Die Gleichung der aequivalenten Abbildung.

Wir gehen aus von der aequivalenten Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine Ebene. In der Gauss'schen Bezeichnung sei das Bogenelement der Fläche:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{1}$$

Die Ebene sei auf rechtwinklige Cartesische Koordinaten bezogen.

Es handelt sich nun darum, diejenige Beziehung zwischen den Koordinaten u,v und x,y zu suchen, welche eine aequivalente Zuordnung der Punkte der Fläche und der Ebene ergiebt. Einem unendlich kleinen Dreieck der Fläche, dessen Ecken (u,v), (u + du, v), (u,v + dv) sind, muss dann ein inhaltgleiches Dreieck der Ebene entsprechen.

Ist der Flächeninhalt des ersten Dreiecks:

$$\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

so ist der Inhalt des zweiten:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv;$$

die Vergleichung ergiebt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{EG - F^2}. \tag{2}$$

Sind die entsprechenden Flächeninhalte nicht gleich, sondern haben sie nur ein konstantes Verhältnis k, so lautet die Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = k \sqrt{EG - F^2}. \tag{2'}$$

Dieselbe ist von (2) nicht wesentlich verschieden und lässt sich leicht auf sie zurückführen.

Da die Beziehung der Aequivalenz naturgemäss reciprok ist, so stellt Gleichung (2) auch die Abbildung der Ebene auf die Fläche vor; sie lässt sich dann besser in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{3}$$

Hieraus folgt ohne weiteres die Gleichung, welche die aequivalente Beziehung einer beliebigen Fläche auf eine andere vermittelt. Nehmen wir noch eine Fläche hinzu, deren Bogenelement gegeben sei durch:

$$ds'^2 = E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda d\varphi + G'd\varphi^2, \tag{4}$$

so ist sie aequivalent auf Fläche (1) bezogen, wenn beide gleichzeitig aequivalent auf eine Ebene bezogen sind, wenn also zugleich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

und:
$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sqrt{E'G' - F'^2}.$$

Durch Multiplikation folgt:

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die aequivalente Abbildung einer Ebene auf eine andere endlich wird dargestellt durch die Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1.$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichung bietet keine Schwierigkeiten.

Es fragt sich, unter welcher Bedingung sich die Gleichung für die aequivalente Abbildung einer Fläche auf eine Ebene und damit auch die einer Fläche auf eine andere zurückführen lässt auf die einfache Gleichung, welche die Abbildung zweier Ebenen vermittelt.

Diese Reduction ist für die Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

jedenfalls dann möglich, wenn:

$$(7) \qquad \sqrt{EG - F^2} = U.V,$$

wenn also der Ausdruck des Flächenelementes sich zerlegen lässt in ein Produkt zweier Grössen, von denen jede nur Funktion der einen Variabeln ist. Die Reduktion wird dann vermittelt durch die Substitution:

$$(8) \qquad Udu = du_1, \quad Vdv = dv_1.$$

Obige Bedingung ist z. B. erfüllt bei allen Rotationsflächen, die auf ihre Meridiane und Parallelkreise bezogen sind. Sie ist ferner erfüllt für alle Flächen, bei denen die Differenz der Hauptkrümmungen einen konstanten Wert hat, wenn $u = c$ und $v = c$ die Krümmungslinien der Flächen darstellen. Denn es gelten dann für alle Flächen die bekannten Gleichungen:

$$(9) \qquad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \lg \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0,$$

$$(10) \qquad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0.$$

Setzt man nun:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = a \text{ (konstant)}$$

und differenziert die Gleichung (9) nach u, (10) nach v und addiert, so folgt:

$$(11) \qquad a \frac{\partial^2 \lg \sqrt{EG}}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Da hier $F = 0$, so ist diese Gleichung mit (7) identisch.

Die oben erwähnten Flächengattungen bieten also Beispiele für die Reduktion der Gleichung (3) auf die einfachere Form:

$$(12) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} = 1$$

deren allgemeine Integration ohne Schwierigkeit möglich ist.

Die betrachtete Fläche ist damit auf das Kurvensystem $u_1 = c$, $v_1 = c$ bezogen, welches eine besondere Eigenschaft darbietet. Es sind nämlich alle unendlich kleinen Maschen dieses Netzes, welche gleichen Incrementen du_1 und dv_1 entsprechen, einander inhaltsgleich.

