Fortsetzung des Herbstprogramms vom Jahre 1881.

Aufgabe 13. Der Halbmesser r des Kreises, welcher einem Dreieck umgeschrieben werden kann, die Halbierungslinie w_c eines Winkels γ und das Verhältnis m:n der Gegenseite c dieses Winkels zur Summe der ihn einschliefsenden Seiten a und b ist gegeben; wie grofs sind die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks?

Lösung. Die eine Mollweide'sche Formel liefert unter Rücksichtnahme auf die letzte Bedingung der Aufgabe $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{m}{n}$

und man kann also die Winkel des Dreiecks berechnen, wenn man noch eine zweite Gleichung vielleicht für $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ findet; dieser Winkel aber entsteht, wenn man sich im Dreieck ABC (v. Fig. 5.) aus C die Höhe CL gezogen denkt; nun kann man eine Relation für die halbe Differenz $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ entwickeln, wenn es gelingt, jene Höhe CL

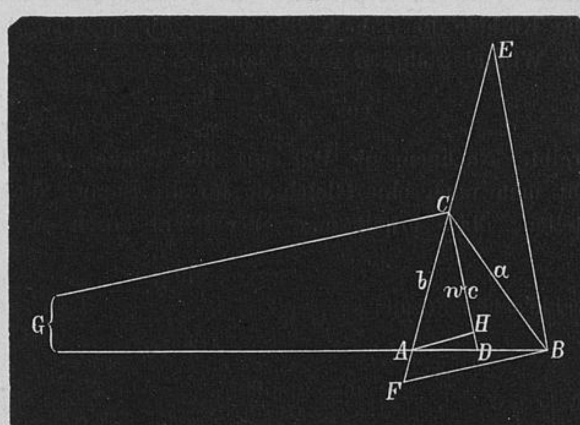


Fig. 5.

in den gegebenen Gröfsen auszudrücken, was in der That auf Grund der Ableitungen in Aufgabe 5, Zusatz 2 und Aufgabe 12 ermöglicht ist.

Wie nämlich in der vorhergehenden Aufgabe gefunden wurde, verhält sich, wenn man die dort eingeführten Bezeichnungen beibehält, $\dfrac{u}{a} = \dfrac{c}{a+b}$ also nach der Aufgabe $\dfrac{u}{a} = \dfrac{m}{n}$ und ebenso $\dfrac{v}{b} = \dfrac{m}{n}$, demnach ist $u = \frac{m}{n} \cdot a$ und $v = \frac{m}{n} \cdot b$; ferner findet man, wie ebenfalls in Aufgabe 12 gezeigt wurde, aus den Dreiecken BCD und ACD (v. Fig. 5) die Gleichung $a^2 \cdot v + b^2 \cdot u = w_c^2 \cdot (u + v) + u^2 \cdot v + u \cdot v^2$ oder durch Substitution der Werte von u und v $\frac{m}{n} \cdot a^2 \cdot b + \frac{m}{n} \cdot a \cdot b^2 = \frac{m}{n} \cdot w_c^2 \cdot (a + b) + \frac{m^3}{n^3} \cdot (a^2 \cdot b + a \cdot b^2)$; deshalb ist $a \cdot b = w_c^2 + \frac{m^2}{n^2} \cdot a \cdot b$ und $a \cdot b = \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot w_c^2$. Weiter weifs man nach den Entwickelungen im Zusatz 2 der Aufgabe 5, dafs $a \cdot b = 2 \cdot r \cdot h_c$ ist, und erhält nun $h_c = \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{w_c^2}{2 \cdot r}$; schliefslich wurde in der Auflösung der Aufgabe 11 bewiesen, dafs der Winkel zwischen der Halbierungslinie w_c und der Höhe h_c aus dem Scheitel dieses Winkels der halben Differenz $\frac{\alpha - \beta}{2}$ der Winkel an der Seite c gleich kommt, so dafs sich aus dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Winkelhalbierende w_c und dessen eine Kathete die Höhe h_c bildet, zur Bestimmung der halben Differenz der Winkel α und β die Relation

$$\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{h_c}{w_c} = \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{w_c}{2 \cdot r}$$

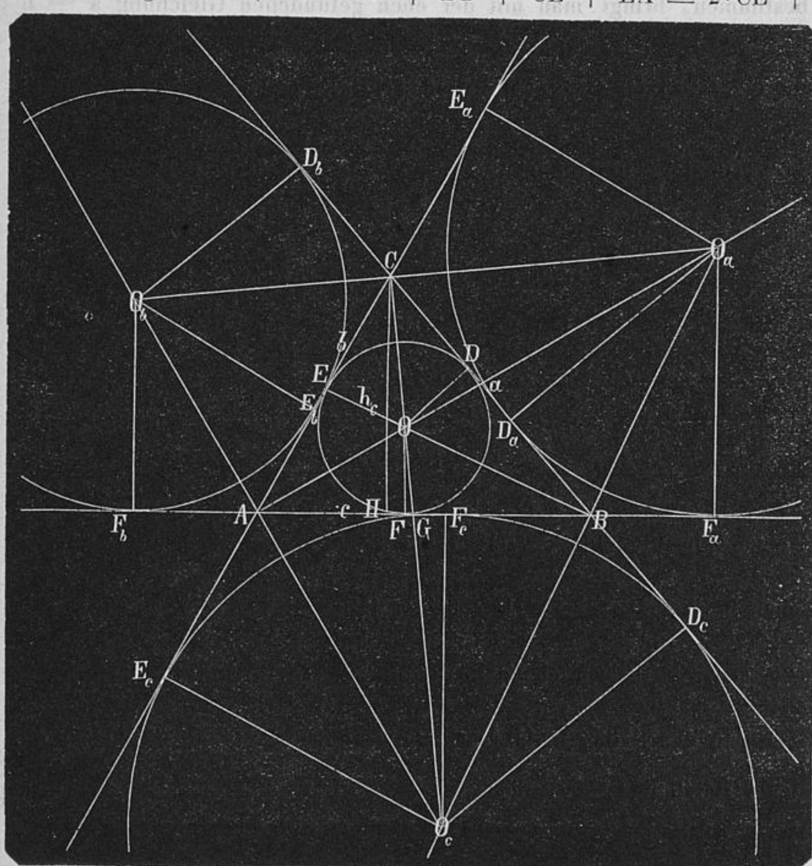
ergibt. Nachdem die Differenz der Winkel α und β berechnet ist, hat man noch eine Gleichung für die Summe dieser Winkel aufzustellen; diese erhält man aber leicht durch Anwendung der Mollweide'schen Formel $\frac{c}{a + b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$, weil nach der Aufgabe $\frac{c}{a + b} = \frac{m}{n}$ ist; man findet

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m \cdot n}{n^2 - m^2} \cdot \frac{w_c}{2 . r}.$$

Mit den Winkeln α und β ist dann auch der Winkel γ bekannt.

Aufgabe 14. Der Halbmesser des Kreises, welcher einem Dreieck umgeschrieben ist, sei $= r$, der Radius des Kreises, welcher demselben Dreieck eingeschrieben ist $= \varrho$ und eine seiner Seiten $= c$; es sollen die zwei andern Seiten a und b und die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Aus der Formel $\sin\gamma = \frac{c}{2 \cdot r}$ bestimmt man den Winkel γ; da mit γ auch die Summe $\alpha + \beta$ der zwei andern Dreieckswinkel bekannt ist, so sucht man noch eine Gleichung zwischen α und β etwa für die Differenz $\alpha - \beta$; eine solche liefert die Mollweide'sche Formel $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a+b)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{c}$, wenn man die Summe $a + b$ der zwei unbekannten Seiten in den gegebenen und gefundenen Gröfsen ausdrücken kann, was in der That nach dem Lehrsatz I der Aufgabe 12 möglich ist. Man findet nämlich aus der Figur 6 $a + b = CD + DB + CE + EA = 2 \cdot CE +$



AF + BF ferner weil AF + BF = c und in dem rechtwinkligen Dreieck CEO mit dem Winkel $\frac{\gamma}{2}$ und der Kathete OE = ϱ die andere Kathete CE = $\varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ ist, so ergibt sich a + b = c + $2 \cdot \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und für die Differenz der Winkel α und β die Relation

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c + 2 \cdot \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{c} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Um nun auch noch die Seiten a und b ihrer Gröſse nach zu bestimmen, bringt man mit der eben gefundenen Gleichung a + b $= c + 2 \cdot \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ die Mollweide'sche Formel $a - b = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ in Verbindung und findet

$$a = \tfrac{1}{2} \cdot c + \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

sowie

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot c + \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder man berechnet diese Seiten aus den Gleichungen $a = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha$ und $b = 2 \cdot r \cdot \sin\beta$. Die oben abgeleitete, für eine Reihe von Aufgaben sehr brauchbare Gleichung $a + b = c + 2 \cdot \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ könnte auch ohne Figur durch einfache Rechnung aus der Formel $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$ entwickelt werden; denn wenn man in dieser für s — c seinen Wert in den Seiten nämlich $\frac{a+b-c}{2}$ einsetzt, erhält man ebenfalls jene Gleichung.

Zusatz 1. Mit der vorhergehenden Aufgabe sind noch folgende gelöst.

a) Aus den Halbmessern r und ϱ des einem Dreieck umgeschriebenen und eingeschriebenen Kreises sowie einem Winkel γ desselben die zwei andern Winkel α und β des Dreiecks zu berechnen.

b) Der Radius des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises sei $= \varrho$, eine Seite und ihr Gegenwinkel $=$ c und γ; es sollen die zwei andern Seiten und Winkel a und b sowie α und β dieses Dreiecks berechnet werden.

c und d) Aus dem Halbmesser ϱ des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, der Summe s_1 zweier Seiten a und b und der dritten Seite c oder ihrem Gegenwinkel γ im ersten Fall die drei Winkel α, β und γ, im zweiten die Gegenseite c des gegebenen Winkels γ sowie α und β zu berechnen.

e) Der Radius ϱ des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, eine Seite a desselben und die Differenz d der zwei andern Seiten b und c sind gegeben; wie grofs sind die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks?

f) Der Radius ϱ des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises sei $= \varrho$, die Differenz zweier Seiten b und c $=$ d und der Gegenwinkel der kleineren von ihnen $= \gamma$; es sollen die Winkel α und β sowie die dritte Seite c dieses Dreiecks berechnet werden.

g) Aus dem Halbmesser ϱ des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, der Differenz d zweier Seiten a und b und der dritten Seite c die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks zu berechnen.

h) Von einem Dreieck ist der Halbmesser des ihm eingeschriebenen Kreises $= \varrho$, die Differenz zweier Seiten a und b $=$ d und der Gegenwinkel der gröfseren Seite $= \alpha$ gegeben; wie grofs sind die Seiten a, b und c und die zwei Winkel β und γ dieses Dreiecks?

i) Der Umfang eines Dreiecks sei $= 2s$, ein Winkel desselben $= \alpha$ und der Radius des ihm eingeschriebenen Kreises $= \varrho$; es sollen seine Seiten a, b und c berechnet werden. u. s. w.

