Es ist schon vielfach aufgefallen, dafs die Lösung von Dreiecksaufgaben, in welchen nicht blofs Seiten und Winkel eines Dreiecks, sondern auch Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierende, Abschnitte und Winkel, welche dieselben auf und mit den Seiten und unter sich bilden, der Radius des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises, die Radien der äufseren Berührungskreise, Summen oder Differenzen von Seiten und Winkeln u. s. w. gegeben sind, zumeist nur auf dem Wege der planimetrischen Konstruktion und nur selten mit Hilfe der Trigonometrie zu erzielen versucht wird, obwohl auch die trigonometrische Methode zur selbständigen Kombination der mathematischen Sätze in gleich kräftiger Weise anregt und nicht wenig zur Entwicklung und Schärfung des Urteils beizutragen vermag und deshalb mehr Beachtung verdient, als ihr gewöhnlich zu Teil wird. Damit aber die trigonometrische Auflösung von Aufgaben beim Unterricht mehr Berücksichtigung finden könne, ist es in hohem Grade wünschenswert, dafs man auch auf diesem Gebiet eine recht grofse Zahl von mustergiltigen Lösungen trigonometrischer Aufgaben besitze. Die nachfolgende Arbeit ist ein Versuch, zu solchen allmählich zu gelangen, und es wird mich freuen, wenn manche Kollegen durch dieselbe veranlafst würden, für die eine und andere der unten folgenden Aufgaben eine andere elegante und kurze Lösung zu suchen, und dieselbe veröffentlichen wollten oder Interesse erweckende trigonometrische Lösungen beliebiger anderer schwierigerer der unzählig vielen in planimetrischen Aufgabensammlungen zusammengestellten und leicht noch zu vermehrenden Dreiecks-, Vierecks- und Vielecks-Aufgaben bekannt machen würden. Aber nicht blofs in Bezug auf trigonometrische Lösung von Aufgaben, nach welchen Dreiecke oder Vielecke überhaupt aus gegebenen Stücken bestimmt werden sollen, sondern auch in Bezug auf die Entwicklung trigonometrischer Gleichungen zwischen den Funktionen gegebener Winkel und die Auflösung solcher nach unbekannten Winkeln ist noch manches zu leisten, wie ich an einigen Beispielen am Schlufs der Arbeit zeigen will. Wie wenig in diesem Bereich die Wege bisher geebnet sind, zeigt ein Blick in die Aufgabensammlungen und Lehrbücher, welche Rechnungen der bezeichneten Art enthalten. Denn obgleich schon Meier Hirsch im ersten Teil seiner „Sammlung geometrischer Aufgaben, Berlin, Frölich, 1805“ auf den Seiten 105—119 und 130—133 äufserst gediegene Vorbilder zur Nachahmung und Fortsetzung der dortigen Untersuchungen aufstellte, so findet man doch selbst in neueren und neuesten Lehrbüchern der Trigonometrie noch weitläufige Auflösungen auch von ziemlich einfachen Dreiecksaufgaben. So ist z. B. in dem vielfach und gewifs mit Recht empfohlenen „Lehrbuch der Mathematik von Dr. Hermann Gerlach, Dessau, Desbarats, 1867“ im vierten Teil auf Seite 34 die

A u f g a b e 1: Von einem Dreieck sind bekannt die Seite c, ihr Gegenwinkel γ und die Summe s_1 der beiden andern Seiten a und b; es sollen diese Seiten a und b, sowie deren Gegenwinkel α und β bestimmt werden

zu deren L ö s u n g man einfach zunächst die eine Mollweide'sche Formel $c \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ anwendet, so dafs man zu der bekannten halben Summe der gesuchten Winkel auch deren halbe Differenz aus der Gleichung $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{s_1}{c} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ bestimmen kann, in folgender nicht gerade eleganten Weise gelöst. Der verallgemeinerte Pythagoreische Lehrsatz der Trigonometrie $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$ ist in die Form $c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} = s^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$ übergeführt und hieraus für das Produkt der zu suchenden Seiten die Gleichung

$$a \cdot b = \frac{s_1^2 - c^2}{4 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

erhalten; hiezu kommt dann für die Unbekannten a und b noch die weitere Gleichung $a + b = s_1$; aus diesen bestimmt dann Gerlach, indem er den Ausdruck $\frac{s_1^2 - c^2}{4 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}} = p$ setzt, den Wert von $a = \frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 \cdot p}}{2}$ und den von $b = \frac{s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 \cdot p}}{2}$ und mit Hilfe dieser Werte die Winkel α und β aus dem Sinus-Satz.

Abgesehen davon, dafs man die Lösung jener Aufgabe eben nicht mit der Bestimmung der Seiten beginnt, wie schon hervorgehoben wurde, und dafs die Berechnung der Winkel unabhängig von den zusammengesetzten Ausdrücken für die Seiten a und b erfolgen kann, führt man auch zur Aufsuchung der Seiten den allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz nicht in die oben angegebene, sondern in die hier bequemere Form $c^2 = (a+b)^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} + (a-b)^2 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$ über und erhält dann ohne grofse Zwischenrechnung sondern ganz unmittelbar das Resultat, welches man auch auf dem von Gerlach angegebenen Weg findet, nämlich

$$a - b = \frac{\sqrt{c^2 - s_1{}^2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Ähnliche nicht gerade mustergiltig zu nennende Lösungen von durchaus nicht schwierigen Aufgaben liefsen sich leicht in grofser Anzahl aufführen; doch möchte ich mich mit einer solchen Zusammenstellung, welche schliefslich immer unvollständig bleiben müfste, nicht aufhalten, sondern möglichst bald zu meinem eigentlichen Thema übergehen und nur zuvor noch erwähnen, dafs auch meine Schüler in verschiedenen Jahrgängen die nachfolgenden Aufgaben zum gröfseren Teil in den Unterrichtsstunden und zum kleineren Teil als Hausaufgaben berechneten, in welch' letzterem Fall ich freilich mehr oder weniger Andeutungen über den bei der Auflösung der Aufgabe einzuschlagenden Gang gab, und dafs ich in diesen Rechnungen ein weiteres vortreffliches Mittel gefunden habe, der oberflächlichen und gedankenlosen Behandlung mathematischer Fragen von Seiten der Schüler entgegen zu arbeiten, welche ich von jeher in jeglicher Weise zu bekämpfen bestrebt war.

Ich will nun zur Besprechung zunächst einer Aufgabe übergehen, welche mit der oben aufgeführten in Hinsicht auf die gegebenen Stücke grofse Verwandtschaft zeigt, und für welche man eine trigonometrische Lösung in verschiedenen Lehrbüchern findet z. B. im „Handbuch der Trigonometrie von Dr. Ad. Weifs, Fürth, Schmid 1851“, Seite 370, §. 272,2. Es ist die

Aufgabe 2: Von einem Dreieck ist die Summe s_1 zweier Seiten a und b, die dritte Seite c und einer der Winkel etwa β gegeben, welcher einer der beiden summierten Seiten gegenüber liegt; wie grofs ist der andere Gegenwinkel α der summierten Seiten?

Um diese Aufgabe rein trigonometrisch zu lösen, beachtet man, dafs in der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-b)}}$, in welcher s die halbe Summe der drei Seiten d. h. $\frac{a+b+c}{2}$ oder den halben Umfang des Dreiecks bedeutet, die Gröfsen s, $s-c$ und β bekannt sind, also die Unbekannten $s-a$ und $s-b$ vorkommen; da aber in dieser Gleichung a und b vertauscht werden müssen, wenn man α statt β setzt und demnach im Ausdruck für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ die Faktoren $\frac{s-a}{s-b}$, welche in der Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ im $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ stehen, in den $\frac{\text{Nenner}}{\text{Zähler}}$ rücken, so verschwinden diese Unbekannten $s-a$ und $s-b$, wenn man die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$ mit der obigen multipliziert und man erhält eine Gleichung für den zu suchenden Winkel α nämlich $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{s-c}{s} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{s_1-c}{s_1+c}$, woraus man

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1-c}{s_1+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

findet. Diese Auflösung stimmt im wesentlichen mit der von Weifs a. a. O. durchgeführten überein; eine andere Methode, welche ich zur Bestimmung dieses Winkels eingeschlagen habe, ist folgende. Aus dem Sinus-Satz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ erhält man durch korrespondierende Addition $\frac{a+b}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ oder $\frac{s_1}{c} =$

$$\frac{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$$

und hieraus wieder durch korrespondierende Subtraktion und Addition $\frac{s_1 - c}{s_1 + c} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, woraus dann ebenfalls

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1 - c}{s_1 + c} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

folgt. Noch leichter zu verstehen und etwas einfacher, als die bisherigen Lösungen ist die folgende, welche ich durch die Betrachtung der zur Ableitung der Mollweide'schen Formeln häufig angewendeten Figur fand. Verlängert man die Seite BC $=$ a des Dreiecks ABC (v. nebenstehende Fig. 1) um CD $=$ AC $=$ b, so gibt die erhaltene Strecke BD die Summe s_1 der Seiten a und b an und wenn man den Endpunkt D dieser Streckensumme s_1 mit der Ecke A verbindet, erhält man ein Dreieck ABD, in welchem zwei Seiten AB $=$ c und BD $= s_1$ sowie der von diesen eingeschlossene Winkel β gegeben sind; deshalb wendet man auf

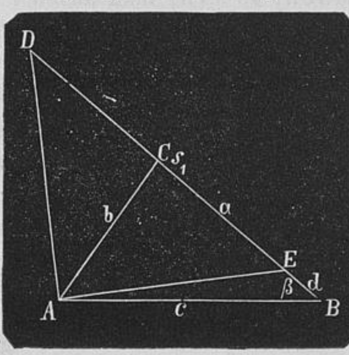


Fig. 1.

dasselbe die Formel $(a + c) : (a - c) = \operatorname{tg}\frac{\alpha + \gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha - \gamma}{2}$ an. Da aber der Gegenwinkel DAB der Seite BD $= s_1$ den Wert $\alpha + \frac{\gamma}{2}$ hat und der Gegenwinkel ADB der Seite AB $= \frac{\gamma}{2}$ ist, wenn man die Winkel BAC und ACB des Dreiecks ABC mit α und γ bezeichnet, so geht die eben angegebene Formel für die vorgelegte Aufgabe in die Gleichung $\frac{s_1 + c}{s_1 - c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ über und man findet auf diesem Weg ebenfalls die oben angegebene Gleichung für die Unbekannte α.

