahlen an Stelle der unbestimmten, bei Vermeidung der Mitwirkung von Mitschülern, alsbald selbständig zu erlangen, was meistens auch ganz gut gelingt. Mit Rücksicht hierauf wird jeder complicirtere Ausdruck, damit dessen Transformation alle Schüler zu folgen vermögen, zuvor als solcher analysirt. Z. B. Heis §. 13. a. Nr. 44:

$$6m + [4m - [8n - (2m + 4n) - 22n] - 7n] - [7n + [9m - (3n + 4m) + 8n] + 6m]$$

ist ein Polynom, bestehend aus drei Gliedern; das erste heißt 6m, das zweite und dritte sind die beiden großen eckigen Klammern,*) die erste soll addirt, die zweite subtrahirt werden. Beide sind wiederum Polynome; die erste besteht aus drei Gliedern: 4m, kleine eckige Klammer, und 7n, deren beide letzteren subtrahirt werden sollen, u. s. w. Der vorrechnende Schüler sowohl als die controlirenden überfahren hierbei zur Unterstützung des Auges und sicheren Orientirung mit dem Finger die Glieder einzeln von dem jeweilig voranstehenden Vorzeichen bis zu dem nachfolgenden, dem nächstfolgenden Glied angehörigen Vorzeichen. — Handelt es sich dagegen um den einfachen Ausdruck:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$$

und kommt der Schüler mit seiner Transformation nicht zu Stand, auch wenn er ihn zu analysiren vermag, so setze er für die allgemeinen Zeichen bestimmte Zahlwerthe; alsbald wird er erkennen, daß hier die ihm schon bekannte Regel der Addition ungleichnamiger Brüche anzuwenden ist.

Wenn aber die Ursache der qu. Stockung tiefer liegt, in mangelnder Kenntniß des zur Transformation erforderlichen Verfahrens besteht, so ist das innerhalb der vier Species meist auch nur scheinbar der Fall, insofern nämlich der Schüler aus dem Unterricht im Kopfrechnen her das Verfahren wohl kennt, dasselbe ihm nur niemals als solches deutlich zum Bewußtsein gekommen, niemals von ihm als Regel ausgesprochen ist. Kein Anfänger wird selbständig finden, daß $(a + b) c = ac + bc$ ist, auch nicht bei Substitution bestimmter Zahlen für a, b und c. Fragt man ihn aber, wieviel 325 . 4 sei, so wird er rechnen: 300 . 4 ist 1200, 25 . 4 ist 100, 1200 und 100 macht 1300. In jedem solchen Fall gebe man passend gewählte Kopfrechenexempel, lasse die Methode ihrer Ausrechnung durch Induktion auffinden, durch eine Formel darstellen und aussprechen. Es ist dies in mehrfacher Beziehung eine ganz vorzügliche Uebung. Erstens wird durch die Induktion das Abstraktionsvermögen geweckt, zweitens hierdurch und durch die Formel-Bildung der Begriff des „Gesetzes" klar gestellt. Drittens entwickelt sich bei dem Versuch, die Formel in Worte zu übersetzen, naturgemäß und im rechten Augenblick das Bedürfniß nach termini technici und präcisem Gedankenausdruck, ein Bedürfniß, welches der sprachlichen Ausbildung überaus förderlich sich erweist. Viertens endlich hat derselbe Schüler ein persönliches Interesse daran, die von ihm selbst, obwohl unbewußt, schon längst richtig befundene und angewandte Regel nunmehr auch gegen alle (fingirte) Anzweifelung deduktiv sicher zu stellen. Er wird einen solchen Beweis nicht unnöthig, das Verlangen nach ihm nicht absurd finden und allmälig auf einen Standpunkt gelangen, von welchem aus die Beweise auch der seither ohne wissenschaftliches Verständniß, ohne Begründung angewandten Rechnungsregeln ihm nothwendig erscheinen.

Sobald diese Beweise nachgeholt und die zugehörigen Uebungsbeispiele mehrfach wiederholt worden sind, um der erforderlichen Gewöhnung an Buchstabenrechnung und der nothwendigen mechanischen Fertigkeit im Calcul sicher zu sein, kann der weitere Unterricht schon in Tertia wissenschaftlich ertheilt, wenigstens zu jeder anzuwendenden Regel sofort der Beweis verlangt werden. Und insoweit diese Regeln schon im praktischen Rechnen, bewußt oder unbewußt, Anwendung gefunden haben, werden auch ihre Formeln zuvor induktiv abgeleitet und sie selbst ausgesprochen, dann erst deduktiv bewiesen. Hierdurch erhält dem Schüler das ihm schon längst geläufige praktische Rechnen seine wissenschaftliche Begründung, wird das Wesen der Arithmetik ihm sachlich klar, und verschmelzen beide Disciplinen in seinem Bewußtsein

*) Dieser Ausdruck hat den Vortheil der Kürze und Deutlichkeit und erinnert an die analoge Bezeichnung und Benennung von Zahlengrößen mit Buchstaben. Im Gegensatz zu manchen Puritanern der mathematischen Terminologie halte ich aus demselben Grund und mit derselben Berechtigung Redewendungen aufrecht wie: „eine Gleichung durchmultipliciren", beide Seiten einer Gleichung mit derselben Größe dividiren, u. a. m.

zu einer höheren Einheit, von welcher die eine mehr ihre theoretische Seite, die andere mehr diejenige ihrer praktischen Verwerthung darstellt. Ueberall da jedoch, wo eine Anlehnung an die Erfahrungen aus dem praktischen Rechnen zunächst nicht sich empfiehlt, wie z. B. bei der Multiplication und Division von Polynomen durch solche, oder wo eine solche Anlehnung überhaupt nicht möglich ist, wie bezüglich des Quadrat- und Cubikwurzel-Ausziehens, sollte man zuvor wenigstens eingekleidete Aufgaben stellen, zu deren Beantwortung die zu erledigende Theorie erfordert wird, auf daß in dem Schüler erst ein Bedürfniß nach Auffindung der bezüglichen Regel oder doch wenigstens eine Einsicht in ihre Unentbehrlichkeit sich entwickelt. Ich sage wenigstens, weil der unbefangene, noch nicht wissenschaftlich gebildete Mensch unwillkürlich mindestens, cui bono? fragt.

Denn kaum ein Primaner, geschweige ein Tertianer vermag zu beurtheilen, welche Probleme zum Aufbau eines vollständigen Systems der Arithmetik successive aufzuwerfen sind, und manche derselben vermag er weder selbst zu beantworten, noch auch die ihm gegebene Antwort vorläufig als die richtige zu begreifen. Hierher gehören die Division algebraischer Summen und das Radiciren numerischer Zahlen; er muß hier zunächst mit der „Probe" sich begnügen. Dies geht soweit, daß viele Lehrbücher der Arithmetik sogar bei allen inversen Operationen auf die Probe als Beweis derselben sich beschränken. Oder ist es etwas anderes, wenn man mit der als richtig zu erweisenden Formel beginnt und, beide Seiten derselben gleichartig behandelnd, aus der Identität der Resultate auf diejenige der ursprünglich gleich gesetzten Ausdrücke zurückschließt? — ein Verfahren, welches, nebenbei bemerkt, nicht einmal pädagogisch sich rechtfertigen läßt. Indessen würde man doch zu weit gehen, wollte man von Tertianern viel mehr verlangen, als gelegentliche Wiederholung der ihnen faßbaren deduktiven Beweise; man muß zufrieden sein, wenn sie hierbei wiederholt von der Richtigkeit ihrer arithmetischen Regeln sich überzeugen. Aehnliches gilt von den Gesetzen des Radicirens und Logarithmirens bezüglich der Sekundaner. Auf jeder dieser Stufen ist Erzielung mechanischer Fertigkeit im Calcul die wichtigste Aufgabe; Gewandtheit in der theoretischen Begründung desselben kann erst auf der nächstfolgenden erlangt, und wissenschaftliche Systematik, combinatorische Entwicklung der Probleme erst in Prima zugelassen werden, zumal hier eine besondere Uebung im Calcul nicht mehr erforderlich ist. — So viel über die unterrichtliche Behandlung der Theorie im Allgemeinen.