Bei Lösung der Aufgabe a) nach dem angegebenen Wege erhält man

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{r\cdot\sin\gamma + \varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{2\cdot r\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Wenn man bei Aufgabe b) eine Gleichung für die Differenz a — b der zu berechnenden Seiten nur in den gegebenen Gröfsen aufstellen will, so könnte man diese folgendermaſsen entwickeln. Für die Winkel α, β und γ eines Dreiecks gilt $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{2}$; woraus man $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$ erhält, und da $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ ist, wie man aus den rechtwinkligen Dreiecken BOF und AOF der Figur 6 ersieht, so findet man weiter $\frac{\varrho}{s-b} = \frac{(s-a)-\varrho\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\varrho+(s-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$ oder $(s-a)\cdot(s-b) = \varrho\cdot(s-b)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \varrho\cdot(s-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \varrho^2$; nun ist aber $(s-a)\cdot(s-b) = \frac{c^2-(a-b)^2}{4}$ und $s-a+s-b = c$, deshalb geht die letzte Gleichung über in $c^2-(a-b)^2 = 4\cdot\varrho^2 + 4\cdot c\cdot\varrho\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, so daſs

$$a-b = \sqrt{c^2-4\cdot\varrho^2-4\cdot c\cdot\varrho\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

wird. Diese Gleichung für $a-b$ könnte auch in der Aufgabe 14 selbst zur Berechnung der Seiten a und b benützt werden. Auch eine zweite Relation für die Differenz $\alpha-\beta$ der Winkel möchte ich nicht ganz und gar übergehen, weil dieselbe auf eine einfache geometrische Konstruktion der Aufgabe 14,b führt. Man folgt aus den Gleichungen $\varrho = (s-c)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ und $a = 2\cdot r\cdot\sin\alpha$, $b = 2\cdot r\cdot\sin\beta$ und $c = 2\cdot r\cdot\sin\gamma$ zunächst $\varrho = r\cdot(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$; nun ist aber für die Winkel α, β und γ eines Dreiecks $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = \sin\alpha\cdot(1-\cos\beta)+\sin\beta\cdot(1-\cos\alpha)$ $= 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right) = 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

also wird $\varrho = 4\cdot r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ und weil $4r = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$

ist, so ergibt sich weiter

$$1)\quad \varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder $2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} = \frac{2 \cdot \varrho \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{c}$ d. h., da $2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ ist,

$$\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{c} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Auch zu den Aufgaben c) und d) kann man für die gesuchte Differenz a—b Relationen angeben, welche aufser dieser unbekannten nur gegebene Gröfsen enthalten; ich entwickle auch diese Gleichungen, um nochmals zu zeigen, wie man zu fast identischen Resultaten auf ganz verschiedene Weise gelangen kann. Um für die Aufgabe 14,c den Winkel γ zu berechnen, benützt man die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s - c} = \frac{2 \cdot \varrho}{a + b - c} = \frac{2 \cdot \varrho}{s_1 - c}$. Nun findet man nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} = a^2\cos^2\frac{\gamma}{2} + a^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} + b^2\cos^2\frac{\gamma}{2} + b^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} = (a - b)^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} + (a + b)^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ also, weil $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$ und $\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$ ist, $(a - b)^2 = c^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}) - s^2 \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2 \cdot (s_1 - c)^2 - 4\varrho^2 \cdot (s_1{}^2 - c^2)}{(s_1 - c)^2}$ oder

$$a - b = \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho^2 \cdot \frac{s_1 + c}{s_1 - c}}$$

Im Fall der Aufgabe 14,d) erhält man aus $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{s_1 - c}$ die Gleichung $\quad c = s_1 - 2 \cdot \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

und durch Substitution dieses Wertes von c in $(a-b)^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} = c^2 - s_1{}^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ die neue Relation $(a-b)^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} = s_1{}^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot s_1 \cdot \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} + 4 \cdot \varrho^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{\gamma}{2}$ also

$$a - b = \frac{\sqrt{s_1{}^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot s_1 \cdot \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} + 4 \cdot \varrho^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\frac{\gamma}{2}}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{oder}$$

$$a - b = \frac{\sqrt{s_1{}^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot s_1 \cdot \varrho \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + 4 \cdot \varrho^2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Bei Aufgabe i) findet man aus $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ die Seite

$$a = s - \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

und $b + c = a + 2 \cdot \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = s + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$; dazu benützt man noch die Gleichung $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = s \cdot \varrho$ und erhält dann $b \cdot c = \frac{2 \cdot s \cdot \varrho}{\sin\alpha}$

also $$b - c = \sqrt{\left(s + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{8 \cdot s \cdot \varrho}{\sin\alpha}}.$$

Zusatz 2. Mit diesen Aufgaben ist die Lösung noch einer Reihe von neuen Aufgaben angedeutet, welche man erhält, wenn in den Nummern 14 und 14,a—d statt des Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises der Halbmesser ϱ_c des äufseren Berührungskreises als gegeben angenommen wird, welcher die Seite c selbst berührt. Zur Lösung derselben wird man statt der Formel $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$ die etwa aus dem rechtwinkligen Dreieck CO_cD_c der Figur 6 abgeleitete Gleichung $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_c}{s}$ benützen, so dafs nun die Relation für $a + b$ lautet $a + b = 2 \cdot \varrho_c \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} - c$; ebenso mufs man statt der Formeln $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$ und $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ für diese Fälle die aus den rechtwinkligen Dreiecken BO_cD_c und AO_cE_c der Figur 6 leicht zu findenden Gleichungen $ctg\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_c}{s-a}$ und $ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_c}{s-b}$ anwenden.

Zusatz 3. Aufgabe. Aus einer Seite b und ihrem Gegenwinkel β eines Dreiecks sowie dem Radius ϱ_a des Kreises, welcher eine der nicht gegebenen Seiten etwa a von aufsen berührt, die zwei andern Winkel und Seiten α und γ sowie a und c zu berechnen.

Lösung. Da die Gröfsen ϱ_a und β in dem rechtwinkligen Dreieck BD_aO_a (v. Fig. 6) auftreten, so gründet man den Anfang der Rechnung auf dieses Dreieck, in welchem nach Aufgabe 12, Lehrsatz I $BD_a = BF_a = s - c$ ist; man erhält dann $tg\frac{\beta}{2} = \frac{s-c}{\varrho_a}$ oder

$$a - c = 2 \cdot \varrho_a \cdot tg\frac{\beta}{2} - b$$

und mit Benützung der Mollweide'schen Formel $\sin\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{(a-c)\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{b}$ für die Differenz der gesuchten Winkel α und γ die Relation

$$\sin\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{\left(2\cdot\varrho_a\cdot tg\frac{\beta}{2} - b\right)\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{b} = \frac{2\cdot\varrho_a\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{b} - \cos\frac{\beta}{2}$$

und weil $\frac{\alpha+\gamma}{2} = 90 - \frac{\beta}{2}$ ist, kennt man die Winkel α und γ selbst. Will man auch die Seiten a und c in den gegebenen Gröfsen direkt ausdrücken, so könnte man zur obigen Gleichung für die Differenz dieser Unbekannten noch eine solche für die Summe derselben suchen und hiezu die schon entwickelte Relation $b^2 = (a+c)^2\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} + (a-c)^2\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}$ anwenden, dann erhält man

$$(a+c)^2\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} = b^2 - 4\cdot\varrho_a{}^2\sin^2\frac{\beta}{2} + 4\cdot b\cdot\varrho_a\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - b^2\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}$$

oder

$$a + c = \sqrt{b^2 - 4\cdot\varrho_a{}^2 + 4\cdot b\cdot\varrho_a\cdot ctg\frac{\beta}{2}}$$

Zusatz 4. Aufgabe. Der Radius des Kreises, welcher einem Dreieck eingeschrieben ist, sei $= \varrho$, ein Winkel desselben $= \gamma$ und die Differenz der diesen Winkel einschliefsenden Seiten a und $b = d$; wie grofs sind die zwei andern Winkel α und β und die dritte Seite c dieses Dreiecks?

Lösung. Im Zusatz 1. wurde die Relation $c^2 = (a-b)^2 \cos^2\frac{\gamma}{2}$ $+ (a+b)^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ hergeleitet; setzt man in dieser statt $a+b$ den in der Aufgabe 14 angegebenen Wert $c + 2\cdot\varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ ein, so erhält man $c^2 = d^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2} + c^2\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2} + 4\cdot c\cdot\varrho\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} + 4\cdot\varrho^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}$

oder $c^2 - 4\cdot c\cdot\varrho\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = d^2 + 4\cdot\varrho^2$ also

$$c = 2\cdot\varrho\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{d^2 + 4\cdot\varrho^2\cdot\sec^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Da γ gegeben und deshalb die Summe $\alpha+\beta$ der zu berechnenden Winkel bekannt ist, so hat man nur noch eine Gleichung für deren Differenz aufzustellen; diese liefert die eine Mollweide'sche Formel, nach welcher $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{d\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{c}$ ist.

Aufgabe 15. Aus dem Radius ϱ des Kreises, welcher einem Dreieck eingeschrieben ist, einer Seite c desselben und der ihr zugehörigen Höhe h_c sollen die zwei andern Seiten a und b und die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ enthält zwei Unbekannte, nämlich γ und s, demnach sucht man noch eine zweite Beziehung zwischen diesen und den gegebenen Gröfsen c, h_c und ϱ; als solche bietet sich die Flächengleichung $s\cdot\varrho = F = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$ dar, aus welcher man $s = \frac{c\cdot h_c}{2\cdot\varrho}$ oder $s - c = \frac{c\cdot(h_c - 2\cdot\varrho)}{2\cdot\varrho}$ findet, so dafs man zur Bestimmung des Winkels γ die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cdot\varrho^2}{c\cdot(h_c - 2\cdot\varrho)}$$

erhält. Mit γ ist nun auch die Summe $\alpha + \beta$ der zwei andern Winkel bekannt und eine Gleichung für die Differenz derselben liefert etwa wieder die Mollweide'sche Formel $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a+b}{c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$, in welcher jedoch erst in den gegebenen Elementen ausgedrückt der Wert von $a + b$ eingesetzt werden mufs. Nun erhält man aus der schon angegebenen Beziehung $\frac{a+b+c}{2}\cdot\varrho = \frac{c\cdot h_c}{2}$ den Wert von

$a+b = \frac{c\cdot h_c}{\varrho} - c$, demnach wird

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(h_c-\varrho)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\varrho}.$$

Diese Gleichung könnte auch ähnlich, wie die Relation für die halbe Differenz der Winkel α und β in Aufgabe 14, Zusatz 1, b abgeleitet werden. Man findet auf dem daselbst angegebenen Weg $\varrho = \frac{c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ also auch $\varrho = \frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ und weil $a = \frac{h_c}{\sin\beta}$ ist, wird $\varrho = \frac{h_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$ also $2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = \frac{h_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\varrho}$ oder, da $2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\varrho} - \sin\frac{\gamma}{2}$.

