Ueber die Definitionen des Winkels und der Parallelen.

Die Ansichten der Mathematiker gehen darüber auseinander, ob und in wie weit man in der Geometrie von der Vorstellung der Bewegung Gebrauch machen darf. Die sogenannte strenge Schule verwirft diese Vorstellung als eine Verunreinigung ihrer Wissenschaft, indem sie als einziges in der Geometrie zulässiges Princip den räumlichen Größenbegriff festgehalten wissen will. Andere, namentlich neuere Mathematiker nehmen dagegen die Vorstellung der Bewegung in mehr oder minder ausgedehntem Maße zu Hülfe, um mittelst derselben zu klarer Auffassung und richtiger Erkenntniß der Raumgebilde zu gelangen. Natürlich ist in der Geometrie diese Vorstellung nur in ihrer einfachsten Abstraction statthaft, lediglich als Veränderung eines Ortes (progressive Bewegung) oder einer Richtung (drehende Bewegung), also im Gegensatze zur Mechanik entkleidet der Nebenvorstellungen der Materie und Kraft sowie ohne Rücksicht auf die Zeit. Glücklicher Weise handelt es sich in dem Streite um die alleinige Berechtigung der ersteren oder die Zulässigkeit der letzteren Vorstellung mehr um eine Principienfrage, als daß die Einnahme jenes engeren oder dieses weiteren Standpunktes praktisch für den Aufbau der Wissenschaft von so erheblicher Tragweite wäre, als es vielleicht den Anschein haben könnte. Von wesentlicher Bedeutung ist die Verschiedenheit jener beiden Standpunkte nur für die Lehre vom Winkel und von den Parallelen. Gerade die Schwierigkeit, diese Lehre bei Einschränkung der Geometrie auf das einzige Princip der räumlichen Ausdehnung in genügender Weise zu begründen, hat Veranlassung gegeben, die Aufnahme eines weiteren Princips nicht blos für gerechtfertigt, sondern auch für geboten zu halten, und zwar entweder des Begriffs der Bewegung in seiner Allgemeinheit oder des aus dem speciellsten Falle der Bewegung, der Veränderung eines Ortes, sich ableitenden Begriffs der Richtung. Einerseits das Bestreben, ohne die Einheit der Grundvorstellung preiszugeben, jene Schwierigkeit zu überwinden, und andererseits der weitere Schritt, für die Auffassung dieser Begriffe eine anderweitige Grundvorstellung zu Hülfe zu nehmen, hat eine große Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit der Definitionen und demgemäß auch der Beweisführung in diesem Theile der Geometrie zur Folge gehabt. Wenn im Folgenden diese verschiedenen Definitionen etwas näher discutirt werden sollen, so liegt zunächst schon in dem Gesagten der Grund angedeutet, weshalb beide Begriffe trotz ihrer Verschiedenartigkeit ein zusammengehöriges Objekt der Erörterung bilden, sobald man zugleich der Frage näher treten will, in wie weit die Aufnahme der Vorstellung der Bewegung in die Geometrie gerechtfertigt ist. Sodann ergibt sich aus dem Vorhergehenden von selbst, wie die Definitionen beider Begriffe in correspondirender Uebereinstimmung naturgemäß anzuordnen sind. Sowohl beim Winkel als auch bei den Parallelen sollen zunächst unter I diejenigen Definitionen angeführt werden, welche lediglich das Princip der Größe zur Voraussetzung haben; unter II sodann diejenigen, welche auf dem Begriffe der Richtung basiren und in welchen demnach von der Vorstellung der Bewegung nur in mehr oder minder eingeschränkter oder versteckter Weise Gebrauch gemacht wird; unter III endlich diejenigen, in welchen geradezu von dem Prinzip der Bewegung ausgegangen wird. Was die nähere Ausführung des Gegenstandes betrifft, so soll in derselben weniger der wissenschaftliche Werth oder Unwerth dieser oder jener Auffassungs- und Behandlungsweise, als vielmehr die praktische Brauchbarkeit für den Schulunterricht ins Auge gefaßt werden. Sodann ist mit Rücksicht auf die Sitte, allen Schülern der Anstalt Programme einzuhändigen, dahin gestrebt worden, auch diesen überall verständlich zu sein.

Ueber die Definitionen des Winkels.

I.

Unter Winkel soll im Folgenden stets ein von zwei geraden von einem Punkte auslaufenden Linien gebildeter, also ein sogenannter geradliniger Winkel verstanden werden, auf welchen der Begriff jedes anderen, wie des von einer geraden und einer krummen oder von zwei krummen Linien gebildeten Winkels zurückzuführen ist. Derselbe wird von Einigen als unendliches Stück einer Ebene aufgefaßt. Die Definition lautet dann etwa:

„Unter dem Winkel zweier von einem Punkte auslaufenden geraden Linien versteht man den von den beiden Linien unvollkommen begrenzten Theil der unendlichen Ebene, in welcher die Geraden liegen."

Diese Definition ist einzig aus dem Bestreben hervorgegangen, aus dem Begriffe des Winkels jede Vorstellung einer Bewegung fern zu halten, und in der That stellt sie ihn auf das Prägnanteste lediglich als einen Begriff räumlicher Ausdehnung dar. Vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus läßt sich gegen dieselbe schwerlich etwas einwenden. Sie führt den Begriff des Winkels in so bestimmter Weise auf einen bereits bekannten Begriff zurück, daß unzweifelhaft Jedem klar wird, was man sich unter Winkel zu denken hat. Genügt sie in sofern vollkommen den Bedingungen einer guten Definition, so wird für uns um so wichtiger die Frage, ob sie sich auch für die Zwecke der Schule eignet.

Zunächst könnte man von diesem Gesichtspunkte aus gegen dieselbe einwenden, daß es für einen Anfänger doch keine geringe Zumuthung ist, wenn seine Vorstellung sich stets bei dem Ausdruck Winkel ins Unendliche verlieren soll. Dieser Anforderung nachzukommen, dürfte ihm um so schwerer fallen, wenn die Schenkel der Winkel, wie bei Vielecken, als endlich begrenzte Linien auftreten. Sich dann die Seiten des Vielecks zugleich unendlich verlängert zu denken und die verschiedenen durch sie begrenzten unendlichen Flächenräume mit ihren vielfachen gegenseitigen Ueberlagerungen in der Vorstellung festzuhalten, ist keine geringe Aufgabe. Doch soll auf diesen Einwand kein besonderes Gewicht gelegt werden. So lange es sich bloß um die Auffassung der einzelnen Winkel handelt, mag die Aufgabe, welche dem Anfänger zugemuthet wird, wenn sie auch eine gesteigerte Anstrengung seines Vorstellungsvermögens erheischt, immerhin nicht außerhalb desselben liegen. Handelt es sich aber um die Vergleichung zweier Winkel mit einander, so reicht das Auffassungsvermögen eines Anfängers sehr bald nicht mehr aus, wenn er den Winkel noch als unendlichen Flächenraum auffassen soll. Daß er die Congruenz und demnach Gleichheit zweier solcher unendlichen Stücke einer Ebene noch einzusehen vermag, soll zugegeben werden. Schwieriger schon wird es für ihn, einzusehen, daß zwei unendliche Flächenräume in einem endlichen Verhältnisse zu einander stehen können, derart, daß der eine von ihnen, obwohl beide unendlich groß sind, doch beispielsweise dreimal so groß als der andere sein kann. Doch auch hier findet er sich bei einiger Ueberlegung vielleicht noch zurecht. Unzweifelhaft liegt es aber außerhalb der Fassungskraft eines Anfängers, klar einzusehen, daß der unendliche, zwischen zwei noch so weit von einander entfernt gedachten Parallelen eingeschlossene Streifen nicht etwa bloß kleiner ist als ein noch so klein gedachter Winkel-Flächenraum, sondern geradezu Null im Vergleich zu letzterem ist, daß also ein bestimmter Winkel-Flächenraum größer wird, wenn man durch eine unendlich kleine Drehung eines seiner Schenkel letzteren hinzufügt, dagegen nicht, wenn man durch parallele Verschiebung eines seiner Schenkel ersteren hinzufügt. Diese Beziehung unendlicher Größen zu einander muß ihm aber schon gleich bei der Lehre von den Parallelen klar sein, wenn er einsehen soll, daß z. B. der innere Gegenwinkel gleich dem zugehörigen äußeren Gegenwinkel sein kann, obgleich ersterer den von den beiden Parallelen und der Transversale eingeschlossenen unendlich großen Streifen der Ebene mehr enthält als der letztere. Faßt ein Schüler den Winkel als Flächenraum auf, so muß er nothwendig an der Gleichsetzung zweier Gegenwinkel Anstoß nehmen, und nimmt er keinen Anstoß daran, so hält er nicht mehr an der Auffassung des Winkels als Flächenraumes fest. Es handelt sich hier um das Verhältniß zweier unendlichen Größen verschiedener Ordnung zu einander. Da ein Winkel-Flächenraum einen solchen in Rede stehenden unendlich großen Parallelstreifen unendlich mal enthält, so ist derselbe, wenn man den Parallelsteifen als unendliche Größe erster

Ordnung auffaßt, eine unendliche Größe zweiter Ordnung. Daß aber das Unendlichgroße erster Ordnung gegen das Unendlichgroße zweiter Ordnung Null ist, würde man vergeblich einem Quartaner klar zu machen suchen.

Wer den Winkel als unendlichen Flächenraum definirt, verliert ferner die Berechtigung, auf denselben die Grundsätze der allgemeinen Größenlehre: Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches, Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt Gleiches u. s. w. anzuwenden. Diese Sätze gelten nicht in Bezug auf unendliche Größen. So gibt z. B. die Subtraction gleicher unendlicher Größen von gleichen unendlichen Größen nicht nothwendig gleiche Reste. Man denke sich etwa zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel laufen und zwar beide Paare nach derselben Richtung hin. Diese Winkel sind, wie sich leicht zeigen läßt, gleich. Haben sie eine solche Lage, daß sich zwei, nicht parallele, Schenkel schneiden, so ist der von diesen beiden Schenkeln gebildete Winkelraum den beiden ersteren Winkelräumen gemeinsam. Subtrahirt man ihn von denselben, so ergeben sich zwei Reste, die beiden Parallelstreifen, welche nicht gleich zu sein brauchen.