Man kann bezüglich dieser dritten Auflösung auch von der Annahme ausgehen, es sei die vorgelegte Aufgabe zunächst durch Konstruktion gelöst und dann auf das hiebei erhaltene Dreieck ABD die entsprechende Fundamentalformel der Trigonometrie angewendet worden; ja ich habe in der obigen Entwicklung mit Absicht jene Form gewählt, um auf jenen Gedanken hinzuleiten. Diese mehr synthetische Methode bietet in der That in vielen Fällen ihre grofsen Vorteile und jederzeit auch den der gröfsern Anschaulichkeit. Soll man z. B. die

Aufgabe 3: Aus dem Verhältnis m : n zweier Seiten a und b eines Dreiecks, dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ und aus dessen Gegenseite c die zwei nicht gegebenen Winkel α und β dieses Dreiecks zu berechnen

lösen, so weifs man aus der Planimetrie, dafs mit dem Verhältnis m:n zweier Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ ein dem gesuchten Dreieck ähnliches gezeichnet werden kann, dafs man also die gesuchten Winkel α und β bei der trigonometrischen Auflösung der obigen Aufgabe aus einem Dreieck berechnen kann, in welchem zwei Seiten $=$ m und n und der von ihnen eingeschlossene Winkel $= \gamma$ ist, weil die zwei andern Winkel dieses neuen Dreiecks ebenfalls $= \alpha$ und β sind; man findet dann aus der Formel $\frac{m+n}{m-n} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ für die Differenz der gesuchten Winkel die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{m-n}{m+n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

Da aufser dieser halben Differenz $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auch der Wert der halben Summe der zu suchenden Winkel α und β d. h. $\frac{\alpha+\beta}{2}$, welcher $= 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ ist, berechnet werden kann, so kennt man damit die Winkel α und β selbst.

Diese trigonometrische Auflösung von Aufgaben, welche sich auf deren planimetrische Konstruktion gründet, führt jedoch in nicht gar seltenen Fällen nur bei einiger Vorsicht und Gewandtheit zu einfachen trigonometrischen Gleichungen und leitet dann von selbst auf die rein- oder wenigstens hervorragend-analytische Lösung hinüber, welche dann dazu benützt werden kann, die Konstruktion einer vorgelegten planimetrischen Aufgabe zu finden, und eben darin nun wieder ihren besonderen Vorzug besitzt. So z. B. liest man an der obigen Gleichung der Aufgabe 2 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1 - c}{s_1 + c} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ insbesondere,

wenn sie in der Form $\frac{s_1 + c}{s_1 - c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{180 - \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ geschrieben wird, unmittelbar die Konstruktion ab: Man zeichnet mit den Strecken s_1 und c als Seiten BD und AB (v. Fig. 1.) und dem Winkel β als dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel ABD das Dreieck ABD, so liefert die Differenz der Gegenwinkel DAB und ADB der gegebenen Seiten BD und AB den Gegenwinkel α der einen von den zwei Seiten a und b, deren Summe gegeben ist, und wenn man also vom Winkel DAB den Winkel ADC als DAC subtrahiert, erhält man einen weiteren Winkel α des gesuchten Dreiecks als BAC und damit dieses Dreieck ABC selbst.

Zusatz 1. Ganz ähnlich, wie 2, löst man noch folgende Aufgaben.

a) Aus der Differenz d zweier Seiten a und b eines Dreiecks ferner einem der Winkel, welche einer dieser Seiten gegenüber liegen, etwa dem Winkel β und der dritten Seite c den andern Gegenwinkel α der Seiten zu finden, deren Differenz bekannt ist.

b) Die Grundlinie eines Dreiecks sei $= c$, die Summe der zwei anderen Seiten a und b sei $= s_1$ und die Höhe auf eine derselben $= h_a$; wie grofs sind die Winkel dieses Dreiecks?

c) Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks sei $= s_1$, die Höhe auf eine derselben $= h_a$ und der Gegenwinkel der andern Seite $= \beta$; wie grofs ist die Grundlinie c und ein zweiter Dreieckswinkel?

d) Von einem Dreieck ist die Differenz d zweier Seiten a und b, die Höhe h_a zur gröfseren derselben und die dritte Seite c gegeben; es sollen die Winkel dieses Dreiecks berechnet werden.

Zur Bestimmung des Winkels α der Aufgabe a) erhält man auf jedem der unter 2) angegebenen Wege, wenn a kleiner als b ist, die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{c - d}{c + d} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ und natürlich

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{c + d}{c - d} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

wenn a gröfser als b ist; das Dreieck ABE, aus welchem man die letzte Relation bei synthetischer Lösung findet, ist in oben stehender Figur 1 ebenfalls angegeben.

Im Fall der Aufgabe b) bestimmt man aus der Gleichung

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$$

β und mit Hilfe dieses Winkels auch α aus der Formel

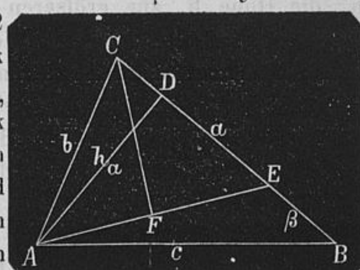
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1 - a}{s_1 + a} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

Diese zwei Gleichungen benützt man auch bei Aufgabe c), um die Grundlinie c und einen zweiten Winkel α des Dreiecks zu berechnen.

Die erste Gleichung zur Auflösung von d) ist als erste Gleichung zur Aufgabe b) und die zweite Gleichung ist in der Lösung von a) angegeben. Noch möchte ich aber bei dieser Gelegenheit die Bemerkung beifügen, dafs gar häufig trigonometrische Ausdrücke, welche schon ziemlich kompliziert erscheinen, eine sehr einfache geometrische Deutung zulassen. Wenn man z. B. behufs Auflösung der Aufgabe d), nachdem der Winkel β durch die Gleichung $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$ bestimmt ist, zunächst die kleinere der zwei Seiten a und b, deren Differenz gegeben ist, zu berechnen sucht und dieselbe zu diesem Zweck mit x bezeichnet, so ist die gröfsere Seite etwa $a = d + x$ und man erhält nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz $x^2 = c^2 + d^2 + 2dx + x^2 - 2c \cdot (d + x) \cdot \cos\beta$ also

$$1)\quad (c \cdot \cos\beta - d) \cdot x = \frac{c^2 + d^2 - 2c \cdot d \cdot \cos\beta}{2}.$$

Diese nicht sehr kurze Formel ist aber nichts anderes, als der trigonometrische Ausdruck für die gewöhnliche einfache planimetrische Konstruktion der vorliegenden Aufgabe, bei welcher die normale Halbierungslinie CF (v. Fig. 2) der Seite AE als der eine geometrische Ort für die zu suchende dritte Ecke C benützt wird. Beachtet man nämlich, dafs $c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\beta$ das Quadrat der Strecke AE in nebenstehender Figur 2 bedeutet, wie man aus dem Dreieck ABE findet, in welchem $BE = d$ ist, und dafs die Strecke DE den Ausdruck $c \cdot \cos\beta - d$ darstellt, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken ADE und CFE, dafs AC den Wert x der obigen Gleichung 1) vorstellt, weil sich in diesen Dreiecken



Figur 2.

verhält. $\frac{DE}{AE} = \frac{FE}{CE}$ oder wie $\frac{\frac{1}{2}AE}{AC}$

Zusatz 2. Noch will ich nachträglich beifügen, dafs auch mit der Aufgabe 1) eine ganze Reihe anderer Aufgaben gelöst ist, von welchen ich wenigstens folgende hervorheben möchte.

Aufgabe a). Aus einer Seite c eines Dreiecks, ihrem Gegenwinkel γ und der Differenz d der beiden andern Seiten a und b die übrigen Winkel dieses Dreiecks zu berechnen.

Nach der Mollweide'schen Formel ist nämlich

$$\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{d}{c} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

und hiezu kommt noch $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$.

Aufgabe b, c, d und e). Der Radius des Kreises, welcher einem Dreieck umgeschrieben ist, beträgt r m, ein Winkel oder eine Seite deselben γ^0 oder c m und die Summe oder Differenz der den Winkel γ einschliefsenden Seiten a und b beträgt s_1 oder d m; wie grofs sind die übrigen Elemente dieses Dreiecks?

Aufgabe f und g). Der Radius des Kreises, welcher einem Dreieck umgeschrieben ist, sei $= r$, ein Winkel desselben $= \gamma$ und der Umfang des Dreiecks d. h. die Summe der drei Seiten a, b und c sei $= 2s$ oder die Summe aus der Gegenseite c jenes Winkels γ als einem und der Differenz der zwei andern Seiten a und b als zweitem Summanden sei $= s_2$; es sollen die übrigen Stücke dieses Dreiecks berechnet werden.

Wenn nämlich von den drei Elementen eines Dreiecks, einer Seite c, ihrem Gegenwinkel γ und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises irgend zwei gegeben sind, so ist damit bekanntlich auch das dritte Element bekannt d. h. es besteht zwischen diesen 3 Elementen eine trigonometrische Gleichung nämlich

$$c = 2 \cdot r \cdot \sin\gamma.$$

Aus diesem Grunde könnte auch in der Aufgabe 3) statt der Seite c oder ihrem Gegenwinkel γ der Radius r des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises gegeben sein.