Da für die zu berechnenden Seiten a und b schon die Relation $a+b = \frac{c\cdot(h_c-\varrho)}{\varrho}$ gefunden wurde, sucht man nun noch eine Gleichung für die Differenz $a-b$ derselben aufzustellen; zu diesem Zweck benützt man die im Zusatz 1,c der Aufgabe 14 entwickelte Beziehung $(a-b)^2 = c^2\cdot(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}) - (a+b)^2\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$, aus welcher man durch Substitution der Werte von $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ und $(a+b)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ (nämlich des Ausdrucks $c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+2\cdot\varrho$) erhält: $(a-b)^2 = c^2 + \left(\frac{2\cdot\varrho^2}{h_c-2\cdot\varrho}\right)^2 - \left(\frac{2\cdot\varrho^2}{h_c-2\cdot\varrho}+2\cdot\varrho\right)^2 = c^2 - \frac{8\cdot\varrho^3}{h_c-2\cdot\varrho} - 4\cdot\varrho^2 = c^2 - \frac{4\cdot h_c\cdot\varrho^2}{h_c-2\cdot\varrho}$

oder $a-b = \sqrt{c^2 - \frac{4\cdot h_c\cdot\varrho^2}{h_c-2\cdot\varrho}}$, also

$$a = \frac{c \cdot (h_c - 2 \cdot \varrho)}{2 \cdot \varrho} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 - \frac{4 \cdot h_c \cdot \varrho^2}{h_c - 2 \cdot \varrho}}$$

und

$$b = \frac{c \cdot (h_c - 2 \cdot \varrho)}{2 \cdot \varrho} \mp \sqrt{c^2 - \frac{4 \cdot h_c \cdot \varrho^2}{h_c - 2 \cdot \varrho}}.$$

Zusatz. Nach den gleichen Schlüssen, wie die vorhergehende Aufgabe, löst man auch folgende.

a) Aus dem Halbmesser ϱ des Kreises, welcher einem Dreieck eingeschrieben ist, einem Winkel γ desselben und der Höhe h_c, welche nach seiner Gegenseite c gezogen ist, sollen die zwei andern Winkel α und β und die Seiten a, b und c dieses Dreiecks berechnet werden.

b) Der Radius r des Kreises, welcher einem Dreieck umgeschrieben ist, eine Seite c desselben und sein Flächeninhalt F sind gegeben, man soll die zwei andern Seiten a und b und die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks berechnen.

c) Aus dem Radius ϱ des äufsern Berührungskreises, welcher die Seite c des Dreiecks berührt, dieser Seite c und dem Flächeninhalt F sollen die Seiten a und b und die Winkel α, β und γ des Dreiecks berechnet werden.

d) Der Halbmesser des Berührungskreises, welcher die Seite c eines Dreiecks von aufsen berührt, sei $= \varrho_c$, ein Winkel an ihr $= \alpha$ und der Flächeninhalt des Dreiecks $=$ F; wie grofs sind die Winkel β und γ dieses Dreiecks? etc.

Zur Aufgabe a sei noch bemerkt, dafs man ebenso wie in der Lösung von Aufgabe 15 an Stelle der Gleichung für $a - b$ zunächst eine solche für $a \cdot b$ ableiten könnte; diese erhält man nach dem Flächensatze $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$, welche für $a \cdot b$ den Wert $\dfrac{h_c \cdot \varrho^2}{(h_c - 2 \cdot \varrho) \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}}$ liefert, weil $c = \dfrac{2 \cdot \varrho^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{h_c - 2 \cdot \varrho}$ wird.

Bei der Auflösung von c findet man, weil $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_c}{s}$ und Dreieck $ABC = O_cAE + O_cBC - O_cBA$ (v. Fig. 6) also $F = \frac{a + b - c}{2} \cdot \varrho_c = (s - c) \cdot \varrho_c$ ist, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \dfrac{2 \cdot \varrho_c^2}{F + c \cdot \varrho_c}$.

Bei der Aufgabe d ergeben sich aus $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_c}{s-b}$ und $(s-c)\cdot\varrho_c = F$ die Werte von a und b — c beziehungsweise $= \frac{F}{\varrho_c} + \varrho_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{F}{\varrho_c} - \varrho_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, demnach mit Hilfe der Mollweide'schen Formel

$$\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{(b-c)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{a} = \frac{F - \varrho_c{}^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{F + \varrho^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Aufgabe 16. In einem Dreieck ist der Halbmesser des ihm eingeschriebenen Kreises $= \varrho$, eine Seite $=$ a und die Höhe zu einer andern $= h_c$; wie grofs sind die Seiten b und c und die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks?

Lösung. Den Winkel β berechnet man aus der Gleichung $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$. Um nun γ zu bestimmen, fäfst man das rechtwinklige Dreieck OCD mit dem einen spitzen Winkel $\frac{\gamma}{2}$ in's Auge und weil die Kathete CD desselben ein Abschnitt der Seite a ist und mit dem Abschnitt BD zusammen die gegebene Seite a liefert, so erhält man die Relation für γ durch Betrachtung der beiden rechwinkligen Dreiecke CDO und BDO, aus welchen man $CD = \varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und $BD = \varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ und demnach für den Winkel γ die Gleichung $\varrho\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = a$ erhält, so dafs sich

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\varrho} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

ergibt. Will man nun auch die Relation für die Seite c entwickeln, deren zugehörige Höhe h_c gegeben ist, so wird man zu diesem Zweck vom Flächensatz 1) $c\cdot h_c = (a+b+c)\cdot\varrho$ ausgehen. In dieser Gleichung kommt aber aufser der unbekannten Seite c auch noch b als solche vor und man mufs deshalb die letztere zu entfernen suchen, was auch durch eine geeignete Zerlegung der Summe $a+b+c$ möglich ist. Nach dem Lehrsatz I in Aufgabe 12 findet man nämlich aus

Figur 6 $a + b + c = 2 \cdot AF + 2 \cdot BF + 2 \cdot CD = 2 \cdot \left(c + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) =$ $2 \cdot \left(c + a - \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$ und durch Substitution dieses Wertes in

1) $c \cdot h_c = 2 \cdot c \cdot \varrho + 2 \cdot a \cdot \varrho - 2 \cdot \varrho^2 \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$ oder

$$c = \frac{2 \cdot \varrho \cdot \left(a - \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}{h_c - 2 \cdot \varrho}.$$

Aus 1) kann man auch eine Relation für die Seite b entwickeln, wenn man einerseits $a + b + c$ und anderseits c so in Summanden zerlegt, dafs die Summen nur die unbekannte Seite b und aufserdem die gegebenen Elemente und, wie das auch bisher schon der Fall war, den Winkel β enthalten, welcher leicht fehlerfrei aus seiner sehr einfachen Gleichung berechnet werden kann. Nun sieht man auf Grund des Lehrsatzes I in Aufgabe 12 aus Figur 6, dafs $a + b + c = 2 \cdot (AE + CE + BD) = 2 \cdot \left(b + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$ und $c = AE + BD =$ $b - CD + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = b - \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = b - a + 2 \cdot \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$ also durch Substitution in 1) $\left(b - a + 2 \cdot \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \cdot h_c = 2 \cdot \left(b + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \cdot \varrho$ ist, woraus man $b = \dfrac{2 \cdot \varrho^2 \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + a \cdot h_c - 2 \cdot h_c \cdot \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}{h_c - 2 \cdot \varrho}$ findet. Nachdem die Winkel β und γ gefunden waren, konnte man α nach dem Lehrsatz von der Winkelsumme im Dreieck berechnen, doch kann man auch für α eine Gleichung aufstellen, welche jetzt zur Kontrolle über die Richtigkeit der Rechnung dienen kann, da sie vom Winkel γ unabhängig ist. Auch zu diesem Zwecke zerlegt man den Ausdruck $a + b + c$ sowie c der Gleichung 1) so, dafs die Summen den zu berechnenden Winkel α sowie die gegebenen Gröfsen und etwa auch β enthalten; für die Seite c wird dies mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke BOF und AOF (v. Fig. 6) ermöglicht, aus welchen man $c = \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ findet, und für die Summe $a + b + c$ erhält man aus Figur 6 wieder durch Anwendung des Lehrsatzes I in der Aufgabe 12 den Ausdruck $2 \cdot (BC - AF)$ oder $2 \cdot \left(a + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Wenn man diese Werte in 1) einsetzt, resultiert schliefslich die Relation $\varrho \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \cdot h_c = 2 \cdot \left(a + \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \varrho$ oder

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot a - h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - 2 \cdot \varrho}.$$

Zusatz. Es ist leicht zu verfolgen, dafs die Aufgabe in gleicher Weise, wie eben, gelöst wird, wenn an Stelle des Halbmessers ϱ des eingeschriebenen Kreises der Radius ϱ_c oder ϱ_a eines äufseren Berührungskreises oder wenn statt der Seite a ihr Gegenwinkel α gegeben ist, dafs also mit der Aufgabe 16 wieder eine Reihe verwandter Aufgaben gelöst ist.

Aufgabe 17. Aus einer Seite c eines Dreiecks, dem Radius ϱ_c des Berührungskreises, welcher diese Seite von aufsen berührt, und dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises sollen die Seiten a und b und die Winkel α, β und γ des Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Die Halbmesser ϱ und ϱ_c kommen in den rechtwinkligen Dreiecken COE und CO_cE_c (v. Fig. 6) vor, aus welchen man nun Relationen zwischen den gegebenen Gröfsen ϱ und ϱ_c und den unbekannten γ, $s = \frac{a + b + c}{2}$ und $s - c = \frac{a + b - c}{2}$ aufstellen kann; nun ist aber auch c gegeben und man findet deshalb aus diesen Dreiecken zwei Gleichungen zwischen den zwei Unbekannten γ und $a + b$, nämlich aus $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{a + b - c}$ und $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2 \cdot \varrho_c}{a + b + c}$ die Beziehungen $\frac{a + b - c}{2} = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{a + b + c}{2} = \varrho_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen $a + b = (\varrho_c + \varrho) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und $c = (\varrho_c - \varrho) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, woraus zunächst

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{\varrho_c - \varrho}$$

und $a + b = \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} \cdot c$ folgt. Durch die erstere dieser Gleichungen ist der Gegenwinkel γ der gegebenen Seite c und durch die zweite ist die Summe der gesuchten Seiten a und b bestimmt, so dafs man nur noch eine Relation für die Differenz $a - b$ dieser Seiten herzustellen hat, um dieselben als gefunden betrachten zu können. Diese Beziehung zwischen a — b und den gegebenen Elementen leitet man aus den rechtwinkligen Dreiecken BOF und BO_cF_c (v. Fig. 6) her, weil in derselben $BF = \frac{c + a - b}{2}$ und $BF_c = \frac{c - (a - b)}{2}$ ist, und in jedem ein und derselbe, freilich bis jetzt unbekannte Winkel β vorkommt, welcher also noch eliminiert werden mufs. Man findet nun aus jenen Dreiecken $\frac{c + (a - b)}{2} = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ und $\frac{c - (a - b)}{2} = \varrho_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ also durch Multiplikation beider Gleichungen $\frac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \varrho_c \cdot \varrho$ und es folgt für die gesuchte Differenz $a - b = \sqrt{c^2 - 4\varrho_c \cdot \varrho}$ demnach

$$a = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} \cdot c + \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho} \right)$$

und

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} \cdot c \mp \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho} \right)$$

Da γ schon berechnet ist, so sucht man nur noch eine Gleichung für die Differenz $\alpha - \beta$ der zwei andern Winkel, deren Summe $180 - \gamma$ ist; zu diesem Zweck wendet man wieder die Mollweide'sche Formel $\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{c}$ an, aus welcher nun

$$\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{\frac{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho}{c^2 + (\varrho_c - \varrho)^2}}$$

folgt; doch können auch die Winkel α und β selbst berechnet werden, z. B. β aus der schon oben angegebenen Relation $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{c + (a - b)}$ und α aus der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{c - (a - b)}$, welche man aus dem rechtwinkligen Dreieck AOE der Figur 6 erhält, so dafs man dann α und β aus

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{c \mp \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho}} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho}}{2 \cdot \varrho_c}$$

und

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho}} = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho}}{2 \cdot \varrho_c}$$

findet. In diesem Fall kann man dann noch mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck die Richtigkeit der Rechnung erproben.