Die in Rede stehende Definition des Winkels verlangt demnach eine Einsicht in die Beziehungen auf dem Gebiete des Unendlichen, deren Anfänger nicht fähig sind. Sie ist deshalb meines Erachtens für den ersten Unterricht in der Schule durchaus unstatthaft. Wer übrigens jenen Grad der Auffassungsfähigkeit bei Anfängern glaubt voraussetzen zu können, der würde nur consequent verfahren, wenn er direct aus der Lehre von den Winkeln den Satz herleitete, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt. Er gebraucht dazu nur die Sätze, daß die ganze unbegrenzte Ebene vier rechte Winkel ausmacht und daß Scheitelwinkel einander gleich sind. Denn da die drei Winkel des Dreiecks mit ihren drei Scheitelwinkeln die ganze Ebene, also vier Rechte ausmachen, und die Summe der ersten gleich der Summe der letzten ist, so beträgt die erste wie die letzte Summe zwei Rechte. Dieser Beweis wird freilich einem Anfänger aus dem Grunde eine Schwierigkeit bieten, weil in der Summe der drei Winkel des Dreiecks die Fläche des Dreiecks dreimal enthalten ist. Aber einerseits nimmt er hieran eben nur deshalb Anstoß, weil ihm die Beziehungen des Endlichen zum Unendlichen nicht klar sind, und andererseits wird er an jenem Umstande auch dann Anstoß nehmen, wenn ihm jener Satz anderweitig bewiesen wird, vorausgesetzt, daß er den Winkel als Flächenraum auffaßt. Wenn nun gleichwohl in den Lehrbüchern, welche den Winkel in jenem Sinne definiren, diese ebenso einfache als für den weiteren Aufbau des Systems — in der Parallelentheorie — wichtige Consequenz nicht gezogen wird, so dürfte darin ein indirectes Zugeständniß liegen, daß man bei den Schülern eine klare Auffassung jener Beziehungen auf dem Gebiete des Unendlichen füglich nicht voraussetzen darf.

II.

Es herrscht darüber wohl kein Zweifel, daß man sich unter dem Ausdruck Winkel eine Größe, d. h. etwas, das der Vermehrung und Verminderung fähig ist, denken muß. Wenn man nun als dieses Quantum nicht die zwischen den beiden Schenkeln liegende unendliche ebene Fläche denken will, was ist dann als dieses Quantum aufzufassen? Es wird unerläßliche Bedingung einer guten Definition des Winkels sein, daß sie über diese Frage nicht den mindesten Zweifel bestehen läßt. Hauptsächlich auf dieses Criterium hin sind die nunmehr zu erörternden Definitionen zu prüfen. Sie haben gemeinsam, daß in denselben von der Grundvorstellung der Bewegung nur in versteckter und eingeschränkter Weise Gebrauch gemacht wird, indem der Begriff des Winkels entweder 1) auf den der Neigung, oder 2) auf den der Abweichung oder 3) auf den des Richtungsunterschiedes zweier geraden Linien zurückgeführt wird.

1) Was die erste, von Euklid herrührende Definition:

„Die Neigung zweier geraden Linien zu einander, welche von einem Punkte auslaufen, heißt Winkel"

anbetrifft, so ist wohl allgemein, selbst von solchen, welche in dieser Weise den Winkel definiren, zugestanden, daß durch dieselbe bloß statt Winkel ein anderer Ausdruck substituirt wird, ohne daß dadurch der Begriff des Winkels irgendwie klarer wird. Diese Definition kann im Gegentheile den Schülern leicht Anlaß zu einer irrigen Auffassung der Größe eines Winkels geben. Zeichnet man ihnen etwa zwei augenscheinlich ungleich große Winkel an die Tafel, und fragt, welches von beiden Linienpaaren die größere Neigung zu einander habe, so sprechen alle ohne Ausnahme demjenigen Paare die größere Neigung zu, welches den kleineren Winkel bildet, während auf die Frage nach dem größeren der beiden Winkel wenigstens die meisten das Richtige treffen. Ihnen sind also Winkel und Neigung zwei Begriffe, welche in umgekehrtem Verhältnisse zu einander stehen, so daß, je kleiner der Winkel, desto größer die Neigung ist.

2) Da dem Begriffe Neigung die Vorstellung der Bewegung nach etwas hin zu Grunde liegt und in Folge dessen die Definition des Winkels als Neigung auf den angedeuteten Widerspruch führt, so hat man statt Neigung einen anderen Begriff substituirt, welchem die Vorstellung der Bewegung von etwas weg zu Grunde liegt, den der Abweichung. Die Definition lautet dann etwa:

„Die Abweichung zweier geraden Linien von einander, welche von einem Punkte auslaufen, heißt Winkel."

Wird mit dieser Definition dem Schüler der Begriff Winkel vollständig klar? Wohl schwerlich. Man wird vielmehr nöthig haben, den Begriff der Abweichung näher zu erläutern, also selbst noch wieder zu definiren. Ohne eine anderweitige ursprünglichere Vorstellung und zwar die der Drehung, zu Hülfe zu nehmen, wird man dem Schüler nicht klar machen können, daß zwei von einem Punkte auslaufende gerade Linien zwei, und zwei sich schneidende gerade Linien sogar vier ungleich große Abweichungen von einander haben; man wird ihm ferner sonst nicht klar machen können, warum nicht aus Willkür oder Convenienz, sondern mit logischer Nothwendigkeit von zwei Winkeln jener als der größere und dieser als der kleinere definirt wird. Also ist der Begriff der Abweichung schon ein abgeleiteter, selbst der Erklärung bedürftiger. In der That wird in den Lehrbüchern, welche obige Definition haben — wenigstens soweit mir solche bekannt sind — nach der Definition in einer näheren Erläuterung hinzugefügt, daß man von dieser Abweichung nur dann eine richtige Vorstellung bekommt, wenn man sich den einen Schenkel des Winkels durch Drehung in die Lage des anderen gebracht denkt; — und wenn etwa ein Lehrbuch diese nähere Erläuterung nicht bringt, so wird doch wohl vorausgesetzt werden, daß der Lehrer sie hinzufüge. Was ist aber eine solche nähere Erläuterung im Grunde genommen anders als eine Definition des Begriffes Abweichung und das Zugeständniß, daß mit obiger Erklärung der Winkel noch nicht auf einen ursprünglichen Begriff zurückgeführt, sondern vielmehr bloß zwischen den Ausdruck Winkel und seine eigentliche Definition ein neuer Ausdruck, Abweichung, eingeschaltet ist?

3) Die letzte hierher gehörige Definition:

„Der Richtungsunterschied zweier geraden Linien, welche von einem Punkte auslaufen, heißt Winkel"

ist mit der vorigen fast identisch und aus demselben Grunde mangelhaft. Sie veranlaßt sofort wieder die weitere Frage, was man sich denn unter jenem Richtungsunterschiede zu denken habe. Der Begriff Richtung entspringt aus der Vorstellung des ziellosen Wohinaus einer progressiven Bewegung; Richtung ist demnach kein quantitativer Begriff, — man kann eine Richtung nicht größer oder kleiner machen. Der Unterschied zweier Richtungen dagegen, der Winkel, muß als Quantum aufgefaßt werden. Aber welcher Art ist dieses Quantum? So lange man hierüber keine klare Vorstellung hat, bleibt auch der Begriff des Winkel unklar. Zur klaren Vorstellung des Substrates jenes Quantums gelangt man aber nur durch die Vorstellung der Größe der Drehung, durch welche die eine Richtung mit der andern zur Deckung gebracht wird. Der Begriff des Richtungsunterschiedes muß also auf eine weiter rückwärts liegende Vorstellung zurückgeführt, demnach näher erklärt werden. Erst dadurch gewinnt der Schüler den klaren Begriff des Winkels, erst dadurch wird es ihm möglich, einzusehen, daß zwei von einem Punkte auslaufende Linien zwei Richtungsunterschiede haben, also zwei Winkel bilden, und daß von zwei ungleichen Winkeln dieser nicht bloß durch willkürliche Definition größer heißt, sondern auch größer ist als jener.

III.

Im Grunde genommen ist mit den obigen drei Definitionen des Winkels als Neigung, Abweichung, Richtungsunterschied zweier geraden Linien zunächst nur ausgesprochen, daß die den Winkel bildenden Linien nicht rücksichtlich ihrer Länge in Betracht kommen sollen. Was man dagegen unter Neigung, Abweichung, Richtungsunterschied sich vorzustellen habe, muß noch näher erklärt werden. Die Grundvorstellung, auf welche man zu diesem Zweck zurückgehen muß, ist die der Drehung einer geraden Linie um einen als fest in ihr angenommenen Punkt. Jene Definitionen sind demnach werthlos, da sie bloß einen neuen Ausdruck einführen und diesen zwischen den Ausdruck Winkel und seine eigentliche Definition einschalten. Läßt man diesen Zwischenausdruck fort, so erhält man etwa folgende Definition:

> „Unter dem Winkel zweier von einem Punkte auslaufenden geraden Linien versteht man die Größe der Drehung, welche die eine der beiden Linien in ihrer Ebene um den gemeinschaftlichen Punkt machen muß, bis sie in die Lage der anderen gelangt."

Winkel und Drehung sind natürlich keine identischen Begriffe, ebensowenig wie Linie und progressive Bewegung eines Punktes. Die Vorstellung der Drehung an sich, lediglich als Veränderung einer Richtung aufgefaßt, ruft in uns auch noch nicht die Vorstellung des Winkels hervor, wie auch die Vorstellung der Bewegung eines Punktes an sich, lediglich als Veränderung seines Ortes aufgefaßt, uns noch nicht die Vorstellung der Linie gibt. Will man den Vergleich weiter durchführen, so hat man festzuhalten, daß die Linie als Qualität und als Quantität in Betracht kommen kann. Die Vorstellung ihrer Qualität gewinnt man durch die Vorstellung der Bewegung eines Punktes, wenn man seine Richtung in jedem Momente ins Auge faßt; die Vorstellung ihrer Quantität gewinnt man, wenn man die Größe der Bewegung des Punktes von einer Anfangslage bis zur einer Endlage auffaßt. Der Winkel ist dagegen lediglich quantitativer Begriff. Um zu seiner Vorstellung mittelst der Vorstellung der Bewegung zu gelangen, braucht man deshalb bloß die Größe der Drehung einer Linie von einer Anfangslage bis zu einer Endlage ins Auge zu fassen. Wie nun ferner in jener Auffassung der Größe einer Linie als Größe der progressiven Bewegung eines Punktes der psychologische Grund liegt, daß man diejenige von zwei geraden Linien als die größere auffaßt, deren Endpunkt bei Deckung der Anfangspunkte und der Richtung beider Linien über den Endpunkt der anderen hinausfällt, da bei ihr jene Bewegung weiter fortgesetzt ist; so liegt auch in der Auffassung des Winkels als Drehungsgröße der psychologische Grund, daß man denjenigen von zwei Winkeln als den größeren auffaßt, dessen zweiter Schenkel bei Deckung der Scheitelpunkte und der beiden ersten Schenkel über den zweiten Schenkel des anderen Winkels hinausfällt, da bei ihm die Drehung weiter fortgesetzt ist.