Was nun die mechanische Rechenfertigkeit anbelangt, so muß der Lehrer des möglichst raschen Fortschrittes wegen und der hierdurch bedingten freudigen Theilnahme der Schüler am Unterricht: am Schaffen: der Schwierigkeiten, welche dem Anfänger sich darbieten, selbst deutlich sich bewußt sein und niemals zu viele derselben gleichzeitig in Angriff nehmen. — Vor Allem dürfen die zeitraubenden schriftlichen Arbeiten nicht früher eintreten, als bis solche unvermeidliche Aufgaben in Behandlung kommen, welche für bloßes Kopfrechnen sich nicht eignen. Schriftliche Arbeiten haben nämlich, wenn gut ausgeführt — und andere sollten überhaupt unstatthaft sein — ihre besonderen Schwierigkeiten, wie bereits oben ausgeführt wurde, und dürfen überdies lange Zeit völlig unterbleiben, wenn anders vier bis sechs Stunden wöchentlich auf den ersten arithmetischen Unterricht verwandt werden. Denn die vier Species können mit Ausnahme der Division algebraischer Summen zuvor im Wesentlichen eingeübt sein, und erst bei der dritten bis vierten Repetition dieses Pensums mag man zu schwierige Aufgaben schriftlich bearbeiten lassen. Zweitens muß man sich hüten, das Gedächtniß unnöthig in Anspruch zu nehmen, man muß vielmehr um des höchsten Zieles dieser Disciplin willen thun, als ob die Arithmetik ausschließlich Sache des Verstandes sei, und so viel möglich die Schüler zu verständigem Rechnen anhalten. Nicht ein einziges Gesetz der Addition oder Subtraction, selbst kein leichteres der Multiplication lasse ich daher auswendig lernen, jene werden anfänglich nicht einmal bewiesen, weil sie von selbst „einleuchten," und doch merken sich die Schüler, namentlich die denkfaulen, dieselben nur allzubald, um ihrer als Eselsbrücken sich zu bedienen. Hat doch auch das Kopfrechnen im praktischen Rechenunterricht, weil eben in ihm weniger nach sog. Regeln verfahren wird, eine viel geistbildendere Kraft als dasjenige auf der Tafel. Sobald die erste Regel oder Formel memorirt wird, verweise ich ausdrücklich auf das zu gleichem Zwecke schon längst ihnen eingeprägte Einsundeins und Einmaleins, mache sie darauf aufmerksam, wie ohne jenes sie nicht schnell addiren und subtrahiren, sie ohne dieses insbesondere nicht würden dividiren können. Erst allmälig lege ich scheinbar weniger Werth auf verständiges Rechnen, sobald die erforderlichen Formeln fortlaufend deduktiv bewiesen, und die Beweise selbst von Zeit zu Zeit wiederholt werden, wenngleich nicht zu dem Zweck, sie beständig präsent zu erhalten. Dagegen verlange ich in Secunda, daß schließlich jeder Schüler von jeder in Tertia gelernten und als richtig bewiesenen Regel in jedem Augenblick Rechenschaft ablegen kann, und einem Primaner darf dieses Vermögen bezüglich keiner seiner Regeln abhanden kommen. Wenigstens bezeuge ich im Entdeckungsfalle --- und ich bin immer darauf aus — ausdrücklich meine Meinung, daß eine verständnißlose Operation für ihn im Allgemeinen werthlos ist. Das Auswendig-, bezw. Aussprechenlernen der ersten Formeln verursacht überdies gerade dem Anfänger ganz besondere Schwierigkeiten, weil und so lange beim Sehen und Hören ihrer nackten Buchstaben und der Namen ihrer Bestandtheile deren Bedeutung ihm noch nicht schnell genug klar zum Bewußtsein kommt. Verursacht doch die Auflösung der kleinen Exempel ihm noch Mühe allein und ausschließlich, weil sie, obwohl mit Ziffern behaftete, allgemeine Zahlzeichen enthalten, und ist doch aus gleicher Veranlassung, gewöhnlich Mangel an Abstractionsvermögen genannt, selbst noch Secundanern und Primanern die Deduktion der inversen Operationen, des Radicirens und Logarithmirens eine der heikelsten Aufgaben. Hiezu kommt drittens, daß diese ersten Formeln, wie schon angeführt, einen ersichtlich praktischen Werth für den Schüler nicht haben, ein theoretischer aber für ihn überhaupt noch nicht existirt, daß daher die wissenschaftliche, gelehrte Beschäftigung mit ihnen leicht als nutzlose Quälerei ihm nicht nur erscheint, sondern auch wirklich ist und den arithmetischen Unterricht, dem er mit so großen Erwartungen entgegensah, ihm gänzlich verleiden kann, besonders wenn er von Haus aus eine praktisch angelegte Natur ist. — Viertens gehe man bei Transformation gegebener Ausdrücke behufs Einübung einer Regel anfänglich nicht oder doch nicht weit über diejenige Transformation hinaus, welche gerade eingeübt werden soll. Erst nachträglich sei in solchem Falle Zweck, unter Anwendung des früher Erlernten die Ausdrücke auf die einfachste Form zu bringen. Und wenn sich hierbei zeigt, daß die und welche der erforderlichen Regeln nicht mehr geläufig sind, so leite man sie, namentlich im ersten arithmetischen Unterricht, nicht etwa sogleich wieder ab, lasse sie vielmehr von besseren Schülern hersagen, event. die Aufgaben nachsehen, an welchen sie zuerst eingeübt wurden, und, wenn auch das nicht hilft, diese Aufgaben selbst sofort in hinreichender Zahl wieder durchnehmen. Die mechanische Rechenfertigkeit in der Anwendung einer Formel geht nämlich nicht minder leicht dem Anfänger verloren als die Theorie, und muß daher jener Schaden als der Größere zunächst reparirt werden. Die wiederholte deduktive Ableitung der Regeln dagegen bleibt größeren Repetitionen vorbehalten und geschieht im Secunda ohne Anwendung auf Uebungsbeispiele, jedoch mit Rücksicht auf bewußte und begründete systematische Anordnung, erst in Prima auch mit Rücksicht auf bewußte Vollständigkeit. — Hierbei ist fünftens nicht an alle Schüler gleichzeitig das gleiche Maß an theoretischer Einsicht zu verlangen und nicht so lange zu verweilen, bis diesem Verlangen entsprochen wird, vielmehr der Zeit und häufigen Wiederholungen zu überlassen, daß auch die Schwächeren das Ziel erreichen. Dies gilt in Tertia namentlich von der Entwickelung des Ansatzes zu eingekleideten Aufgaben der Gleichungen ersten Grades. Dagegen muß und kann von allen Schülern gefordert werden, daß ein jeder einen jeden nicht zu complicirten Buchstaben-Ausdruck des bezüglichen Classenpensums, mit dem Buch in der Hand, mündlich vorzurechnen verstehe. Mit geringen Ausnahmen wird dies auch erreicht, wenn an jeder derartigen Aufgabe alle Schüler stets gleichzeitig beschäftigt werden, so zwar, daß jeder bereit sein muß, in jedem Augenblick mit der Rechnung genau da fort zu fahren, wo bei seinem Aufruf der Vorgänger stehen geblieben ist. Bei Repetitionen verbessere und belehre ich selbst wenig oder nicht, überlasse dieses vielmehr den Mitschülern, und es besorgen dieselben dies Geschäft bei häufigem Wechsel der Vorrechner mit einer Lust und einem Eifer, sowie Erfolg, welche nichts zu wünschen übrig lassen. Hat der aufgerufene Schüler zufällig nicht aufgemerkt oder kann er nicht verbessern und fortfahren, so nehme ich im Allgemeinen sofort einen anderen, ohne weiter ein Wort zu verlieren. Unaufmerksamkeit und Unkenntniß des Rechnungs-Mechanismus werden durch die stille und schnelle Uebergehung ihres Trägers und durch die Correctur seitens der Mitschüler am empfindlichsten bestraft und am erfolgreichsten bekämpft. Hierzu aber gehört, daß man den Betroffenen nicht allzulange unter der Geringschätzung seiner Concurrenten leiden läßt, vielmehr möglichst bald an einer Aufgabe, welcher er voraussichtlich gewachsen ist, ihm wieder Gelegenheit gibt zur Reparatur seines Rufes als Arithmetiker bezw. Algebraist.

