I. Die einfachsten Eigenschaften und Anwendungen der Determinanten.

Die ersten Grundlagen der Lehre von den Determinanten sind meines Wissens nur sehr selten in den Kreis der Schule eingeführt, und doch verdienen sie es theils ihrer wichtigen und zahlreichen, auch elementaren, Anwendungen, theils ihres pädagogischen Werthes wegen. — Ein Grund dieser Erscheinung dürfte wol darin liegen, dass noch keine befriedigende, schulmässig-elementare Darstellung der einfachsten Eigenschaften und Anwendungen der Determinante existirt, und die zusammenhängenden Darstellungen dieser Lehre, wie z. B. die vortreffliche Abhandlung von Brioschi, schon im Anfange Voraussetzungen machen, welche in der Schule nicht erfüllt sind. — Ich glaube desshalb keine nutzlose Arbeit auszuführen, wenn ich hier den Weg mittheile, auf welchem ich seit 3 bis 4 Jahren meine Schüler in diese Lehre eingeführt habe.

Ich schicke einige Lemmata aus der Lehre von den Permutationen voraus, welche sich in der Regel in den Schulbüchern nicht finden und die folgenden Entwickelungen wesentlich erleichtern.

§. 1. Lemmata aus der Lehre von den Permutationen.

1. Man nennt von je 2 Elementen dasjenige, welches in der ursprünglichen Stellung der Elemente vor dem andern steht, ein niederes, dasjenige welches nachsteht, ein höheres. Man nennt jede gegenseitige Stellung zweier Elemente, in welcher ein höheres Element vor einem niederen steht, eine Inversion.

Beispiel. Ist $a\ b\ c\ d\ e$ die ursprüngliche Stellung der 5 Elemente, so enthält die Permutation $c\ e\ a\ d\ b$ 6 Inversionen. — Ist $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7$ die ursprüngliche Stellung der 7 Elemente, so enthält die Permutation $a_4\ a_6\ a_2\ a_3\ a_1\ a_7\ a_5$ 10 Inversionen.

2. Von 2 Permutationsformen, welche durch Platzvertauschung von 2 Elementen in einander übergehen, hat die eine eine grade, die andere eine ungrade Anzahl von Inversionen.

Beweis. Es seien r und s die beiden Elemente, deren gegenseitig verschiedene Stellung die Verschiedenheit der beiden Permutationen bedingt; es stehe nämlich in der einen Permutation r an der p^{ten} Stelle, s an der $(p+q)^{\text{ten}}$ Stelle, in der andern Permutation r an der $(p+q)^{\text{ten}}$, s an der p^{ten} Stelle, während jedes andere Element in beiden Permutationen dieselbe Stelle einnimmt — Durch die beiden Elemente r und s wird jede der beiden Permutationen in 3 Abtheilungen getheilt, deren erste $p-1$, deren zweite $q-1$, deren dritte $n-p-q$ Elemente enthält, wenn nämlich n die Gesammtzahl der Elemente bezeichnet. — Es sei α die Anzahl der Inversionen, welche die $n-2$ Elemente ausser r und s in der einen wie in der andern Permutation unter sich bilden; es sei β die Anzahl der Elemente, in der ersten Abtheilung, welche höher als r, β_1 die Anzahl der Elemente derselben Abtheilung, welche höher als s sind; es sei γ die Anzahl der Elemente der zweiten Abtheilung, welche höher als r und γ_1 die Anzahl der Elemente derselben Abtheilung, welche höher als s sind; es sei δ die Anzahl der Elemente der dritten Abtheilung, welche niedriger als r und δ_1 der Anzahl der Elemente derselben Abtheilung, welche niedriger als s sind; es sei überdies von den beiden Elementen r das niedere, s das höhere, so ist die Anzahl der Inversionen

der ersten Permutation: $\alpha+\beta+\beta_1+q-1-\gamma+\gamma_1+\delta+\delta_1$

der zweiten Permutation: $\alpha+\beta+\beta_1+\gamma+q-1-\gamma_1+\delta+\delta_1+1$

ihre Differenz also: $2\gamma-2\gamma_1+1$

eine ungerade Zahl, wodurch der Satz bewiesen ist.

Beispiel. Während die Permutation $a_4\ a_6\ a_2\ a_3\ a_1\ a_7\ a_5$ 10 Inversionen hat, enthält die Perm. $a_4\ a_1\ a_2\ a_3\ a_6\ a_7\ a_5$ 5 Inversionen.

3. Wenn demnach sämmtliche Permutationen gegebener Elemente in solcher Reihenfolge gebildet werden, dass jede folgende aus der vorhergehenden durch Platzvertauschung zweier Elemente entsteht, so ist die Anzahl der Inversionen in den auf einander folgenden Permutationen abwechselnd grade und ungrade.

4. Wenn man von einer Permutation gegebener Elemente zu einer andern durch eine grade Anzahl von Platzvertauschungen je zweier Elemente gelangen kann, so ist die Anzahl der Inversionen in beiden übereinstimmend grade oder ungrade; wenn man von einer Permutation zu einer andern durch eine ungrade Anzahl von Platzvertauschungen je zweier Elemente gelangt, so ist die Anzahl der Inversionen in der einen grade, in der andern ungrade.

5. Man kann im Allgemeinen von einer gegebenen Permutation zu einer andern gegebenen Permutation derselben Elemente auf sehr verschiedenen Wegen gelangen, immer vorausgesetzt, dass die einzelnen Schritte jedes Weges in Platzvertauschungen zweier Elemente bestehen. Auf allen diesen verschiedenen Wegen ist aber die Anzahl der vorgenommenen Platzvertauschungen zweier Elemente übereinstimmend grade oder übereinstimmend ungrade.

§. 2. Bildung und Eigenschaften der Determinante.