Aus dieser Definition des Winkels ergibt sich weiterhin von selbst, daß ein Winkel durch seinen Scheitelpunkt und seine Schenkel nur zweideutig bestimmt ist, da man den einen Schenkel ebensowohl durch Drehung nach der einen als nach der anderen Seite hin in die Lage des zweiten bringen kann. Eindeutig bestimmt wird er erst, wenn man außer Scheitelpunkt und Schenkel noch ein weiteres Element auffaßt, nämlich denjenigen von den beiden durch seine Schenkel geschiedenen Theilen der Ebene, durch welchen die Drehung erfolgen soll. Es würde vielleicht nicht unzweckmäßig sein, für dieses Element eine besondere Benennung einzuführen, etwa jenen Theil der Ebene den Drehungsweg des Winkels zu nennen. Da es sich hier nicht um die Auffassung der Größe, sondern bloß der Lage dieses Theiles der Ebene handelt, so hat man nicht nöthig, denselben in unendlicher Ausdehnung sich vorzustellen, es genügt vielmehr, ihn bloß in der Nähe des Scheitelpunktes ins Auge zu fassen. Durch Einführung dieser Bezeichnung läßt sich zunächst die Lage eines Punktes, einer Linie u. s. w. in Bezug auf die Schenkel eines Winkels präciser angeben. Die gewöhnliche Angabe durch den Ausdruck „zwischen den Schenkeln" ist unbestimmt, wenn der Winkel convex ist; die Zweideutigkeit verschwindet dagegen, wenn man dafür „in seinem Drehungswege" substituirt. Ferner wer den Winkel als Flächenraum definirt, darf den Ausdruck gebrauchen, daß ein Winkel irgendwo „liegt"; wenn man aber den Winkel als Neigung, Abweichung, Richtungsunterschied oder Drehungsgröße auffaßt, so ist unklar, was man sich unter der „Lage" eines Winkels denken soll. Diese Unklarheit wird vermieden, wenn man nicht von der Lage des Winkels, sondern von der Lage seines Drehungsweges spricht, also z. B. als äußere Winkel bei Parallelen diejenigen definirt, deren Drehungswege außerhalb der Parallelen liegen, als Winkel eines Vielecks diejenigen, deren Drehungswege im Innern liegen. Weiterhin bleibt die Definition gewisser von bestimmten Linien gebildeter Winkel ungenau, wenn man nicht zugleich eine nähere Angabe über die Lage des Drehungsweges macht. Während z. B. unter dem „Centriwinkel" eines Kreises jeder der beiden von zwei Radien gebildeten Winkel verstanden werden darf, soll unter „Peripheriewinkel" nur derjenige der beiden von zwei Sehnen mit gemeinschaftlichem Peripheriepunkte gebildeten Winkel verstanden werden, dessen Drehungsweg einwärts liegt, unter „Tangentenwinkel" nur derjenige der beiden von zwei Tangenten gebildeten Winkel, in dessen Drehungswege der Kreis liegt. Endlich ist schon behufs präciser Erklärung der Gleichheit zweier Winkel eine Angabe über den Drehungsweg nöthig. Diese Gleichheit, wie es gewöhnlich geschieht, bloß von der Deckung ihrer Schenkel abhängig zu machen, ohne hinzuzufügen, daß auch ihre Drehungswege auf einander liegen müssen, ist ungenau, da auch ein hohler und der ihn zu vier Rechten ergänzende erhabene Winkel jener Bedingung genügen.

Nach dem Gesagten kann man als das Quantum, das man sich unter dem Ausdruck Winkel vorzustellen hat, entweder die unendliche Ebene auffassen, welche zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, oder die Größe der Drehung, durch welche der eine Schenkel in die Lage des anderen gelangt — wohl schwerlich ein Drittes. Aus pädagogischen Gründen ist es bedenklich, von Anfängern die erstere Auffassung zu verlangen. Ein solches Bedenken steht dagegen der letzteren Auffassungsweise nicht im Wege, da sowohl die Klippe der Vorstellung des Unendlichen vermieden wird, als auch die Vorstellung der Drehung einer geraden Linie um einen als fest in ihr angenommenen Punkt auch Anfängern klar und geläufig ist. Letzterer Definition gebührt daher wenigstens für die Schule der Vorzug. Freilich wird mit ihr die Vorstellung der Bewegung auf das Bestimmteste in die Geometrie aufgenommen. Doch einerseits hält es überhaupt schwer, die Ausschließung dieser Vorstellung aus der Geometrie consequent durchzuführen. So wird in der Regel schon gleich im Anfange bei den genetischen Definitionen der Linie, der Fläche, des Körpers von ihr Gebrauch gemacht, und in der Stereometrie hat selbst Euklid, das Vorbild der strengen Schule, in den Definitionen des Cylinders, des Kegels und der Kugel sie zu Hülfe genommen. Andererseits dürfte es sich aus pädagogischen Gründen gerade empfehlen, von der Vorstellung der Bewegung mehr Gebrauch zu machen, als es in der Regel geschieht In dieser Hinsicht möge wenigstens über einen Punkt eine Andeutung gestattet sein. Die gewöhnliche dogmatische Methode, nach welcher beim Beweise der einzelnen Lehrsätze in der Geometrie verfahren zu werden pflegt, überzeugt bloß davon, daß der aufgestellte Satz wahr ist, läßt aber fast stets vollständig darüber im Unklaren, warum denn die Sache sich so verhält. Wenn nun diese Methode auch für den ersten Unterricht durchaus die allein zulässige ist, so dürfte damit doch nicht als unzweckmäßig ausgeschlossen sein, daß wenigstens bei einzelnen Sätzen, wenn auch nicht gleich Anfangs, so doch etwa bei einer späteren Repetition, nach dem dogmatischen Beweise auch durch eine genetische Erörterung den Schülern gezeigt wird, was der innere Grund für die Wahrheit des Satzes ist. Das wird wenigstens für die meisten Sätze über Winkel leicht, wenn man die Vorstellung der Drehung zu Hülfe nimmt und dem entsprechend den Winkel definirt. So kann man z. B. mit Hülfe dieser Vorstellung leicht den Schülern den inneren Grund zeigen, warum ein Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel ist. Es braucht zu dem Zweck nur darauf hingewiesen zu werden, daß derjenige Schenkel des Außenwinkels, welcher Seite des Dreiecks ist, durch die beiden einzelnen, den innern gegenüberliegenden Winkeln entsprechenden, in gleichem Sinne erfolgenden Drehungen in dieselbe Richtung gebracht wird, in welche er auch durch die einfache Drehung um den Scheitelpunkt des Außenwinkels gelangt. Durch eine ähnliche Betrachtung läßt sich ferner leicht zeigen, warum die Summe der drei Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, warum die Summe der Winkel eines Vielecks nothwendig ein gerades Vielfaches von einem Rechten sein muß u. s. w. Es bedarf bei diesen Deductionen nur der Einsicht, daß, wenn man eine gerade Linie zunächst durch eine Drehung um einen ihrer Punkte in eine neue Richtung, aus dieser dann durch eine weitere Drehung um einen anderen Punkt in eine dritte Richtung und so fortfahrend schließlich in eine bestimmte Endrichtung bringt, die Gesammtdrehung eben so groß ist, als wenn man sie durch eine einzige Drehung um einen einzigen Punkt aus der Anfangsrichtung in jene Endrichtung bringt, vorausgesetzt, daß alle Drehungen in demselben Sinne erfolgen; — ein Princip, das mit demjenigen nahe übereinstimmt, auf welches Thibaut seinen Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks stützt. Solche auf den Grund der Sache eingehende Erläuterungen haben Interesse für die Schüler und sind zugleich für sie eine gute Geistesübung. Vergleichungshalber möge angeführt werden, daß auch in der Arithmetik etwa eine aus der Natur der Sache hergenommene Erläuterung der Regeln über die Subtraction und Division die Schüler in höherem Grade zur Geistesthätigkeit anregt, als der schablonenmäßige Nachweis, daß die Differenz zum Subtrahend addirt den Minuend, der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividend gibt!

Ueber die Definitionen der Parallelen.

I.

Parallele Linien kommen nicht ihrer Größe, sondern nur ihrer Lage nach in Betracht. Das gilt auch von den Schenkeln eines Winkels. Aber hier handelt es sich bloß um ein durch die Lage zweier Linien gebildetes *Quantum*, bei Parallelen dagegen um die *Eigenschaften* einer besonderen Lage zweier Geraden. In Folge dessen befinden sich bei dieser Lehre diejenigen einer eigenen Schwierigkeit gegenüber, welche die Geometrie auf die Grundvorstellung der Ausdehnung einschränken und dem entsprechend die ganze Wissenschaft bloß mit Hülfe der sogenannten Grundsätze der allgemeinen Größenlehre: Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches u. s. w. aufbauen wollen. Diese Sätze beziehen sich nur auf das Gebiet quantitativer Vergleichungen. Sie reichen aus, so lange es sich bloß um die Frage handelt, ob zwei gleichartige Größen einander gleich oder ungleich sind. Das qualitative Gebiet der Lage oder speciell der Vergleichung zweier Richtungen, welches man mit der Lehre von den Parallelen betritt, kann dagegen naturgemäß allein durch jene Denkgesetze nicht beherrscht werden. Auf diesem heterogenen Gebiete muß man nothwendig auch von irgend einer heterogenen, ihm eigenthümlichen, lediglich unserer räumlichen Anschauung entnommenen Grundwahrheit ausgehen. In der That ist es auch trotz aller Versuche bis jetzt nicht gelungen, die Theorie der Parallelen bloß mit Hülfe jener Grundsätze der Größenvergleichung zu bewältigen. Vielmehr trifft der Gedankengang stets irgendwo auf eine Stelle, wo die quantitative Vergleichung aufhört und eine der räumlichen Anschauung entnommene Grundwahrheit eingeschaltet wird, wo die Kette der Schlüsse ein aus anderem Material geschmiedetes Glied, oder, wenn man will, eine Lücke hat.