Dieselbe Gleichmäßigkeit in den Leistungen bei Anfertigung schriftlicher Arbeiten, der Ausrechnung größerer und schwierigerer Aufgaben zu erzielen, ist nun zwar nicht möglich. Doch kann man auch hier großen Wetteifer hervorrufen und Früchte zur Reife bringen, deren namentlich die schwächeren Schüler von Herzen sich freuen. Zu dem Ende wird von einem Schüler, welcher schön schreiben kann — ein anderer wird überhaupt nicht zugelassen, muß vielmehr mit Dictiren sich begnügen — je ein Musterbeispiel an der Tafel ausgerechnet. Der Vorrechner muß in diesem Fach ein Neuling sein, damit er recht viele Verstöße gegen die äußere Form der Darstellung mache, die alsdann unter meiner Leitung und unter Angabe der Gründe zur Nachachtung für Alle verbessert werden. Selbstverständlich haben die Letzteren sorgfältige Abschrift zu nehmen. Demnächst bezeichne ich die schriftlich zu rechnenden Aufgaben gleicher Art in Heis' Sammlung, mit leichteren beginnend, bei deren Ausrechnung die ganze Aufmerksamkeit zunächst auf die Darstellung allein sich richten kann. Hierdurch kommt ein neues, belebendes Element in den Unterricht, während zugleich die schwächeren Schüler Zeit gewinnen zur Befestigung wenigstens im Mechanismus des Calculs; diese haben daher doppelten Gewinn und erlangen wieder frischen Muth, besonders solche, welche durch schöne Handschrift sich auszeichnen, was man gerade bei ihnen lobend anerkennen muß, wie überhaupt dem Schwachen die rechtzeitige Anerkennung einer seiner Leistungen Oel auf die Lampe ist. Schon nach kurzer Zeit freilich wird fast jeder Schüler eine andere Aufgabe in Arbeit haben. Wenn man indeß nicht auf die Quantität derselben, sondern auf ihre Qualität das größte Gewicht legt, den Nachzüglern aus der geringen Anzahl ihrer Exempel an sich keinen Vorwurf macht, vielmehr den Schnellrechnern als Ursache etwaiger Fehler möglichst Vernachlässigung äußerer Formen nachweist, jenen dagegen wegen der größeren Beachtung dieser auch die größere Sicherheit vindicirt, so werden die Einen nicht über-, die Anderen nicht kleinmüthig, und Alle arbeiten unverdrossen mit dem angestrengtesten Fleiß. Das beliebte Abschreiben, wie es in anderen Unterrichtsfächern leicht statt hat, habe ich hierbei fast nie beobachtet: der Wetteifer ist so groß, daß jenes weder gewährt, noch begehrt wird. Um im Uebrigen die nöthige Controle und Nachhülfe üben zu können, sind die Bänke erforderlichen Falles abgerückt, so daß man zwischen ihnen hindurch zu jedem Schüler kommen und seine Leistungen mit der Arbeit eines Musterschülers, welche man zur Hand hat, ohne Störung vergleichen kann. Auf etwaige Fehler macht man leise aufmerksam oder hilft auch selbst sie suchen. Bei der Auflösung der Gleichungen müssen die Zeichen der Gleichheit stets genau unter einander gesetzt und überhaupt alle diejenigen Regeln der Darstellung stets sorgfältig innegehalten werden, welche man in Druckschriften befolgt sieht.

Häusliche Arbeiten können eintreten, wenn die nöthige Anweisung zu ihrer Anfertigung zuvor in der Schule gegeben ist, und müssen eintreten, sobald der Unterricht wöchentlich in nur zwei Stunden ertheilt wird.

Ich wende mich nunmehr zur Behandlung des arithmetischen Unterrichtsstoffes im Einzelnen, unter Benutzung der Beispiel- und Aufgaben-Sammlung von Heis als Uebungsbuch. Die §§. 1 bis 4 desselben (Begriff und Anwendung der vier Species) werden erledigt zunächst nur zum Zweck der Gewöhnung an Buchstabenrechnung. Erst nach Erläuterung der Potenz und nach Anwendung der Potenzirung gemäß §. 5, nachdem also die Schüler eine bislang ihnen unbekannte Operation und hiermit das Bedürfniß der Feststellung ihres Begriffes und der Benennung der zu ihr gehörigen Größen kennen gelernt haben, werden im Gegensatz zu dieser Operation die Begriffe der vorangegangenen aufgesucht, und die Namen ihrer bezüglichen Ausdrücke, sowie deren Theile festgestellt und gerechtfertigt, das Letztere jedoch nur linguistisch und auf Grund der Erfahrungen an Zahlenbeispielen. Hierbei ergibt sich die folgende Tabelle, welche auf der Innenseite des Einbandes des Uebungsbuches sorgfältig niedergeschrieben wird.

Die Zahlen-Verbindung.	verlangt:	und heißt:	Ihre Theile heißen:
$a + b$	Addition der Zahl b zu a,	Summe.	Augend u. Addend, oder Summanden.
$a - b$	Subtraction der Zahl b von a,	Differenz.	Minuend u. Subtrahend.
$a \,.\, b$	Multiplication der Zahl a mit b,	Produkt.	Multiplicand u. Multiplicator, oder Factoren.
$a : b$	Division der Zahl a durch b,	Quotient.	Dividend u. Divisor.
a^b	Potenzirung der Zahl a mit b,	Potenz.	Grundzahl, Basis oder Dignand u. Hochzahl oder Exponent.

Zur Einübung dieser Tabelle und um Wesentliches von Unwesentlichem im Bewußtsein des Schülers zu trennen, lasse ich mehrfach eine und dieselbe Zahl, z. B. 36, als Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Potenz darstellen, und $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2$ bemerken. Diese Gleichung dient zugleich dem Verständniß der künftigen Formeln und wird immer wieder herangezogen, so lange die Bedeutung des Zeichens der Gleichheit oder der Zweck der Formeln noch nicht völlig geläufig ist.

Der §. 6 wird mehrmals durchgerechnet, erst im Sinne des Verfassers zur Einübung des Gebrauchs der Klammern, jedes einzelne Beispiel also von Innen nach Außen. Nachdem diese Bedeutung der Klammern klar erfaßt ist, zeige ich zur Vorbereitung auf das Folgende, wie dieselben Klammern umgangen, d. i. „aufgelöst" und die Rechnungen alsdann von Außen nach Innen durchgeführt werden können. Z. B. Aufgabe: $12 - 7 - (2 + 1)$. Ausrechnung: $12 - 7$ ist 5; 5 weniger der Summe $2 + 1$ ist 2. Statt der Summe $2 + 1$ kann ich jedoch erst den Summand 2 allein abziehen, gibt 3, und muß dann noch die Eins subtrahiren, weil ich im Ganzen 3 Einheiten von 5 wegnehmen sollte: macht 2, wie vorhin. Also kann ich von links nach rechts schreiben und rechnen: $12 - 7 - 2 - 1$. Oder Aufgabe: $m - [n - (o - p) + q]$. Ausrechnung: Ich soll von m so viele Einheiten abziehen, als die eckige Klammer enthält; ziehe ich daher n Einheiten ab, so habe ich zunächst $o - p$ Einheiten zuviel abgezogen, muß also diese wieder hinzu addiren, gibt $m - n + (o - p)$: alsdann sind noch q Einheiten zu subtrahiren, macht $m - n + (o - p) - q$. Um auch die runde Klammer noch aufzulösen, bemerket, daß nicht alle o Einheiten, sondern p Einheiten weniger addirt werden sollen; wenn ich trotzdem o Einheiten zu dem Vorhergehenden hinzuzähle, so habe ich also p Einheiten zu viel addirt und muß sie wieder wegnehmen. Demnach darf ich von links nach rechts schreiben und rechnen: $m - n + o - p - q$. Das Auflösen der Klammern wird in diesem Paragraphen anfänglich nur an den reinen Zahlenbeispielen vorgenommen; dieselben werden wiederholt unter gleichzeitiger Angabe dessen durchgerechnet, was nach Angabe der Klammern geschehen sollte und was man bei Umgehung derselben statt dessen thun muß. Eine Regel über das Klammer-Auflösen darf man hierbei durchaus nicht aufkommen lassen; Uebung in dem hierzu erforderlichen logischen Denkprozeß ist der einzige Zweck. Nachdem dieselbe in hinreichendem Maße an den genannten Beispielen erlangt ist, geht man zu den Polynomen über, welche nur Buchstabengrößen enthalten, und macht auf die erhaltenen Resultate die Probe durch Substitution der gegebenen Zahlen an Stelle der Buchstaben und Vergleichung der Ergebnisse mit jenen, welche ohne Auflösung der Klammern erhalten wurden bezw. werden.