1. Die Determinante eines Systems von Zahlen ist eine in 2. und 3. zu definirende Funktion derselben, welche ausser von der Grösse der einzelnen und ihrer Anzahl wesentlich von ihrer Anordnung abhängt. — Ihre Anzahl ist immer das Quadrat einer ganzen Zahl; es sei n^2. Ihre Anordnung ist immer die in n vertikalen und n horizontalen Reihen der Art, dass alle zusammen ein Quadrat erfüllen. — Wir bezeichnen jede der n^2 Zahlen, jedes Element der Determinante, mit dem Zeichen $a_{r,s}$ wo r und s alle Werthe von 1 bis n durchlaufen, und wo r die Nummer der horizontalen Reihe und s die Nummer der vertikalen Reihe angiebt, welcher das betreffende Element angehört. Das System der Elemente ist dann:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{matrix}$$

und die Determinante dieses Elementen-Systems wird bezeichnet

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

2. Die **Determinante** ist eine mehrgliedrige Grösse, deren Glieder, abgesehen von dem in 3. zu bestimmenden Vorzeichen alle diejenigen Produkte von je n Faktoren sind, welche sich aus den gegebenen n^2 Elementen der Art bilden lassen, dass in *jedem* Produkt ein Element *jeder* horizontalen und ein Element *jeder* vertikalen Reihe vorkommt. Man erhält demnach, abgesehen vom Vorzeichen, irgend ein Glied der Determinante, indem man n Elemente $a_{r,s}$ als Faktoren mit einander verbindet, in welchem die n Indices r die Reihe der Zahlen von 1 bis n in ihrer natürlichen Folge und die n Indices s irgend eine Permutation der Reihe der Zahlen von 1 bis n bilden; folglich erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, alle Glieder, indem man für die Reihe der Indices s alle Permutationen der Reihe der Zahlen von 1 bis n nimmt; die Anzahl der Glieder ist also $n!$ — Man erhält offenbar dieselben Producte, indem man die Indices s in ihrer natürlichen Reihenfolge schreibt und die n Indices r in jeder möglichen Permutation der Zahlen 1 bis n.

Beispiel. Die Glieder der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

sind, nach der ersten Art geschrieben:

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \qquad a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} \qquad a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} \qquad a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} \qquad a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} \qquad a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}$$

und nach der zweiten Art geschrieben:

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \qquad a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} \qquad a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} \qquad a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} \qquad a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} \qquad a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3}$$

3. Man giebt einem Gliede das Vorzeichen $+$, wenn in demselben die Anzahl der Inversionen der entsprechenden permutirten Indices eine grade Zahl oder 0 ist, das Vorzeichen —, wenn die Anzahl der Inversionen der entsprechenden permutirten Indices eine ungrade Zahl ist. — Wenn man also die Permutationen der Art bildet, dass man immer von einer zu einer folgenden durch eine Platzvertauschung zweier Elemente übergeht (wie das in dem Beispiele zu 2. geschehen ist) so sind die den Gliedern zu gebenden Vorzeichen abwechselnd $+$ und $-$.

Es ist nun zu zeigen, dass diese Zeichenregel für die beiden verschiedenen Wege, welche für die Bildung der Determinantenglieder unter 2. angegeben sind, dieselben Resultate liefert. Ein Beispiel wird diesen Beweis leicht machen. — Ein Glied einer Determinante 7ter Ordnung ist, abgesehen vom Vorzeichen, nach der ersten der beiden Regeln unter 2. geschrieben

$$a_{1,4}\ a_{2,7}\ a_{3,2}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{6,1}\ a_{7,3} \qquad (1)$$

dasselbe Glied in derselben nach der zweiten Regel geschriebenen Determinante heisst:

$$a_{6,1}\ a_{3,2}\ a_{7,3}\ a_{1,4}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{2,7} \qquad (2)$$

Die Produkte (1) und (2) enthalten dieselben Faktoren in verschiedenen Reihenfolgen. Wir können von der Faktorenstellung (1) zu der Faktorenstellung (2) auf folgende Art durch jedesmalige Platzvertauschung zweier Elemente übergehen.

$$\begin{array}{ll}
a_{1,4}\ a_{2,7}\ a_{3,2}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{6,1}\ a_{7,3} & (1)\\
a_{6,1}\ a_{2,7}\ a_{3,2}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{1,4}\ a_{7,3} & \\
a_{6,1}\ a_{3,2}\ a_{2,7}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{1,4}\ a_{7,3} & \\
a_{6,1}\ a_{3,2}\ a_{7,3}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{1,4}\ a_{2,7} & \\
a_{6,1}\ a_{3,2}\ a_{7,3}\ a_{1,4}\ a_{5,6}\ a_{4,5}\ a_{2,7} & \\
a_{6,1}\ a_{3,2}\ a_{7,3}\ a_{1,4}\ a_{4,5}\ a_{5,6}\ a_{2,7} & (2.)
\end{array}$$

Die Anzahl der Platzvertauschungen zweier Elemente, welche angewandt ist, um von der Faktorenstellung (1) zu der (2) oder umgekehrt auf demselben Wege von (2) zu (1) zu gelangen, ist gleichzeitig die Anzahl der Platzvertauschungen zweier entsprechenden Indices, welche erforderlich ist, um von der natürlichen Ordnung der Zahlen 1 bis n zu derjenigen Ordnung der Indices r überzugehen welche sich in (2.) findet und das Vorzeichen von (2.) bestimmt, und auch gleichzeitig die Anzahl der Platzvertauschungen zweier Indices, welche erforderlich ist, um von der natürlichen Ordnung der Zahlen 1 bis n zu derjenigen Stellung der Indices s überzugehen welche sich in (1) findet und das Vorzeichen von (1) bestimmt wodurch die Identität der nach den beiden Regeln dargestellten Determinanten erwiesen ist.

4. a. Wenn man in einer gegebenen Determinante 2 Vertikalreihen unter einander vertauscht, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen, ohne dass der absolute Werth geändert wird. — Ebenso, wenn man 2 horizontale Reihen unter einander vertauscht.

b. Wenn 2 horizontale Reihen oder 2 vertikale Reihen einer Determinante die entsprechenden Elemente paarweise gleich haben, so ist die Determinante $= 0$.

5. Die $n!$ Glieder der Determinante lassen sich in n Gruppen derart zusammenfassen, dass die $(n-1)!$ Glieder jeder Gruppe einen Eaktor $a_{p,s}$ gemeinschaftlich haben, wo p konstant ist, d. h. für alle Gruppen denselben Werth hat, während s alle Werthe von 1 bis n durchläuft; oder auch so, dass die $(n-1)!$ Glieder jeder Gruppe einen Faktor $a_{r,p}$ gemeinschaftlich haben, wo p konstant ist, r alle Werthe von 1 bis n durchläuft.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\,(a_{2,2}\,a_{3,3} - a_{3,2}\,a_{2,3}) + a_{1,2}\,(a_{2,3}\,a_{3,1} - a_{3,3}\,a_{2,1}) + a_{1,3}\,(a_{2,1}\,a_{3,2} - a_{2,2}\,a_{3,1})$$

$$= a_{1,1}\,(a_{2,2}\,a_{3,3} - a_{3,2}\,a_{2,3}) + a_{2,1}\,(a_{3,2}\,a_{1,3} - a_{3,3}\,a_{1,2}) + a_{3,1}\,(a_{1,2}\,a_{2,3} - a_{2,2}\,a_{1,3})$$