Nennt man ein solches Kurvensystem der Abkürzung halber etwa *ein „autoedrisches" System*, so ist also die Frage nach der Reduktion der Gleichung (3) auf (12) identisch mit der Aufgabe, auf der Fläche ein autoedrisches Koordinatennetz zu finden.

Diese Kurvensysteme spielen also für die aequivalente Abbildung dieselbe Rolle, wie die isometrischen Systeme für die konforme.

Für die oben erwähnten Flächen sind die Krümmungslinien auch autoedrische Kurven.

Die kongruente Abbildung.

Die Aufgabe, eine Fläche auf eine andere aequivalent abzubilden, ist keine bestimmte, da sie, wie wir sahen, analytisch durch eine partielle Differentialgleichung zwischen den 4 von einander abhängigen Grössen ausgedrückt wird. Es müssen noch weitere Bedingungen hinzukommen, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen.

Es liegt nahe, mit der Forderung der Aequivalenz die Forderung der Konformität zu verbinden. Die Abbildung ist dann, wie bekannt, *eine kongruente Abbildung;* sind die Flächen durch ihre Bogenelemente gegeben:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{1}$$

$$ds'^2 = E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda d\varphi + G'd\varphi^2, \tag{2}$$

so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$ds^2 = ds'^2. \tag{3}$$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt nun auf einfache Weise zu der weiteren Bedingung, dass in entsprechenden Punkten beider Flächen das Krümmungsmass gleichen Wert haben muss. Die Gauss'sche Invariante erscheint hier in symmetrischer Form. Es sei deshalb gestattet, diese Entwicklung hier mitzuteilen.

Die Gleichung (3) lässt sich ersetzen durch das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} & E\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial v}{\partial \lambda} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)^2 = E', \\ & E\frac{\partial u}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right) + G\frac{\partial v}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} = F', \\ & E\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 = G'. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Setzt man hier:

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \cos\gamma, \quad \frac{F'}{\sqrt{E'G'}} = \cos\gamma', \tag{6}$$

so lässt sich das System (5) ersetzen durch ein weiteres System von 4 Gleichungen mit einer Hilfsveränderlichen σ:

$$
(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = \sqrt{\dfrac{E'}{E}} \dfrac{\sin\left(\sigma + \dfrac{\gamma + \gamma'}{2}\right)}{\sin \gamma}; \quad \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = -\sqrt{\dfrac{E'}{G}} \dfrac{\sin\left(\sigma - \dfrac{\gamma - \gamma'}{2}\right)}{\sin \gamma}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \sqrt{\dfrac{G'}{E}} \dfrac{\sin\left(\sigma + \dfrac{\gamma - \gamma'}{2}\right)}{\sin \gamma}; \quad \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = -\sqrt{\dfrac{G'}{G}} \dfrac{\sin\left(\sigma - \dfrac{\gamma + \gamma'}{2}\right)}{\sin \gamma}. \end{cases}
$$

Wir untersuchen zunächst die Bedingung dafür, dass *eine Fläche* auf *eine Ebene* abwickelbar ist.

Wir setzen also:

$$E = G = 1, \; F = 0$$

und schreiben statt E', G', F' wieder E, G, F. Dann wird:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \; \cos \gamma' = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

und die Gleichungen (8) gehen über (wenn man noch statt $\left(\sigma + \frac{\pi}{4}\right)$ überall σ schreibt) in:

$$
(8) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = \sqrt{E} \sin\left(\sigma + \dfrac{\gamma'}{2}\right); \quad \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = \sqrt{G} \cos\left(\sigma + \dfrac{\gamma'}{2}\right); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \sqrt{G} \sin\left(\sigma - \dfrac{\gamma'}{2}\right); \quad \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{G} \cos\left(\sigma - \dfrac{\gamma'}{2}\right). \end{cases}
$$

Hieraus folgen die notwendigen Bedingungen:

$$
(9) \quad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\sqrt{E} \sin\left(\sigma + \frac{\gamma'}{2}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\sqrt{G} \sin\left(\sigma - \frac{\gamma'}{2}\right)\right\} \\ \text{und:} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\sqrt{E} \cos\left(\sigma + \frac{\gamma'}{2}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\sqrt{G} \cos\left(\sigma - \frac{\gamma'}{2}\right)\right\}. \end{gathered}
$$