Der erste Abschnitt: Anwendung der Sätze über Summen und Differenzen: die §§. 7 bis 13 enthalten nach der zuletzt besprochenen Uebung nichts Neues, es sei denn, daß $a + b = b + a$ und $a + b - c = a - c + b$ ist, woran kein Anfänger etwas Bemerkenswerthes findet, weil er gerade im vorangehenden Paragraphen jede Buchstabengröße auffassen gelernt hat als Summe einer beliebigen Anzahl von Einheiten (Einsen), weil er unter a, b, c u. s. w. Summen von der Form $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ versteht. Um so mehr ist zu bedauern, obwohl kaum zu vermeiden, daß in den nunmehr folgenden Uebungsbeispielen die allgemeinen Zahlzeichen mit Coefficienten behaftet sind, dieselben dem Schüler mithin jetzt als Einheiten höherer Ordnung und verschiedenen Ranges, als Benennungen der Coefficienten erscheinen, daß jetzt die zwar hier erlaubte, jedoch nicht allgemein zulässige Auffassung bei ihm sich einnistet, unter $3a + 5b - 7c$ seien etwa 3 Thaler 5 Silbergroschen weniger 7 Pfennige zu verstehen — eine Auffassung, welche nicht nur die spätere Multiplication, sondern selbst das bereits logisch eingeübte Klammer-Auflösen ihm wieder erschwert, der Art, daß die schwächeren Schüler in der That schließlich der bekannten, induktiv abzuleitenden Regel hiezu bedürfen. Aber auch nur dieser. Grundsätzlich nehme ich daher von keiner der vielen Formeln Notiz; die übliche Behandlung derselben, wie man sie in Lehrbüchern der Arithmetik findet, wäre nicht nur nutzlos, sondern geradezu schädlich, und selbst ihre spätere deduktive Begründung bewirkt durchaus keine tiefere Einsicht und geschieht nur um der Gleichförmigkeit und um der Uebung im sprachlichen Ausdruck willen. Als neu für den Anfänger könnte allenfalls die in den §§. 7 bis 13 nach Auflösung der Klammern geforderte Vereinfachung, Ausrechnung der Beispiele, angesehen werden, und es hat dieselbe auch insofern einen eigenthümlichen Werth, als sie den Begriff der additiven und subtractiven Größen klar stellt und auf den der negativen vorbereitet. Sind z. B. die Klammern des Polynoms:

$$6x - 8y - 3z - [4x - 8y - (2z - 5y) - (4x + 3y) + (8x + 2z)]$$

aufgelöst oder ist nach mehrmaliger Wiederholung an diesem und anderen Beispielen die qu. Auflösung bereits zur Fertigkeit geworden und daher vor dem Ausrechnen nicht mehr besonders vorzunehmen, so spricht der Schüler: 6 x und — 4 x gibt 2 x (nämlich + 2 x), 2 x und 4 x gibt 6 x, + 6 x und — 8 x gibt — 2 x (d. h. 2 x, welche abgezogen werden sollen, gleichviel von welcher bekannten oder unbekannten Größe); — 8 y und + 8 y gibt Null, + 5 y und + 3 y gibt + 8 y; — 3 z + 2 z gibt — 1 z (wenn man nämlich von irgend einer Zahl erst 3 z abzieht und darnach wieder 2 z addirte, so ist die Wirkung gleich der Subtraction eines einzigen z), — 1 z und — 2 z gibt — 3 z; man erhält also: — 2 x + 8 y — 3 z (d. h. 2 subtractive x, 8 additive y und 3 subtractive z). Die Zusätze in den Parenthesen sollen hierbei die stillen Gedanken des Schülers darstellen, welche er gelegentlich, namentlich im Anfang solcher Uebungen zu seiner Rechtfertigung auch aussprechen muß.

Nach Absolvirung dieses ersten Abschnittes und vor Inangriffnahme des zweiten, der Lehre von der Multiplication und Division, gehe ich zurück zu §. 6, um durch die nochmalige, gleichzeitig zu rechtfertigende Auflösung der Klammern solcher Polynome, welche nur Buchstabengrößen enthalten, wieder deutlich in das Bewußtsein zurückzurufen, daß unter jedem allgemeinen Zahlzeichen (vorläufig) eine Summe von beliebig vielen Einsen zu verstehen, vorzustellen sei. — Die Formeln $(p \pm q)\,n = p\,n \pm q\,n$ und $m\,(a \pm b) = m\,a \pm m\,b$ werden in der früher angegebenen Weise erst induktiv aufgefunden, sodann nach §. 14 eingeübt, bis die resultirenden bezüglichen Polynome sofort klammerfrei angegeben werden können. Daß sie auch rückwärts Gültigkeit haben, wird auf dieser Stufe an 5 Thalern + 5 Silbergroschen u. dgl. m. erläutert. Vor der ersten Repetition werden die Formeln sodann deduktiv abgeleitet, und zwar wird hierbei der Multiplicator rechts gedacht, analog dem Divisor und Exponent. Veranlassung zu dieser Ableitung gibt das erste, beste Beispiel, dessen richtige Ausrechnung nunmehr als solche auch bewiesen werden soll. Die Ableitung ist die allbekannte, aus der Erklärung der Multiplication sich ergebende; doch verweigere ich hierbei hartnäckig jede directe Hülfe, bestehe vielmehr auf der für das Bewußtsein des Schülers selbständigen Aus- und Durchführung der durch das gegebene Produkt verlangten Thätigkeit. Dieselbe Operation wird dann noch an anderen Producten eingeübt. Um indeß zu vermeiden, daß die so festgestellten Regeln allzu mechanisch späterhin angewandt werden, gebe ich selbst noch eine zweite Deduktion, welche im Wesentlichen zwar auf die erste hinausläuft, doch aber während des Rechnens nach der Formel stets leicht präsent zu halten ist. Ich sage z. B.: $(p + q)\,n$ bedeutet, daß ich $(p + q)$ Einheiten n mal als Summand setzen soll; setze ich daher zunächst nur p Einheiten n mal als Summand, so habe ich q Einheiten n mal zu wenig als Summand gesetzt und muß daher das Produkt $q\,n$ noch nachträglich hinzufügen, erhalte also: $p\,n + q\,n$. Dies wird auch ad oculos gezeigt. Oder: $m\,a + m\,b$ bedeutet eine Summe von a gleichen Summanden m, auf welche noch b gleiche Summanden m folgen, mithin eine Summe von $a + b$ gleichen Summanden m oder das Produkt $m\,(a + b)$. Einfacher freilich gelangt man zu demselben Resultat, wenn der Satz von der Vertauschbarkeit der Faktoren bewiesen ist, weil alsdann in $m\,a + m\,b$ der Factor m als Multiplicand, bezw. als Coefficient angesehen werden kann.

Der gedachte Satz, welcher den Schülern schon längst bekannt ist, von dessen leichtem Beweis ad oculos sie jedoch keine Ahnung haben, wird zu §. 15 induktiv (multipliciret 3 mit 240 ꝛc.) und deduktiv abgeleitet; in Uebungsbeispielen wie: $17a^2\,(2\,a^2 - 3\,b^2 - 5\,a^2\,c)$ wird er jedoch nicht sofort angewandt, vielmehr wird erst nur die Klammer aufgelöst, geschrieben und gesprochen: $17 \,.\, a^2 \,.\, 2 \,.\, a^2 - 17 \,.\, a^2 \,.\, 3 \,.\, b^2 - 17 \,.\, a^2 \,.\, 5 \,.\, a^2 \,.\, c$.