Wir führen demnach die Determinante auf n Glieder zurück, deren jedes ein Produkt eines eingliedrigen Faktors mit einem $(n-1)!$ gliedrigen Faktor ist; bezeichnen wir diesen zweiten Faktor, den Faktor von $a_{r,s}$, abgesehen von Zeichen mit $f(a_{r,s})$ so erkennt man leicht nach der Definition der Determinante, dass $f(a_{r,s})$ eine Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, eine Unterdeterminante der gegebenen Determinante ist, nämlich

$$f(a_{r,s}) = \begin{vmatrix} a_{r+1,s+1} & a_{r+1,s+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+1,n} & a_{r+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+1,s-1} \\ a_{r+2,s+1} & a_{r+2,s+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+2,n} & a_{r+2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+2,s-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,s+1} & a_{n,s+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} & a_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,s-1} \\ a_{1,s+1} & a_{1,s+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} & a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,s-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{r-1,s+1} & a_{r-1,s+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r-1,n} & a_{r-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r-1,s-1} \end{vmatrix}$$

Das dem Gliede $a_{r,s}\; f(a_{r,s})$ zu gebende Vorzeichen ist gleich dem Vorzeichen des Determinantengliedes

$$a_{r,s}\; a_{r+1,s+1}\; a_{r+2,s+2} \;.\;.\;.\;.\; a_{r-1,s-1} = a_{1,s+n-r+1} \,.\, a_{2,s+n-r+2} \;.\;.\;.\; a_{n,s+n-r}.$$

In Bezug auf die zweiten Indices (die Verticalreihen-Indices) ist nur zu bemerken, dass bei denjenigen derselben, welche $> n$ sind, n zu subtrahiren ist. Demnach ist die Anzahl der Inversionen $= (r-s).(s+n-r)$ wenn $r > s$, und $= (s-r)\;(n-s+r)$ wenn $r < s$ ist. — Die Zahlen $(r-s)\,(s+n-r)$ und $(s-r)\;(n-s+r)$ sind aber immer übereinstimmend grade oder übereinstimmend ungrade, da ihre Summe $= (r-s)\;(2s-2r)$ ist; folglich ist das Vorzeichen immer $= (-1)^{(r-s)\,(s+n-r)}$. Diese Zahl ist für alle ungraden Werthe von n immer $= +1$, für alle graden Werthe $+1$ oder -1, je nachdem $r-s$ grade oder ungrade ist. Stellt man also die Determinante von n^2 Gliedern nach obiger Angabe dar, so haben, wenn n eine ungrade Zahl ist, alle Glieder $a_{p,s}\; f(a_{p,s})$ resp. alle Glieder $a_{r,p}\; f(a_{r,p})$ das Vorzeichen $+$; wenn dagegen n eine grade Zahl ist so haben die Glieder abwechselnd das Vorzeichen $+$ und $-$, wenn man im ersten Falle s, im 2ten Falle r die Werthe von 1 bis n in ihrer natürlichen Reihenfolge durchlaufen lässt.

Beispiel $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,4} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,4} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,4} & a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} - a_{2,3} \begin{vmatrix} a_{3,4} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,4} & a_{4,1} & a_{4,2} \\ a_{1,4} & a_{1,1} & a_{1,2} \end{vmatrix} + a_{3,3} \begin{vmatrix} a_{4,4} & a_{4,1} & a_{4,2} \\ a_{1,4} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,4} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} - a_{4,3} \begin{vmatrix} a_{1,4} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,4} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,4} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Es ist häufig von wesentlichem Vortheil, die Unterdeterminante $f(a_{r,s})$ nicht in der cyklischen Folge der Elemente zu schreiben, wie es bisher geschehen ist, sondern in der natürlichen Reihenfolge, wie sie aus der gegebenen Determinante hervorgeht, wenn aus derselben nur die r^{te} Horizontalreihe und die s^{te} Vertikalreihe ausgelassen wird. Dadurch wird, abgesehen vom Zeichen

$$f(a_{rs}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Die Anzahl der Vertauschungen von Vertikalreihen mit einander + der Anzahl der Vertauschungen von Horizontalreihen mit einander, welche erforderlich ist, um von der ersten Form der $f(a_{r,s})$ zu dieser zweiten überzugehen, ist $(n-s)(s-1) + (n-r)(r-1) = (n+1)(s+r) - (s^2+r^2) - 2n$. Diese Zahl ist, wenn n grade ist immer grade; wenn n ungrade ist, grade oder ungrade, je nachdem $r-s$ grade oder ungrade ist; folglich ist, wenn $f(a_{r,s})$ in der zweiten Form geschrieben ist, das Vorzeichen des Gliedes $a_{r,s}\, f(a_{r,s})$ immer $= (-1)^{r-s}$. — Bezeichnen wir $(-1)^{r-s} f(a_{r,s})$ mit $\mathfrak{a}_{r,s}$, so ist, wenn wir die in 1. aufgestellte Determinante mit D bezeichnen

$$D = \sum_{s=1}^{s=n} a_{p,s}\ \mathfrak{a}_{p,s}$$

$$= a_{p,1}\ \mathfrak{a}_{p,1} + a_{p,2}\ \mathfrak{a}_{p,2} + a_{p,3}\ \mathfrak{a}_{p,3} + \dots a_{p,n}\ \mathfrak{a}_{p,n}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} a_{r,p}\ \mathfrak{a}_{r,p}$$

$$= a_{1,p}\ \mathfrak{a}_{1,p} + a_{2,p}\ \mathfrak{a}_{2,p} + a_{3,p}\ \mathfrak{a}_{3,p} + \dots a_{n,p}\ \mathfrak{a}_{n,p}$$

Die obigen Beispiele schreiben sich dann folgendermassen

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{3,3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{4,3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix}$$

6. Aus 4. b in Verbindung mit den letzten Gleichungen in 5 ergiebt sich, dass wenn q eine von p verschiedene Zahl aus der Zahlenreihe von 1 bis n ist.

$$\sum_{s=1}^{s=n} a_{q,s}\ \mathfrak{a}_{p,s} = a_{q,1}\ \mathfrak{a}_{p,1} + a_{q,2}\ \mathfrak{a}_{p,2} + \dots a_{q,n}\ \mathfrak{a}_{p,n} = 0$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_{r,q}\ \mathfrak{a}_{r,p} = a_{1,q}\ \mathfrak{a}_{1,p} + a_{2,q}\ \mathfrak{a}_{2,p} + \dots a_{n,q}\ \mathfrak{a}_{n,p} = 0$$

§. 3. Anwendung der obigen Determinanten — Eigenschaften zur Auflösung eines Systems von n Gleichungen 1. Grades.