Wer in der Geometrie bloß die Grundvorstellung der Größe gelten läßt, kann ferner keine das *Wesen* der parallelen Lage ausdrückende Definition aufstellen. Denn die Grundvorstellung, durch welche man zum Begriff paralleler Linien gelangt, ist ohne Zweifel die Vorstellung der Linien als Richtungen, demgemäß eine von jenem Standpunkte aus unzulässige Vorstellung. Es bleibt deshalb auf diesem Standpunkte nur übrig, die Definition von irgend einer *Eigenschaft* paralleler Linien herzunehmen. Dieselben haben aber, abgesehen von ihrer Zugehörigkeit zu einer und derselben Ebene, drei Eigenschaften: sie schneiden sich nicht; sie haben überall gleiche Entfernung von einander; sie bilden mit einer Transversale gleiche Gegenwinkel, gleiche Wechselwinkel und Ergänzungswinkel,*) deren Summe gleich zwei Rechten ist. Da diese Eigenschaften außerdem *nur* den parallelen, nicht aber anderen in derselben Ebene liegenden, geraden Linien zukommen, so kann jede als Ausgangspunkt einer Definition dienen.

1) Die älteste, von Euklid aufgestellte Definition lautet etwa:

„Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und sich, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag, nicht schneiden, heißen parallel."

Was den Werth dieser Definition als *Begriffsbestimmung* anbetrifft, so ist sie von den drei hierher gehörigen Definitionen wohl die schlechteste. Sie drückt nicht nur bloß eine Eigenschaft, sondern zudem lediglich eine negative und endlich sogar eine solche aus, zu deren Auffassung von der

---

*) Der Ausdruck Ergänzungswinkel für je zwei innere oder zwei äußere Winkel an derselben Seite der Transversale ist hier der Kürze wegen aufgenommen, obwohl diese Bezeichnung nicht nur *inconsequent* ist, da für diese Winkelpaare die Benennung ebensogut von der Lage hergenommen werden muß, wie für die beiden anderen Arten, sondern auch *unlogisch*, da jene Winkel sich nur dann wirklich „ergänzen", wenn die Linien parallel sind. Würde wegen ihrer symmetrischen Lage nicht vielleicht die Bezeichnung „Symmetriewinkel" passender sein?

Vorstellung verlangt wird, sich ins Unendliche zu verlieren. Wer deshalb nicht schon vorher die Vorstellung paralleler Linien hat, gewinnt sie auch nicht durch diese Definition.

Was weiter die durch dieselbe bedingte Entwickelung der Lehre betrifft, so muß wegen jenes unzulänglichen bloß negativen Merkmals zunächst gezeigt werden, woran man erkennt, daß zwei Linien parallel sind. Diese Frage wird durch den ersten Hauptlehrsatz beantwortet: Werden zwei gerade Linien von einer Transversale geschnitten und ist ein Paar Gegenwinkel einander gleich oder ein Paar Wechselwinkel einander gleich oder die Summe eines Paares Ergänzungswinkel gleich zwei Rechten, so sind die Linien einander parallel.

Der Beweis dieses Satzes nach Euklid stützt sich auf den Lehrsatz, daß ein Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel, und um letzteren zu beweisen, muß der Satz über die Congruenz zweier Dreiecke aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels vorhergehen.

Ein anderer vielfach angewendeter Beweis besteht darin, daß man die Congruenz der beiden durch die Transversale geschiedenen Theile der Figur darthut und daraus folgert, daß, wenn die beiden Linien sich an der einen Seite der Transversale schnitten, sie sich auch an der anderen Seite, demnach in zwei Punkten schneiden müßten. Letzterer Beweis hat vor dem euklidischen den Vorzug, daß er keinen Satz über das Dreieck voraussetzt und in Folge dessen für die Lehre von den Parallelen eine naturgemäßere Stelle im Systeme gestattet.

Nachdem durch diesen ersten Hauptlehrsatz gezeigt ist, wann zwei gerade in derselben Ebene liegende Linien sich nicht schneiden, also parallel sind, und hiermit zugleich dargethan ist, daß es Linien solcher Art, wie die Definition sie unterstellt, wirklich gibt, muß dann in dem zweiten Hauptlehrsatze der umgekehrte Nachweis geliefert werden, daß, wenn zwei Linien parallel sind und von einer Transversale geschnitten werden, jedes Paar Gegenwinkel einander gleich ist, jedes Paar Wechselwinkel einander gleich ist und die Summe jedes Paares Ergänzungswinkel gleich zwei Rechten ist.

Euklid beweist diesen Satz mit Hülfe seines elften Grundsatzes: Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten und sind die beiden inneren an derselben Seite der Schneidenden liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte, so treffen jene beiden Linien hinlänglich verlängert an dieser Seite zusammen. Dieser Satz ist durch die Anfechtungen, die er erfahren hat, geradezu berüchtigt geworden. Als Grundsätze pflegt man solche Sätze zu bezeichnen, deren Wahrheit von selbst einleuchtet, oder, wie besser definirt wird, die Jeder begreift, sobald er sie versteht. Solcher Grundsätze gibt es, wie schon oben angedeutet, zweierlei wesentlich verschiedene Arten, deren Verschiedenheit auch in ihrer Bezeichnung Rechnung zu tragen vielleicht nicht unzweckmäßig wäre. Die einen von ihnen, wie z. B. der Satz, daß Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches gibt, sind die in Form bestimmter Sätze gebrachten Denkgesetze oder logischen Schlüsse auf dem Gebiete quantitativer Vergleichungen. Die anderen dagegen, wie z. B. der Satz, daß durch einen Punkt unendlich viele gerade Linien möglich sind, finden ihre Begründung in unserer räumlichen Anschauung. Zu den letzteren gehört der obige Grundsatz des Euklid. Von solchen Grundsätzen macht nun die strenge Schule überhaupt nicht gern Gebrauch; — freilich werden sie im Grunde genommen vielfach bloß hinter die Bezeichnung der „Folgerung" aus einer Definition versteckt und so eingeschmuggelt. Von dem euklidischen Grundsatze speciell kann außerdem mit Recht bestritten werden, ob er hinlängliche innere Evidenz habe. Er ist jedenfalls nicht einleuchtender, als der umgekehrte, von Euklid bewiesene Satz, daß, wenn die beiden Linien zusammen treffen, die beiden inneren an derselben Seite der sie schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, und vielleicht als eine ganze Reihe anderer, von ihm bewiesener, Sätze. Man hat deshalb vielfach versucht, ihn zu beweisen. Aber diese Beweise sind einerseits für den Unterricht in der Schule wenig oder gar nicht geeignet, und andererseits muß in ihnen doch wieder von irgend einem, der Anschauung entnommenen Satze ausgegangen werden.

Die natürlichste Begründung findet der in Rede stehende zweite Hauptlehrsatz wohl durch den Grundsatz, daß zwei gerade Linien, welche beide einer und derselben dritten Linie parallel sind, auch unter sich parallel sind. In einigen Lehrbüchern wird allerdings dieser Satz als Lehrsatz aufgestellt und zum Zwecke seines Beweises der Grundsatz voraus geschickt: Wenn eine unbegrenzte gerade Linie durch einen zwischen den Schenkeln eines hohlen Winkels liegenden Punkt gezogen wird, so durchschneidet sie wenigstens einen Schenkel des Winkels. Bei dieser Deduction steht man doch folgendem Dilemma gegenüber. Nimmt man an, daß die Schüler, sei es durch die Definition, sei es durch den ersten Hauptlehrsatz, zu einer klaren Auffassung paralleler Linien gelangt sind, so ist für sie der letzte Grundsatz sicherlich nicht evidenter als der erste. Denn daß eine Linie, wenn sie etwa mit dem einen Schenkel des Winkels parallel ist, den anderen Schenkel schneidet, wie sehr sich auch der hohle Winkel einem gestreckten nähert und wie weit auch jene Linie von dem parallelen Schenkel entfernt ist, ist doch wohl bei der Nöthigung, sich mit der Vorstellung ins Unendliche zu verlieren, viel weniger eine Grundanschauung, als die in dem ersten Grundsatze ausgesprochene Wahrheit. Welchen Werth hat aber ein Beweis, in welchem die Wahrheit eines Satzes durch eine weniger evidente Wahrheit begründet wird? Nimmt man dagegen an, daß die Schüler weder durch die Definition noch durch den ersten Hauptlehrsatz eine klare Auffassung paralleler Linien erlangt haben, so mag ihnen allerdings der letzte Satz einleuchtender sein als der erste, der ihnen blos aussagen würde, daß zwei gerade Linien, welche beide ein und dieselbe dritte Linie nicht schneiden, sich auch einander nicht schneiden. Dann aber ist die aufgestellte Definition durchaus nicht zu rechtfertigen.

2) Da man in der Entwickelung der Lehre von den Parallelen bei Zugrundelegung der euklidischen, von der Nonconcurrenz hergenommenen Definition zu keinem allseitig befriedigenden Resultate gelangen konnte, so lag der Gedanke nahe, durch Aenderung der Definition die Schwierigkeit zu beseitigen. Von der Aequidistanz ausgehend definirte man:

„Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene so neben einander liegen, daß sie überall gleich weit von einander entfernt sind, heißen parallel."