Das Gesetz der Multiplication zweier Polynome wird, nach Ausführung der Multiplication auf Grund der seitherigen Regeln, induktiv abgeleitet. Bei Einübung desselben werden die einzelnen Produkte anfänglich sämmtlich hinter einander geschrieben, und erst, nachdem die Schüler zwei- bis dreimal hiermit unnöthig sich abgequält haben, werden sie darauf aufmerksam gemacht, daß für die Vereinigung der gleichnamigen Posten, der Posten, welche nur durch Vorzeichen und Coefficienten sich unterscheiden, sich empfiehlt, dieselben unter einander zu setzen. Bei der Vereinigung selbst kommt ihnen alsdann das früher besprochene Verfahren bei Ausrechnung der Aufgaben von §. 7 bis 13 sehr zu Statten.

Ich komme nunmehr zur Division. Zum Zweck des Nachweises ihrer Gesetze wird von vornherein gezeigt, daß das Dividiren entweder ein Messen oder Theilen ist, daß demgemäß der Quotient im ersten Fall stets eine unbenannte, im zweiten Fall dagegen eine benannte Zahl ist, welche den Namen des Dividenden trägt, daß jedoch das Theilen auf zweifache Weise ausgeführt gedacht werden könne, entweder vollzogen am Dividenden selbst oder an seiner Einheit; im letzteren Fall heiße der Quotient Bruch. In allen drei Fällen sei aber der Quotient diejenige Zahl, welche, mit dem Divisor (Nenner) multiplicirt, als Produkt den Dividenden gebe. Auf diese Weise wird ein enger Anschluß an die schon geläufige Bruchrechnung erlangt, und erhält dieselbe ihre wissenschaftliche Begründung. Zugleich aber wird, weil der Bruch ein Produkt ist aus dem Stammbruch als Multiplicand oder Einheit und dem Zähler als Multiplicator oder Coefficient, die Ableitung der Divisionsgesetze mehrfach auf schon bekannte Gesetze der Multiplication zurückgeführt, mithin erleichtert und jedenfalls vermannigfaltigt. Je nach Wunsch und Bedarf bedient man sich hierbei bald der einen, bald der anderen der drei Auffassungen des Quotienten, anfänglich der am leichtesten zum Ziel führenden. Z. B.:

§. 19. Wie wird eine Summe dividirt oder $\frac{a+b}{m} = ?$ — Abl.: $(a + b)$ Emtel bestehen aus a Emteln und b Emteln, es ist also in Zeichen $\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$. Daß die Formel auch umgekehrt, sowie für die Differenz gültig ist, wird nach derselben Methode bewiesen.

§. 21. Wie wird ein Produkt dividirt oder $\frac{a.b}{c} = ?$ — Abl.: Soll man ein Cetel $a \,.\, b$ mal nehmen, so nehme man es nach der Regel über die Multiplication mit einem Produkt erst a mal und das resultirende Produkt, die resultirende Summe $\frac{a}{c}$ noch b mal, gibt $\frac{a}{c} \cdot b$. — Die Frage nach der Umkehr erledigt sich analog. — Wie wird ein Quotient dividirt oder $\frac{a}{m} : n = ?$ — Abl. bezw. Atw. der nte Theil von a Emteln sind $a : n$ Emtel, in Zeichen $\frac{a : n}{m}$.

§. 22, Dieselbe Frage mit Hülfe der Auffassung des Quotienten als Maßzahl beantwortet. Wie vielmal ist c in $\frac{a}{b}$ enthalten? Atw. Jede Einheit von c ist gleich b Beteln, c selbst also gleich $b \,.\, c$ Beteln und c in $\frac{a}{b}$ so vielmal enthalten, als $b \,.\, c$ Betel in a Beteln enthalten sind; demnach ist in Zeichen $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \,.\, c}$. Wie wird mit einem Produkt dividirt oder wie vielmal ist das Produkt $b \,.\, c$ in a enthalten? — Atw. So vielmal, als $b.\, c$ Betel in a Betel enthalten sind; nun sind aber b Betel ein Ganzes, also $b \,.\, c$ Betel c Ganze, und es ist daher in Zeichen $\frac{a}{b \,.\, c} = \frac{a}{b} : c$.

§. 23. Die Frage nach der Multiplication mit einem Quotienten wird am kürzesten, obwohl nicht am einleuchtendsten, mit Hülfe seiner allgemeinsten Definition beantwortet. Multiplicirt man nämlich mit dem Dividenden a, so hat man die Multiplicanden b mal zu viel genommen, also auch den bfachen Werth des gesuchten Produktes erhalten, weshalb man nachträglich noch mit b dividiren muß; mithin ist $c \,.\, \frac{a}{b} = \frac{c \,.\, a}{b}$. Wie gesagt, ich halte diese Ableitung nicht für unbedingt überzeugend, insonderheit aber vermisse ich die Erledigung der Vorfrage, welche jedem Anfänger sich aufdrängt, der Frage nach dem Sinn der Multiplication mit einem Quotienten, welcher keine ganze Zahl ist. Zu ihrer Beantwortung bediene ich mich des Begriffes der Maßzahl. 10 Fuß sind in 23 Fuß 2 und $^3/_{10}$ mal enthalten, soll heißen und dahin verstanden werden, daß das Maß (hier 10 Fuß = 1 Ruthe) im Gemessenen 2 mal als Ganzes und sein zehnter Theil im Rest noch 3 mal enthalten sei. Wenn man daher rückwärts durch Multiplication des Maßes mit der Maßzahl die Größe des Gemessenen wieder durch Einheiten des Maßes ausdrücken will, so hat man dasselbe zunächst 2 mal und alsdann seinen zehnten Theil noch 3 mal zu nehmen. Wäre statt 2 und $^3/_{10}$ blos $^3/_{10}$ oder $^{17}/_{10}$ oder allgemein $\frac{a}{b}$ als Maßzahl gegeben, so würde man vom Maß doch zunächst den zehnten, allgemein den bten Theil und diesen alsdann 3 bzw. 17 oder allgemein a mal nehmen müssen, um das Ganze zu erhalten. In $c.\frac{a}{b}$ bedeutet also c das Maß und $\frac{a}{b}$ die Maßzahl des Ganzen $c.\frac{a}{b}$ und eine solche Multiplication ausführen heißt, man solle c durch b dividiren und den erhaltenen Quotienten mit a multipliciren. Der Ausdruck $c.\frac{a}{b}$ ist demnach auf Grund seiner Definition gleich $\frac{c}{b} \cdot a$, wie nach der Erklärung des Quotienten $\frac{a}{b}$ das Produkt $\frac{a}{b} \cdot b = a$ ist. Nun erst erhält man in völlig überzeugender Weise nach §. 21. die Formel $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} \cdot a = \frac{c\,.\,a}{b}$. — Ebenso folgt $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{nq} \cdot p = \frac{mp}{nq}$. Für $p = q$ ergibt sich noch (§. 18.) $\frac{m}{n} = \frac{mp}{mp}$. Doch genügt zur Ableitung der Formeln $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a\,:\,n}{b\,:\,n}$ auch die Auffassung des Quotienten $\frac{a}{b}$ als Maßzahl, sowie die Verwandlung der Größen a und b in Coefficienten derselben Einheit; b ist in a so vielmal enthalten als b Ee in a Ee bezw. als b Entel in a Entel enthalten sind. — Analog erhält man $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} : \frac{np}{nq} = \frac{mq}{np} = \frac{mq\,:\,pq}{np\,:\,pq} = \frac{m\,:\,p}{n\,:\,q}$.