1. Die allgemeine Form eines Systems von n Gleichungen 1. Grades ist

$$\begin{matrix} a_{1,1}\ x_1 + a_{1,2}\ x_2 + a_{1,3}\ x_3 + \dots a_{1,n}\ x_n = k_1 \\ a_{2,1}\ x_1 + a_{2,2}\ x_2 + a_{2,3}\ x_3 + \dots a_{2,n}\ x_n = k_2 \\ a_{3,1}\ x_1 + a_{3,2}\ x_2 + a_{3,3}\ x_3 + \dots a_{3,n}\ x_n = k_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n,1}\ x_1 + a_{n,2}\ x_2 + a_{n,3}\ x_3 + \dots a_{n,n}\ x_n = k_n \end{matrix}$$

2. Um x_p zu finden, multiplicire man die erste Gleichung mit $\mathfrak{a}_{1,p}$ (§. 2. 5), die zweite mit $\mathfrak{a}_{2,p}$ ... die letzte mit $\mathfrak{a}_{n,p}$, so erhält man nach §. 2. 5 u. 6.

$$D.\quad x_p = k_1\,\mathfrak{a}_{1,p} + k_2\,\mathfrak{a}_{2,p} + k_3\,\mathfrak{a}_{3,p} + \ldots k_n\,\mathfrak{a}_{n,p}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p-1} & k_1 & a_{1,p+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p-1} & k_2 & a_{2,p+1} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots & a_{3,p-1} & k_3 & a_{3,p+1} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p-1} & k_n & a_{n,p+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Bezeichnen wir die Determinante rechts mit D_p, so ist

$$x_p = \frac{D_p}{D}$$

3. Wir können direkt beweisen, dass die in 2 gefundenen Ausdrücke für die sämmtlichen x jede der n Gleichungen befriedigen. Es ist nämlich

$$x_1 = \frac{k_1\,\mathfrak{a}_{1,1} + k_2\,\mathfrak{a}_{2,1} + k_3\,\mathfrak{a}_{3,1} + \ldots k_n\,\mathfrak{a}_{n,1}}{D}$$

$$x_2 = \frac{k_1\,\mathfrak{a}_{1,2} + k_2\,\mathfrak{a}_{2,2} + k_3\,\mathfrak{a}_{3,2} + \ldots k_n\,\mathfrak{a}_{n,2}}{D}$$

$$x_3 = \frac{k_1\,\mathfrak{a}_{1,3} + k_2\,\mathfrak{a}_{2,3} + k_3\,\mathfrak{a}_{3,3} + \ldots k_n\,\mathfrak{a}_{n,3}}{D}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{k_1\,\mathfrak{a}_{1,n} + k_2\,\mathfrak{a}_{2,n} + k_3\,\mathfrak{a}_{3,n} + \ldots k_n\,\mathfrak{a}_{n,n}}{D}$$

Substituirt man diese Zahlen in eine der n Gleichungen in 1, etwa in die $q$te und ordnet die Glieder der Zähler nach den Indices von k zusammen, so wird nach §. 2. 5. 6. die linke Seite sofort $= \frac{k_q \,.\, D}{D} = k_q$, so dass die Gleichung erfüllt ist.

4. Besondere Fälle. Wenn $D = 0$ ist, so ist die Bedingung der Möglichkeit für das System der Gleichungen, vorausgesetzt, dass die x sämmtlich endliche Werthe haben sollen, dass auch D_p für alle Werthe von p Null ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat x_p die Form $\frac{0}{0}$ und hat unendlich viele Werthe; in diesem Falle sind die Gleichungen von einander abhängig; d. h. es findet unter ihnen die Beziehung statt, dass wenigstens eine von ihnen sich aus den übrigen oder einem Theile der übrigen durch blosse Umformung ableiten lässt.

Wenn insbesondere $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots k_n = 0$, so werden, wenn $D \gtrless 0$ ist, $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Ist aber D selbst $= 0$, so erscheinen $x_1\ x_2 \ldots x_n$ wieder unter der Form $\frac{0}{0}$ und nehmen unendlich viele Werthsysteme an; im Allgemeinen sind dann durch die n Gleichungen (1.) die Verhältnisse der Zahlen $x_1\ x_2 \ldots x_n$ gegeben. — Ist die Grössenbeziehung, welche durch die Gleichungen in (1.) dargestellt wird, von solcher Beschaffenheit, dass sie die Werthe $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ nicht zulässt, so ist $D = 0$ die Bedingung dafür, dass die n Gleichungen zusammen bestehen können.

§. 4. Geometrische Anwendungen und Folgerungen.

1. Wir wollen eine Ebene, welche, auf rechtwinklige Axen bezogen, die Gleichung

$$Ax + By + Cz + E = 0$$

hat, mit $(A\,B\,C\,E)$ und wenn sie die Gleichung

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + E(z-z_1) = 0$$

hat, mit $(A\,B\,C\,x_1\,y_1\,z_1)$ bezeichnen; ferner eine grade Linie, deren Gleichungen

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

sind, mit $(a\,b\,c\,x_1\,y_1\,z_1)$.

Ist von einer Ebene nur die Stellung*) durch die Conficienten $A\ B\ C$ bestimmt, so sprechen wir kurz von der ebenen Stellung $(A\,B\,C)$; gleicherweise von der Richtung $(a\,b\,c)$ einer Graden.

2. Da die Bedingungsgleichung dafür, dass eine Richtung $(a\,b\,c)$ in einer ebenen Stellung $(A\,B\,C)$ enthalten sei

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

ist, so ist die Bedingung dafür, dass 3 Richtungen $(a_1\,b_1\,c_1)$ $(a_2\,b_2\,c_2)$ $(a_3\,b_3\,c_3)$ derselben ebenen Stellung angehören (dass 3 Grade derselben Ebene parallel seien) gegeben durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

und die Bedingung, dass 3 ebene Stellungen $(A_1\ B_1\ C_1)$ $(A_2\ B_2\ C_2)$ $(A_3\ B_3\ C_3)$ dieselbe Richtung enthalten, durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Die Bedingung, dass 2 Punkte $(x_1\,y_1\,z_1)$ und $(x_2\,y_2\,z_2)$ und 2 Richtungen $(a_1\,b_1\,c_1)$ $(a_2\,b_2\,c_2)$ derselben Ebene angehören ist die, dass die 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + E &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + E &= 0 \\ Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 \quad &= 0 \\ Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

zusammen bestehen können (d. h. Werthe für $A\ B\ C\ E$ ergeben, welche nicht sämmtlich $= 0$ sind). Diese Bedingung ist aber

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung drückt gleichzeitig die Bedingung aus, dass die Graden $(a_1\,b_1\,c_1\ x_1\,y_1\,z_1)$ $(a_2\,b_2\,c_2\ x_2\,y_2\,z_2)$ einen Punkt gemein haben. Sie ist ferner, wenn $x_1\ y_1\ z_1$ als veränderlich betrachtet werden, die Gleichung der Ebene, welche durch den Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ und die Richtungen $(a_1\ b_1\ c_1)$ und $(a_2\ b_2\ c_2)$ bestimmt wird.