Zusatz. In gleicher Weise wie die vorhergehende kann man eine grofse Zahl anderer Aufgaben lösen z. B.

a) Eine Seite c eines Dreiecks und die Radien ϱ_a und ϱ_b der Kreise, welche die zwei andern Dreiecksseiten a und b von aufsen berühren, sind gegeben; wie grofs sind diese Seiten a und b und die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks?

b) Ein Winkel eines Dreiecks sei $= \gamma$, der Halbmesser des Kreises, welcher die Gegenseite c von aufsen berührt, $= \varrho_c$ und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$; wie grofs sind die Seiten a, b und c und die zwei Winkel α und β dieses Dreiecks?

c) Aus einem Winkel α oder β eines Dreiecks und den Halbmessern ϱ_a und ϱ_b zweier Kreise, von welchen der eine die Gegenseite a oder b jenes Winkels α oder β und der andere eine an ihm liegende Seite b oder a von aufsen berührt, die Seiten a, b und c und die Winkel β und γ dieses Dreiecks zu berechnen.

d) Ein Winkel γ und die Halbmesser ϱ_a und ϱ_b der zwei Kreise, welche die den Winkel γ einschliefsenden Seiten eines Dreiecks von aufsen berühren, sind gegeben; es sollen die Winkel α und β und die Seite c dieses Dreiecks berechnet werden.

e) Aus einem Winkel α oder β eines Dreiecks, dem Halbmesser ϱ_c, welcher die eine an diesem Winkel liegende Seite c von aufsen berührt, und dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises sollen die Seiten a, b und c und die Winkel α und γ dieses Dreiecks berechnet werden.

Bei der Lösung der Aufgabe a) findet man aus den Gleichungen $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_a}{s-b}$ und $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_b}{s-a}$ die Relation $a - b = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b} \cdot c$ und dann aus $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{s}$ und $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_b}{s-c}$ weiter $\frac{a+b+c}{2} = \varrho_a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{a+b}{2} - c = \varrho_b \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ demnach $a + b = \sqrt{c^2 + 4 \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b}$.

Zur Aufgabe b) sei bemerkt, dafs alle drei Seiten aus Gleichungen des ersten Grades berechnet werden.

Die Gleichung zur Berechnung etwa des Winkels β in der Aufgabe c) wird sehr einfach; man erhält nämlich aus $s \cdot tg\frac{\alpha}{2} = \varrho_a$ und $s \cdot tg\frac{\beta}{2} = \varrho_b$ durch Division $tg\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_b}{\varrho_a} \cdot tg\frac{\alpha}{2}$; ferner ergeben sich aus $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{s}$ und $ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_b}{s-c}$ für c und a + b die Ausdrücke $\varrho_a \cdot ctg\frac{\alpha}{2} - \varrho_b \cdot tg\frac{\alpha}{2}$ und $\varrho_a \cdot ctg\frac{\alpha}{2} + \varrho_b \cdot tg\frac{\alpha}{2}$, doch bleiben die Werte von a und b, welche wieder aus Gleichungen des ersten Grades gefunden werden, ziemlich einfach; man erhält nämlich aus dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz $4 \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b = 4 \cdot b \cdot \varrho_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + 4 \cdot b \cdot \varrho_b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ also

$$b = \frac{2 \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b}{(\varrho_a + \varrho_b) \cdot \sin\alpha}$$

und

$$a = \frac{\varrho_a{}^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2} + \varrho_b{}^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{\varrho_a + \varrho_b}.$$

Bei der Auflösung der Aufgabe d ergibt sich aus $\frac{-a+b+c}{2} = \varrho_b \cdot tg\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{a-b+c}{2} = \varrho_a \cdot tg\frac{\gamma}{2}$ der Wert der Seite

$$c = (\varrho_a + \varrho_b) \cdot tg\frac{\gamma}{2}$$

sowie $a - b = (\varrho_a - \varrho_b) \cdot tg\frac{\gamma}{2}$ also aus $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a-b) \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{c}$ für die halbe Differenz der gesuchten Winkel α und β

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\varrho_a - \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

Die Lösung der Aufgabe e) kann auch mit Hilfe der Formel 1) der Aufgabe 14, Zusatz 1, b erzielt werden. Man erhält aus der citierten Gleichung $\varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ und aus der Relation $\varrho_c =$

$\frac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, welche in derselben Weise entwickelt werden kann, wie die eben angegebene, durch Division $\frac{\varrho}{\varrho_c} = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}$ oder

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\varrho_c}.$$

Diese Gleichung führt zu einer sehr einfachen planimetrischen Konstruktion der vorliegenden Aufgabe, für welche aufser ϱ und ϱ_c etwa der Winkel α gegeben sei. Wenn man nämlich auf einem Strahl O_cO von seinem Anfangspunkt O_c aus die beiden gegebenen Halbmesser ϱ_c und ϱ neben einander als O_cF und FO abträgt, im Punkte F, in welchem diese Radien aneinander stofsen, die zum Strahl O_cOF normale Gerade FB errichtet, welche den Endschenkel des an den Halbmesser $\varrho_c = O_cF$ in seinem Anfangspunkt O_c angelegten Winkels $OO_cB = \frac{\alpha}{2}$ in B schneidet, und diesen Schnittpunkt B mit dem Endpunkt O des andern Halbmessers $\varrho = FO$ verbindet, so ist der entstandene Winkel $FBO = \frac{\beta}{2}$, weil $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{BF}{\varrho_c}$ und $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{BF}$ und, wenn man beide Gleichungen miteinander multipliziert, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\varrho_c}$ wird. Wenn man aber zwei Winkel α und β eines Dreiecks sowie den Halbmesser ϱ des ihm eingeschriebenen Kreises kennt, so läfst sich dieses selbst in bekannter Weise konstruieren, wobei hier die Punkte B, F und O sogleich in der erhaltenen Lage weiter benützt werden können, um das gesuchte Dreieck ABC herzustellen, indem man um O als Mittelpunkt mit $OF = \varrho$ als Halbmesser einen Kreis beschreibt, an ihn vom Punkt B die zweite Tangente BC zieht, welche dann mit BO ebenfalls einen Winkel $= \frac{\beta}{2}$ bildet, und an jenen Kreis eine Tangente AC zieht, welche die über F verlängerte BF unter einem Winkel CAB gleich dem gegebenen Winkel α schneidet. Die obige Konstruktion kann aber auch, wie eben die erhaltene Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\varrho_c}$

zeigt, angewendet werden, wenn von einem Dreieck nur das Verhältnis $\frac{\varrho}{\varrho_c} = \frac{m}{n}$ der Halbmesser des eingeschriebenen und eines angeschriebenen Kreises ferner einer der Winkel α oder β, welcher an der vom Ankreis von aufsen berührten Seite c liegt, und irgend eine dritte Strecke des Dreiecks z. B. die Halbierungslinie w eines Winkels oder der Überschufs der Summe zweier Seiten über die Höhe zur dritten Seite u. s. w. gegeben sind. Durch die oben angegebene planimetrische Lösung wird nun ebenfalls der Winkel $\frac{\beta}{2}$ etwa gefunden, wenn α gegeben ist, wobei jedoch die Strecken m und n oder Strecken, welche sich wie $\frac{m}{n}$ verhalten, statt der Radien ϱ und ϱ_c als OF und O_cF abgetragen werden. Durch den gegebenen und den konstruierten Winkel α und β ist das gesuchte Dreieck seiner Gestalt nach bestimmt, so dafs man mit diesen zwei Elementen ein dem gesuchten Dreieck ähnliches konstruieren und aus diesem in bekannter Weise das zu zeichnende Dreieck selbst erhalten kann, weil von ihm ein die Gröfse desselben bestimmendes Element gegeben ist. Die hier durch Rechnung abgeleitete Konstruktion hätte man allerdings auch aus der Figur 6 auf rein geometrischem Wege entwickeln und die oben angegebenen Figur erhalten können, wenn man nämlich beachtet, dafs z. B. nicht blofs $BF = \frac{a - b + c}{2}$ ist, wie schon früher bewiesen wurde, sondern dafs auch AF_c oder $AE_c = CE_c - AC = \frac{a + b + c}{2} - b = \frac{a - b + c}{2}$ ist, dafs also der Punkt F_c auf F fällt, sobald man das Dreieck O_cAF_c so neben das Dreieck OBF legt, dafs der Punkt A auf B und die Richtung der AF_c auf die der BF zu liegen kommt, und dafs dann F_cO_c in die Verlängerung von OF fällt, weil die Winkel $AF_c\,O_c$ und BFO rechte Winkel sind, also ihre Summe einen gestreckten liefert; aber es wird wohl gerne zugegeben werden, dafs man die Konstruktion eher durch die trigonometrische als durch die Euklidische Methode findet, wenn auch letztere andrerseits den Vorzug für sich hat, dafs sie die Länge der normalen Geraden BF ihrer Bedeutung nach erklärt und damit ohne Schwierigkeit weiter erkennen läfst, dafs die oben angeführte Konstruktion auch noch ganz und gar brauchbar bleibt, wenn an