Die Null und negativen Zahlen (§. 26.) werden als Ergebnisse der Subtraction betrachtet, sowie die positiven als solche der Addition, mithin als subtractive und additive Größen, rücksichtlich welcher nur der Minuend bzw. Augend in dem behandelten Zahlenausdruck selbst nicht gegeben ist. An einfachen Beispielen wird dies erläutert und mit diesen Beispielen der Paragraph eingeleitet. Zunächst werden zu diesem Zweck etwa die Aufgaben (cfr. Heis §. 28. Nr. 22 und 17. Nr. 34.):

$$34m - (34m - 13n) \pm (34p \mp 13n) \text{ und } m - (p + q) : \frac{p + q}{m + n}$$

gerechnet, und deren Resultate $\pm$ 34p und $\mp$ n im obigen Sinn diskutirt. Wie solche Aufgaben und Resultate der Wirklichkeit entsprechen, wird an eingekleideten Aufgaben gezeigt. Ein Körper bewege sich a Meter vorwärts und b Meter rückwärts; wie viel Meter ist er vom Ort seines Ausgangs entfernt? Jeder Schüler antwortet sogleich: a — b Meter von dem Ort, meint aber „vor" dem Ort. Nachdem man diese Antwort ausdrücklich als richtig anerkannt hat, läßt man einen Luftballon von der Spitze eines Berges aus abwechselnd sich erheben und senken, seine jedesmalige Entfernung von der Spitze successive angeben und schließlich negativ werden. Die Diskussion des Resultates ergibt, daß die anfängliche Höhe des Ballons bei dessen Aufsteigen einen Zuwachs erleidet, der bei jedem weiteren Aufsteigen noch größer wird, bei jedem Sinken sich wieder verkürzt und bei der Ankunft des Ballons in gleicher Höhe mit seinem Ausgangspunkt auf Null reducirt ist. Bei weiterem Sinken geschieht dies auf Kosten der ursprünglichen Höhe des Ballons, einer Linie, welche (nicht etwa denselben Anfang, aber die entgegengesetzte Richtung hat, wie jene, auf welcher der erste Zuwachs erfolgte, sondern) einen beliebig gewählten, hinlänglich tiefer gelegenen Anfang hat, und ebenfalls vertical aufwärts sich erstrekt bis zum Anfang jener; der Anfang der einen Linie ist das Ende der andern. Diese Linie erfährt bei jedem weiteren Sinken von ihrem Ende aus eine Verkürzung, wie zuvor eine Verlängerung. Ihr Vorhandensein ist die theoretische Bedingung einer jeden der beiden Größen-Aenderungen, sie selbst ist die oben gedachte Größe (Augend bezw. Minuend), welche nicht mit in Rechnung gezogen wurde, und deren Fehlen in derselben bewirkt, daß das Resultat additiv bezw. subtractiv oder, wie man in solchem Falle zu sagen pflegt, positiv bzw. negativ wird. Aehnliche Betrachtungen werden an anologen Bewegungsaufgaben angestellt, jedoch schon vor ihrer Ausrechnung wird die Größe angegeben, durch deren Auslassnng das noch unbekannte Vorzeichen des Resultates bedingt wird. In Vermögensfragen ist dies der Credit (die Schulden können den Credit niemals übersteigen und ohne Credit — die conditio sine qua non — Schulden überhaupt nicht gemacht werden, wie auch jener Ballon unter seinen Ausgangspunkt nicht zu sinken vermag, wenn bei Wiedererlangung seiner ursprünglichen Höhe er keine Entfernung vom festen Erdreich mehr hat), in Gewinnfragen der Vermögensstand bei Beginn des Geschäfts, in Fragen unserer Zeitrechnung die unbekannte Zeit vor Christi Geburt (man könnte also statt „nach bzw. vor Chr. G." sagen: Napoleon III. wurde gefangen genommen im Jahr $+ 1870$ und Carthago zerstört im Jahr $- 146$), in Fragen der Temperatur die Länge des Quecksilberfadens bis zum Nullpunkt. Andere Beispiele aus der Trigonometrie und Coordinatengeometrie sind in Sekunda und Prima eben so leicht anzuführen und müssen hier besprochen werden. Das Vorzeichen der Cosinuslinie hängt von der Größenänderung ab, welche durch sie die Gerade erleidet, die den 2. vom 3. Quadranten scheidet, das Vorzeichen der Sinuslinie von der durch sie bewirkten Größenänderung der auf die Cosinuslinie in ihrem Endpunkte aus dem 4. bzw. 3. Quadranten gefällten Senkrechten, und es ist diese Senkrechte zu vergleichen der ihre Lage ebenfalls ändernden, ursprünglichen Höhenlinie jenes Ballons. Was von der Cosinus- und Sinuslinie, gilt in dieser Beziehung auf von den Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem und ist auf andere Systeme leicht übertragbar. Diese an Beispielen als berechtigt nachgewiesene Vertrauen erweckende Auffassung der positiven und negativen Größen als additive und subtractive empfiehlt sich für den ersten Unterricht jedenfalls vor allen anderen und reicht zur Begründung ihrer Theorie hin. Zu dem Zweck setze ich an die Stelle von $\pm$, a und $\pm b$ die Ausdrücke $c \pm a$ und $c \pm b$, führe die angezeigte bzw. verlangte Operation nach den bislang eruirten Gesetzen aus und setze im Resultat wieder $c = 0$, wie man ja auch zur Bestimmung des Werthes $\frac{0}{0}$, z. B. mit $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ für $b = a$ verfährt. Für einen positiven Divisor wird sein absoluter Werth in Rechnung gezogen und bei negativem Divisor muß ich selbstverständlich das gewöhnliche Verfahren in Anwendung bringen, doch genügt auch die Hinweisung auf dieses bei der Division mit einem Polynom bereits eingeübte Verfahren, wo schon immer aus denselben Gründen $\frac{\pm}{-}\frac{a}{b} = \mp\frac{a}{b}$ gerechnet wurde. Widersprüche gegen die obige Auffassung algebraischer Zahlen ergeben sich bei Rechnungen mit nur unbenannten Größen niemals und bei Beurtheilung positiver und negativer benannter Resultate nur scheinbar. Entweder nämlich läßt sich die Ursache des Vorzeichens, der in der Rechnung ausgelassenen Augend bzw. Minuend aufweisen, oder aber das Resultat ist überhaupt unzulässig, wie ja auch Bruchtheile von Individuen, oder es war unbeschadet der Rechnung die Fragestellung vorwitzig, wie zum Beispiel, wenn auf die Frage nach einer additiven oder multiplicativen Größe das Resultat gegen Erwarten negativ bzw. divisiv ausfällt. Noch bemerke ich, daß die Quadratwurzel aus der beziehungslosen, absoluten Zahl 9 ebenso beziehungslos nur gleich 3, daß dagegen $\sqrt{+9} = \pm 3$ ist wegen $+9 = (a \pm 3)^2$ für $a = o$. Hiermit soll die Theorie der algebraischen Größen nicht erschöpft, vielmehr nur für den Schulgebrauch genießbar gemacht sein, und verweise ich zu dem Zweck auf Dr. Schwarz' kritische Untersuchungen bezüglich dieser Theorie in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, Bd. I. 1870.

Die beiden wichtigen §. §. 27. und 28. betreff. das Maß der Zahlen übergehe ich vorläufig, die Theorie der Decimalbrüche und der Proportionen desgleichen, Letztere wird sogar als Einleitung zur Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren im geometrischen Unterricht behandelt, und wende mich hier zu den Gleichungen ersten Grades.