4. Die Bedingung, dass 3 Punkte $(x_1\ y_1\ z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ $(x_3\ y_3\ z_3)$ und eine Richtung (abc) derselben Ebene angehören, ist dargestellt durch die Gleichung

---

*) Vgl. von Staudt, Geometrie der Lage. 40.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Denken wir $x_1\ y_1\ z_1$ veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Ebene dar, welche durch die Punkte $(x_2\ y_2\ z_2)$ $(x_3\ y_3\ z_3)$ und die Richtung (abc) bestimmt ist.

5. Die Bedingung, dass 4 Punkte $(x_1\ y_1\ z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ $(x_3\ y_3\ z_3)$ $(x_4\ y_4\ z_4)$ derselben Ebene angehören, ist dargestellt durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie ist, wenn $x_1\ y_1\ z_1$ als veränderlich betrachtet werden, die Gleichung einer Ebene, welche durch die 3 Punkte $(x_2\ y_2\ z_2)$ $(x_3\ y_3\ z_3)$ $(x_4\ y_4\ z_4)$ bestimmt ist.

6. Die Bedingung, dass die 4 Ebenen $(A_1\ B_1\ C_1\ E_1)$ $(A_2\ B_2\ C_2\ E_2)$ $(A_3\ B_3\ C_3\ E_3)$ $(A_4\ B_4\ C_4\ E_4)$ einen Punkt gemein haben, ist dargestellt durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & E_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & E_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & E_4 \end{vmatrix} = 0$$

7. Der Inhalt eines Dreiecks, dessen Eckpunkte $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$ $(x_3\ y_3)$ sind, ist

$$\pm \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Da, wie leicht nachzuweisen ist,

$$(z_1+z_2+z_3)\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (z_1+z_2+z_4)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + (z_1+z_3+z_4)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - (z_2+z_3+z_4)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

ist, so ist der Inhalt eines Tetraëders, dessen Eckpunkte $(x_1\ y_1\ z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ $(x_3\ y_3\ z_3)$ $(x_4\ y_4\ z_4)$ sind, =

$$\pm \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

woraus dann wieder die in (5.) aufgestellten Sätze folgen.

§. 5. Das Multiplikationsgesetz der Determinanten.

1. Aus der Definition der Determinanten ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Ebenso

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & b_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & b_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

U. s. w.

2. Ebenso ergiebt sich sehr leicht:

$$\begin{vmatrix} ca_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ ca_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = c. \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

3. Setzt man $a_{r,1}\, b_{s,1} + a_{r,2}\, b_{s,2} + a_{r,3}\, b_{s,3} + \dots a_{r,n}\, b_{s,n} = h_{r,s}$ so ist

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \dots & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

Beweis. Die Determinante links lässt sich nach 1. als die Summe von n^n einzelnen Determinanten darstellen, deren jede die Form hat:

$$\begin{vmatrix} a_{1,\alpha} b_{1,\alpha} & a_{1,\beta} b_{2,\beta} & a_{1,\gamma} b_{3,\gamma} & \dots & a_{1,\nu} b_{n,\nu} \\ a_{2,\alpha} b_{1,\alpha} & a_{2,\beta} b_{2,\beta} & a_{2,\gamma} b_{3,\gamma} & \dots & a_{2,\nu} b_{n,\nu} \\ a_{3,\alpha} b_{1,\alpha} & a_{3,\beta} b_{2,\beta} & a_{3,\gamma} b_{3,\gamma} & \dots & a_{3,\nu} b_{n,\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,\alpha} b_{1,\alpha} & a_{n,\beta} b_{1,\beta} & a_{n,\gamma} b_{3,\gamma} & \dots & a_{n,\nu} b_{n,\nu} \end{vmatrix} = b_{1,\alpha}\, b_{2,\beta}\, b_{3,\gamma} \dots b_{n,\nu} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & a_{1,\gamma} & \dots & a_{1,\nu} \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & a_{2,\gamma} & \dots & a_{2,\nu} \\ a_{3,\alpha} & a_{3,\beta} & a_{3,\gamma} & \dots & a_{3,\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,\alpha} & a_{n,\beta} & a_{n,\gamma} & \dots & a_{n,\nu} \end{vmatrix}$$

wo $\alpha \beta \gamma \dots \nu$ irgend eine der n^n möglichen Complexionen von n (gleichen oder ungleichen) Zahlen aus der Zahlenreihe 1 bis n darstellt. — Diejenigen dieser n^n Determinanten, in welchen unter den Zahlen $\alpha \beta \gamma \dots \nu$ gleiche vorkommen, sind $= 0$ (§. 2. 4. 6); es bleiben also nur diejenigen übrig, in welchen alle diese Zahlen von einander verschieden sind. Für diese ist aber:

$$\begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & a_{1,\gamma} & \dots & a_{1,\nu} \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & a_{2,\gamma} & \dots & a_{2,\nu} \\ a_{3,\alpha} & a_{3,\beta} & a_{3,\gamma} & \dots & a_{3,\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,\alpha} & a_{n,\beta} & a_{n,\gamma} & \dots & a_{n,\nu} \end{vmatrix} = (-1)^i \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

wo mit i die Anzahl der Inversionen der Permutationsform $\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu$ bezeichnet ist.

Folglich ist

$$\Sigma\, b_{1,\alpha}\, b_{2,\beta}\, b_{3,\gamma} \dots b_{n,\nu} \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & a_{1,\gamma} & \dots & a_{1,\nu} \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & a_{2,\gamma} & \dots & a_{2,\nu} \\ a_{3,\alpha} & a_{3,\beta} & a_{3,\gamma} & \dots & a_{3,\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,\alpha} & a_{n,\beta} & a_{n,\gamma} & \dots & a_{n,\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \Sigma(-1)^i\, b_{1,\alpha}\, b_{2,\beta}\, b_{3,\gamma} \dots b_{n,\nu}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

wodurch das Multiplikationsgesetz bewiesen ist.

4. Ein besonders wichtiger Fall ist der des Quadrates einer Determinante, der Fall also, wo allgemein $a_{r,s} = b_{r,s}$ ist. In diesem Falle ist

$$h_{r,r} = a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + a_{r,3}^2 + \dots a_{r,n}^2$$
$$h_{r,s} = h_{s,r} = a_{r,1}\, a_{s,1} + a_{r,2}\, a_{s,2} + \dots a_{r,n}\, a_{s,n}$$

5. Das Multiplikationsgesetz der Determinanten ist sehr reich auch an elementaren Anwendungen und lassen sich deren sehr geeignete z. B. in Crelle Journal Bd. 40 & 51 finden. Das folgende möge den Abschluss der vorliegenden Abhandlung bilden.