Diese Definition hat vor der euklidischen den Vorzug, daß sie eine positive Eigenschaft ausdrückt und außerdem unsere Vorstellung nicht nöthigt, sich ins Unendliche zu verlieren. Der große Uebelstand derselben dagegen ist die Nothwendigkeit des Nachweises, daß es gerade Linien von einer solchen Lage zu einander gibt. Dieselbe construirt willkürlich einen neuen Begriff durch die Verbindung mehrerer Begriffe. Von solchen willkürlich zusammengesetzten Begriffen muß aber die Möglichkeit entweder an sich evident sein oder nachgewiesen werden. Definirt man beispielshalber die Sehne eines Kreises als eine gerade Linie, welche zwei Punkte der Peripherie mit einander verbindet, so ist die Möglichkeit einer solchen Linie von selbst einleuchtend. Die Definition der Tangente dagegen als Linie, welche nur einen Punkt mit der Kreisperipherie gemeinsam hat und mit Ausnahme dieses Punktes ganz außerhalb des Kreises liegt, ist dem Zweifel an ihre Möglichkeit ausgesetzt und gewinnt daher erst ihre Berechtigung durch den Nachweis dieser Möglichkeit, indem man die im Endpunkte eines Radius auf denselben errichtete Senkrechte als eine Linie der definirten Beschaffenheit nachweist. Unsere Definition leidet an demselben Gebrechen. Es sind in derselben zwei Begriffe mit einander verbunden, der Begriff der geraden Linie und der Begriff der Aequidistanz, und es ist an sich durchaus nicht evident, ob beide vereinbar sind. Man unterstelle zunächst, in einer bestimmten Ebene, eine gerade Linie AB. Um nun zur Vorstellung einer damit parallelen Linie zu gelangen, kann man von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen. Das eine Mal denkt man sich, von der Vorstellung der Aequidistanz ausgehend, an derselben Seite von AB in derselben Ebene eine ununterbrochene Reihe von Punkten, welche alle von AB dieselbe Entfernung haben. Dann fragt sich, ob *alle diese Punkte in gerader Linie liegen*. Das andere Mal denkt man sich außer der supponirten Linie noch eine zweite gerade Linie CD, und sucht diese in eine bestimmte Lage zu AB zu bringen. Die Lage einer geraden Linie ist aber durch zwei Punkte vollkommen bestimmt, die Annahme von mehr als zwei Punkten zur Bestimmung ihrer Lage also unstatthaft. Diese beiden Punkte unterstellt man in der angenommenen Ebene in gleichen Entfernungen von AB an derselben Seite und denkt CD hindurch gelegt. Dann fragt sich, ob auch *alle übrigen Punkte der Linie CD dieselbe Entfernung von AB haben*. Wer von dem ersten Gesichtspunkte ausgehen will, hat also zur Begründung der Definition den Satz nöthig: „Errichtet man auf eine Gerade AB mehrere gleiche Perpendikel und verbindet die Endpunkte durch gerade Linien mit einander, so bilden die einzelnen Verbindungslinien zusammen eine einzige gerade Linie", oder, was ungefähr auf dasselbe hinauskömmt, „bewegt man eine gerade Linie auf einer ersten geraden Linie AB so fort, daß der eine Endpunkt stets auf AB bleibt und sie außerdem mit AB stets denselben, rechten oder schiefen, Winkel bildet, so ist die Linie, welche der andere Endpunkt beschreibt, gerade." Geht man dagegen von dem letzten Gesichtspunkte aus, so hat man den Satz nöthig: „Errichtet man in zwei Punkten einer geraden Linie

AB an derselben Seite zwei gleiche Perpendikel und legt durch die Endpunkte dieser Perpendikel eine zweite Gerade CD, so sind alle Punkte dieser Geraden von AB gleich weit entfernt." Welchen von diesen Sätzen man auch wählt: man muß ihn entweder als Grundsatz hinstellen oder als Lehrsatz ihn zu beweisen suchen. Thut man Ersteres, so hat man damit das Ziel der strengen Methode, die Parallelentheorie lediglich mit Hülfe der Axiome der Größenvergleichung zu begründen, wieder aufgegeben; durch die verschiedenen Versuche, Letzteres zu thun, hat man dieses Ziel auch nicht erreicht, da allen als Ausgangspunkt irgend ein Axiom der Anschauung zu Grunde liegt. Während also bei der euklidischen Theorie der Nachweis, daß es Linien von der definirten Lage gibt, durch den ersten Hauptlehrsatz mit aller Strenge geliefert werden kann, dagegen der Beweis des zweiten Hauptlehrsatzes die Hauptschwierigkeit bietet, liegt letztere bei der in Rede stehenden Theorie umgekehrt in dem Nachweise der Möglichkeit des definirten Begriffs. Diese Möglichkeit gar nicht in Frage zu stellen und so über die Hauptschwierigkeit mit Stillschweigen hinwegzugehen, wie es allerdings vielfach geschieht, ist weder wissenschaftlich noch pädagogisch zu rechtfertigen.

3) Eine dritte Parallelentheorie erhält man durch die Definition:

„Zwei gerade in derselben Ebene liegende Linien heißen parallel, wenn sie mit einer dritten geraden Linie nach derselben Seite hin Winkel bilden, welche gleich sind."

Die Definition, in dieser Weise ausgedrückt, läßt eine doppelte Auffassung zu. Entweder denkt man sich zwei gerade Linien, welche mit einer einzigen bestimmten dritten Linie gleiche Gegenwinkel bilden; oder man denkt sich zwei gerade Linien, welche mit irgend einer ganz beliebigen dritten Linie, also mit jeder sie schneidenden Linie gleiche Gegenwinkel bilden. Wollte man die Definition in dem letzten Sinne auffassen, so müßte natürlich wieder, wie bei der vorigen Definition, die Möglichkeit solcher zwei Linien erwiesen werden. Denn alsdann liegt in der Definition der Satz versteckt, daß, wenn zwei gerade Linien von einer ersten Transversale unter gleichen Gegenwinkeln geschnitten werden, dieses auch für jede andere Transversale der Fall ist. Dieser Satz bedarf natürlich des Beweises. Um diese Vermengung von Definition und Lehrsatz zu vermeiden, muß man demnach jene dahin präcisiren, daß man Parallellinien als solche gerade Linien definirt, welche mit einer bestimmten dritten Linie gleiche Gegenwinkel bilden. In dieser Fassung ist die Möglichkeit des definirten Begriffs keinem Zweifel ausgesetzt. In dem weiteren Verfolg ist dann jener Satz zu beweisen, daß parallele Linien mit jeder Transversale gleiche Gegenwinkel bilden. Uebrigens ist durch diese dritte Definition der Begriff paralleler Linien künstlich construirt; man muß, um zu ihrer Vorstellung zu gelangen, noch die Vorstellung einer dritten geraden Linie und überdieß zweier Winkel zu Hülfe nehmen. Außerdem verhilft auch sie nicht dazu, die Parallelentheorie ohne Anwendung des einen oder anderen, der Anschauung entnommenen Axioms zu begründen.

Die Frage, welche von den vielen auf Grundlage einer der obigen drei Definitionen aufgestellten Theorien für den Schulgebrauch den Vorzug verdiene, ist nicht lediglich mit Rücksicht auf Consequenz der Beweisführung zu entscheiden. Die wissenschaftlich strengste ist darum noch nicht für die Schule die beste. Zunächst dürfte für den Zweck des ersten Unterrichts zugleich darauf Rücksicht zu nehmen sein, daß eine zu große Weitläufigkeit vermieden wird. Es handelt sich in dieser Lehre hauptsächlich um den Nachweis, daß zwei Linien parallel sind, wenn Gegenwinkel gleich sind und umgekehrt, also um den Nachweis zweier Sätze, welche der Schüler schon leicht einfach durch Intuition als richtig einsieht. Ist die Reihe der zu ihrer Begründung aufgestellten Sätze zu lang, so tritt nur zu leicht der Uebelstand ein, daß ein Anfänger die Kette der einzelnen Schlüsse nicht mehr zu verfolgen vermag, und in Folge dessen die Beweisführung für ihn die überzeugende Kraft verliert. Er wird zwar deshalb nicht an der Richtigkeit des zu beweisenden Satzes zweifeln, aber bloß aus dem Grunde nicht, weil ihm die Sache an sich schon lediglich durch Anschauung plausibel erscheint, vielleicht auch, weil er sich das jurare in verba magistri noch nicht abgewöhnt hat. Eine solche weitläufige Beweisführung muß ihm aber um so mehr überflüssig scheinen, wenn in der Kette der Schlüsse von irgend einem Grundsatze ausgegangen wird, der für ihn, wenn nicht weniger, so doch auch nicht mehr einleuchtend ist, als der aus demselben schließlich hergeleitete Satz schon an sich, ohne diese Herleitung, ist. Daß solche Deductionen in der That nur einen zweifelhaften Werth haben, ist schon früher angedeutet. Weil ich in dieser Beziehung nicht mißverstanden werden möchte, und zugleich, weil auf diesen Punkt auch anderweitig wenig Rücksicht genommen zu werden pflegt, möge ein bestimmtes Beispiel als Erläuterung dienen. Euklid beweist den Satz, daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer ist als die dritte. Nach Proklus haben schon die Epikuräer sich hierüber lustig gemacht, da der Satz an sich so klar sei, daß er keines Beweises bedürfe. Meines Erachtens ist dem Euklid gegenüber dieser Einwand nicht gerechtfertigt. Er beweist den Satz mit aller Strenge, ohne in seiner Begründung von irgend einem der Anschauung entnommenen oder weniger evidenten Satze auszugehen. Ganz anders verhält sich dagegen die Sache, wenn die Beweisführung von einem Satze anhebt, welcher weniger einleuchtend ist, als der zu beweisende Satz selbst. Wenn man z. B., wie es in vielen Lehrbüchern geschieht, von dem Grundsatze ausgeht, daß eine gerade Linie, welche durch einen Punkt innerhalb der Schenkel eines hohlen Winkels gelegt wird, wenigstens einen der Schenkel schneiden muß, und hieraus durch eine lange Kette von Schlüssen endlich unseren Satz, daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer ist als die dritte, herleitet, so kömmt eine solche Beweisführung doch ungefähr auf dasselbe hinaus, als wenn man z. B. davon ausgehend, daß drei mal acht gleich vierundzwanzig ist, mittelst einer weitläufigen Schlußfolgerung beweist, daß zwei mal zwei vier ist. Eine solche Deduction mag den Reiz der Curiosität bieten und auch immerhin als G e i s t e s-ü b u n g Werth haben, als B e w e i s hat sie keinen Werth, da nicht sie es ist, welche uns von der fraglichen Wahrheit überzeugt. Man wende nicht etwa ein, daß der systematische Aufbau der Geometrie solche Beweise erheische; dieser ist nur Mittel der Wissenschaft, ihr Zweck dagegen, von der Wahrheit zu überzeugen.