Ihre Auflösung regt das Interesse der Schüler ganz besonders an, wenn man nach so viel vorausgegangener Theorie sofort eingekleidete Aufgaben in Angriff nimmt. Die leichtesten, welche auch bequem im Kopf gerechnet werden können, eignen sich hierzu vorzugsweise, zunächst diejenigen unter ihnen, bei welchen das Ansetzen der Gleichung nur eine Uebersetzung derselben in die Formelsprache ist. Denn es gilt auch hier, daß man die zu überwindenden Schwierigkeiten möglichst einzeln, eine nach der andern beseitigen muß. Die erste dieser Schwierigkeiten ist aber das „Auflösen", und es ist interessant zu sehen, wenn dasselbe verständig geschieht, wie der Schüler erkennt, daß er hierbei nur langsam und mit Bedacht übt, was er beim Ausrechnen derselben Aufgabe im Kopf mit verhältnißmäßig sehr großer Geschwindigkeit und mit der festesten Ueberzeugung thut, daß er richtig denke. Nach der methodischen Auflösung lasse man daher dieselbe Aufgabe zu gleichem Zweck langsam und laut auch im Kopf vorrechnen und zeige allen Schülern, daß hierbei successive genau dieselben Operationen durchgemacht werden, welche vorhin beim schriftlichen Rechnen, wie noch an der Tafel zu sehen. Hierdurch wird für das Bewußtsein der Schüler der nothwendige Zusammenhang aufgewiesen auch zwischen diesem Theil des arithmetischen Unterrichtes und ihrem seitherigen sogenannten praktischen Rechnen, und gewinnen sie als Anfänger ein erhöhtes Vertrauen zu der bei der Auflösung angewandten und bei jeder anderen Auflösung wiederkehrenden Schlüssen. Ziel dieser Schlüsse ist die Bekannte nur einmal und zwar auf der linken Seite der Gleichung sichtbar zu machen, sowie von allen anderen ihr hier Gesellschaft leistenden Größen allmälig zu befreien. Die Schlüsse selbst beziehen sich stets auf arithmetische Operationen, welche entweder einseitig oder beiderseitig an der Gleichung auszuführen sind, wovon die Schüler immer Rechenschaft geben müssen und können. Die bekannten „Regeln" des Auflösens, welche namentlich schwache und denkfaule Schüler so leicht sich merken und zur Anwendung bringen wollen, müssen ganz und gar als des Gegenstandes unwürdig verpönt sein. Soweit ein Schüler der Auflösung einer gegebenen Gleichung überhaupt fähig ist, ist er dies allemal auch mit verständiger Ueberlegung, und die fortwährende Uebung hierin, das Aufsuchen der kleinsten Mittel, des kürzesten Weges zur Erlangung desselben Zweckes erhöht fortlaufend jene seine Fähigkeit. Den bezeichneten leichteren Aufgaben folgen daher immer schwierigere derselben Art. — Die zweite nächstliegende Schwierigkeit, welche indeß schon gleichzeitig mit der ersten sich geltend macht, jedoch relativ leicht überwunden wird, ist die äußere Form der Darstellung. Das Auge des Knaben weilt mit Wohlgefallen bei einer schönen Form und hat auch in wissenschaftlicher Beziehung den doppelten Gewinn von jeder musterhaften Darstellung an der Schultafel sowohl, wie im eigenen Heft. In diesem muß er bei Anfertigung häuslicher Arbeiten zu jeder Gleichung zwei paralelle Linien ziehen, zwischen welche die Zeichen der Gleichheit eingetragen werden, links und rechts von diesen Linien in gleicher Entfernung zwei andere, bis an welche heran die Schrift reicht; nachträglich müssen diese Linien wieder ausgelöscht werden. Man macht hierbei oft merkwürdige Beobachtungen; manchen Schülern hält die Beurtheilung, ob ihre Linien zum Rand des Heftes parallel sind, außerordentlich schwer, und es vergeht zuweilen längere Zeit und bedarf jedesmal des ausdrücklichen Nachweises, bis sie auch hierin die nöthige Geschicklichkeit erlangt haben. Die Innehaltung des zweiten Paares der Linien erfordert mehr Aufmerksamkeit und Ueberlegung beim Schreiben, als die Vermeidung von Rechenfehlern allein erheischt, und ist der Todfeind eines jeden unbedachten Federzuges; wenn irgend etwas, so kommt die Gewöhnung an sie auf allen Gebieten der erfolgreichen Beachtung des Sprüchwortes zu gut: Vorgethan und nachbedacht hat Manchen in viel Leid gebracht.

Die dritte und größte der zu überwindenden Schwierigkeiten ist die Bildung des „Ansatzes". Nicht von jedem Schüler verlange ich, daß er jeden von mir selbst oder einem seiner Mitschüler entwickelten Ansatz in derselben Stunde oder bei der Repetition hinterher selbstständig und mit Verständniß nachzubilden vermöge. Nur das verlange ich unbedingt, daß jeder Schüler zu ein bis zwei repetitionsweise aufgegebenen Aufgaben die Ansätze wenigstens an die Tafel schreiben und nach der Unbekannten unter Angabe aller Gründe aufzulösen vermöge. Denn ich kann die Ansicht des Herrn Dr. Reidt (cfr. dessen beherzigenswerthe Abhandlung: Zur Methode des Unterrichts in der Algebra, in Hoffmann's Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, 3. Bd. 1872), daß das Auflösen einer gegebenen Gleichung eine rein mechanische Arbeit sei, durchaus nicht theilen, wohl aber pflichte ich ihm vollständig darin bei, daß die bezüglichen Aufgaben in unseren Uebungsbüchern zumeist nach einem falschen Princip geordnet sind, bei dessen Befolgung die Schüler von einer Art Ansatz zur anderen förmlich gehetzt werden, ohne weder in der einen, noch anderen Art der Schlußfolgerung irgend welche Uebung und Fertigkeit erlangen zu können. Wer da weiß, wie sehr jeder der fünf Sinne zu einer besonderen Ausbildung auch anhaltender, absichtlich hierauf gerichteter Thätigkeit bedarf, der wird das Gleiche bezüglich des Gehirns nicht bezweifeln. „Es kommt dazu, daß das bunte Durcheinander, welches die betreffenden Aufgaben-Sammlungen an dieser Stelle nachweisen, wenn es auch anfangs durch den Wechsel der Objecte den Reiz der Neuheit erhält, doch auf die Dauer auch ermüdend wirken kann und den Schüler jedenfalls nicht recht zu einem klaren Bewußtsein der vollen Bedeutung des Gelernten gelangen läßt. Das Interesse haftet vorwiegend am Einzelnen und Zufälligen; es entbehrt mehr oder minder des eigentlichen wissenschaftlichen Gepräges" und hiermit der versittlichenden Kraft.

Nach hinlänglicher Ueberwindung der beiden ersten Schwierigkeiten seien daher die ferneren Aufgaben nach bestimmten Kategorien ihres Inhaltes geordnet. Zuerst kommen die bürgerlichen Rechnungsarten, incl. der Zinseszinsen- und Rentenrechnung, sodann Aufgaben aus der Geometrie, der Mechanik, Physik und Chemie. Jede dieser Abtheilungen zerfalle wieder in wohlgeordnete Unterabtheilungen und die Aufgaben etwa dieser in durch einen Querstrich getrennte Gruppen solcher, deren Ansatz immer dieselbe Reihenfolge logischer Schlüsse erheischt. Der Schüler erhält so nicht nur die nothwendige Fähigkeit im Ansetzen, sondern je ein und derselbe Ansatz, je eine und dieselbe Bestimmungsgleichung wird ihm auch zur Beziehungsgleichung jeder der darin vorkommenden n und aller übrigen (n — 1) Größen: es kommt so das Gesetz ihm zum Bewußtsein, nach welchem alle diese Größen unabänderlich von einander abhängen — Gesetze nicht des Menschenwitzes, wie die arithmetischen, sondern der Natur, aber erkannt und begriffen von jenem und in wunderbarer Uebereinstimmung mit dessen eigener Logik. Der Schüler wird so auch in diesem Unterricht inne, daß aller Wechsel der Erscheinungen nur nach bestimmten Gesetzen erfolgt, daß mithin nicht Willkühr, noch gutgemeinte Bemühungen allein der Menschen Wohl zu fördern vermögen, sondern einzig nur die Erkenntniß jener Gesetze und ihre energische Nachachtung. Versehen mit den grundlegenden Mitteln der Wissenschaft zu segensreicher Bethätigung seiner idealen Bestrebungen im praktischen Leben verläßt er die Schule: non scholae, sed vitae didicit.

Nahezu dieselben Aufgaben-Gruppen kehren wieder als Anwendung der Theorie der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, der quadratischen, diophantischen u. s. w. f. Auch empfiehlt sich, den systematisch geordneten Aufgaben zu jeder Art von Gleichungen einen Anhang vermischter Aufgaben hinzuzufügen, unter welche alsdann humoristisch-poetische Aufnahme finden könnten, wie solche Heis' Sammlung enthält. Der Inhalt der Aufgaben muß zum Theil über das Verständniß eines Tertianers und Secundaners weit hinausgehen und den bezüglichen Fach-Unterricht in Prima voraussetzen. Alsdann haben nämlich die Schüler dieser Classe zugleich eine Sammlung von Aufgaben in Händen, welche jenem Fach-Unterricht von großem Nutzen sind.