Aufgabe 4). Der Umfang eines Dreiecks sei $= 2s$, ein Winkel desselben $= \gamma$ und die Höhe aus dem Scheitel dieses Winkels $= h_c$; es sollen die Seiten dieses Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Weil unter den gegebenen Dreieckselementen auch die Höhe h_c vorkommt, so geht man zur Lösung der vorliegenden Aufgabe etwa von den Formeln für den Inhalt eines Dreiecks aus, nämlich von der Gleichung $F=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$ und benützt dazu noch, weil auch der Umfang 2s des Dreiecks gegeben ist, die Formel des Heron $F=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$, so daſs man zunächst die Gleichung

$$1)\quad \tfrac{1}{2}\cdot c\cdot h_c=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

erhält, in welcher c als Unbekannte verbleibt, wenn es gelingt, durch Herbeiziehung der dritten gegebenen Gröſse γ die Unbekannten a und b oder vielleicht die Faktoren $s-a$ und $s-b$ zu entfernen, in welchen jene enthalten sind. Zu diesem Zweck eignet sich die Formel $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)}{s\cdot(s-c)}}$ ganz besonders; denn diese ergibt $\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)}=\sqrt{s\cdot(s-c)}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ und durch Substitution in 1) für die Unbekannte c die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c=s\cdot(s-c)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, woraus man

$$2)\quad c\cdot\left(\frac{h_c}{2}+s\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=s^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$c=\frac{2s^2}{2s+h_c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

findet.

Diese Gleichung kann man auch auf folgenden Wegen entwickeln, welche freilich vom vorhergehenden nicht sehr verschieden sind. Entweder geht man von der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{s-c}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}=\frac{1}{s\cdot(s-c)}\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$ $=\frac{F}{s\cdot(s-c)}=\frac{c\cdot h_c}{2\cdot s\cdot(s-c)}$ aus und findet hieraus $2\cdot s^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-2\cdot c\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $=c\cdot h_c$ also $c=\frac{2\cdot s^2}{2\cdot s+h_c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$ oder man wählt jene Gleichung in der Form $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s-c}$, in welcher ϱ den Radius des Kreises bedeutet, welcher dem Dreieck eingeschrieben werden kann, und berücksichtigt nun, dafs $\varrho \cdot s = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ ist, dann erhält man durch Substitution des Wertes von ϱ aus der letzten Gleichung in die vorhergehende $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2 \cdot s \cdot (s-c)}$ d. h. $2 \cdot s^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - 2 \cdot c \cdot s \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = c \cdot h_c$. Diese letzte Methode scheint den kürzesten Weg zur Lösung der vorgelegten Aufgabe zu ergeben; dafs aber die obige erste ihre volle Berechtigung neben dieser hat, zeigt der nun folgende zweite Teil der Auflösung. Ist nämlich c berechnet, so erhält man für die zwei andern unbekannten Seiten a und b zunächst die Gleichung $a + b = 2s - c$, und da hiemit die Summe dieser Unbekannten bestimmt ist, so sucht man nur noch eine Gleichung womöglich für die Differenz derselben. Diese ergibt sich leicht aus den schon oben angegebenen Formeln; setzt man nämlich in 1) den Wert von $\sqrt{s \cdot (s-c)}$ aus $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b)}{s \cdot (s-c)}}$ d. h. $\sqrt{(s-a) \cdot (s-b)} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ ein, so erhält man $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = (s-a) \cdot (s-b) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ oder $c^2 - (a-b)^2 = 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ also

$$3)\ a - b = \sqrt{c^2 - 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

so dafs man

$$a = \frac{2 \cdot s - c \pm \sqrt{c^2 - 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}}{2}$$

und

$$b = \frac{2 \cdot s - c \mp \sqrt{c^2 - 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}}{2}$$

findet.

Bemerkung. Wenn auch die planimetrische Konstruktion obiger Aufgabe eine sehr einfache wird auf Grund der Betrachtung, dafs der Winkel ECF (v. Fig. 3), welchen man erhält, wenn man die Seite c des zu konstruierenden Dreiecks ABC über beide Endpunkte A und B hinaus um die anstofsenden Seiten a und b bis E und F verlängert,

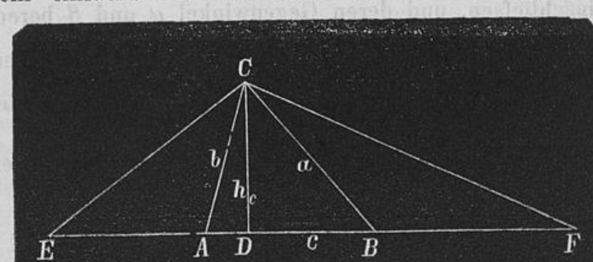


Fig 3.

um den Umfang $EF = 2s$ zu bilden, und die Endpunkte E und F mit der Gegenecke C der verlängerten Seite c verbindet, $= R + \frac{\gamma}{2}$ wird, daſs man also über dem Umfang $EF = 2s$ den geometrischen Ort für die Scheitel aller Winkel konstruiert, welche gleich $R + \frac{\gamma}{2}$ sind und deren Schenkel durch die Endpunkte E und F des Umfangs gehen, so ist doch auch die planimetrische Konstruktion der Aufgabe nach der Gleichung 2) eine immerhin noch einfache; weist ja z. B. der Ausdruck $s \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$ darauf hin, daſs man zur Bestimmung des Mittelpunkts des Kreisbogens ECF nur den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ und nicht den Winkel $R + \frac{\gamma}{2}$ nötig hat, wie die geometrische Entwicklung und Konstruktion des geometrischen Ortes zunächst ergibt; auch der rein geometrische Beweis der aus jener Gleichung abgeleiteten Konstruktion bietet zu einer interessanten geometrischen Untersuchung Veranlassung.

Zusatz. Auf die in 4) behandelte Aufgabe läſst sich leicht zurückführen die Auflösung der

Aufgabe: Aus dem Umfang $2 \cdot s$ eines Dreiecks, einem Winkel γ desselben und seinem Flächeninhalt F die Seiten dieses Dreiecks zu berechnen.

Aufgabe 5. Der Flächeninhalt eines Dreiecks sei $= F$, eine Höhe desselben $= h_c$ und der Winkel, von dessen Scheitel jene Höhe ausläuft, $= \gamma$; es sollen die Seiten a und b, welche diesen Winkel γ einschlieſsen, und deren Gegenwinkel α und β berechnet werden.

Lösung. In der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe 4 wurde die Gleichung $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = s \cdot (s - c) \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$ entwickelt; aus ihr erhält man, da $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = F$ ist, $s.(s - c) = F \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$ oder $\frac{(a + b)^2 - c^2}{4} = F \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und weil $c = \frac{2F}{h_c}$ ist,

$$1)\quad a + b = \sqrt{\frac{4F^2}{h_c^{\,2}} + 4 \cdot F \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}} = 2 \cdot \sqrt{F \cdot \left(\frac{F}{h_c^{\,2}} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)};$$

aus der Gleichung 3) der vorigen Aufgabe ergibt sich weiter

$$2)\ a-b=\sqrt{\frac{4F^2}{h_c^{\,2}}-4F\cdot tg\frac{\gamma}{2}}=2\cdot\sqrt{F\cdot\left(\frac{F}{h_c^{\,2}}-tg\frac{\gamma}{2}\right)},$$

so dafs also

$$a=\sqrt{F\cdot\left(\frac{F}{h_c^{\,2}}+ctg\frac{\gamma}{2}\right)}\pm\sqrt{F\cdot\left(\frac{F}{h_c^{\,2}}-tg\frac{\gamma}{2}\right)}$$

und

$$b=\sqrt{F\cdot\left(\frac{F}{h_c^{\,2}}+ctg\frac{\gamma}{2}\right)}\mp\sqrt{F\cdot\left(\frac{F}{h_c^{\,2}}-tg\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Um eine Gleichung für die Winkel α und β zu erhalten, kann man in der Gleichung $F=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$ die Seite c in der Höhe h_c und den Winkeln des Dreiecks auszudrücken suchen; nun ist bekanntlich $h_c=\frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$, deshalb $c=\frac{h_c\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ und $F=\frac{h_c^{\,2}\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, woraus man $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{h_c^{\,2}\cdot\sin\gamma}{F}$ findet; da aber $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$ $=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ ist, so ergibt sich für die Differenz $\alpha-\beta$ der zu suchenden Winkel die Relation

$$3)\ \cos(\alpha-\beta)=\frac{h_c^{\,2}\cdot\sin\gamma}{F}-\cos\gamma$$

und wenn man hiezu die Gleichung für die Summe dieser Winkel, nämlich $\alpha+\beta=180-\gamma$ nimmt, erhält man die Gröfse der Winkel α und β selbst.

Zusatz 1. Man kann mit Hilfe der eben gefundenen Relationen unter Berücksichtigung, dafs $\frac{2F}{h_c}=c$ ist, die Resultate ohne alle Schwierigkeit angeben, durch welche die

Aufgabe: Aus der Seite c eines Dreiecks, deren Gegenwinkel γ und dem Flächeninhalt F desselben die zwei Seiten a und b, welche den gegebenen Winkel γ einschliefsen, und die zwei andern Winkel α und β zu berechnen

gelöst ist. Eine ziemlich einfache direkte Ableitung der gesuchten Gleichungen ergibt sich aus dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz, wenn man denselben in den Formen $c^2=(a+b)^2-4\cdot a\cdot b.\cos^2\frac{\gamma}{2}$

und $c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ schreibt und beachtet, dafs

$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = a \cdot b \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ also $a \cdot b = \frac{F}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$ ist;

man findet dann ebenfalls $a + b = \sqrt{c^2 + 4 \cdot F \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$ und $a - b$

$= \sqrt{c^2 - 4 \cdot F \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$. Der Ausdruck für $\cos(\alpha - \beta)$ heifst jetzt

$\frac{4 \cdot F}{c^2} \cdot \sin\gamma - \cos\gamma$. Mit dieser Aufgabe ist nun noch weiter gelöst die

Aufgabe: Von einem Dreieck ist die Grundlinie c, die zugehörige Höhe h_c und der Gegenwinkel γ der Grundlinie gegeben; wie grofs sind die Seiten a und b, welche γ einschliefsen, sowie die zwei andern Winkel α und β?