Ferner sollte bei der Begründung der Lehre von den Parallelen in einem Schulbuche zugleich auch Rücksicht genommen werden auf die durch dieselbe bedingte Anordnung des Lehrstoffes. Ihre natürlichste Stelle im Systeme dürfte diese Lehre gleich nach der Lehre vom Winkel und vor der Lehre vom Dreiecke finden, wie sie diese Stelle denn auch in den meisten neueren Lehrbüchern einnimmt. Es wäre sehr im Interesse der Schule, wenn hierin allgemeine Uebereinstimmung herrschte. Gerade für die ersten Partieen des Lehrstoffs würde eine Uebereinstimmung in der Anordnung um so wünschenswerther sein, als eben in den Klassen, wo diese Partieen vorgenommen werden, am häufigsten ein Wechsel der Anstalt und mit ihm auch in der Regel des eingeführten Lehrbuches stattfindet. Es ist für einen Schüler aber nicht wenig mißlich, wenn er in Folge dessen etwa einen Leitfaden, in welchem die Lehre von den Parallelen in die Lehre vom Dreiecke eingeflochten ist, mit einem anderen vertauschen muß, in welchem diese Lehre ganz unabhängig von letzterer begründet ist. — Bei jener Anordnung gewinnt ein Lehrbuch auch aus einem anderweitigen, äußerlichen Grunde an Brauchbarkeit. Es wird nicht selten der Fall sein, daß ein Lehrer gerade die Art und Weise, wie die Parallelentheorie in dem an der Anstalt eingeführten Buche behandelt ist, aus verschiedenen Gründen für geradezu verwerflich hält. Ist aber die Deduction eine in sich geschlossene, von den Sätzen über das Dreieck unabhängige, so wird er leicht dafür durch Dictat eine andere, natürlich ebenfalls von der Lehre vom Dreiecke unabhängige, an die Stelle setzen können, welche er für besser hält. Im entgegengesetzten Falle dagegen würde eine solche Substitution viel zu weit gehende Abänderungen in der Anordnung und Begründung des ganzen Stoffes erfordern, als daß sie pädagogisch noch zu rechtfertigen wäre. — Schon aus den hier angedeuteten Gründen haben die verschiedenen Versuche, welche gemacht sind, den Satz über die Winkelsumme des Dreiecks unabhängig von der Parallelenlehre und dann umgekehrt diese durch jenen zu begründen, und welche ich nicht ganz unerwähnt gelassen haben möchte, für die Schule nur zweifelhaften Werth. Außerdem dürfte bloß ein einziger von diesen Beweisen, der schon früher angedeutete Thibaut'sche, für Schüler verständlich sein. Wer aber in dem Maße, wie es in diesem geschieht, von der Vorstellung der Bewegung Gebrauch machen will, hat damit, wie im Folgenden sich zeigen wird, das Mittel zu einer viel einfacheren Begründung der Lehre von den Parallelen in Händen.

II.

Da man die Lehre von den Parallelen bei Einschränkung der Geometrie auf den starren Größenbegriff trotz aller Bemühungen nicht in einer Weise zu begründen vermochte, welche allgemeine Anerkennung und Geltung gefunden hätte, so suchte man sie namentlich in neuerer Zeit durch Aufnahme des Begriffs der Richtung in die Wissenschaft zu vereinfachen. Von diesem Gesichtspunkte aus lautet die Definition, entsprechend der Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes zweier Linien, etwa folgender Maßen:

„Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche gleiche Richtung haben, heißen parallel."

Die nähere Bestimmung: „in einer Ebene" findet sich in einigen Lehrbüchern nicht. Es möge hierüber Folgendes bemerkt werden. Eine Definition darf keine überflüssige Bestimmung enthalten, d. h. keine solche, welche schon Folge einer anderen darin ausgesprochenen Bestimmung ist. In den drei unter I. aufgestellten Definitionen sind für den Parallelismus zweien geraden Linien jedesmal zwei Bedingungen aufgestellt, nämlich Lage in derselben Ebene und außerdem entweder Nonconcurrenz oder Aequidistanz oder Gleichheit zweier Gegenwinkel. In ihnen sind beide Bedingungen von einander unabhängig, vorausgesetzt, daß die beiden letzten Definitionen wie erwähnt in der Weise aufgestellt werden, daß in ihnen nicht ein Grundsatz versteckt liegt. Bei unserer Definition liegt die Sache anders. Man kann darüber streiten, ob aus der Richtungsgleichheit zweier Linien von selbst ihre Zugehörigkeit zu derselben Ebene folge. Verneint man diese Frage, oder läßt sie vorläufig unentschieden, weil in der Planimetrie bloß von Linien, die in derselben Ebene liegen, die Rede ist, so ist allerdings der Zusatz: „in einer Ebene" richtig angebracht. Dann aber muß man in der Stereometrie entweder den Satz aufstellen, sei es als Grundsatz, sei es als Lehrsatz, daß Linien gleicher Richtung in einer Ebene liegen, oder aber man darf sich hier zum Nachweise des Parallelismus zweier Linien im Raume nicht, wie es in einigen Lehrbüchern geschieht, darauf beschränken, bloß ihre Richtungsgleichheit nachzuweisen, sondern muß außerdem auch zeigen, daß sie derselben Ebene angehören. Natürlich befinden sich diejenigen in derselben Lage, welche jenen Zusatz bloß deshalb ausgelassen haben, weil er von selbst hinzuzudenken sei, da in der Planimetrie nur von Linien in einer Ebene die Rede sei. Bejaht man dagegen jene Frage, so würde der Zusatz eine überflüssige Bestimmung enthalten, also unstatthaft sein. Läßt man ihn übrigens aus diesem Grunde aus, so würde man, um jedes Mißverständniß zu vermeiden, gut thun, ihn als Folgerung nach der Definition aufzustellen.

Nach dieser mehr nebensächlichen Bemerkung ist zunächst die Frage zu erörtern, ob man berechtigt ist, den Begriff der Gleichheit zweier Richtungen, wie es in der Definition geschieht, als an sich klar und nicht weiter definirbar hinzustellen. Gewöhnlich wird in der Geometrie in den einleitenden Erörterungen die Gleichheit als Uebereinstimmung in der Größe definirt. Hier sind nun aber nicht zwei Quantitäten, sondern zwei Qualitäten einander gleich gesetzt. Ist das gestattet? Und wenn, braucht dann nicht näher erklärt zu werden, was man unter ihrer Gleichheit sich denken soll? Letztere Frage liegt um so näher, als in der Regel die Gleichheit der vorher betrachteten Raumgebilde, der geraden Linien und der Winkel, bestimmt definirt wird, indem man die Gleichheit derselben auf ihre Deckung zurückführt. Und doch würde bei diesen Begriffen jeder Schüler auch ohne solche Erklärungen unbedingt mit dem Ausdrucke der Gleichheit derselben die richtige Vorstellung verbinden. Bei dem Ausdrucke der Gleichheit zweier Richtungen, welcher undefinirt bleibt, ist das wenigstens in dem Maße durchaus nicht der Fall. Wohl hat jeder Schüler eine Anschauung von der Lage zweier Geraden, welche parallel genannt wird. Deshalb weiß er aber noch nicht, was er sich unter der Gleichheit der Richtungen zweier geraden Linien denken soll. Fragt man Anfänger, — bevor man ihnen parallel als richtungsgleich definirt hat — ob zwei gerade Linien, welche beide nach ein und demselben Punkte hin gerichtet sind, gleiche Richtung haben, so antworten wenigstens viele von ihnen mit Ja; und von der anderen Seite, zieht man auf der Tafel von zwei Punkten aus zwei gerade Linien, die eine nach rechts, die andere nach links, und stellt die Frage, ob diese Linien gleiche Richtung haben, so antworten alle mit Nein, wenn beide Linien auch dem Augenscheine nach parallel sind. Zur Berichtigung ihrer irrigen Auffassung hat man kein anderes Mittel, als ihnen verschiedene Paare gerader Linien vorzuführen und dabei anzugeben, daß zwei Linien von dieser Lage zu einander richtungsgleich seien, von jener dagegen nicht; diese demonstrative Erläuterung muß jede begriffliche ersetzen. Es mußte verlangt werden, den Schülern die obigen Fragen vorzulegen, bevor man ihnen unsere Definition gegeben hat. Denn die meisten von ihnen verbinden mit dem Ausdrucke „parallel" eine klare Vorstellung und in Folge dessen gewinnen sie durch die Definition — die richtige Vorstellung von richtungsgleiche Linien!

Aus der Definition werden dann in einigen Lehrbüchern ohne weitere Begründung mehrere „Folgerungen" gezogen. So wird einfach als Folgerung der Satz aufgestellt, daß zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und sich bei unbegrenzten Verlängerungen nie schneiden, parallel sind. Wie aber aus der Nonconcurrenz zweier Linien ohne Weiteres ihre Richtungsgleichheit folgen soll, ist doch schwer einzusehen. Der Beweis dieses Satzes hat allerdings seine Schwierigkeit. Die Begründung, welche andere Lehrbücher geben, daß nämlich die beiden Linien, da sie sich nie schneiden, auch keinen Winkel bilden, folglich keinen Richtungsunterschied haben können, ist kein Beweis. Denn daß Linien, welche, weil sie sich nie schneiden, keinen Winkel bilden können, auch keinen Richtungsunterschied haben, soll eben bewiesen werden. Doch die Schwierigkeit, den Satz mit mathematischer Strenge zu beweisen, berechtigt nicht, ihn einfach als Folgerung hinzustellen. Aehnlich verhält es sich mit der weiteren Folgerung, daß zwei gerade Linien, welche beide einer und derselben dritten Linie parallel sind, auch unter sich parallel sind. Dieser Satz ist doch nur dann eine Folgerung der Definition, wenn als Grundsatz angenommen wird, daß zwei gerade Linien, welche mit derselben dritten Linie gleiche Richtung haben, auch unter sich gleiche Richtung haben.