Die §§. 27 und 28, sowie die abgekürzte Multiplication und Division der Decimalbrüche (die vier Species derselben bilden im Uebrigen heutzutag einen Theil des practischen Rechnens) pflege ich nicht im Zusammenhang durchzunehmen, sondern stückweise zur rechtzeitigen Unterbrechung und Wiederbelebung der Beschäftigung mit den Gleichungen in Tertia.

Mit Rücksicht auf den in diesem Programm mir zugemessenen Raum beschränke ich mich bezüglich des arithmetischen Unterrichts in Sekunda auf das Nothwendigste. Es ist dies um so mehr zuläßig, als nach Ueberwindung der ersten Schwierigkeiten in Tertia solche jetzt höchstens durch das Potenziren mit negativen ganzen Exponenten, das Radiciren und Logarithmiren verursacht werden.

Was die Frage betrifft, ob mit negativen ganzen Exponenten nach denselben Gesetzen zu verfahren sei, wie beim Potenziren mit positiven ganzen Exponenten, so sei die Untersuchung dieser Frage — sagt man den Schülern — durchaus gleichartig jener früheren, schon erledigten (und jetzt zu wiederholenden), ob das Multipliciren mit negativen ganzen Zahlen und mit Quotienten nach den Gesetzen der Multiplication mit positiven, bezw. absoluten ganzen Zahlen erfolge oder nicht. Nun bedeute aber a^{-m} nach seiner Entstehung die Potenz a^{c-m}, in welcher c, obwohl größer als m, doch nicht gegeben und daher nach ausgeführter Operation gleich Null zu setzen sei, oder, was dem gleichbedeutend ist, a^{-m} bedeute den Quotienten $1 : a^m$. Demnach erhalte man:

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m},$$

wo der letzte Ausdruck wiederum nur durch die Form, die äußere Schreibweise, nicht durch den Sinn der Operation von dem nächst vorhergehenden sich unterscheide.

Nach diesem Musterbeispiel, von den Schülern unter Anleitung des Lehrers entwickelt, müssen sie die übrigen Nachweise möglichst selbständig geben.

Ungleich größere Schwierigkeit bietet die dem Potenziren inverse Operation des Radicirens, und es würde dies in demselben Grad s. Z. bei der Ableitung der Divisions-Gesetze sich herausgestellt haben, wenn nicht diese Gesetze aus dem praktischen Rechenunterricht schon mehr oder weniger bekannt gewesen wären. Nach den nothwendigen Vorübungen, nach dem Radiciren bekannter Quadrat- und Cubikzahlen, sowie der Produkte und Quotienten dieser, z. B. $\sqrt{25 \,.\, 36}$ und $\sqrt{25 : 36}$, $\sqrt[3]{27 \,.\, 8}$ und $\sqrt[3]{27 : 8}$ u. s. w., sowie nach dem **Beweis, daß** auch jede **andere** Zahl, obwohl irrationale, Wurzeln hat, benutze man daher die Conformität zwischen den (schon bekannten) Gesetzen der Division und den (noch unbekannten) Gesetzen des Radicirens. Zu diesem Zweck lasse man in der folgenden Tabelle die Fragen a) nochmals wissenschaftlich beantworten und die Antworten zu den Fragen b) in Gestalt von Formeln zunächst conform bilden (was an sich schon in mehrfacher Beziehung von sehr großem Werth ist und der geschichtlichen Entwickelung dieses Theiles der Wissenschaft entsprechen dürfte) und hinterher auf ihre Richtigkeit in der bekannten Manier prüfen.

1. a) Wie wird eine Summe dividirt?
   b) Wie wird ein Product radicirt?
2. a) Wie wird eine Differenz dividirt?
   b) Wie wird ein Quotient radicirt?
3. a) Wie wird ein Produkt dividirt?
   b) Wie wird eine Potenz radicirt?
4. a) Wie wird ein Quotient dividirt?
   b) Wie wird eine Wurzel radicirt?
5. a) Wie werden gleich- bezw. ungleichnamige Quotienten addirt?
   b) Wie werden gleich- bezw. ungleichnamige Wurzeln multiplicirt?
6. a) Wie werden gleich- bezw. ungleichnamige Quotienten subtrahirt?
   b) Wie werden gleich- bezw. ungleichnamige Wurzeln dividirt?
7. a) Wann bleibt der Werth eines Quotienten ungeändert?
   b) Wann bleibt der Werth einer Wurzel ungeändert?

u. s. w. f.

Wenn die fraglichen Gesetze bekannt und vielfach an Uebungsbeispielen eingeübt sind, werden sie unter beständiger Anwendung der Definition der Wurzel analog den Divisionsgesetzen deducirt. Z. B.:

$$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[x]{\left[\left(\sqrt[x]{a}\right)^x\right]^y} = \sqrt[x]{\left(\sqrt[x]{a}\right)^{xy}} = \sqrt[x]{\left[\left(\sqrt[x]{a}\right)^y\right]^x} = \left(\sqrt[x]{a}\right)^y.$$

Den Begriff des Logarithmus erläutere ich zunächst nur für die Basis 10 und übe ihn an Potenzen von 10 mit positiven und negativen ganzen Exponenten nach Möglichkeit ein. Sodann werden die Gesetze des Logarithmirens deducirt und zwar, weil der Anfänger bei dieser schwierigsten Operation das Ziel der Deduktion nicht einmal muthungsweise aufzustellen vermag, nach der allgemein gültigen, auch für das Dividiren und Radiciren mit gleichem Erfolg zu verwendenden Methode, nämlich durch Anwendung der Definition auf den umzuformenden Ausdruck selbst. Denn weil hierbei das neue Operations-Zeichen und eine der gegebenen Größen (der Divisor bezw. der Wurzelexponent und die Basis des Logarithmus) verschwinden, so ist dann jedesmal nicht zweifelhaft, wo dieselben nachträglich an anderer Stelle wieder einzuführen sind, woraus alsbald eine Formel für den gegebenen Ausdruck entspringt. Exempla trahunt.

Frage: $\frac{a + b}{c} = ?$ — Atw. Aus $\frac{a + b}{c} \cdot c = a + b = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c$ folgt durch Division des zweiten und letzten Ausdruckes mit c die gesuchte bezw. eine richtige Formel.

Frage: $\sqrt[x]{a^y} = ?$ — Atw.: Aus $\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^x = a^y = \left[\left(\sqrt[x]{a}\right)^x\right]^y = \left[\left(\sqrt[x]{a}\right)^y\right]^x$ erhält man durch Radiciren des zweiten und letzten Ausdruckes mit x eine richtige Formel für den gegebenen Ausdruck.

Frage: $\sqrt[x]{a^y} = ?$ — Atw.: Aus $\left(\sqrt[x]{a^y}\right)^x = a^y = \left[\left(\sqrt[mx]{a}\right)^{mx}\right]^y = \left(\sqrt[mx]{a^{my}}\right)^x$ erhält man durch Radiciren des zweiten und letzten Ausdruckes mit x eine andere richtige Formel für den gegebenen Ausdruck.

Frage: $\log(ab) = ?$ — Atw.: Aus $10^{\log(ab)} = ab = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$ erhält man durch Logarithmiren des zweiten und letzten Ausdruckes die gesuchte Antwort.

Frage: $\log(a^b) = ?$ — Atw. Aus $10^{\log(a^b)} = a^b = (10^{\log a})^b = 10^{b \cdot \log a}$ erhält man durch Logarithmiren des zweiten und letzten Ausdruckes die gesuchte Antwort.

Da der arithmetische Unterricht in Prima didaktische Schwierigkeiten kaum mehr bietet, er vielmehr nur mit Mangel an Zeit zu kämpfen hat, so möge das Vorstehende für den einleitend gedachten Zweck genügen.