Führt man die Differentiationen aus, so erhält man durch passende Multiplikation und Addition:

$$
(10) \quad \begin{cases} 2 \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{F}{\sqrt{EG}}\right) + \dfrac{2F}{\sqrt{EG}} \dfrac{\partial \lg \sqrt{E}}{\partial \varphi} - \dfrac{2}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial \lambda}; \\ -2 \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{F}{\sqrt{EG}}\right) + \dfrac{2F}{\sqrt{EG}} \dfrac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial \lambda} + \dfrac{2 \cdot}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial \varphi}. \end{cases}
$$

Sollen diese Gleichungen zusammen bestehen können, so muss, wenn man setzt:

$$(11) \quad 2 \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = K_{\lambda\varphi}, \; 2 \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = -K_{\varphi\lambda}$$

die Bedingung erfüllt sein:

$$(12) \quad \frac{\partial K_{\lambda\varphi}}{\partial \lambda} + \frac{\partial K_{\varphi\lambda}}{\partial \varphi} = 0.$$

Wir können hier einfacher schreiben:

$$\sqrt{EG - F^2} K_{\lambda\varphi} = F \frac{\partial \lg \sqrt{\dfrac{E}{G}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}, \quad \sqrt{EG - F^2} K_{\varphi\lambda} = F \frac{\partial \lg \sqrt{\dfrac{G}{E}}}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \varphi}.$$

Die linke Seite der Gleichung (12) ist nun bis auf einen Faktor identisch mit dem Gauss'schen Krümmungsmass K; wir erhalten also die bekannte Bedingung:

$$K = 0 \tag{13}$$

und K ist zugleich in der symmetrischen, von Weingarten und Anderen gegebenen Form ausgedrückt:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial K_{\lambda\varphi}}{\partial \lambda} + \frac{\partial K_{\varphi\lambda}}{\partial \varphi} \right\}. \tag{14}$$

Kehren wir zu den Gleichungen zurück, die die kongruente Abbildung einer Fläche auf eine andere beliebige Fläche vermitteln, so erhält man auf analoge Weise als Bedingung des gleichzeitigen Bestehens dieser Gleichungen, dass das Krümmungsmass in entsprechenden Punkten beider Flächen gleichen Wert haben muss.

Setzt man der einfacheren Rechnung halber:

$$F = F' = 0, \quad \gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2},$$

so geht das Gleichungssystem (8) über in:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \lambda} &= \sqrt{\frac{E'}{E}} \cos \sigma; & \frac{\partial v}{\partial \lambda} &= -\sqrt{\frac{E'}{G}} \sin \sigma; \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \sqrt{\frac{G'}{E}} \sin \sigma; & \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \sqrt{\frac{G'}{G}} \cos \sigma. \end{aligned} \tag{8'}$$

Hieraus folgt die Bedingung:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{\frac{E'}{E}} \cos \sigma\right) - \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\frac{G'}{E}} \sin \sigma\right) = 0; \\ &\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{\frac{E'}{G}} \sin \sigma\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\frac{G'}{G}} \cos \sigma\right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Durch passende Multiplikation und Addition ergiebt sich:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(2\sigma)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lg \sqrt{\frac{G}{E}}\right) \sin 2\sigma + \sqrt{\frac{G'}{E'}} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lg \sqrt{\frac{G}{E}}\right) \cos 2\sigma - \sqrt{\frac{G'}{E_1}} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lg \frac{G'}{\sqrt{EG}}\right) \\ &\qquad \text{und:} \\ &\frac{\partial(2\sigma)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lg \sqrt{\frac{E}{G}}\right) \sin 2\sigma - \sqrt{\frac{E'}{G'}} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lg \sqrt{\frac{E}{G}}\right) \cos 2\sigma + \sqrt{\frac{E'}{G'}} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lg \frac{E'}{\sqrt{EG}}\right). \end{aligned} \right. \tag{16'}$$

Aendert man diese Gleichungen so um, dass E,G nur in Ableitungen nach u und v, E',G' nur in Ableitungen nach λ und φ erscheinen, so folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (a_1 \cos \sigma - a_2 \sin \sigma - b_1) \sqrt{G'}, \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = (-a_1 \sin \sigma - a_2 \cos \sigma + b_2) \sqrt{E'}. \end{aligned} \right. \tag{16''}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial u} = a_1, \quad \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial \lg \sqrt{G'}}{\partial \lambda} = b_1, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \lg \sqrt{E}}{\partial v} = a_2, \quad \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial \lg \sqrt{E'}}{\partial \varphi} = b_2.$$