Man findet $a + b = \sqrt{c^2 + 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$ und

1) $a - b = \sqrt{c^2 - 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

sowie $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2 \cdot h_c \cdot \sin\gamma}{c} - \cos\gamma$. Diese letzte Gleichung für $\cos(\alpha - \beta)$ führt, wie sich leicht zeigen läfst, auf die bekannte einfache Konstruktion eines Dreiecks aus seiner Grundlinie, zugehörigen Höhe und dem Gegenwinkel der Grundlinie, demnach liefern die entsprechenden Gleichungen bei den zwei vorhergehenden Aufgaben ebenfalls einfache Konstruktionen derselben.

Zusatz 2. Da zwischen dem Radius r des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises, einer Seite c desselben und ihrem Gegenwinkel γ die Gleichung $c = 2 \cdot r \cdot \sin\gamma$ besteht, so sind mit den vorhergehenden Aufgaben auch die folgenden gelöst.

Aufgabe: Von einem Dreieck ist der Radius des ihm umgeschriebenen Kreises $= r$, der Flächeninhalt $= F$ und eine Seite $= c$ oder ein Winkel $= \gamma$ oder eine Höhe $= h_c$ gegeben; wie grofs sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Eine ziemlich einfache Entwicklung der betreffenden Formeln erhält man auch auf folgendem nicht vollständig analytischen Wege.

Wenn man im Dreieck ABC die Höhe CD zur Seite $AB = c$ und durch den Mittelpunkt M des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises die zur Höhe CD und zur Seite AB parallelen Geraden ME und MF bis zu den Schnittpunkten E und F mit dieser Seite und Höhe und schliefslich nach den Ecken C und A die Halbmesser MC und MA zieht, so wird Winkel $FCM = \alpha - \beta$, also $CF = r \cdot \cos(\alpha - \beta)$, ferner $DF = ME = r \cdot \cos\gamma$,

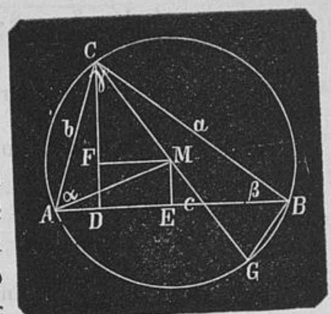


Fig. 4.

demnach $r \cdot \cos(\alpha - \beta) + r \cdot \cos\gamma = CD = \frac{2 \cdot F}{c}$ oder $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2 \cdot F}{c \cdot r} - \cos\gamma$. Um auch die Gleichungen für a und b zu erhalten, verlängert man den Halbmesser CM zum Durchmesser CG und verbindet dessen Endpunkt G mit dem einen Endpunkt B der Gegenseite AB der Ecke C, von welcher der Durchmesser ausläuft; dann findet man aus den ähnlichen Dreiecken ACD und CGB $\frac{a}{2r} = \frac{h_c}{b}$ oder $a \cdot b = 2 \cdot r \cdot h_c$ und nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2 + 4 \cdot r \cdot h_c \cdot \cos\gamma = c^2 + \frac{8 \cdot F \cdot r}{c} \cdot \cos\gamma$, woraus nun $a + b = \sqrt{c^2 + \frac{16 \cdot F \cdot r}{c} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{c^2 + 8 \cdot r \cdot h_c \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}}$ und $a - b = \sqrt{c^2 - \frac{16 \cdot F \cdot r}{c} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{c^2 - 8 \cdot r \cdot h_c \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}}$ folgt.

Mit diesen Aufgaben sind weiter noch die folgenden nahe verwandt.

Aufgabe: Aus dem Radius r des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises, der Höhe h_c zu einer Seite c und der Summe s_1 oder Differenz d der zwei andern Seiten a und b diese und ihre Gegenwinkel zu berechnen.

Denn nun hat man z. B. im ersten Fall zwischen den unbekannten Seiten a und b nach der Aufgabe $a + b = s_1$ und hiezu die oben abgeleitete zweite Gleichung $a \cdot b = 2 \cdot r \cdot h_c$ und findet also $a = \frac{s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 8 \cdot r \cdot h_c}}{2}$ und $b = \frac{s_1 \mp \sqrt{s_1^2 - 8 \cdot r \cdot h_c}}{2}$, und aus $a = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha$ oder $b = 2 \cdot r \cdot \sin\beta$ für die zu berechnenden Winkel α und β die Relationen $\sin\alpha = \frac{s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 8 \cdot r \cdot h_c}}{4 \cdot r}$ und $\sin\beta = \frac{s_1 \mp \sqrt{s_1^2 - 8 \cdot r \cdot h_c}}{4 \cdot r}$.

Aufgabe 6. Von einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten a und $b = s_1$, die dritte Seite $= c$ und die Höhe auf diese $= h_c$ gegeben, wie grofs sind die Seiten a und b dieses Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ?

Lösung. Aus der Gleichung 1) $(a+b)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ im Zusatz 1 der Aufgabe 5 ergibt sich

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{(s_1 + c) \cdot (s_1 - c)}{2 \cdot c \cdot h_c}.$$

Zur Bestimmung der Seiten a und b hat man zunächst nach der Aufgabe $a + b = s_1$ und, weil die Höhe h_c gegeben ist, wendet man die Formeln für den Flächeninhalt F eines Dreiecks an also für diesen Fall, da man noch eine zweite Relation zwischen den unbekannten Seiten a und b nötig hat, die Gleichung $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\gamma$ oder $a \cdot b = \frac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}$. Um aus den Beziehungen zwischen $a + b$ und $a \cdot b$ und den gegebenen Gröfsen eine solche für $a - b$ zu erhalten, benützt man etwa die Relation $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4 \cdot a \cdot b$ und findet dadurch $a - b = \sqrt{s_1^2 - \frac{4 \cdot c \cdot h_c}{\sin\gamma}}$

oder $$a = \frac{s_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - \frac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}}$$

und $$b = \frac{s_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - \frac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}}.$$

Zusatz. Wenn in der obigen Aufgabe statt der Seite c ihr Gegenwinkel γ gegeben ist, benützt man zur Bestimmung der Werte der Dreiecksseiten eben die Gleichungen, welche in der obigen Lösung schon entwickelt wurden, wobei dann die Seite c aus der unrein-quadratischen Gleichung $c^2 + 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = s_1{}^2$ berechnet und $c = - h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \sqrt{h_c{}^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} + s_1{}^2}$ gefunden wird.

Es ist wohl nicht notwendig, näher auseinander zu setzen, dafs die Auflösung der Aufgabe wesentlich die gleiche bleibt, wenn statt der Höhe h_c der Flächeninhalt F des Dreiecks oder an Stelle der Summe s_1 der Seiten a und b deren Differenz d gegeben ist.

Noch erscheint mir eine von der obigen abweichende ziemlich einfache Ableitung der entwickelten Relationen es wert zu sein, dafs dieselbe erwähnt werde; die Entwicklung ist folgende. Nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz erhält man, weil $a = d + b$ ist, wenn die Seite a gröfser als b angenommen wird, $c^2 = d^2 + 2db + b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot (d + b) \cdot \cos\gamma = d^2 + 2 \cdot b \cdot (d + b) \cdot (1 - \cos\gamma)$ oder

$$1) \quad c^2 = d^2 + 4 \cdot b \cdot (d + b) \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Nun ergibt sich aber aus den ähnlichen Dreiecken ACD und CBG der Figur 4) $b \cdot (d + b) = 2 \cdot r \cdot h_c$ und weil der Durchmesser $2 \cdot r$ des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises $= \frac{c}{\sin\gamma}$ ist, $b \cdot (d + b) = \frac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}$ also durch Substitution in 1)

$$c^2 = d^2 + \frac{4 \cdot c \cdot h_c \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{oder} \quad c^2 - d^2 = 2c \cdot h_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

so dafs
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{(c + d) \cdot (c - d)}{2 \cdot c \cdot h_c} \quad \text{wird.}$$

Zusatz 2. Die in der Hauptaufgabe angewendete Gleichung $a \cdot b \cdot \sin\gamma = c \cdot h_c$ benützt man mit Vorteil, wenn man von einem Dreieck, in welchem ein Winkel $= \gamma$ und die vom Scheitel dieses Winkels ausgehenden Höhe und Mittellinie (d. h. die Strecke vom Scheitel nach dem Mittelpunkt der Gegenseite) bez. $= h_c$ und m_c bekannt sind, diese Gegenseite c selbst berechnen will. Mit Hilfe jener Gleichung erhält dann der allgemeine Pythagoreische Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$ die Form $a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma$ und weil bekanntlich auch $a^2 + b^2 = 2 \cdot m_c{}^2 + \frac{c^2}{2}$ also $a^2 + b^2 - c^2$

$= 2 \cdot m_c^2 - \frac{c^2}{2}$ ist, so ergibt sich für die zu bestimmende Seite c die Relation $c^2 + 4 \cdot c \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma = 4 \cdot m_c^2$, woraus man

$$c = \sqrt{(2m_c)^2 + (2 \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma)^2} - 2 \cdot h_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma$$

findet. Die eben entwickelte Gleichung $c^2 + 4 \cdot c \cdot h_c . \operatorname{ctg}\gamma = 4 \cdot m_c^2$ liefert dann zur Auflösung der umgekehrten

Aufgabe: Von einem Dreieck sei eine Seite $= c$, die Höhe auf sie $= h_c$ und die nach ihr gezogene Mittellinie $= m_c$; wie grofs ist der Gegenwinkel γ dieser Seite c des Dreiecks?

den Wert des Winkels γ aus

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{(2 \cdot m_c + c) \cdot (2 \cdot m_c - c)}{4 \cdot c \cdot h_c}.$$

Aufgabe 7. In einem Dreieck ist der Umfang $= 2s$, eine Höhe $= h_c$ und einer von den Winkeln, von deren Scheitel diese Höhe nicht ausgeht, $= \alpha$ gegeben; wie grofs ist der andere dieser Winkel und wie grofs sind die Seiten dieses Dreiecks?