Wenn zwischen den 9 Zahlen $a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3\, c_1\, c_2\, c_3$ die 6 Gleichungen

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \qquad (1')$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \qquad (2')$$
$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \qquad (3'.)$$

$$a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, c_2 = 0 \qquad (4')$$
$$a_1\, a_3 + b_1\, b_3 + c_1\, c_3 = 0 \qquad (5')$$
$$a_2\, a_3 + b_2\, b_3 + c_2\, c_3 = 0 \qquad (6')$$

bestehen, so bestehen zwischen ihnen noch eine Reihe von andern Abhängigkeiten, welche sich leicht folgendermassen ableiten lassen.

Aus (4.) ergiebt sich sofort, vermöge der Gleichungen (1'.) bis (6'.)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = 1$$

also
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (7')$$

Durch Vergleichung der 3 Gleichungen 1' 4' 5' mit folgenden 3 aus 7' hervorgehenden Gleichungen

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$
$$a_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$
$$a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ergiebt sich sogleich
$$a_1 = \pm (b_2 c_3 - b_3 c_2) \qquad (8')$$
$$b_1 = \pm (c_2 a_3 - c_3 a_2) \qquad (9')$$
$$c_1 = \pm (a_2 b_3 - a_3 b_2) \qquad (10')$$

In gleicher Weise ergiebt sich dann ferner:
$$a_2 = \pm (b_3 c_1 - b_1 c_3) \qquad (11')$$
$$b_2 = \pm (c_3 a_1 - c_1 a_3) \qquad (12')$$
$$c_2 = \pm (a_3 b_1 - a_1 b_3) \qquad (13')$$
$$a_3 = \pm (b_1 c_2 - b_2 c_1) \qquad (14'.)$$
$$b_3 = \pm (c_1 a_2 - c_2 a_1) \qquad (15')$$
$$c_3 = \pm (a_1 b_2 - a_2 b_1) \qquad (16')$$

In Bezug auf das Vorzeichen ist zu merken, dass entweder in allen Gleichungen 7' bis 16' das obere oder in allen das untere zu nehmen ist.

Aus der Gleichung (7') ergeben sich noch die Gleichungen
$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \pm 1$$
$$b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \pm 1$$
$$c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$$

d. h. vermöge der Gleichungen 8' bis 16'
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \qquad (17')$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \qquad (18')$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \qquad (19')$$

Ferner
$$b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$c_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

d. h.
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \qquad (20')$$
$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \qquad (21')$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \qquad (22')$$

Diese Gleichungen finden bei der Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume Anwendung. Aehnliche Entwickelungen ergeben sich mit gleicher Leichtigkeit, wenn die Anzahl der Coëfficienten n^2 statt 3^2 ist.

II. Entwickelung von sin x und cos x in Reihen, welche nach wachsenden Potenzen von x fortschreiten.

Die Entwickelungen der genannten Reihen, wie sie sich in Schulbüchern, so weit mir bekannt ist, finden, wie sie demnach auch wol meistens in unsern Realschulen durchgenommen werden, scheinen mir an zweierlei Mängeln zu leiden; entweder sind sie nicht elementar, d. h. sie greifen in den von ihnen vorausgesetzten Anschauungen und Begriffen über den Kreis der Schule hinaus, oder sie sind nicht streng und erschöpfend im Beweise. Die folgende Entwicklung ist von diesen beiden Mängeln frei. — Sie zerfällt in 2 Abtheilungen, deren erste zunächst bestimmt ist, im Bewusstsein des Schülers den Zusammenhang zwischen den ihm geläufigen Elemente der Trigonometrie und den in Rede stehenden Reihenentwicklungen lebendig zu erhalten.

§. 1. Bekanntlich lässt sich auf ganz elementaren Wege (Vgl. meine Elemente der Mathematik, Trigonometrie §. 20) leicht beweisen, dass für jeden grade n Werth von m

$$(1)\quad \cos ma = \cos^{m} a - \frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2} a \sin^{2} a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cos^{m-4} a \sin^{4} a \ldots \pm \sin^{m} a$$

$$(2)\quad \sin ma = \frac{m}{1!}\cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3} a \sin^{3} a \ldots \mp \cos a \sin^{m-1} a$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $m = 4n$ oder $4n + 2$ ist.

Und für jeden ungraden Werth von m

$$(3.)\quad \cos ma = \cos^{m} a - \frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2} a \sin^{2} a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cos^{m-4} a \sin^{4} a - \ldots \pm \frac{m}{1}\cos a \sin^{m-1} a$$

$$(4)\quad \sin ma = \frac{m}{1}\cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3} a \sin^{3} a + \ldots\ldots \pm \sin^{m} a$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m = 4n + 1$ oder $= 4n + 3$ ist.

Diese Formeln lassen eine wichtige Umformung zu:

A. Wenn m grade ist, so ist

$$(1'.)\quad \cos ma = (1-\sin^{2} a)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{2!}(1-\sin^{2} a)^{\frac{m-2}{2}}\sin^{2} a + \ldots\ldots \pm \sin^{m} a$$

$$= 1 - \frac{m.\,m}{2!}\sin^{2} a + \frac{(m+2).\,m.\,m\,(m-2)}{4!}\sin^{4} a - \ldots\ldots$$

Durch Induction ergiebt sich für das allgemeine Glied

$$a_n = (-1)^n \frac{(m+2n-2)(m+2n-4)\ldots(m+2)\,m.\,m\,(m-2)\ldots(m-2n+4)(m-2n+2)}{(2n)!}\sin^{2n} a$$

Die Anzahl der Glieder ist $\frac{m}{2} + 1$

$$(2'.)\quad \sin ma = \cos a \left\{ \frac{m}{1}(1-\sin^{2} a)^{\frac{m-2}{2}}\sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(1-\sin^{2} a)^{\frac{m-4}{2}}\sin^{3} a \ldots \mp \sin^{m-1} a \right\}$$

$$\sin ma = \cos a \left\{ \frac{m}{1} \sin a - \frac{(m+2)\, m\, (m-2)}{3!} \sin^3 a + \frac{(m+4)\,(m+2) m (m-2)\,(m-4)}{5!} \sin^5 a \ldots \right\}$$

Durch Induction ergiebt sich für das allgemeine Glied des in Klammern eingeschlossenen Polynoms von $\frac{m}{2}$ Gliedern

$$a_n = (-1)^n \frac{(m+2n)\,(m+2n-2) \ldots (m+2)\, m\, (m-2) \ldots (m-2n+2)\,(m-2n)}{(2n+1)!} \sin^{2n+1} a$$