Doch ist auf diese Sätze und die Art ihrer Begründung weniger Gewicht zu legen. Die Hauptfrage ist und bleibt, ob die Beweise, welche sich aus unserer Definition für die beiden Hauptsätze der Parallelentheorie ergeben, sowohl bündig als auch Schülern verständlich sind. Weder das Eine noch das Andere dürfte der Fall sein. Der Beweis des ersten Hauptlehrsatzes: „Wenn Gegenwinkel gleich sind, so sind die Linien parallel“ hat etwa folgende Fassung: „Weil nach der Voraussetzung die beiden Gegenwinkel gleich sind, so haben die beiden fraglichen Geraden gegen eine und dieselbe dritte Linie — die Transversale — nach derselben Seite hin gleichen Richtungsunterschied, **folglich** mit einander selbst gleiche Richtung, sind daher parallel.“ Ein solcher Beweis mag immerhin noch als Erläuterung gelten; den Namen eines Beweises verdient er nicht. Während im Lehrsatze gesagt wird: „Wenn die Gegenwinkel gleich sind, sind die Linien parallel,“ heißt es im Beweise: „Weil die Gegenwinkel gleich sind, sind die Linien parallel“; im Uebrigen sind im Beweise bloß Definitionen und Ausdrücke für einander substituirt. Vom pädagogischen Standpunkte aus würde es vielleicht besser sein, einen solchen Scheinbeweis ganz wegzulassen, den Satz als Grundsatz aufzustellen und, wenn man will, eine Erläuterung hinzuzufügen. Doch das wäre bloß ein Streit über die äußere Form der Deduction. Das Hauptgewicht ist darauf zu legen, ob der Schüler das „folglich“ begreift, d. h. ob er den dadurch indicirten logischen Schluß auch wirklich zieht resp. ziehen kann.

Zur Beantwortung dieser Frage bedarf es zunächst einer Abschweifung auf das Gebiet der quantitativen Gleichheit. Eine allgemeine Definition für den Begriff der Gleichheit zweier Raumgebilde zu geben, dürfte schwer halten. Wollte man solche Raumgebilde als gleich erklären, welche sich ohne Veränderung ihrer Größe zwischen identische Grenzen bringen lassen, so reicht diese Definition für gerade Linien und Winkel aus, nicht aber mehr für Flächenräume. Denn man nennt nicht bloß solche Flächenräume, welche sich zwischen identische Grenzen bringen lassen, also z. B. congruente Figuren, einander gleich, sondern weitergehend auch andere, von welchen man nicht mehr die Möglichkeit nachweisen kann, sie zwischen dieselben Grenzen zu bringen. Haben wir z. B. zwei congruente Figuren, und schneiden wir von ihnen zwei congruente Stücke ab, so nennen wir die Reste gleich, auch wenn sie weder congruent sind noch durch andere Zusammenfügung einzelner Theile zur Congruenz gebracht werden können. Von zwei per definitionem gleichen Flächenräumen, z. B. von zwei congruenten Dreiecken, ausgehend, gelangen wir demnach zur Gleichsetzung zweier Flächenräume per derivationem mittelst der logischen Axiome: „Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches u. s. w.“ oder allgemein: „Gleiches gleich verändert gibt Gleiches.“ Will man nun ein analoges Denkgesetz auch für das qualitative Gebiet der Richtung gelten lassen, so muß man bei seiner Anwendung zunächst von zwei per definitionem gleichen Richtungen ausgehen. Wir nehmen zu dem Ende auf derselben geraden Linie — der Transversale — von zwei verschiedenen Punkten aus zwei Strecken an. Diese beiden Strecken haben gleiche Richtung, da die gerade Linie gemäß ihrer Erklärung überall dieselbe Richtung hat. Außerdem denken wir uns diese beiden Strecken auch von den beiden Anfangspunkten aus übereinstimmend d. h. nach derselben Seite hin gerichtet. Mit diesen beiden offenbar gleichen Richtungen denken wir uns dann absolut gleiche Veränderungen, Drehungen um ihre Anfangspunkte, vorgenommen. Damit diese Veränderungen in jeder Beziehung gleich sind, müssen drei Bedingungen erfüllt werden. Zunächst ist erforderlich, daß die Drehungen in derselben, also gleicher, Ebene erfolgen. Sodann müssen sie nach derselben Seite hin vor sich gehen. Endlich müssen sie auch quantitativ gleich sein. Also werden im Ganzen fünf Gleichheiten unterstellt: Gleichheit (Identität) der Anfangsrichtungen, Uebereinstimmung derselben, Gleichheit (Identität) der Drehungsebene, Gleichheit der Drehungsrichtung und Gleichheit der Drehungsgröße. Aus dem gleichzeitigen Stattfinden dieser Gleichheiten, von welchen die vier ersten qualitativer, die letzte quantitativer Art ist, soll nun eine neue, qualitative, Gleichheit, die der Endrichtungen, d. h. der Parallelismus der beiden gedrehten Strecken, gefolgert werden. Leider ist das Denkvermögen von neun und neunzig unter hundert Anfängern nicht so weit entwickelt, daß sie diesen Schluß wirklich zu ziehen vermöchten. Sie werden vielmehr, wie sie bis dahin parallele Linien bloß intuitiv, nicht begrifflich, auffassen, so auch die Ueberzeugung von der Wahrheit unseres Satzes nicht durch logisches Schließen, sondern bloß durch Anschauung gewinnen. — Wenn vorhin gesagt wurde, man solle den in Rede stehenden ersten Hauptlehrsatz einfach als Grundsatz hinstellen, so wird aus der vorhergehenden Erörterung hervorgehen, daß derselbe weniger als Grundsatz der Anschauung, denn vielmehr als ein logisches Axiom aufzufassen wäre. Als solches aufgefaßt würde unser Satz zu dem allgemeinen Grundsatze der Größenlehre: „Quantitativ Gleiches gleich verändert gibt Gleiches" das Seitenstück auf qualitativem Gebiete bilden. Zwar ist der Satz bloß eine specielle Anwendung eines derartigen allgemeinen Axioms. Aber er bildet eben den einzigen Fall der Anwendung dieses Axioms; der zweite qualitative Begriff der Geometrie, der der Aehnlichkeit, läßt keine Verwerthung desselben zu. Ob man nun jenem Denkgesetze die allgemeine Form gibt: „Qualitativ Gleiches gleich verändert gibt Gleiches" oder aber diejenige, in welcher allein es seine Anwendung findet: „Sind Gegenwinkel gleich, so sind die Linien parallel" ist unwesentlich.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Begründung des zweiten Hauptlehrsatzes: „Sind die Linien parallel, so sind die Gegenwinkel gleich." Der Beweis lautet etwa: „Da die Linien parallel sind, so haben sie mit einander gleiche Richtung, **folglich** gegen ein und dieselbe dritte Linie — die Transversale — nach derselben Seite hin gleichen Richtungsunterschied, also sind die Gegenwinkel gleich." Während im Lehrsatze behauptet wird, daß die Gegenwinkel gleich sind, wenn die Linien parallel sind, heißt es im Beweise, daß die Gegenwinkel gleich sind, weil die Linien parallel sind. Eine nähere Begründung wird durchaus nicht gegeben, denn die vorgenommenen Substitutionen von Ausdrücken und Definitionen für einander dienen bloß zur Erläuterung, wie der Lehrsatz zu verstehen ist. Man würde daher auch diesen Lehrsatz wieder füglich einfach als Grundsatz aufstellen können. Während der erste Hauptsatz seine innere Begründung in dem logischen Axiom findet, daß qualitativ Gleiches gleich verändert Gleiches gibt, oder vielmehr die einzige, specielle Anwendung dieses Axioms ist, liegt dem zweiten Hauptsatze die Umkehrung dieses Axioms zu Grunde, daß nämlich, wenn qualitativ Gleiches so verändert wird, daß wieder qualitativ Gleiches entsteht, die stattgehabten Veränderungen quantitativ gleich sind, vorausgesetzt, daß sie nicht qualitativ verschieden sind. Die ursprünglichen Richtungen der beiden angenommenen Geraden werden nämlich als gleich unterstellt; indem man jede der beiden Linien durch Drehung in die Lage der Transversale bringt, haben beide wieder gleiche — identische — Richtung; also müssen die vorgenommenen Veränderungen, Drehungen, gleich groß sein, sofern dieselben qualitativ gleich sind, d. h. übereinstimmend erfolgt sind.

Diese Parallelentheorie kommt demnach wissenschaftlich darauf hinaus, daß man das logische Axiom: „Gleiches gleich verändert gibt Gleiches," das sonst nur auf Quantitäten Anwendung findet, ohne Weiteres auch auf das Gebiet der Qualität resp. der Richtung überträgt. Für die Schule dürfte sie trotz ihrer scheinbaren Einfachheit und Eleganz nicht geeignet sein, da die Bedingungen, welche behufs absoluter Gleichheit der mit den Richtungen vorgenommenen Veränderungen erfüllt sein müssen, zu complicirter Natur sind, als daß Anfänger sich von denselben Rechenschaft geben könnten. Sie werden die Sätze vielmehr bloß deshalb als richtig hinnehmen, weil dieselben mit dem Zeugnisse ihres Gesichtssinnes übereinstimmen.

III.

In der vorigen Definition wird der Begriff der gleichen Richtung als einfacher Grundbegriff unterstellt. Es fragt sich, ob man ihn nicht näher definiren kann, um dadurch eine anderweitige Begründung der Lehre von den Parallelen zu ermöglichen. Zwei Raumgebilde sind nach einer bestimmten Beziehung als gleich aufzufassen, wenn man das eine von ihnen, ohne es in der fraglichen Beziehung zu verändern, mit dem anderen identisch machen kann. So sind zwei ebene Figuren rücksichtlich ihres Flächenraumes offenbar gleich, wenn die eine lediglich dadurch, daß man einzelne Theile derselben bloß anders neben einander legt, mit der anderen zur Congruenz, also Identität, gebracht werden kann. Analog wird man zwei gerade Linien in Bezug auf ihre Richtung gleich nennen, wenn sich die eine von ihnen ohne Veränderung ihrer Richtung, nöthigenfalls mit Veränderung ihrer Größe, mit der anderen zur Identität bringen läßt. Veränderung der Richtung einer geraden Linie ist aber Drehung. Demnach sind zwei Linien als Richtungen gleich, wenn die eine ohne Drehung in die Lage der anderen versetzt werden kann. Hieraus ergibt sich folgende fünfte Definition:

„Zwei gerade Linien heißen parallel (richtungsgleich, gleichlaufend), wenn die eine sich ohne Drehung in die Lage der anderen bringen läßt."