Lösung. Die Seite b bestimmt man aus der Gleichung

$$b = \frac{h_c}{\sin\alpha};$$

um nun eine Relation zwischen dem gegebenen Winkel α und dem unbekannten Winkel β zu erhalten, geht man etwa, weil der Umfang 2s des Dreiecks gegeben ist, von den Formeln $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a} \cdot \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}$ und $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{s-b} \cdot \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}$

aus; addiert man diese, so ergibt sich $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2s-a-b}{(s-a) \cdot (s-b)} \cdot \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}} = \frac{c \cdot (s-c)}{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$. Der Ausdruck im Nenner gibt den Flächeninhalt F des Dreiecks an, so dafs nun die Gelegenheit geboten ist, die weiter gegebene Höhe h_c zu verwenden und dabei wenigstens einmal die unbekannte Gröfse c zu entfernen; weil nämlich $\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ ist, findet man nun $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2 \cdot c \cdot (s-c)}{c \cdot h_c}$ oder

$$1) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2 \cdot (s-c)}{h_c}.$$

In dem Ausdruck der rechten Seite mufs jetzt nur noch die unbekannte Seite c entfernt werden jedoch so, dafs bei der Elimination keine neuen bis hieher noch nicht zugelassene Gröfsen in den erhaltenen Ausdruck eingeführt werden; hiezu eignet sich die in der Lösung der Aufgabe 2 entwickelte Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{s-c}{s}$, welche $s - c = s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ und durch Substiution in 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{h_c}$ ergibt, so dafs man

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = h_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \left(2\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - h_c\right)$$

findet. Für die noch zu berechnenden Seiten $c = x$ und $a = y$ hat man nun erstens die Beziehung

$$1)\quad x + y = 2s - \frac{h_c}{\sin\alpha}$$

und dann noch die in Aufgabe 4 schon abgeleitete Relation $\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c = s\cdot(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; diese liefert für die unbekannten Seiten als zweite Gleichung $h_c\cdot x = 2s.(s - y)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ oder, wenn man hierin den Wert von y aus 1) nämlich $2s - \frac{h_c}{\sin\alpha} - x$ substituiert, $h_c\cdot x = 2\cdot s\cdot x\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{2\cdot h_c\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} - 2\cdot s^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, woraus

$$x = \frac{2\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot(s\cdot\sin\alpha - h_c)}{(2\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - h_c)\cdot\sin\alpha}$$

und

$$y = \frac{2\cdot s\cdot\sin\alpha\cdot(s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - h_c) - h_c{}^2}{(2\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - h_o)\cdot\sin\alpha}$$

folgt.

Aufgabe 8. Die drei Höhen eines Dreiecks seien $= h_a$, h_b und h_c; wie grofs sind die Seiten und Winkel desselben?

Man kann zur **Lösung** dieser Aufgabe von einer Gleichung zwischen einem Winkel und den **Seiten** des Dreiecks ausgehen, wenn nur dieselbe in eine solche Form übergeführt werden kann, dafs in ihr allein **Verhältnisse** von Seiten vorkommen, weil man dann von diesen Seitenverhältnissen auf die Höhen schliefsen kann nach dem Lehrsatz der Planimetrie „In jedem Dreieck ist das Verhältnis von zwei Seiten dem umgekehrten Verhältnis der zugehörigen Höhen gleich". Dividiert man z. B. den Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)\cdot(a-b+c)}{(a+b+c)\cdot(a+b+c)}}$$ mit a^2, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\left(1+\frac{b}{a}-\frac{c}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)}{\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\cdot\left(-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)}}$$

und, weil nach dem angegeben Lehrsatz $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$ und $\frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c}$ ist,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\left(1+\frac{h_a}{h_b}-\frac{h_a}{h_c}\right)\cdot\left(1-\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}\right)}{\left(1+\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}\right)\cdot\left(-1+\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}\right)}}.$$ Dieser Bruch zeigt eine symmetrischere Form, wenn man seinen Zähler und Nenner mit $h_a{}^2$ dividiert; es wird dann $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}}$$

und, wenn man nun noch den Zähler und Nenner des erhaltenen Bruches mit $h_a\cdot h_b$ multipliziert, erhält man die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\left(h_a+h_b-\frac{h_a\cdot h_b}{h_c}\right)\cdot\left(h_a-h_b+\frac{h_a\cdot h_b}{h_c}\right)}{\left(h_a+h_b+\frac{h_a\cdot h_b}{h_c}\right)\cdot\left(-h_a+h_b+\frac{h_a\cdot h_b}{h_c}\right)}}$$

und durch die gleichen Entwicklungen die Resultate

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\left(h_a + h_b - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(- h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}{\left(h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a - h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}}$$

und

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\left(h_a - h_b + \frac{h_a \cdot b_b}{h_c}\right) \cdot \left(- h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}{\left(h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a + h_b - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}},$$

welche auf die bekannte sehr einfache Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Höhen führen. Um nun die Seiten zu berechnen, benützt man die Beziehungen $a = \frac{h_c}{\sin\beta}$ oder $= \frac{h_b}{\sin\gamma}$ sowie $b = \frac{a \cdot h_a}{h_b}$ und $c = \frac{a \cdot h_a}{h_c}$, dann erhält man nach einigen leichten schon oben angedeuteten Umformungen

$$a = \frac{2 \cdot \frac{h_b \cdot h_c}{h_a} \cdot h_b \cdot h_c}{\sqrt{\left(\frac{h_b \cdot h_c}{h_a} + h_b + h_c\right) \cdot \left(\frac{h_b \cdot h_c}{h_a} + h_b - h_c\right) \cdot \left(\frac{h_b \cdot h_c}{h_a} - h_b + h_c\right) \cdot \left(- \frac{h_b \cdot h_c}{h_a} + h_b + h_c\right)}}$$

oder

$$= \frac{2 \cdot h_a \cdot h_b^2}{\sqrt{\left(h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a + h_b - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a - h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_o}\right) \cdot \left(- h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}}$$

ferner

$$b = \frac{2 \cdot \frac{h_a \cdot h_c}{h_b} \cdot h_a \cdot h_c}{\sqrt{\left(h_a + \frac{h_a \cdot h_c}{h_b} + h_c\right) \cdot \left(h_a + \frac{h_a \cdot h_c}{h_b} - h_c\right) \cdot \left(h_a - \frac{h_a \cdot h_c}{h_b} + h_c\right) \cdot \left(- h_a + \frac{h_a \cdot h_c}{h_b} + h_c\right)}}$$

oder

$$= \frac{2 \cdot h_a^2 \cdot h_b}{\sqrt{\left(h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a + h_b - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a - h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(- h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}}$$

schliefslich

$$c = \frac{2 \cdot \frac{h_a \cdot h_b}{h_c} h_a \cdot h_b}{\sqrt{\left(h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a + h_b - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(h_a - h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right) \cdot \left(- h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)}}$$

Aufgabe 9. Von einem Dreieck sind zwei Seiten $= a$ und b sowie die Halbierungslinie des von ihnen eingeschlossenen Winkels, soweit sie in die Fläche des Dreiecks fällt, $= w_c$ gegeben; es soll die dritte Seite c und der halbierte Winkel γ des Dreiecks berechnet werden.

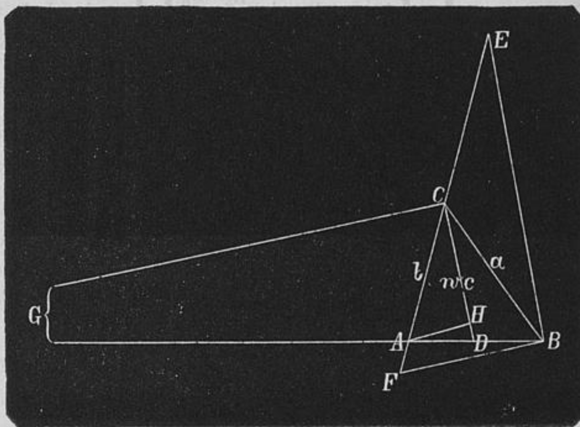


Fig. 5.

Lösung. Verlängert man im Dreieck ABC (v. Fig. 5.) die gegebene Seite AC $= b$ um die andere $BC = a$ über C hinaus bis E, trägt auf der verlängerten Seite AC von C aus jene andere Seite BC als CF ab und verbindet B mit den so erhaltenen Endpunkten E und F, so ist im gleichschenkligen Dreieck CEB Winkel $CEB = CBE$ und ACB als Außenwinkel des genannten Dreiecks $= CEB + CBE = 2 \cdot CEB$ und da $ACB = 2 \cdot ACD$, so findet man nach dem Komparationsgrundsatz $ACD = CEB$; diese Winkel sind aber korrespondierende Winkel an den geraden Linien CD und EB, also sind diese parallel. Nun erhält man aus dem Dreieck AEB, in welchem zur Seite EB eine parallele Gerade CD gezogen ist, $\frac{BE}{w_c} = \frac{a + b}{b}$ d. h. $BE = \frac{(a + b) \cdot w_c}{b}$; weil ferner im gleichschenkligen Dreieck CFB Winkel $CFB = CBF$ also $2 \cdot CFB = 180 - \gamma$ oder Winkel $CFB = 90 - \frac{\gamma}{2}$ ferner, wie schon bewiesen wurde, Winkel $FEB = \frac{\gamma}{2}$ ist, so erweist sich das Dreieck BEF als ein bei B rechtwinkliges Dreieck und man erhält aus ihm $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a + b) \cdot w_c}{2 \cdot a \cdot b}$.