Stelle der zwei Kreisradien ϱ_c und ϱ nur ihr Verhältnis $\frac{m}{n}$ bekannt ist. Denn wenn man ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A_1B_1C_1$ mit Benützung der Winkel α und β des Dreiecks ABC herstellt und in diesem die Seiten B_1C_1, A_1C_1, und A_1B_1 beziehungsweise mit a_1, b_1 und c_1, den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ϱ_1 und den Halbmesser des äufseren Berührungskreises, welcher die Seite c_1 selbst tangiert, mit ϱ_{c1} bezeichnet, so ist bekanntlich $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\varrho_c}{\varrho_{c1}}$ also werden die Längen $B_1 F_1$ und $A_1 F_{c1} = \frac{a_1 - b_1 + c_1}{2}$ in demselben Verhältnis gröfser oder kleiner als BF und $AF_c = \frac{a - b + c}{2}$, in welchem die Radien ϱ_1 und ϱ_{c1} gröfser oder kleiner sind, als die Halbmesser ϱ und ϱ_c. Das oben gefundene Resultat, dafs sowohl BF als auch AE_c gleich $\frac{a - b + c}{2}$ also $BF = AE_c$ ist, kann man natürlich auch verwenden, um eine möglichst einfache trigonometrische Entwicklung der Relation $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\varrho_c}$ zu erhalten. Es ergibt sich nämlich dann aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck OFB, in welchem $OF = \varrho$ und Winkel $OBF = \frac{\beta}{2}$ ist, 1) $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{BF}$ und aus dem bei F_c rechtwinkligen Dreieck AF_cO_c mit der Kathete $O_cF_c = \varrho_c$ und dem anliegenden Winkel $F_cO_cA = \frac{\alpha}{2}$ 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{AF_c}{\varrho_c}$ also durch Multiplikation der 1) und 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\varrho_c}$. In gleicher Weise, wie eben, kann auch aus der Gleichung $\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\varrho_b}{\varrho_a}$ der Aufgabe c) dieses Zusatzes eine einfache geometrische Konstruktion derselben abgeleitet werden. Sind nämlich ϱ_a und ϱ_b und etwa der Winkel α gegeben, so konstruiert man entweder mit dem Radius ϱ_c als Kathete O_bF und mit $\frac{\alpha}{2}$ als dieser Kathete anliegendem Winkel FO_b B das rechtwinklige Dreieck O_bFB, verlängert die Kathete O_bF um $FO_a = \varrho_a$ und verbindet den erhaltenen Endpunkt O_a mit dem Eckpunkt B des Dreiecks O_bFB, so ist der Winkel FO_aB des neuen Dreiecks O_aFB der Hälfte $\frac{\beta}{2}$ des zweiten Dreieckwinkels gleich, oder man zeichnet mit dem Radius ϱ_a als Kathete O_aF und mit $\frac{\alpha}{2}$ als dieser Kathete gegenüberliegendem Winkel O_aBF das rechtwinklige Dreieck O_aFB, verlängert die Kathete O_aF um $FO_b = \varrho_b$ und verbindet den erhaltenen Endpunkt O_b mit dem Eckpunkt B des Dreiecks O_aFB, so ist der Winkel FBO_b des neuen Dreiecks O_bFB der Hälfte $\frac{\beta}{2}$ des andern Dreieckwinkels gleich. Diese Lösungen könnten wieder planimetrisch durch die Betrachtung der rechwinkligen Dreiecke O_aF_aB und O_bF_bA der Figur 6 (pag. 5) mit den Seiten $O_aF_a = \varrho_a$ und $O_bF_b = \varrho_b$ ferner $BF_a = AF_b = \frac{a+b-c}{2}$ und den Winkeln $BO_aF_a = \frac{\beta}{2}$ und $AO_bF_b = \frac{\alpha}{2}$ oder der rechtwinkligen Dreiecke AO_aF_a und BO_bF_b der Figur 6 aufgefunden werden, in welchen die Katheten O_aF_a und O_bF_b beziehungsweise $= \varrho_a$ und ϱ_b ferner $AF_a = BF_b = \frac{a+b+c}{2}$ und die Winkel O_aAF_a sowie $O_bBF_b = \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ sind. Dafs hiemit auch die Lösungen von Aufgaben gefunden wurden, in welchen das Verhältnis $\frac{m}{n}$ der Halbmesser ϱ_a und ϱ_b zweier äufserer Berührungskreise, ein Winkel α oder β, welcher einer der von diesen Kreisen von aufsen berührten Seiten a oder c gegenüber liegt, und ein drittes die Gröfse des Dreiecks bestimmendes Streckenelement gegeben sind, braucht wohl nicht weiter auseinander gesetzt zu werden.

Aufgabe 18. Eine Seite eines Dreiecks sei $= a$, der Halbmesser des Kreises, welcher eine anstofsende Seite c von aufsen berührt, $= \varrho_c$ und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$; wie grofs sind die zwei Seiten b und c und die Winkel dieses Dreiecks?

Die Gleichungen, welche man zur Lösung der vorliegenden Aufgabe zunächst bildet, sind dieselben, welche auch in Aufgabe 17 aufgestellt wurden; entfernt man aus ihnen die Winkel, so erhält man die Relationen 1) $a+b=\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}\cdot c$* und 2) $(a-b+c)\cdot(-a+b+c) = 4\cdot\varrho_c\cdot\varrho$. Aus 1) findet man nun $a-b+c = 2a - \frac{2\cdot\varrho}{\varrho_c-\varrho}\,c$ und $-a+b+c=\frac{2\cdot\varrho_c}{\varrho_c-\varrho}\cdot c - 2a$, und wenn man diese Werte von $a-b+c$ und $-a+b+c$ in 2) einsetzt, geht dieselbe über in $\frac{\varrho_c\cdot\varrho}{(\varrho_c-\varrho)^2}\cdot c^2 - \frac{a\cdot(\varrho_c+\varrho)}{\varrho_c-\varrho}\cdot c = -a^2-\varrho_c\cdot\varrho$, woraus man $c - \frac{a\cdot(\varrho_c^2-\varrho^2)}{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho} = \pm\sqrt{\frac{a^2\cdot(\varrho_c-\varrho)^4}{4\cdot\varrho_c^2\cdot\varrho^2}-(\varrho_c-\varrho)^2}$ oder

$$c = \frac{a\cdot(\varrho_c^2-\varrho^2)}{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho} \pm (\varrho_c-\varrho)\cdot\sqrt{\frac{a^2\cdot(\varrho_c-\varrho)^2}{4\cdot\varrho_c^2\cdot\varrho^2}-1}$$

folgt; demnach wird

$$b = \frac{a\cdot(\varrho_c^2+\varrho^2)}{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho} \pm (\varrho_c+\varrho)\cdot\sqrt{\frac{a^2\cdot(\varrho_c-\varrho)^2}{4\cdot\varrho_c^2\cdot\varrho^2}-1}.$$

Aus den Relationen $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{c}{\varrho_c-\varrho}$ und $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{a}{\varrho}-\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, welche in den Aufgaben 17 und 16 entwickelt wurden, erhält man jetzt für die Winkel γ und β die Gleichungen $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{a\cdot(\varrho_c-\varrho)}{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho}\pm\sqrt{\frac{a^2\cdot(\varrho_c-\varrho)^2}{4\cdot\varrho_c^2\cdot\varrho^2}-1}$ und $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{a\cdot(\varrho_c+\varrho)}{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho}\mp\sqrt{\frac{a^2\cdot(\varrho_c-\varrho)^2}{2\cdot\varrho_c^2\cdot\varrho^2}-1}$; mit γ und β ist dann auch der Winkel α bekannt, welcher jedoch auch leicht unabhängig von β und γ berechnet werden kann, so dafs man eine Probe über die Richtigkeit der Rechnung erhält.

Zusatz. Aus den Gleichungen der Aufgabe 17, Zusatz a) erhält man auf dem eben angegebenen Wege die Lösung der

Aufgabe: Aus einer Seite a eines Dreiecks, dem Radius ϱ_a des Kreises, welcher diese Seite a von aufsen berührt, und dem Radius ϱ_b eines zweiten äufseren Berührungskreises die zwei Seiten b und c dieses Dreiecks zu berechnen.

---

* Diese Gleichung kann für diese Aufgabe auch ohne Beiziehung des Winkels γ aus den Flächensätzen $F = s.\varrho = (s-c).\varrho_c$ entwickelt werden, aus welchen zunächst $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{\varrho_c}{\varrho}$ folgt.

Aufgabe 19. Eine Seite eines Dreiecks ist $= c$, der eine von den ihr anliegenden Winkeln $= \alpha$ und β und die Differenz der Halbmesser ϱ_c und ϱ desjenigen Ankreises, welcher die gegebene Seite c selbst tangiert, und des innern Berührungskreises $= d$; es sollen die andern Seiten a und b dieses Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ berechnet werden.

Lösung. Um eine Gleichung für den zu bestimmenden Winkel γ zu erhalten, könnte man vielleicht ϱ und ϱ_c in der gegebenen Seite c und den Winkeln des Dreiecks auszudrücken versuchen und dann die Differenz d der beiden Halbmesser ϱ_c und ϱ herstellen. Man findet nun zunächst aus dem rechtwinkligen Dreieck AOF der Figur 6 auf Seite 5 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{AF}$ und aus dem rechtwinkligen Dreieck BOF derselben Figur $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{BF}$, demnach wird $c = AF + BF = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} +$

$$\frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \varrho \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \text{ und } \varrho = \frac{c \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}},$$

wodurch man für ϱ die Relation $\varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ erhält, welche in Aufgabe 14, Zusatz 1, b auf einem andern Weg entwickelt und bisher schon mehrmals angewendet wurde. In derselben Weise ergibt sich aus den rechtwinkligen Dreiecken AO_cF_c und BO_cF_c die Beziehung $\varrho_c = \frac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ und durch Subtraktion der vorhergehenden Gleichung von dieser letzten $\varrho_c - \varrho = \frac{c \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ oder $d = c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

also

$$1) \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{d}{c}.$$

Mit α oder β und γ ist auch der dritte Winkel β oder α des Dreiecks bekannt. Um a zu berechnen, könnte man einen dem vorhergehenden vollständig entsprechenden Weg einschlagen, wobei man jedoch ϱ_c und ϱ in der Seite a und den Winkeln des Dreiecks bestimmen müfste. Aus den Gleichungen $\varrho_c = \dfrac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ und $c = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$ findet man den Wert von $\varrho_c = \dfrac{a \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ und da $\varrho = \dfrac{a \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ist, so erhält man durch Subtraktion $\varrho_c - \varrho =$

$$\frac{a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}\right) = \frac{a \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}\text{, deshalb}$$