B. Wenn m ungrade ist, so ist

$$(3'.)\ \cos ma = \cos a \left\{ (1-\sin^2 a)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)}{2!} (1-\sin^2 a)^{\frac{m-3}{2}} \sin^2 a \ldots\ldots \pm \frac{m}{1} \sin^{m-1} a \right\}$$

$$= \cos a \left\{ 1 - \frac{(m+1)\,(m-1)}{2!} \sin^2 a + \frac{(m+3)\,(m+1)\,(m-1)\,(m-3)}{4!} \sin^4 a \ldots\ldots \right\}$$

Durch Induction ergiebt sich für das allgemeine Glied des in Klammern eingeschlossenen Polynoms von $\frac{m+1}{2}$ Gliedern

$$a_n = (-1)^n \frac{(m+2n-1)\,(m+2n-3) \ldots (m+1)\,(m-1) \ldots (m-2n+3)\,(m-2n+1)}{(2n)!} \sin^{2n} a$$

$$4'.\ \sin ma = \frac{m}{1} (1-\sin^2 a)^{\frac{m-1}{2}} \sin a - \frac{m(m-1)\,(m-2)}{3!} (1-\sin^2 a)^{\frac{m-3}{2}} \sin^3 a + \ldots\ldots \pm \sin^m a$$

$$= \frac{m}{1} \sin a - \frac{(m+1)\, m\, (m-1)}{3!} \sin^3 a + \frac{(m+3)\,(m+1)\, m\, (m-1)\,(m-3)}{5!} \sin^5 a - \ldots\ldots$$

Durch Induction erhält man für das allgemeine Glied

$$a_n = (-1)^n \frac{(m+2n-1)(m+2n-3) \ldots\ldots (m+1)\, m\, (m-1) \ldots\ldots (m-2n+3)(m-2n+1)}{(2n+1)!}$$

Die Zahl der Glieder ist $\frac{m+1}{2}$

Man kann diese 4 Gleichungen 1'. bis 4'. auf folgende Form bringen:

A. Wenn m grade ist

$$1''.\ \cos ma = 1 - \frac{(m\sin a)^2}{2!} + \frac{(m\sin a)^4}{4!}\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) - \frac{(m\sin a)^6}{6!}\left(1+\frac{4}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(-\frac{4}{m}\right) + \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = (-1)^n \frac{(m\sin a)^{2n}}{(2n)!}\left(1+\frac{2n-2}{m}\right)\left(1+\frac{2n-4}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{2n-4}{m}\right)\left(1-\frac{2n-2}{m}\right)$$

$$2''.\ \sin ma = \cos a \left\{ \frac{(m\sin a)^1}{1!} - \frac{(m\sin a)^3}{3!}\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \frac{(m\sin a)^5}{5!}\left(1+\frac{4}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{4}{m}\right) - \ldots \right\}$$

Das allgemeine Glied des Polynoms in der Klammer ist

$$a_n = (-1)^n \frac{(m\sin a)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1+\frac{2n}{m}\right)\left(1+\frac{2n-2}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{2n-2}{m}\right)\left(1-\frac{2n}{m}\right)$$

B. Wenn m ungrade ist

$$(3''.)\quad \cos ma = \cos a\left\{1-\frac{(m\sin a)^2}{2!}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{(m\sin a)^4}{4!}\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)-\ldots\right\}$$

Das allgemeine Glied des Polynoms in der Klammer ist

$$a_n = (-1)^n \frac{(m\sin a)^{2n}}{(2n)!}\left(1+\frac{2n-1}{m}\right)\left(1+\frac{2n-3}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{2n-3}{m}\right)\left(1-\frac{2n-1}{m}\right)$$

$$(4''.)\quad \sin ma = \frac{(m\sin a)^1}{1!}-\frac{(m\sin a)^3}{3!}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{(m\sin a)^5}{5!}\left(1+\frac{3}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)-\ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = (-1)^n \frac{(m\sin a)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1+\frac{2n-1}{m}\right)\left(1+\frac{2n-3}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{2n-3}{m}\right)\left(1-\frac{2n-1}{m}\right)$$

Lässt man in diesen Gleichungen a ohne Grenze abnehmen, und m gleichzeitig ins Unendliche wachsen, so jedoch, dass m stets eine ganze Zahl bleibt, und so dass ma konstant $= x$ bleibt, dass also die linke Seite von (1″) und (3″) $\cos x$ und die linke Seite von (2″) und (4″) $\sin x$ ist, so wird $\cos a = 1$; $m \sin a$ konvergirt gegen $ma = x$, die Glieder der Reihen auf den rechten Seiten der Gl. (1″) und (3″) konvergiren gegen die Glieder der Reihe

$$\text{(I)}\qquad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\ldots$$

und die Glieder der Reihen auf den rechten Seiten der Gl. (2″) und (4″) konvergiren gegen die Glieder der Reihe

$$\text{(II)}\qquad \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots.$$

Diese Reihen sind für jeden Werth von x konvergent, aber es ist noch keineswegs bewiesen, dass die Summe der Reihe I $\cos x$ und dass die Summe der Reihe II $\sin x$ ist; dazu fehlt vorzugsweise zweierlei, nämlich dass die allgemeinen Glieder der Reihen 1′ 2′ 3′ 4′ durch eine unvollständige Induction gefunden sind, und dann, dass durchaus nicht bewiesen ist, dass die Summen (1″), (3″) bei unendlich wachsendem m gegen die Summe der Reihe I konvergiren, und dass die Summen (2″) (4″) gegen die Summe der Reihe II konvergiren. Wir wollen nicht diese Lücken, auf dem bisherigen Wege verharrend, ausfüllen; wir wollen vielmehr, nachdem dieser Weg uns zu den Reihenformen I & II geführt hat, direkt beweisen, dass die Summen dieser convergenten Reihen resp. $\cos x$ und $\sin x$ sind. Wir stützen uns zu diesem Beweise auf die charakteristische Eigenschaft der Cofinus, welche durch die Funktionalgleichung

$$f(x+y)+f(x-y)=2fxfy$$

ausgesprochen ist. Es ist leicht und vollkommen elementar zu beweisen (vgl. z. B. Cauchy Cours d'Analyse Chap. V. §. 2) dass diejenige Funktion von x, welche diese Gleichung befriedigt und für irgend einen Werth von x kleiner als 1 ist, $= \cos ax$ ist, wo a eine willkürliche Constante ist; dass sie dagegen, wenn sie für irgend einen Werth von x grösser als 1 ist $= \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ ist, wo a wieder eine willkürliche Constante bezeichnet.