Ohne geometrische Hilfskonstruktion kann man diese Gleichung erhalten, wenn man beachtet, daſs in jedem der Dreiecke ACB, ACD und BCD (v. Fig. 5) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, also der Flächeninhalt eines jeden dieser Dreiecke berechnet werden kann und dafs die Summe der Dreiecke ACD und BCD den Flächeninhalt des Dreiecks ABC liefert. Man erhält dann die Gleichung $b \cdot w_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} + a \cdot w_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = a \cdot b \cdot \sin\gamma = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$, woraus wieder

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b) \cdot w_c}{2 \cdot a \cdot b}$$

folgt.

Eine andere nicht uninteressante Herleitung dieser Gleichung ist folgende. Weil die Winkelhalbierende w_c gegeben ist, könnte man zur Lösung von dem planimetrischen Lehrsatz Gebrauch machen „I. Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite des halbierten Winkels in dem Verhältnis der den Winkel einschliefsenden Seiten; in demselben Verhältnis wird die verlängerte Gegenseite durch die Halbierungslinie des Aufsenwinkels geteilt." Um nun dieses Verhältnis in den gegebenen Gröfsen a, b und w_c und dem zu berechnenden Winkel auszudrücken, zieht man im Dreieck ABC (v. Fig. 5), in welchem die Halbierungslinie CD des gegebenen Winkels γ, sowie die Halbierungslinie CG seines Aufsenwinkels konstruiert ist, durch den Endpunkt A der einen den Winkel γ einschiefsenden Seiten die zur CG parallele Gerade AH, welche die Winkelhalbierende CD in H schneidet, so steht bekanntlich die Halbierungslinie CG des Aufsenwinkels bei C zu der des Innenwinkels ACB normal, also ist auch die zur CG parallele Gerade AH auf der Winkelhalbierenden CD normal und $CH = b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$. Zunächst erhält man aus dem Dreieck DCG, in welchem AH zur Seite CG parallel läuft, $\frac{CH}{CD} = \frac{AG}{DG}$ oder

$$1) \quad \frac{b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{w_c} = \frac{AG}{DG};$$

nach dem unter I angegebenen Lehrsatz und weil der Innen- und Aufsenwinkel bei C durch die Geraden CD und CG halbiert wurde, verhält sich $\frac{BD}{AD} = \frac{a}{b}$ und $\frac{BG}{AG} = \frac{a}{b}$; nun ergibt sich aus der ersten Proportion durch korrespondierende Addition, aus der zweiten durch korrespondierende Subtraktton $\frac{AB}{AD} = \frac{a+b}{b}$ sowie $\frac{AG}{AB} = \frac{b}{a-b}$, und wenn man diese beiden Proportionen multipliziert, so findet man weiter $\frac{AG}{AD} = \frac{a+b}{a-b}$ und hieraus wieder durch korrespondierende Addition $\frac{AG}{DG} = \frac{a+b}{2a}$ also durch Substitution in 1)

$$\frac{b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{w_c} = \frac{a+b}{2a} \text{ oder } \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)\cdot w_c}{2\cdot a\cdot b}.$$

Um die Seite c des Dreiecks zu berechnen, benützt man den allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\gamma$ im vorliegenden Fall in der Form

$$3)\ c^2 = (a+b)^2 - 4\cdot a\cdot b\cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

und erhält, wenn man für $\cos\frac{\gamma}{2}$ den gefundenen Wert einsetzt, für die Seite c die Relation $c^2 = (a+b)^2 - 4\cdot a\cdot b\cdot \frac{(a+b)^2\cdot w_c^2}{4\cdot a^2\cdot b^2} = (a+b)^2\cdot\frac{a\cdot b - w_c^2}{a\cdot b}$ also

$$c = (a+b)\cdot\sqrt{\frac{a\cdot b - w_c^2}{a\cdot b}}.$$

Bemerkung. Wenn im folgenden von der Länge einer Winkelhalbierenden die Rede ist, so wird dieselbe immer einerseits im Scheitel des halbierten Winkels und andrerseits im Schnittpunkt mit der Gegenseite desselben begrenzt gedacht.

Zusatz 1. Aufgabe: Aus der Summe s_1 zweier Seiten a und b eines Dreiecks, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ und der Halbierungslinie w_c dieses Winkels die drei Seiten a, b und c des Dreiecks zu berechnen.

Mit der aus der Aufgabe selbst folgenden Gleichung $a + b = s_1$ bringt man die in Aufgabe 9 mehrfach entwickelte Relation $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)\cdot w_c}{2\cdot a\cdot b}$ in der Form $a\cdot b = \frac{s_1\cdot w_c}{2\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$ in Verbindung, dann findet man für die Differenz $a - b$ der zu suchenden Seiten mit Hilfe der bekannten Formel $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\cdot a\cdot b$ die Beziehung $s_1{}^2 - (a - b)^2 = \frac{2 \cdot s_1 \cdot w_c}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ also $a - b = \sqrt{s_1{}^2 - \frac{2 \cdot s_1 \cdot w_c}{\cos\frac{\gamma}{2}}}$, so dafs man zunächst

$$a = \left[s_1 \pm \sqrt{s_1{}^2 - \frac{2 \cdot s_1 \cdot w_c}{\cos\frac{\gamma}{2}}} \right] : 2$$

$$b = \left[s_1 \mp \sqrt{s_1{}^2 - \frac{2 \cdot s_1 \cdot w_c}{\cos\frac{\gamma}{2}}} \right] : 2$$

findet. Für die Seite c erhält man aus der Relation 3) der Aufgabe 9 durch Substitution des Wertes von $a - b$

$$c = \sqrt{s_1{}^2 - 2 \cdot s_1 \cdot w_c \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Wenn statt der Summe s_1 der zwei Seiten a und b das Rechteck $p \cdot q$ aus denselben gegeben ist, ändert sich die Lösung der Aufgabe nur unbedeutend.

Zusatz 2. Aufgabe: Von einem Dreieck ist die Summe s_1 zweier Seiten a und b, die dritte Seite c und die Halbierungslinie w_c des Gegenwinkels der letzteren gegeben; wie grofs ist der halbierte Winkel und wie lang sind die ihn einschliefsenden Seiten?

Zur Lösung dieser Aufgabe verbindet man mit der Relation $2 \cdot a \cdot b = \frac{(a + b) \cdot w_c}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ die Formel 3) nämlich $c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$ und entwickelt aus denselben zunächst die Gleichung $c^2 = s_1{}^2 - 2 \cdot s_1 \cdot w_c \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$, um aus ihr den Winkel γ zu berechnen; man findet dann

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(s_1 + c) \cdot (s_1 - c)}{2 \cdot s \cdot w_c}$$

Die Gleichung $(a - b)^2 = s_1{}^2 - \frac{2 \cdot s_1 \cdot w_c}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ geht jetzt über in $(a - b)^2 = s_1{}^2 - \frac{4 \cdot s_1{}^2 \cdot w_c{}^2}{(s_1 + c) \cdot (s_1 - c)}$; demnach wird

$$a = \frac{s_1}{2} \pm \frac{s_1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot w_c}{(s_1 + c) \cdot (s_1 - c)}}$$

und

$$b = \frac{s_1}{2} \mp \frac{s_1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot w_c}{(s_1 + c) \cdot (s_1 - c)}}$$

Aufgabe 10. Aus einer Seite c eines Dreiecks, ihrem Gegenwinkel γ und der Halbierungslinie w_c dieses Winkels sollen die nicht gegebenen Winkel α und β dieses Dreiecks berechnet werden.

Lösung. Da die Summe der zwei zu bestimmenden Winkel α und $\beta = 180 - \gamma$ ist, so hat man nur noch eine Gleichung zwischen diesen unbekannten Gröfsen aufzustellen womöglich für deren Differenz $\alpha - \beta$. Nun erhält man nach dem Sinussatz aus dem Dreieck ACD der obigen Figur 5 $AD = \dfrac{w_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha}$ und $BD = \dfrac{w_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}$ also für die unbekannten Winkel die Relation

$$1)\quad \frac{w_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha} + \frac{w_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta} = c.$$

Da aber $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \dfrac{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}}$

$$= \frac{4 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma} = \frac{4 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 + 1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$= \dfrac{2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}}$, so ergibt sich nun in der That durch Substitution dieses Wertes von $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin\beta}$ in 1) eine Beziehung zwischen der Differenz $\alpha - \beta$ und den gegebenen Gröfsen, nämlich die Gleichung

2) $2\cdot w_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=c\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-c\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}$,

woraus man $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{w_c\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}+\sqrt{w_c{}^2\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}+c^2\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}}{c}$

$=\dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{c}\cdot\left(w_c\cos\frac{\gamma}{2}+\sqrt{c^2+w_c{}^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right)$ findet. In dem Ausdruck für $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ wird die Quadratwurzel nur eindeutig angegeben, weil man einen negativen Cosinus erhielte, wenn man die Wurzel mit dem Vorzeichen — in Rechnung zöge; dieser negative Cosinus führte aber auf einen mindestens stumpfen Winkel, während in einem Dreieck die halbe Differenz zweier Winkel nur ein spitzer Winkel sein kann.

Aufgabe 11. Von einem Dreieck ist eine Seite c, die zugehörige Höhe h_c und die Halbierungslinie w_c des Gegenwinkels jener Seite c gegeben; wie grofs sind die Winkel dieses Dreiecks?