$a = \dfrac{d \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}$ und, weil $\sin^2\frac{\gamma}{2} = \dfrac{tg^2\frac{\gamma}{2}}{1 + tg^2\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{d^2}{c^2 + d^2}$ ist, $a = \dfrac{d \cdot (c^2 + d^2) \cdot \sin\alpha}{2 \cdot d^2}$ oder

$$2{,}a)\quad a = \frac{c^2 + d^2}{2 \cdot d} \cdot \sin\alpha.$$

In eben dieser Weise findet man aus $\varrho_c = \dfrac{b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$ und $\varrho = \dfrac{b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ den Wert von b, nämlich

$$2{,}b)\quad b = \frac{c^2 + d^2}{2 \cdot d} \cdot \sin\beta.$$

Die Gleichung 1) läfst vermuten, dafs man in der Figur 6 ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren könne, dessen Katheten $= \varrho_c - \varrho$ und c sind und in welchem der ersten Kathete $\varrho_c - \varrho$ ein Winkel $= \frac{\gamma}{2}$ gegenüber liegt. In der That erhält man dieses Dreieck, wenn man durch den Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises zu einer der Seiten AC und BC, welche den Winkel γ einschliefsen, etwa zu CA die parallele Gerade OJ zieht, diese schneidet dann den Radius O_cE_c des Ankreises zur Seite c, welcher nach dessen Berührungspunkt E_c mit jener über A verlängerten Seite CA gezogen ist, in einem Punkte, welcher J genannt werden möge, und es entsteht das Parallelogramm OJE_cE, in welchem $OE = JE_c$ und $OJ = EE_c$ ist, so dafs also $O_cJ = \varrho_c - \varrho$ und $OJ = EE_c = EA + AE_c = s - a + s - b = \frac{a+b+c}{2} - a + \frac{a+b+c}{2} - b = c$ wird; da noch aufserdem der Winkel $OJO_c = CE_cO_c = R$ und der Winkel $O_cOJ = O_cCA = \frac{\gamma}{2}$ ist, so erweist sich demnach das Dreieck OO_cJ als das oben bezeichnete. Hätte man jene zu AC parallele Gerade OJ gezogen und die eben angegebene Untersuchung geführt, bevor man an die Lösung der vorliegenden Aufgabe durch Rechnung ging, so hätte man aus dem rechtwinkligen Dreieck O_cJO direkt und ohne jegliche Zwischenrechnung die Gleichung 1) ablesen können; umgekehrt kann man nun aber die durch Rechnung gefundene Formel 1) benützen, um aus ihr, wie oben angedeutet wurde, eine planimetrische Lösung der vorgelegten Aufgabe abzuleiten, welche dann eben mit der Konstruktion des Dreiecks OO_cJ beginnt, so dafs jene dadurch auf die sehr einfache Aufgabe reduziert wird „Ein Dreieck aus einer Seite c, einem anliegenden Winkel etwa α und ihrem Gegenwinkel γ zu zeichnen". Mit der hier besprochenen Gleichung ist die Relation $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{\varrho_c - \varrho}$ identisch, welche in der Lösung der Aufgabe 17 auf einem von dem hier eingeschlagenen etwas abweichenden Wege gefunden wurde. Daraus folgt, dafs man auch die Lösung der Aufgabe 17 mit der Konstruktion dieses Dreiecks OO_cJ beginnen kann. Da aber mit einer Seite c eines Dreiecks und ihrem Gegenwinkel γ auch der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises bekannt ist, so wäre die Aufgabe 17 vorerst auf die bekannte Aufgabe zurückgeführt a) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und der des inneren Berührungskreises gegeben sind. Verlängert man aber noch weiter O_cJ um den gegebenen Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises bis E_c, zieht durch E_c die zur OJ parallele Gerade E_cC, welche die über den Mittelpunkt O des innern Berührungskreises hinaus verlängerte Hypotenuse O_cO in C schneidet, ferner durch jenen Mittelpunkt O die zur O_cE_c parallele Gerade OE, welche die vorhergehende Parallele E_cC in E trifft und verlängert $CE_c = \frac{a+b+c}{2}$ um $CE = \frac{a+b-c}{2}$, so gibt die ganze so erhaltene Strecke die Summe s_1 der zwei Seiten a und b an und dadurch sind die Probleme 17 und a) auf die einfache Aufgabe zurückgeführt „Ein Dreieck zu zeichnen, wenn von demselben eine Seite c, der ihr gegenüberliegende Winkel γ und die Summe s_1 der ihn einschliefsenden Seiten a und b gegeben sind“.

Zusatz. Nach denselben Schlüssen, wie die vorhergehende Aufgabe löst man auch folgende.

a) Es sind zwei Seiten a und c oder b und c eines Dreiecks und die Differenz d der Halbmesser ϱ_c und ϱ desjenigen Ankreises, welcher die eine gegebene Seite c von aufsen berührt, und des inneren Berührungskreises gegeben; wie grofs sind die Winkel α, β und γ und die dritte Seite b oder a dieses Dreiecks?

b) Aus der Seite c eines Dreiecks, ferner der Differenz d der Halbmesser ϱ_c und ϱ desjenigen Ankreises, welcher die gegebene Seite c von aufsen berührt, und des eingeschriebenen Kreises sowie der Höhe h_a oder h_b zu einer der beiden andern Seiten diese Seiten a und b und die Winkel α, β und γ des Dreiecks zu berechnen.

c) Wie grofs sind die Seiten a, b und c eines Dreiecks, wenn zwei Winkel desselben α und γ oder β und γ und die Differenz d der Halbmesser ϱ_c und ϱ desjenigen Ankreises, welcher die Gegenseite c des einen gegebenen Winkels γ von aufsen tangiert, und des inneren Berührungskreises gegeben sind?

d) Ein Winkel eines Dreiecks sei $= \gamma$, der Überschufs eines Halbmessers von demjenigen Ankreis, welcher die Gegenseite c des gegebenen Winkels γ von aufsen berührt, über den Radius des eingeschriebenen Kreises $=$ d und eine Seite, welche am gegebenen Winkel γ liegt, $=$ a oder b; es sollen die zwei andern Winkel α und β ferner die zweite am Winkel γ liegende Seite b oder a und die Gegenseite c des gegebenen Dreieckwinkels berechnet werden.

e) Aus einem Winkel γ eines Dreiecks, der Höhe h_a oder h_b zu einer der Seiten, welche diesen Winkel einschliefsen, und der Differenz d der Halbmesser ϱ und ϱ_c des eingeschriebenen Kreises und desjenigen Ankreises, welcher die Gegenseite c des gegebenen

Winkels von aufsen berührt, die Seiten a, b und c dieses Dreiecks und die zwei Winkel α und β zu berechnen.

Aufgabe 20. Die Summe der Halbmesser ϱ und ϱ_c des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises und eines äufsern Berührungskreises sei $= s_2$, die Differenz der zwei Seiten a und b dieses Dreiecks, welche von jenem Ankreis erst in ihrer Verlängerung berührt werden, $= d_2$ und einer der Gegenwinkel dieser Seiten sei $= \alpha$ oder β; es sollen die zwei andern Winkel β und γ oder α und γ dieses Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Aus den Relationen $\varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ und $\varrho_c = \frac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, welche in der vorhergehenden Aufgabe entwickelt wurden, erhält man, wenn etwa in der letzten statt c sein Wert $\frac{b \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}$ eingesetzt wird, $\varrho = \frac{b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ und $\varrho_c = \frac{b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$ und hieraus wieder durch Addition $\varrho + \varrho_c = \frac{b \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}\right)$ oder $s = \frac{2 \cdot b \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}$, anderseits ergibt sich aus dem Sinussatz $\frac{a - b}{b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta}$ oder $\frac{d}{b} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}$. Wenn man nun diese Relation durch das vorhergehende, in der Form $\frac{s}{b} = \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}$ geschriebene Resultat dividiert, so findet man

$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{d}{s}$; aus dieser halben Differenz $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und dem Minuenden α oder dem Subtrahenden β kann man dann den Subtrahenden β beziehungsweise den Minuenden α selbst und schliefslich mit dem Satz von der Summe der Winkel eines Dreiecks den dritten Dreieckswinkel berechnen.

Die eben gefundene einfache Relation $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{d}{s}$ läfst wieder vermuten, dafs man ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren könne, dessen Katheten $= a-b$ und $\varrho+\varrho_c$ oder bestimmte Teile dieser Gröfsen sind und in welchem der ersteren Kathete ein Winkel $\frac{\alpha-\beta}{2}$ gegenüber liegt. Ein solches Dreieck ergibt sich, wenn man den Mittelpunkt der Strecke E_cE in der Figur 6 auf Seite 5, welchen wir mit R bezeichnet denken, mit der Mitte S des Zentralabstandes O_cO und diesen Punkt S mit der Ecke A des Dreiecks ABC verbindet. Die erstere Verbindungslinie RS ist nämlich nach der Konstruktion Mittellinie des Trapezes O_cE_cEO und als solche $=\frac{OE+O_cE_c}{2}=\frac{\varrho+\varrho_c}{2}$ und steht, wie die zu ihr parallelen Seiten EO und E_cO_c des Trapezes auf der Seite E_cE normal, und von der andern Seite AR, welche den rechten Winkel SRA einschliefst, läfst sich nachweisen, dafs sie eine Gröfse $\frac{a-b}{2}$ habe. Da nämlich, wie in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt wurde, $E_cE=c$ also $ER=\frac{c}{2}$ und nach der Entwicklung in Aufgabe 12 $CE=\frac{a+b-c}{2}$ ist, so findet man $CR=\frac{a+b}{2}$ demnach $AR=\frac{a-b}{2}$. Die Katheten RS und AR des rechtwinkligen Dreiecks ARS sind also $=\frac{\varrho+\varrho_c}{2}$ sowie $\frac{a-b}{2}$ und es bleibt nur noch zu untersuchen, ob der Winkel ASR, welcher der Kathete $AR=\frac{a-b}{2}$ gegenüber liegt, der halben Differenz der Winkel α und β des Dreiecks ABC gleich ist. Nun wird der Winkel SAR durch die Halbierungslinie AO_c des Aufsenwinkels bei

A in die Teile RAO_c und O_cAS zerlegt, von welchen der erstere die Hälfte des Winkels α zu 90^0 ergänzt; da ferner das Dreieck O_cAO bei A rechtwinklig und S der Mittelpunkt der Hypotenuse O_cO ist, so erkennt man das Dreieck O_cSA als ein gleichschenkliges und aus ihm ergibt sich $O_cAS = AO_cS$; der letztere Winkel aber gehört wieder dem rechtwinkligen Dreieck AO_cO an und ergänzt demnach O_cOA zu einem rechten Winkel und dieser wieder erscheint als Aufsenwinkel des Dreiecks AOC mit den Winkeln $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ bei A und C; man erhält also $RAS = 90^0 - \frac{\alpha}{2} + 90^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$ und nach dem Lehrsatz von der Winkelsumme im Dreieck findet man schliefslich $RAS = 90^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}$ also $ASR = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Die Formel $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{d}{s}$, welche die trigonometrische Rechnung geliefert hat, führt also auch hier zu einer ziemlich einfachen Konstruktion des vorliegenden Problems, indem dasselbe auf die einfachere Aufgabe reduziert wird „Ein Dreieck aus der Differenz d zweier Seiten a und b und den Gegenwinkeln α und β desselben zu zeichnen". Da sich ein dem ARS ähnliches Dreieck und damit der Winkel $\frac{\alpha - \beta}{2}$ konstruieren läfst, wenn auch nur das Verhältnis $\frac{m}{n}$ der Differenz d zweier Seiten a und b eines Dreiecks zur Summe s der Halbmesser ϱ und ϱ_c des eingeschriebenen Kreises und desjenigen äufseren Berührungskreises gegeben ist, welcher jene Seiten erst in ihren Verlängerungen tangiert, so können Aufgaben, in welchen jenes Verhältnis, ein Gegenwinkel α oder β der Seiten a und b sowie ein drittes Element gegeben ist, welches die Gröfse des Dreiecks bestimmt, ebenfalls leicht gelöst werden.