Zur Rechtfertigung dieser Definition ist zunächst der etwaige Zweifel zu beseitigen, ob man eine drehungslose Verschiebung einer geraden Linie sich vorzustellen vermag, ohne hierzu die Vorstellung der parallelen oder richtungsgleichen Lage zweier Geraden zu gebrauchen. Wäre letztere dazu erforderlich, so würde die Definition natürlich unstatthaft sein. Um die Vorstellung einer drehungslosen Verschiebung einer Geraden zu gewinnen und festzuhalten, hat man jedoch nur die Vorstellung einer einzigen, nicht zweier einander gleichen (parallelen) Richtungen nöthig. Nehmen wir nämlich auf einer beliebigen, in einer angenommenen Ebene liegenden geraden Linie eine bestimmte Strecke an, und denken wir uns diese Strecke in jener Geraden sich fortbewegend, so ist uns klar, daß zunächst mit dieser Fortbewegung keine Drehung verbunden ist, da wir einer geraden Linie überall dieselbe Richtung zuschreiben. Denken wir uns dann jene Strecke etwa als die Seite eines in der angenommenen Ebene liegenden Dreiecks und dieses in derselben Ebene mit fortbewegt, so können wir auch die Fortbewegung dieses Dreiecks und demnach auch jeder Seite desselben nicht anders als eine drehungslose auffassen. Oder denken wir uns mit jener Strecke unter beliebigem Winkel eine zweite gerade Linie in der supponirten Ebene starr verbunden, und nun wieder die erste Strecke in der angegebenen Weise fortbewegt, so haben wir wieder in der Fortbewegung der zweiten, in derselben Ebene bleibenden, Linie die Vorstellung einer drehungslosen Verschiebung einer Geraden. Die letztere Vorstellung hat demnach nicht die Vorstellung paralleler Linien zur Voraussetzung. Sie ist aber auch nicht nothwendig mit dieser verknüpft, derart daß sie schon an sich die letztere hervorriefe. Erst dann vielmehr, wenn man eine bestimmte Anfangslage der drehungslos bewegten Linie im Auge behält und mit ihr eine Endlage vergleicht, entsteht in uns die Vorstellung der parallelen Lage zweier Geraden. Aehnlich entsteht, wie wir gesehen haben, auch die Vorstellung des Winkels aus der Vorstellung der Drehung erst durch Vergleichung einer Anfangslage mit einer Endlage der gedrehten Linie. — Diese Definition genügt ferner der Bedingung, in den Schülern sofort die richtige Vorstellung hervorzurufen, welche sie mit dem Ausdrucke „parallel" verbinden sollen, auch wenn ihnen dieser Ausdruck vorher noch unbekannt sein sollte. Führt man ihnen beliebige Paare gerader Linien vor und fragt bei jedem Paare, ob die eine der beiden Linien sich ohne Drehung in die Lage der anderen bringen lasse oder nicht, so werden alle mit Sicherheit zu antworten wissen.

Aus dieser Definition läßt sich die Zugehörigkeit zweier parallelen Linien zu einer Ebene als nothwendige Folge herleiten. Man hat dazu den Grundsatz nöthig, daß eine gerade Linie, welche eine Ebene in einem Punkte durchschneidet, sich nicht ohne Drehung in die Lage dieser Ebene bringen läßt. Denkt man sich nämlich durch die eine der beiden geraden Linien, von denen unterstellt wird, daß sie sich ohne Drehung zur Deckung bringen lassen, und durch einen beliebig gewählten Punkt der zweiten eine Ebene gelegt, so muß diese zweite Linie vollständig in diese Ebene fallen. Denn durchschnitte sie die Ebene in jenem Punkte, so wäre nach jenem Grundsatze eine Drehung erforderlich, sie in die Lage der Ebene zu bringen, und demnach auch, im Widerspruch mit der Unterstellung, sie in die Lage der ersten Linie zu bringen. Da jedoch dieser Nachweis, wie es in der Natur der Sache liegt, nicht ohne stereometrische Betrachtung möglich ist, eine solche aber in der Planimetrie bei der hergebrachten strengen Scheidung beider Gebiete unstatthaft erscheinen dürfte, so ist vorläufig in die Definition die weitere Bestimmung aufzunehmen, daß die beiden Linien in derselben Ebene liegen sollen. Der obige Nachweis, daß die letzte Bedingung schon nothwendige Folge der ersten ist, muß dann der Stereometrie vorbehalten bleiben. In ähnlicher Weise mußte man auch, wie gezeigt, bei der vorigen Definition verfahren.

Um die einzelnen Sätze der Lehre von den Parallelen aus dieser Definition zu entwickeln, hat man den Grundsatz nöthig, daß zwei sich schneidende gerade Linien sich nicht ohne Drehung zur Deckung bringen lassen, also nicht parallel sind. Aus demselben folgt der Satz, daß zwei parallele Linien sich nie schneiden, so weit man sie auch verlängert. Zum Beweise der Umkehrung dieses Satzes muß man den Satz vorausschicken, daß, wenn zwei gerade Linien X und Y sich in einem Punkte schneiden, sich die eine von ihnen nicht ohne Drehung in eine solche Lage bringen läßt, daß sie die andere nicht mehr schneidet, natürlich beide Linien nach beiden Seiten hin unbegrenzt gedacht und selbstverständlich vorausgesetzt, daß beide Linien stets in derselben Ebene bleiben. Von der Wahrheit dieses Satzes überzeugt man sich leicht. Denn daß die Linie X nicht aufhört, die Linie Y zu schneiden, wenn man sie in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, ist einleuchtend; ebenso ist aber auch klar, daß sie nicht aufhört, die Linie Y zu schneiden, wenn man sie ohne Drehung verschiebt; denn letzteres kömmt auf dasselbe hinaus, als wenn X festliegen bleibt und Y sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt. Die Umkehrung des vorigen Satzes, daß nämlich zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und sich bei unbegrenzten Verlängerungen nie schneiden, parallel sind, ergibt sich hieraus in folgender Weise. Man denke sich die eine Linie X ohne Drehung verschoben, bis sie wenigstens einen Punkt mit Y gemein hat. Fiele sie dann nicht mit Y zusammen, sondern schnitte sie diese Linie in jenem Punkte, so müßte sie nach dem vorigen Satze, wenn man sie wieder ohne Drehung in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht denkt, auch noch in dieser Lage, da keine Drehung erfolgt ist, die Linie Y schneiden, was gegen die Annahme ist.

Bis dahin beschränkt sich die Betrachtung lediglich auf zwei Linien. Bei der Aufnahme einer dritten Linie in dieselbe ist zu unterscheiden, ob diese dritte Linie mit einer der beiden Parallelen parallel ist oder nicht. Auf den erstern Fall bezieht sich der Satz: „Sind zwei gerade Linien, X und Y, einer und derselben dritten Linie Z parallel, so sind sie unter sich parallel.“ Da nämlich X parallel mit Z ist, so kann man X ohne Drehung in die Lage von Z, und aus dieser Lage wieder, da Z parallel mit Y ist, ohne Drehung in die Lage von Y bringen; also läßt sich X ohne Drehung in die Lage von Y bringen, mithin ist X parallel Y. Aus diesem Satze folgt dann in einfacher Weise der Satz, daß durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie sich nur eine Parallele mit derselben ziehen läßt, und weiterhin, daß zwei gerade Linien, welche von einem Punkte nach verschiedenen Seiten auslaufen und beide einer und derselben dritten Linie parallel sind, eine einzige gerade Linie bilden. — An den zweiten Fall knüpft sich der Satz: Schneidet eine gerade Linie die eine von zwei Parallelen, so schneidet sie bei hinlänglicher Verlängerung auch die andere.*) Schnitte sie nämlich dieselbe nicht, so wäre sie, wie vorhin gezeigt, mit derselben parallel, also gingen durch ein und denselben Punkt zwei sich schneidende gerade Linien, welche beide einer und derselben dritten Linie parallel wären, was, wie vorhin bewiesen, unmöglich ist.

Der erste Hauptlehrsatz: „Werden zwei gerade Linien AB und CD von einer Transversale XY in M und N geschnitten und ist ein Paar Gegenwinkel YND und YMB einander gleich, so sind die Linien parallel,“ läßt sich nach dieser Theorie folgender Maßen beweisen. Man verbinde einen Punkt P in ND mit einem Punkte Q in NY durch eine gerade Linie und denke sich das so gebildete Dreieck QNP und mit ihm die ganze Linie CD so fortbewegt, daß NQ immer auf der Linie XY bleibt, bis N in M gelangt. Dann fällt auch, da nach

*) Mehrfach findet man diesen Satz erst nach dem zweiten Hauptsatze aufgeführt und mit Hülfe desselben bewiesen. Diese Anordnung ist unrichtig. Denn wenn in dem zweiten Hauptsatze ausgesagt wird, daß eine gerade Linie, welche die eine von zwei Parallelen unter einem beliebigen Winkel schneidet, auch die andere unter demselben Winkel schneidet, so ist damit doch schon vorausgesetzt, daß sie dieselbe überhaupt schneidet. Letzteres darf mithin nicht nach diesem Satze und noch viel weniger mit Hülfe desselben bewiesen werden.

der Annahme $\sphericalangle YND = \sphericalangle YMB$ ist, CD auf AB. Da nun bei jener Verschiebung NY und demnach auch die starr damit verbundene Linie CD keine Drehung gemacht hat, so ist CD ohne Drehung in die Lage von AB gebracht, also ist CD mit AB parallel. — Der zweite Hauptlehrsatz: „Werden zwei gerade Linien AB und CD von einer Transversale XY geschnitten und sind die Linien einander parallel, so ist jedes Paar Gegenwinkel einander gleich," läßt sich in ähnlicher Weise begründen. Fiele, indem man CD, wie vorhin, ohne Drehung fortbewegt, bis N auf M fällt, nicht CD auf AB, so könnte man CD nicht ohne Drehung in die Lage von AB bringen, also wäre CD nicht mit AB parallel, was der Annahme widerspricht. Ein zweiter Beweis ergibt sich aus dem ersten Hauptlehrsatze mit Hülfe des Satzes, daß zwei gerade Linien, welche derselben dritten Linie parallel sind, unter sich parallel sind. — Die übrigen Sätze der Lehre von den Parallelen finden wie bei jeder anderen, so auch bei dieser Theorie in den beiden Hauptlehrsätzen ihre Begründung.