Lösung. Denkt man sich in der obigen Figur 5 noch die Höhe $CL = h_c$ gezogen, so ist in einem bei A spitzwinkligen Dreieck Winkel $ACL = 90-\alpha$ und in einem bei A stumpfwinkligen $=\alpha-90$ und $ACD=\frac{\gamma}{2}$ also im spitzwinkligen Dreieck Winkel LCD $=\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\alpha=\frac{\alpha-\beta}{2}$ und im stumpfwinkligen $=\alpha-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$ und man erhält nun aus dem bei L rechtwinkligen Dreieck CDL zur Bestimmung der Differenz $\alpha-\beta$ der Winkel an der gegebenen Seite c die Beziehung $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{h_c}{w_c}$. Hätte man nun noch eine Gleichung etwa für die Summe $\alpha+\beta$ dieser Winkel oder, was auf dasselbe hinauskommt, für den dritten Winkel γ, so könnte man die drei Winkel α, β und γ des Dreiecks berechnen. Nun wurde in der vorhergehenden Aufgabe die Gleichung 2) $2\cdot w_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=c\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-c\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}$ entwickelt und wenn man in diese für $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ den oben gefundenen Wert $\frac{h_c}{w_c}$ einsetzt, ergibt sich aus ihr die Relation zwischen dem unbekannten Winkel γ und den gegebenen Strecken $h_c \cdot \sin\gamma = \frac{c \cdot h_c^2}{w_c^2} - c \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$ oder $2 \cdot h_c \cdot w_c^2 \cdot \sin\gamma = 2 \cdot c \cdot h_c^2 - c \cdot w_c^2 + c \cdot w_c^2 \cdot \cos\gamma$ also $(c^2 + 4 \cdot h_c^2) \cdot w_c^4 \cdot \cos^2\gamma + 2 \cdot c^2 \cdot w_c^2 \cdot (2 \cdot h_c^2 - w_c^2) \cdot \cos\gamma = 4 \cdot h_c^2 \cdot w_c^4 + 4 \cdot c^2 \cdot h_c^2 \cdot w_c^2 - 4 \cdot c^2 \cdot h_c^4 - c^2 \cdot w_c^4$, woraus man $\cos\gamma + \frac{c^2 \cdot (2 \cdot h_c^2 - w_c^2)}{(c^2 + 4 \cdot h_c^2) \cdot w_c^2} = \pm \frac{\sqrt{16 \cdot h_c^4 \cdot w_c^4 + 16 \cdot c^2 \cdot h_c^4 \cdot w_c^2 - 16 \cdot c^2 \cdot h_c^6}}{(c^2 + 4 \cdot h_c^2) \cdot w_c^2}$

und $\cos\gamma = \frac{-c^2 \cdot (2 \cdot h_c^2 - w_c^2) + 4 \cdot h_c \cdot \sqrt{w_c^4 + c^2 \cdot (w_c^2 - h_c^2)}}{(c^2 + 4 \cdot h_c^2) \cdot w_c^2}$

findet.

Zusatz. Ohne weitere Erklärung erkennt man jetzt auch die Lösung der

Aufgabe: Aus einer Seite c eines Dreiecks, der Halbierungslinie w_c ihres Gegenwinkels und der Differenz δ der an jener Seite c anliegenden Winkel α und β den halbierten Winkel γ zu berechnen.

Aufgabe 12. Der Radius des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises sei $= \varrho$, der Radius des äufsern Berührungskreises, welcher die Seite c selbst (und nicht erst deren Verlängerung) berührt, $= \varrho_c$ und diese Seite c verhalte sich zur Halbierungslinie w_c ihres Gegenwinkels $= m : n$; wie grofs sind die drei Seiten a, b und c, die drei Winkel α, β und γ und die Halbierungslinie w_c dieses Dreiecks?

Lösung. Damit man Gleichungen zwischen den gegebenen und gesuchten Gröfsen erhalte, berücksichtigt man, dafs die Dreiecke CDO und CD_cO_c der nebenstehenden Figur 6 den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ gemeinschaftlich haben und rechtwinklig also auch ähnlich sind und dafs weiter die einen Katheten OD und O_cD_c Halbmesser des inneren und äufseren Berührungskreises sind, dafs ferner die andern Katheten CD und CD_c nach einem bekannten Lehrsatz der Planimetrie leicht in den Seiten a, b und c ausgedrückt werden können und dafs schliefslich die Hypotenusen CO und CO_c sich beziehungsweise als Differenz oder Summe aus der Winkelhalbierenden w_c und den Hypotenusen OG und O_cG der rechtwinkligen Dreiecke OFG und O_cF_cG erweisen, deren Katheten OF und OF_c wieder Radien des innern und äufsern Berührungskreises sind und in welchen die

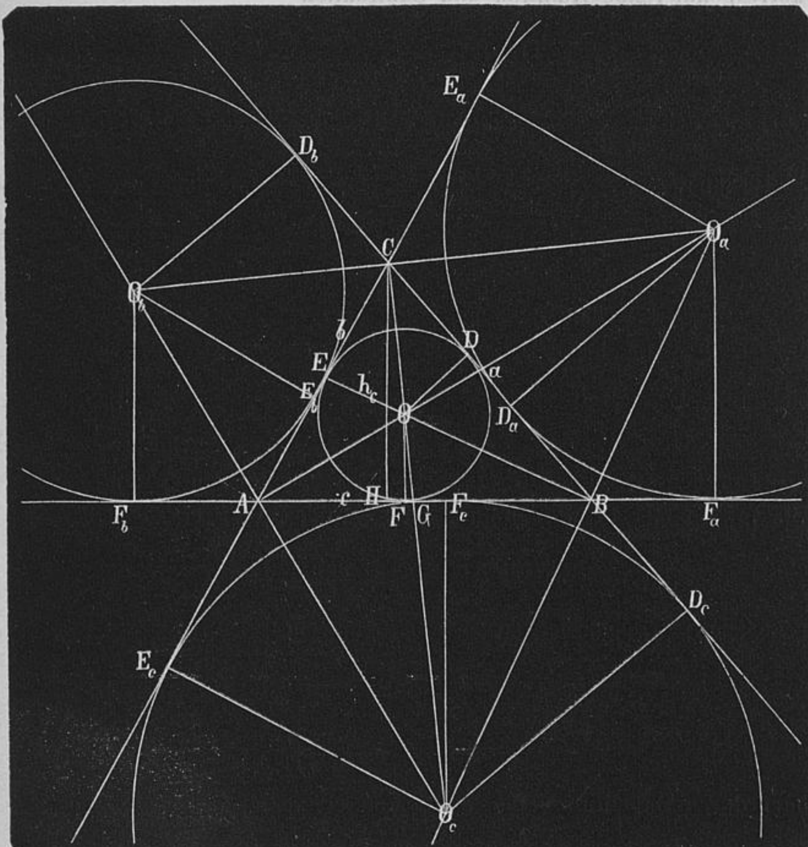


Fig. 6.

Winkel FOG und F_cO_cG von den Innenwinkeln des Dreiecks ABC abhängen. Dann findet man zunächst nach dem planimetrischen Lehrsatz I „Wenn zwei Tangenten eines Kreises einander schneiden, so sind die von den Berührungspunkten und dem Schnittpunkt begrenzten Stücke einander gleich“ $CE = CD = \frac{a + b - c}{2}$ und

$CE_c = CD_c = \frac{a+b+c}{2}$ und nun aus den ähnlichen Dreiecken COD und CO_cD_c $\varrho : \varrho_c = \frac{a+b-c}{2} : \frac{a+b+c}{2}$, woraus durch korrespondierende Addition und Subtraktion

$$1)\quad \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} = \frac{a+b}{c}$$

oder $a + b = \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} \cdot a$ und, weil sich nach der Aufgabe $\frac{c}{w_c} = \frac{m}{n}$ verhält, also $2)\ c = \frac{m}{n} \cdot w_c$

ist,
$$3)\quad a + b = \frac{m}{n} \cdot \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} \cdot w_c$$

folgt. Weiter erhält man aus den bei D und D_c rechtwinkligen Dreiecken COD und CO_cD_c, deren Hypotenusen OC und O_cC beziehungsweise $= w_c - \frac{\varrho}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ und $= w_c + \frac{\varrho_c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ sind, weil die Geraden OF und O_cF_c zur Höhe h_c parallel laufen und diese, wie in Aufgabe 11 dargethan wurde, mit der Winkelhalbierenden w_c einen Winkel $= \frac{\alpha - \beta}{2}$ bildet, wenn man auf die genannten Dreiecke den Pythagoreischen Lehrsatz anwendet, $\left(w_c - \frac{\varrho}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^2 = \varrho^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$ sowie $\left(w_c + \frac{\varrho_c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^2 = \varrho_c{}^2 + \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$ oder durch Substitution der Werte von c und a + b aus 2) und 3)

$$w_c - \frac{\varrho}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{m}{2n} \cdot \frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} \cdot w_c - \frac{m}{2n} \cdot w_c\right)^2} =$$

$$\sqrt{\varrho^2 + \frac{m^2}{4 \cdot n^2} \cdot w_c{}^2 \cdot \left(\frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_c - \varrho} - 1\right)^2} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{m^2}{n^2} \cdot w_c{}^2 \cdot \frac{\varrho^2}{(\varrho_c - \varrho)^2}}$$

sowie
$$4)\quad w_c + \frac{\varrho_c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \varrho_c \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{w_c}{\varrho_c - \varrho}\right)^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man die unbekannte Gröſse $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ entfernen, wenn man die erste mit ϱ_c und die zweite mit ϱ multipliziert und die beiden erhaltenen Gleichungen addiert; man findet dann $\varrho_c \cdot w_c + \varrho \cdot w_c = \varrho \cdot \varrho_c \cdot \sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{w_c}{\varrho_c-\varrho}\right)^2}$

$$+ \varrho\cdot\varrho_c\cdot\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{w_c}{\varrho_c-\varrho}\right)^2} = 2\cdot\varrho\cdot\varrho_c\cdot\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{w_c}{\varrho_c-\varrho}\right)^2}$$

also $\frac{(\varrho_c+\varrho)^2\cdot w_c^2}{4\cdot\varrho_c^2\cdot\varrho^2} = 1 + \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{w_c^2}{(\varrho_c-\varrho)^2}$ oder

$$5)\quad w_c = \frac{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho\cdot(\varrho_c-\varrho)}{\sqrt{(\varrho_c^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}$$

und $c = \frac{2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\cdot(\varrho_c-\varrho)}{\sqrt{(\varrho_c^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}$ sowie

$$a + b = \frac{2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\cdot(\varrho_c+\varrho)}{\sqrt{(\varrho_c^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}.$$