Aufgabe 21. Der Radius ϱ des Kreises, welcher einem Dreieck eingeschrieben ist, und die Radien ϱ_a und ϱ_b der Kreise, welche zwei Seiten des Dreiecks von aufsen berühren, sind gegeben; es sollen die Winkel α, β und γ sowie die Seiten a, b und c und die Höhen h_a, h_b und h_c dieses Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Wie sich bisher bei den Dreiecksaufgaben zeigte, in welchen Halbmesser von Berührungskreisen gegeben waren, geht man bei der Auflösung derselben entweder von den Lehrsätzen über den Flächeninhalt eines Dreiecks oder von den Relationen für die halben Winkel aus. Die ersteren geben für unseren Fall die Gleichungen $(a+b+c)\cdot\varrho = (-a+b+c)\cdot\varrho_a = (a-b+c)\cdot\varrho_b$ oder $\frac{b+c}{a} = \frac{\varrho_a+\varrho}{\varrho_a-\varrho}$ und $\frac{c}{a-b} = \frac{\varrho_a+\varrho_b}{\varrho_a-\varrho_b}$, demnach wird $c = \frac{\varrho\cdot(\varrho_a+\varrho_b)}{\varrho_a\cdot(\varrho_b-\varrho)}\cdot b$ und $a = \frac{\varrho_b\cdot(\varrho_a-\varrho)}{\varrho_a\cdot(\varrho_b-\varrho)}\cdot b$.

Da in den Relationen für die Funktionen der halben Winkel immer die Gröfsen s, s — a, s — b und s — c auftreten, so wird man auch deren Werte in b ausgedrückt schon hier angeben. Dieses b selbst, welches in denselben stets Faktor bleibt, verschwindet dann in jenen Formeln, weil in ihnen die Zähler ebenso viele Faktoren enthalten, als die Nenner. Man findet nun $s = \frac{\varrho_b}{\varrho_b-\varrho}\cdot b$, $s-a = \frac{\varrho_b\cdot\varrho}{\varrho_a\cdot(\varrho_b-\varrho)}\cdot b$, $s-b = \frac{\varrho}{\varrho_b-\varrho}\cdot b$ und $s-c = \frac{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}{\varrho_a\cdot(\varrho_b-\varrho)}\cdot b$ und aus den Formeln $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{b\cdot c}}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\cdot(s-a)}{b\cdot c}}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}{(\varrho_a+\varrho_b)\cdot(\varrho_b-\varrho)}} \text{ und } \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}{(\varrho_a+\varrho_b)\cdot(\varrho_a-\varrho)}}$$

$$1)\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_b}{\sqrt{(\varrho_a+\varrho_b)\cdot(\varrho_b-\varrho)}} \text{ und } 2)\ \cos\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_a}{\sqrt{(\varrho_a+\varrho_b)\cdot(\varrho_a-\varrho)}}$$

sowie

$$3)\ \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho_a-\varrho)\cdot(\varrho_b-\varrho)}} \text{ und } \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}{(\varrho_a-\varrho)\cdot(\varrho_b-\varrho)}}$$

also

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}}{\varrho_b},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}}{\varrho_a} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_b}{\sqrt{\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho_a\cdot\varrho-\varrho_b\cdot\varrho}}.$$

Relationen zwischen den Seiten a, b und c und den gegebenen Radien ϱ, ϱ_a und ϱ_b und den berechneten Winkeln α, β und γ erhält man leicht aus den rechtwinkligen Dreiecken AOF und BOF (v. Fig. 6),

CO_bE_b und AO_bE_b sowie CO_aD_a und BO_aD_a, aus welchen sich c = $AF + BF = \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \varrho \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$ also

$$c = \frac{\varrho \cdot (\varrho_a + \varrho_b)}{\sqrt{\varrho_a \cdot \varrho_b - \varrho_a \cdot \varrho - \varrho_b \cdot \varrho}}$$

ferner $b = \varrho_b \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \varrho_b \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ oder

$$b = \frac{\varrho_a \cdot (\varrho_b - \varrho)}{\sqrt{\varrho_a \cdot \varrho_b - \varrho_a \cdot \varrho - \varrho_b \cdot \varrho}}$$

und $a = \varrho_a \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \varrho_a \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ d. h.

$$a = \frac{\varrho_b \cdot (\varrho_a - \varrho)}{\sqrt{\varrho_a \cdot \varrho_b - \varrho_a \cdot \varrho - \varrho_b \cdot \varrho}}$$

ergibt. Um die Höhen h_a, h_b und h_c zu berechnen, könnte man die Gleichungen $\frac{c \cdot h_c}{2} = s \cdot \varrho$, $\frac{b \cdot h_b}{2} = (s-b) \cdot \varrho_b$ und $\frac{a \cdot h_a}{2} = (s-a) \cdot \varrho_a$ benützen, welche $h_c = \frac{2 \cdot \varrho \cdot \varrho_b \cdot b}{\varrho_b - \varrho} \cdot \frac{\varrho_a \cdot (\varrho_b - \varrho)}{\varrho \cdot (\varrho_a + \varrho_b) \cdot b}$ oder

$$4)\quad h_c = \frac{2 \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b} \qquad h_b = \frac{2 \cdot \varrho_b \cdot \varrho}{\varrho_b - \varrho} \text{ und } h_a = \frac{2 \cdot \varrho_a \cdot \varrho}{\varrho_a - \varrho}$$

liefern. Schliefslich sei noch erwähnt, dafs $\varrho_c = \frac{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b}{\varrho_a \cdot \varrho_b - \varrho_a \cdot \varrho - \varrho_b \cdot \varrho}$ $= \frac{1}{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_b}}$ ist und dafs die Gleichungen 1—3 und 4 ziemlich einfache Konstruktionen der vorgelegten Aufgabe ergeben, da z. B. 4) aussagt, dafs man aus den gegebenen Radien ϱ, ϱ_a und ϱ_b die Höhe h_c durch harmonische Teilung findet.

Zusatz. In der eben angegebenen Weise schliefst man auch, wenn von einem Dreieck die Halbmesser ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c der äufseren Berührungskreise gegeben sind.

Aufgabe 22. Von einem Dreieck ist eine Seite = c, die ihr zugehörige Mittellinie = m_c und der Gegenwinkel jener Seite = γ gegeben, es sollen die zwei andern Winkel α und β und ihre zwei Gegenseiten a und b berechnet werden.

Lösung. Zwischen den Seiten a, b und c eines Dreiecks und der Mittellinie m_c besteht bekanntlich die Relation 1) $2a^2 + 2b^2 = 4m_c^2 + c^2$. Diese Gleichung enthält zwei Unbekannte a und b, deshalb stellt man noch eine zweite Beziehung zwischen ihnen und den gegebenen Elementen auf; hiezu eignet sich der allgemeine Pythagoreische Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$, welcher durch Substitution des Wertes von $a^2 + b^2$ aus 1) die Gleichung $4 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma = 4 \cdot m_c^2 - c^2$ für das Produkt der unbekannten Seiten a und b liefert. Da aber $4 \cdot a \cdot b = (a+b)^2 - (a-b)^2$ ist, so findet man für die Summe $a + b$ und die Differenz $a - b$ als Hilfsunbekannte $(a + b)^2 \cdot \cos\gamma - (a - b)^2 \cdot \cos\gamma = 4 \cdot m_c^2 - c^2$ und als zweite Gleichung für dieselben kann man die Form des allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatzes anschreiben, welche in der Aufgabe 14, Zusatz 1,c entwickelt wurde, nämlich $(a + b)^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} + (a - b)^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} = c^2$. Aus beiden Relationen folgen, da $\cos\gamma = \cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}$ ist, die neuen Gleichungen $(a+b)^2 \cdot \cos\gamma = 4 \cdot m_c^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - c^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ und $(a - b)^2 \cdot \cos\gamma = c^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot m_c^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ oder

$$a + b = \sqrt{\frac{4 \cdot m_c^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - c^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}}$$ und $$a - b = \sqrt{\frac{c^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot m_c^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}}$$ und man findet die gröfsere Seite

$$a = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{4 \cdot m_c^2 \cos^2\frac{\gamma}{2} - c^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}} + \sqrt{\frac{c^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot m_c^2 \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}} \right)$$

und die kleinere Seite

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{4 \cdot m_c^2 \cos^2\frac{\gamma}{2} - c^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}} - \sqrt{\frac{c^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - 4 \cdot m_c^2 \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}} \right)$$

Mit dem Winkel γ ist auch die Summe $\alpha + \beta$ gegeben, demnach hat man nur noch eine Gleichung für die Differenz $\alpha - \beta$ zu suchen, weil aber der Wert von $a + b$ und von $a - b$ berechnet ist, empfiehlt sich die Formel $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$, aus welcher man

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{c^2 - 4\cdot m^2{}_c\cdot \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{4\cdot m_c{}^2 - c^2\cdot \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{c^2\cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} - 4\cdot m_c{}^2}{4\cdot m_c{}^2 - c^2\cdot \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}}$$

erhält.

Zusatz. In gleicher Weise, wie eben, verfährt man, um die Aufgabe zu lösen: Aus einer Seite c eines Dreiecks, ihrem Gegenwinkel γ und der Summe der Quadrate der diesen Winkel einschliefsenden Seiten diese und ihre Gegenwinkel zu berechnen.

Mit der vorhergehenden Aufgabe will ich zunächst die Untersuchung über die Auflösung von Dreiecksaufgaben beendigen, und um den Beweis nicht ganz schuldig zu bleiben, dafs auch auf dem Gebiet der Auflösung trigonometrischer Gleichungen nach ihren unbekannten Winkeln sowie der Aufsuchung von Beziehungen der trigonometrischen Funktionen gegebener Winkel zn einander und insbesondere in den Auflösungsmethoden von Aufgaben über Vierecke noch manches zu leisten ist, werde ich noch einige wenige Beispiele auch über diese Fälle durchführen.

Vierecksaufgaben werden bekanntlich trigonometrisch dadurch aufzulösen gesucht, dafs man das Viereck, in welchem fünf von einander unabhängige Elemente gegeben sind, in zweckmäfsiger Weise in Dreiecke zerlegt; wenn aber keines von den vier Dreiecken, in welche man das Viereck durch die eine und andere Diagonale zerlegen kann, mehr als zwei gegebene Elemente enthält, so findet man in vielen Fällen eine noch ziemlich einfache Lösung, wenn man aus den nicht gegebenen Elementen, zumeist aus den unbekannten Winkeln, einen (oder zwei) in geeigneter Weise auswählt, in diesem (oder diesen) ein Element und zwar gewöhnlich eine Seite (oder zwei Seiten) des Vierecks auf zweifache Art ausdrückt und die zwei Werte für dieselbe Seite einander gleichsetzt. Durch Auflösung der Gleichung nach dem unbekannten Winkel bestimmt man dann dessen

Gröſse und mit seiner Hilfe alle übrigen Elemente des Vierecks. Ich wähle als Beispiel die folgenden zwei Aufgaben.