§. 2. 1. Bezeichnen wir die Summe der Reihe I mit fx, so ist bekanntlich

$$fx \, . \, fy = 1 - \left(\frac{x^2}{2\,!} + \frac{y^2}{2\,!}\right) + \left(\frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^2}{2\,!} . \frac{y^2}{2\,!} + \frac{y^4}{4\,!}\right) - \ldots .$$

$$= 1 - \frac{1}{2\,!}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4\,!}\left(x^4 + \frac{4 \, . \, 3}{2\,!} x^2 y^2 + y^4\right) - \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = (-1)^n \left\{ \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)\,!} . \frac{y^2}{2\,!} + \ldots . \frac{y^{2n}}{(2n)\,!} \right\}$$

$$= (-1)^n \, \frac{1}{(2n)\,!} \left\{ x^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{2\,!} x^{2n-2} y^2 + \ldots . y^{2n} \right\}$$

In der Klammer stehen die Glieder grader Ordnung der Entwicklung von $(x + y)^{2n}$

Ferner ist

$$f(x + y) = 1 - \frac{(x + y)^2}{2\,!} + \frac{(x + y)^4}{4\,!} - \ldots .$$

$$f(x - y) = 1 - \frac{(x - y)^2}{2\,!} + \frac{(x - y)^4}{4\,!} - \ldots .$$

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 \left\{ 1 - \frac{1}{2\,!}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4\,!}\left(x^4 + \frac{4 \, . \, 3}{2\,!} x^2 y^2 + y^4\right) \ldots . \right\}$$

Demnach ist

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 fx fy$$

Da nun aber offenbar fx d. h. die Summe der Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} \ldots .$$

für kleine Werthe von x kleiner als 1 ist, so ist $fx = \cos ax$, wo a eine unten näher zu bestimmende Constante, und zwar eine absolute Zahl ist.

2. Es ergiebt sich ferner

$$(fx)^2 = 1 - x^2 \left(\frac{1}{2\,!} + \frac{1}{2\,!}\right) + x^4 \left(\frac{1}{4\,!} + \frac{1}{2\,!} . \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{4\,!}\right) - \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = (-1)^n \, x^{2n} \left\{ \frac{1}{(2n)\,!} + \frac{1}{(2n-2)\,!} . \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{(2n-4)\,!} . \frac{1}{4\,!} + \ldots \frac{1}{(2n)\,!} \right\}$$

$$= (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} \left\{ 1 + \frac{2n(2n-1)}{2\,!} + \ldots + 1 \right\}$$

In der Klammer steht die Summe der Binomial-Coëfficienten grader Ordnung $2n^{\text{ten}}$ Grades.

Bezeichnen wir ferner die Summe der Reihe II mit φx, so ist

$$(\varphi x)^2 = \frac{x^2}{1\,!} - x^4 \left\{ \frac{1}{1!\,3!} + \frac{1}{3!\,1!} \right\} + x^6 \left\{ \frac{1}{1!\,5!} + \frac{1}{3!\,3!} + \frac{1}{5!\,1!} \right\} - \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n\,!} \left\{ \frac{2n}{1!} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} + \ldots . \frac{2n}{1!} \right\}$$

In der Klammer steht die Summe der Binomial-Coëfficienten ungrader Ordnung $2n^{\text{ten}}$ Grades. Folglich ist

$$(fx)^2 + (\varphi x)^2 = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{2}{1} + 1\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{4}{1!} + \frac{4.3}{1.2} - \frac{4}{1} + 1\right) \ldots .$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}\left(1 - \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \ldots . + 1\right)$$

$$= (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}(1-1)^{2n} = 0$$

folglich $\quad (fx)^2 + (\varphi x)^2 = 1$

mithin ist dem absoluten Werthe nach

$$\varphi x = \sin ax$$

Wir können sofort beweisen, dass φx auch dem Vorzeichen nach $= \sin ax$ ist.

Zunächst für kleine Werthe von x ist sowohl $\sin ax$ wie φx positiv. — Gäbe es also Werthe von x, für welche $\sin ax$ und φx entgegengesetzte Vorzeichen hätten, so müsste, während $\cos a(x+y) = \cos ax \cos ay - \sin ax \sin ay$ und $\cos a(x-y) = \cos ax \cos ay + \sin ax \sin ay$ ist, $fx\, fy - \varphi x\, \varphi y$ für gewisse Werthe von y der Zahl $f(x+y)$ und für andere Werthe von y der Zahl $f(x-y)$ gleich sein. — Das ist aber nicht der Fall; es ist vielmehr immer $f(x+y) = fx\, fy - \varphi x\, \varphi y$

Denn es ist, wie oben gezeigt

$$fx \,.\, fy = 1 - \frac{1}{2!}(x^2+y^2) + \frac{1}{4!}\left(x^4 + \frac{4.3}{2!}x^2y^2 + y^4\right) - \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$(-1)^n \frac{1}{2n!}\left\{x^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{2!}x^{2n-2}y^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}x^{2n-4}y^4 \ldots\right\}$$

In der Klammer stehen die Glieder grader Ordnung der Entwicklung von $(x+y)^{2n}$

Es ist ferner

$$\varphi x \,.\, \varphi y = \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{y^1}{1!} - \left\{\frac{x^3}{3!} \cdot \frac{y^1}{1!} + \frac{x}{1} \cdot \frac{y^3}{3!}\right\} + \left\{\frac{x^5}{5!} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{y^3}{3!} + \frac{x}{1} \cdot \frac{y^5}{5!}\right\} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{1}xy - \frac{1}{4!}\left(\frac{4}{1}x^3y + \frac{4}{1}xy^3\right) + \frac{1}{6!}\left(\frac{6}{1}x^5y + \frac{6.\,5.\,4}{3!}x^3y^3 + \frac{6}{1}x \quad\right) - \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}\left\{\frac{2n}{1}x^{2n-1}y^1 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}x^{2n-3}y^3 + \ldots \frac{2n}{1}x^1y^{2n-1}\right\}$$

In der Klammer stehen die Glieder ungrader Ordnung der Entwicklung von $(x+y)^{2n}$. — Subtrahirt man diese beiden Reihen, so erhält man eine Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$(-1)^n \frac{(x+y)^{2n}}{2n!}$$

Folglich ist immer

$$fx\, fy - \varphi x\, \varphi y = f(x+y)$$

und demnach auch rücksichtlich des Vorzeichens

$$\varphi x = \sin ax$$

3. Jetzt ist noch die Constante a zu bestimmen.

Es ist $\frac{\sin ax}{x} = \frac{\sin ax}{ax} \,.\, a$. Lassen wir x ins Unendliche abnehmen, so konvergirt diese Zahl gegen a. — Andererseits ist aber

$$\frac{\varphi x}{x} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Lassen wir x ins Unendliche abnehmen, so konvergirt diese Zahl gegen 1, folglich ist

$$a = 1 \qquad \varphi x = \sin x \qquad fx = \cos x$$

oder

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Schlussbemerkung. Durch ein ganz gleiches Verfahren findet man sehr leicht

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$$

woraus man dann

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = a^x$$

erhält, und daraus die Constantenbestimmung

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

Gallenkamp.