Um den Winkel γ zu berechnen, kann man das bei D rechtwinklige Dreieck COD benützen; dieses liefert $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\varrho}{a+b-c}$

$= \frac{\sqrt{(\varrho_c^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}{2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho}$ und, weil $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ ist,

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho}{\varrho_c^2-\varrho^2}.$$

Mit dem Winkel γ ist auch die Summe der Winkel α und β gefunden und es bleibt nun nur noch eine Gleichung für die Differenz $\alpha-\beta$ dieser Winkel anzugeben; eine solche ist schon unter 4) aufgestellt und gibt jetzt $\dfrac{2\cdot\varrho_c\cdot\varrho\cdot(\varrho_c-\varrho)}{\sqrt{(\varrho_c{}^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}+\dfrac{\varrho_c}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$$=\varrho_c\cdot\sqrt{1+\frac{\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}{(\varrho_c{}^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}\quad\text{oder}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sqrt{(\varrho_c{}^2-\varrho^2)^2-\left(2.\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}{(\varrho_c-\varrho)^2}=\sqrt{\left(\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}\right)^2-\left(\frac{2.\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho}{\varrho_c-\varrho}\right)^2}.$$

Um nun noch die Seiten a und b des Dreiecks zu berechnen, sucht man zur obigen Relation $a+b=\dfrac{2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\cdot(\varrho_c+\varrho)}{\sqrt{(\varrho_c{}^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}}$ noch eine zweite Gleichung zwischen diesen Unbekannten; als solche bietet sich die in Aufgabe 9 entwickelte Gleichung $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{(a+b)\cdot w_c}{2\cdot a\cdot b}$. Aus dieser findet man nämlich für das Produkt der Seiten a und b die Relation $a\cdot b=\dfrac{(a+b)\cdot w_c}{2\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\varrho_c\cdot\varrho\cdot(\varrho_c{}^2-\varrho^2)^2}{(\varrho_c{}^2-\varrho^2)^2-\left(2\cdot\frac{m}{n}\cdot\varrho_c\cdot\varrho\right)^2}$.

Hätte man diesen Wert von $a\cdot b$ vor der Bestimmung des Winkels γ entwickelt, so wäre die Rechnung weitläufiger geworden; ohne Benützung des Wertes von $\cos\frac{\gamma}{2}$ kann man nämlich jene Gleichung etwa in folgender Weise erhalten. Nach dem Lehrsatz I in Aufgabe 9 gelten für die Abschnitte $BD=u$ (v. Fig. 5) und $AD=v$, in welche die Seite c durch die Winkelhalbierende CD zerlegt wird, die Proportionen $\frac{u}{c-u}=\frac{a}{b}$ und $\frac{v}{c-v}=\frac{b}{a}$ oder, wenn man korrespondierend addiert, $\frac{u}{c}=\frac{a}{a+b}$ und $\frac{v}{c}=\frac{b}{a+b}$, woraus sich $u=\frac{a}{a+b}\cdot c$ oder unter Berücksichtigung der Gleichung 1) $u=\frac{\varrho_c-\varrho}{\varrho_c+\varrho}\cdot a$

und $v = \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} \cdot b$ ergibt. Nun erhält man nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz aus den Dreiecken BCD und ACD, weil der Winkel CDA $= 90 - \frac{\alpha - \beta}{2}$ ist, $a^2 = w_c^2 + \left(\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} \cdot a\right)^2 + 2 \cdot \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} \cdot a \cdot w_c \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ und $b^2 = w_c^2 + \left(\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} \cdot b\right)^2 - 2 \cdot \frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho} \cdot b \cdot w_c \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$, woraus man durch Multiplikation der ersten Gleichung mit b und der zweiten mit a und Addition der so entstandenen Relationen $a^2 \cdot b + a \cdot b^2 = b \cdot w_c^2 + a \cdot w_c^2 + \left(\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_c + \varrho}\right)^2 \cdot (a^2 \cdot b + a \cdot b^2)$ oder $\frac{4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho}{(\varrho_c + \varrho)^2} \cdot a \cdot b = w_c^2$ also $a \cdot b = \frac{(\varrho_c + \varrho)^2}{4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho} \cdot w_c^2$ und mit Benützung der Gleichung 5) wieder die oben angegebene Relation $a \cdot b = \frac{\varrho_c \cdot \varrho \cdot (\varrho_c^2 - \varrho^2)^2}{(\varrho_c^2 - \varrho^2)^2 - \left(2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho\right)^2}$ findet. Wenn man diesen Gang wählt, so gestaltet sich die Berechnung von $\cos\frac{\gamma}{2}$, wenn auch nur unbedeutend, so doch etwas einfacher, weil man jetzt sogleich den Wert von $\cos\frac{\gamma}{2}$ aus der Formel $c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ berechnen kann. Aus den Relatioueu für $a + b$ und $a \cdot b$ ergibt sich dann

$$(a - b)^2 = \frac{\left[2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho \cdot (\varrho_c + \varrho)\right]^2}{(\varrho_c^2 - \varrho^2)^2 - \left(2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho\right)^2} - \frac{4 \cdot \varrho_c \cdot \varrho \cdot (\varrho_c + \varrho)^2 \cdot (\varrho_c - \varrho)^2}{(\varrho_c^2 - \varrho^2)^2 - \left(2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho\right)^2}$$

oder $a - b = 2 \cdot (\varrho_c + \varrho) \sqrt{\frac{\varrho_c \cdot \varrho \cdot \left[\frac{m^2}{n^2} \cdot \varrho_c \cdot \varrho - (\varrho_c - \varrho)^2\right]}{(\varrho_c^2 - \varrho^2)^2 - \left(2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho\right)^2}}$ und $a_{1,2} = b_{2,1}$

$$= \frac{\varrho_c + \varrho}{\sqrt{(\varrho_c^2 - \varrho^2)^2 - \left(2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho\right)^2}} \cdot \left[\frac{m}{n} \cdot \varrho_c \cdot \varrho \pm \sqrt{\varrho_c \cdot \varrho \cdot \left[\frac{m^2}{n^2} \cdot \varrho_c \cdot \varrho - (\varrho_c - \varrho)^2\right]}\right]$$

Zusatz. Wie die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\varrho}{a+b-c}$ eben angewendet wurde, einen Winkel eines Dreiecks zu finden, von welchem der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises, ferner eine Seite c und die Summe der beiden andern Seiten a und b bekannt ist, so kann sie auch benützt werden, um folgende Aufgaben zu lösen.

a) Aus der Seite a eines Dreiecks, der Differenz d der beiden andern Seiten b und c und dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises die Winkel α, β und γ dieses Dreiecks zu berechnen.

b) In einem Dreieck sei der Radius des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$, die Differenz zweier Seiten c und a $=$ d und der Gegenwinkel der gröfseren Seite $= \gamma$; wie grofs ist der Gegenwinkel α der kleineren Seite a und die dritte Seite b?

Im ersteren Fall erhält man aus der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cdot\varrho}{a+b-c}$ zunächst $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cdot\varrho}{a+d}$ d. h. den Winkel γ und dann aus der Formel $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\cdot\varrho}{a-b+c} = \frac{2\cdot\varrho}{a-(b-c)} = \frac{2\cdot\varrho}{a-d}$ auch den zweiten Dreieckswinkel β und damit auch alle Winkel des Dreiecks.

Im zweiten Fall findet man aus $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cdot\varrho}{a+b-c} = \frac{2\cdot\varrho}{b-(c-a)}$ die Seite $b = d + 2\cdot\varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ und nun $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cdot\varrho}{b+d} = \frac{2\cdot\varrho}{2\cdot d + 2\cdot\varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\varrho}{d+\varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$.

Da der Druck dieser ganzen Abhandlung den Umfang des diesjährigen Programmes zu sehr erweitern würde, so wird der **zweite Teil** dieser Entwicklungen in der Einladungsschrift für das Jahr 1881/82 erscheinen; in demselben sind zumeist Aufgaben über Dreiecke gelöst, von welchen neben andern Elementen der Radius des eingeschriebenen oder eines angeschriebenen Kreises, eine Halbierungslinie eines Winkels oder eine Mittellinie gegeben ist; zum Schlufs folgen dann noch Aufgaben über Vierecke und über die Aufsuchung von Beziehungen der trigonometrischen Funktionen gegebenen Winkel zu einander.

Zus $\frac{}{-c}$ eben angewendet

wurde, ei von welchem der

Radius ϱ ne Seite c und die

Summe d nt ist, so kann sie

auch beni lösen.

a) A ferenz d der beiden

andern S es eingeschriebenen

Kreises d zu berechnen.

b) I es eingeschriebenen

Kreises = nd a = d und der

Gegenwin ofs ist der Gegen-

winkel α eite b?

Im ng $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{a + b - c}$

zunächst und dann aus der

Formel tg $\frac{\varrho}{\cdot d}$ auch den zweiten

Dreiecks des Dreiecks.

Im $\frac{2 \cdot \varrho}{\cdot b - c} = \frac{2 \cdot \varrho}{b - (c - a)}$

die Seit $g\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{b + d} =$

$\frac{2 \cdot}{2 \cdot d + 2}$

Da ng den Umfang des

diesjähri würde, so wird der

zweite dungsschrift für das

Jahr 18 meist Aufgaben über

Dreiecke nenten der Radius des

eingesch Kreises, eine Halbie-

rungslini gegeben ist; zum

Schlufs recke und über die

Aufsuch schen Funktionen ge-

gebenen