Aufgabe 23. In einem Viereck ABCD seien die zwei Diagonalen AC und BD beziehungsweise $=$ e und f, der Winkel ACB (v. Fig. 7) zwischen der einen Diagonale AC und der anstoſsenden Seite CB $= \gamma_1$, der Winkel DBC zwischen der andern Diagonale BD und der Seite BC $= \beta_2$ und der Winkel DAB, welchen die aufeinanderfolgenden Seiten AD und AB mit einander bilden, $= \alpha$, wie groſs sind die Seiten und Winkel dieses Vierecks?

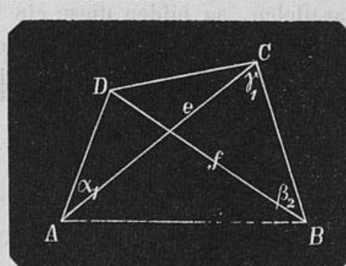


Fig. 7.

Lösung. Bezeichnet man den Winkel ABD mit ψ, so erhält man aus den Dreiecken ABC und ABD nach dem Sinussatz 1) AB $= \frac{e \cdot \sin\gamma_1}{\sin(\psi + \beta_2)} = \frac{f \cdot \sin(\psi + \alpha)}{\sin\alpha}$, also wird $\sin(\psi + \alpha) \cdot \sin(\psi + \beta_2) = \frac{e}{f} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma_1$ und, weil $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ ist,

$$\cos(2\psi + \alpha + \beta_2) = \cos(\alpha - \beta_2) - \frac{2 \cdot e}{f} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma_1.$$

Nachdem aus dieser Gleichung der Wert von ψ bestimmt ist, berechnet man aus 1) die Seite AB und nun aus den Dreiecken ABC und ABD nach dem Satz von der Summe der Winkel eines Dreiecks die Winkel CAB und ADB und nach dem Sinussatz die Seiten BC und AD, sowie schlieſslich aus dem Dreieck BCD, in welchem zwei Seiten BD $=$ f und BC nebst dem eingeschlossenen Winkel DBC $= \beta_2$ bekannt sind, die übrigen Elemente desselben, so daſs man nun alle Seiten und Winkel angeben kann. Berechnet man dann noch aus drei Elementen des Dreiecks ACD seine anderen, so hat man zugleich eine Probe für die Richtigkeit der ganzen Rechnung.

Aufgabe 24. Der Flächeninhalt eines Vierecks ABCD (v. Fig. 7) sei $=$ F, seine zwei Diagonalen AC und BD seien $=$ e und f, der Winkel ABC, welchen zwei aufeinanderfolgende Seiten AB und BC mit einander bilden, sei $= \beta$ und der Winkel CAD zwischen der Diagonale AC und der Seite AD $= \alpha_1$; wie groſs sind die Seiten und Winkel dieses Vierecks?

Lösung. Denkt man sich durch die Gegenecken B und D des Vierecks die zur Diagonale AC parallelen Geraden sowie durch die zwei andern Eckpunkte A und C die zur zweiten Diagonale BD Parallelen, so bilden diese ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt doppelt so grofs ist als der des Vierecks ABCD und dessen Seiten die gleiche Länge haben und die gleichen Winkel einschliefsen, wie die Diagonalen AC und BC, so dafs man also diesen Winkel, welcher mit ζ bezeichnet werden möge, aus der Gleichung $e \cdot f \cdot \sin\zeta = 2F$ oder

$$\sin\zeta = \frac{2 \cdot F}{e \cdot f}$$

berechnen kann, welche sowohl den spitzen Winkel ζ_1 zwischen den Diagonalen AC und BD in deren Schnittpunkt E als auch dessen stumpfen Nebenwinkel ζ_2 liefert. Nun kann man weiter den Winkel $ADB = \delta_2$ zwischen der Diagonale BD, welche vom Scheitel B des gegebenen Winkels β ausgeht, und der Seite AD aus dem Dreieck ADE bestimmen, in welchem $DAE = \alpha_1$ gegeben und der Aufsenwinkel $DEC = \zeta_2$ berechnet ist; man findet $\delta_2 = \zeta_2 - \alpha_1$, wenn den Seiten AB und CD die stumpfen Diagonalenwinkel gegenüber liegen. Bezeichnet man nun $CAB = \alpha_2$ mit ψ, so ergeben sich für die Seite AB nach dem Sinussatz aus den Dreiecken ABC und ABD die Ausdrücke $\frac{e \cdot \sin(\psi + \beta)}{\sin\beta}$ und $\frac{f \cdot \sin(\zeta_2 - \alpha_1)}{\sin(\psi + \alpha_1)}$, woraus man $\sin(\psi + \alpha_1) \cdot \sin(\psi + \beta) = \frac{f}{e} \cdot \sin\beta \cdot \sin(\zeta_2 - \alpha_1)$ oder

$$\cos(2\psi + \alpha_1 + \beta) = \cos(\beta - \alpha_1) - \frac{2 \cdot f}{e} \cdot \sin\beta \cdot \sin(\zeta_2 - \alpha)$$

zur Bestimmung des Winkels ψ findet. Nachdem aus dieser Gleichung α_2 berechnet ist, hat es keine Schwierigkeit mehr, die Seiten AB, BC, CD und DA, von welchen AB schon oben in ψ ausgedrückt angegeben ist, sowie die übrigen Winkel des Vierecks ABCD zu bestimmen und etwa eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung anzugeben.

Aufgabe 25. Welche Gleichung besteht zwischen m und α, wenn $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^3\frac{\psi}{2}$ und $\cos^2\psi = \frac{m^2 - 1}{3}$ ist?

Lösung. Aus der Gleichung $\cos^2\psi = \frac{m^2 - 1}{3}$ folgt

$$1) \quad m^2 = 3 \cdot \cos^2\psi + 1,$$

welche aber α an Stelle des Winkels ψ enthalten sollte; wenn man nun die Relationen zwischen dem Cosinus des ganzen Winkels ψ und den Funktionen seiner Hälfte berücksichtigt und dadurch eine Beziehung zwischen m und Funktionen von $\frac{\psi}{2}$ gefunden wird, welche gestattet, nachträglich auf $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ überzugehen, so daſs man dann auch die erste Bedingungsgleichung anwenden kann, so wird man die gesuchte Relation zwischen m und α erhalten. Dabei darf man nicht auſser acht lassen, daſs es für einen bequemen Übergang von der Beziehung zwischen m und $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ zu der zwischen m und α wünschenswert ist, daſs an Stelle der zweiten Potenzen der Funktionen von ψ dritte Potenzen treten. Nun ist aber $1 + 3\cdot\cos^2\psi = \frac{(1+\cos\psi)^3 + (1-\cos\psi)^3}{2}$, weil letzterer Ausdruck ausgerechnet

$$\frac{1 + 3\cdot\cos\psi + 3\cdot\cos^2\psi + \cos^3\psi + 1 - 3\cdot\cos\psi + 3\cdot\cos^2\psi - \cos^3\psi}{2}$$

also den ersteren liefert, und da $\cos\psi = 2\cdot\cos^2\frac{\psi}{2} - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\psi}{2}$ also $1 + \cos\psi = 2\cdot\cos^2\frac{\psi}{2}$ und $1 - \cos\psi = 2\cdot\sin^2\frac{\psi}{2}$ ist, so erhält man durch Substitution dieser Werte in 1) $m^2 = \dfrac{8\cdot\cos^6\frac{\psi}{2} + 8\cdot\sin^6\frac{\psi}{2}}{2}$ $= 4\cdot\cos^6\frac{\psi}{2}\cdot\left(1 + \operatorname{tg}^6\frac{\psi}{2}\right)$ und wegen $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ folgt $m^2 =$

$$\frac{4\cdot\left(1 + \operatorname{tg}^6\frac{\psi}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}\right)^3} = \frac{4\cdot(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\alpha)^3} = \frac{4}{(\cos^{\frac{2}{3}}\alpha + \sin^{\frac{2}{3}}\alpha)^3} \text{ also}$$

$$m = \frac{2}{(\sin^{\frac{2}{3}}\alpha + \cos^{\frac{2}{3}}\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aufgabe 26. Es soll aus den Gleichungen $\cos(\alpha + \beta - \psi)\cdot\cos(\psi - \alpha) = c$ und $\cos(\beta - \alpha - \psi)\cdot\cos(\psi + \alpha) = d$ der Winkel ψ eliminiert werden.

Lösung. Da $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$ ist, so findet man aus den gegebenen Gleichungen zunächst $\cos\beta + \cos(\beta + 2 \cdot \alpha - 2 \cdot \psi) = 2 \cdot c$ und $\cos\beta + \cos(2 \cdot \psi + 2 \cdot \alpha - \beta) = 2 \cdot d$ oder $\cos2 \cdot \alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos2 \cdot \psi - \sin2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos2\psi + \sin2\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin2\psi + \cos2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin2\psi = 2c - \cos\beta$ und $\cos2\alpha \cdot \cos\beta \ \cos2\psi + \sin2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos2\psi - \sin2\alpha . \cos\beta \cdot \sin2\psi + \cos2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin2\psi = 2d - \cos\beta$ also durch Addition und Subtraktion derselben $\cos2\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos2\psi + \cos2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin2\psi = c + d - \cos\beta$ und $\sin2\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos2\psi - \sin2\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin2\psi = d - c$ d. h.

$$1) \quad \cos2\alpha \cdot \cos(2\psi - \beta) = c + d - \cos\beta$$

und

$$2) \quad \sin2\alpha \cdot \sin(2\psi - \beta) = c - d.$$

Multipliziert man 1) mit $\sin2\alpha$ und 2) mit $\cos2\alpha$, quadriert beide Gleichungen und addiert die Resultate, so erhält man unter Berücksichtigung der Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ die Gleichung

$$\frac{\sin^2 4\alpha}{4} = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos4\alpha - 2 \cdot (c + d) \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \cos\beta + \sin^2 2a \cdot \cos^2\beta,$$

in welcher der Winkel ψ entfernt ist.

$\beta) + \cos(\alpha - \beta)$ / 2 ist, so

findet … unächst $\cos\beta + \cos(\beta +$
$2\cdot\alpha$ … $2\cdot\alpha - \beta) = 2\cdot d$ oder
$\cos2\cdot$ … $+ \sin2\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin2\psi$
$+$ c … $\cos2\alpha\cdot\cos\beta \quad \cos2\psi +$
$\sin2\alpha$ … $\cos2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin2\psi =$
2d — … ktion derselben $\cos2\alpha\cdot$
$\cos\beta\cdot$ … $s\beta$ und $\sin2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos2\psi$
— si … d — $\cos\beta$

und … c — d.
Multi … $\cos2\alpha$, quadriert beide
Gleic … so erhält man unter
Berü … $= 1$ die Gleichung
$\sin^2 4$ … $^2 2\alpha\cdot\cos\beta + \sin^2 2a\cdot\cos^2\beta$,
4

in we …