Fordert man jetzt wieder als notwendige Bedingung, dass die Ableitung von $\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}$ nach λ identisch sei mit der Ableitung von $\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}$ nach φ, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$A \sin\sigma + B \cos\sigma + C = 0. \tag{17}$$

Hier ist:

$$A = -\sqrt{E'G'}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) - \frac{a_2}{2\sqrt{G'}}\frac{\partial G'}{\partial\lambda} + \frac{a_1}{2\sqrt{E'}}\frac{\partial E'}{\partial\varphi}; \tag{17'}$$

$$B = -\sqrt{E'G'}\,(a_1 b_1 + a_2 b_2) + \frac{a_1}{2\sqrt{G'}}\frac{\partial G'}{\partial\lambda} + \frac{a_2}{2\sqrt{E'}}\frac{\partial E'}{\partial\varphi}. \tag{17''}$$

Beide Ausdrücke verschwinden identisch. Es bleibt also nur:

$$C = 0$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial a_1}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial a_2}{\partial v} + a_1^2 + a_2^2 = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial b_1}{\partial\lambda} + \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial b_2}{\partial\varphi} + b_1^2 + b_2^2. \tag{17'''}$$

Die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite sind durchaus gleichartig gebaut; während links die Grössen E, G und ihre Ableitungen nach u und v vorkommen, treten rechts E', G' und ihre Ableitungen nach λ und φ in derselben Verbindung auf. Die weitere Ausrechnung ergiebt:

$$\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right\} = \frac{1}{2\sqrt{E'G'}}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial G'}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial E'}{\partial\varphi}\right)\right\}. \tag{18}$$

Links sowohl, als rechts steht das Krümmungsmass der betreffenden Fläche!

Die aequivalente Abbildung einer Ebene auf eine andere.

Die Gleichung der aequivalenten Abbildung einer Ebene auf eine andere war:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = 1. \tag{1}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht auf andere, nicht Cartesische Koordinaten übertragen; für Polarkoordinaten r, ϑ, ρ, φ würde sie die Form annehmen:

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r}{\rho}. \tag{1}$$

Nimmt man ein beliebiges Kurvensystem u=c und v=c in der xy Ebene und ein beliebiges Kurvensystem λ=c und φ=c in der $\xi\eta$ Ebene zu Koordinatenkurven, so geht die Gleichung der aequivalenten Beziehung einfach über in:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\lambda}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}}. \tag{1''}$$

Da hier zur Bestimmung von 2 Funktionen nur eine Gleichung gegeben ist, so lässt sich in obigen Gleichungen eine der beiden abhängigen Variabeln ganz willkürlich annehmen, also z. B. setzen in (1):

$$\xi = f(x,y). \tag{2}$$

Dann bleibt für η noch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Behandlung auf das System simultaner Gleichungen führt:

$$\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = d\eta. \tag{3}$$

Man erhält 2 Formen für das Integral:

$$\eta = \int \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}[\xi,y]} + F(\xi) \tag{4}$$

und:

$$\eta = -\int \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}[\xi,x]} + F_1(\xi). \tag{4'}$$

Die beiden Formen sind nicht wesentlich verschieden: die Klammern unter dem Integralzeichen bedeuten, dass in (4) in dem Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x}$ für x derjenige Wert in ξ und y einzusetzen ist, der sich aus (2) ergiebt. Analog in (4').

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) enthält also 2 willkürliche Funktionen, zu deren Bestimmung Nebenbedingungen notwendig sind.

Die Bedeutung von f ergiebt sich sofort:

$$f(x,y) = c$$

stellt die Kurvenschar dar, welche in der xy Ebene den Parallelen zur η Axe entsprechen.

Einfache Abbildungen, die sich aus bestimmten Werten der Funktionen f und F ergeben, hat Schellhammer l. c. untersucht; es handelt sich bei ihm im wesentlichen um die Bestimmung der aequivalenten Abbildung in der Weise, dass vorgegebenen Kontouren andere bestimmte Kontouren entsprechen. Die hauptsächlichsten von ihm untersuchten Abbildungen sind:

$$\xi = x,\ \eta = y + F(\xi);$$

$$\xi = px,\ \eta = \frac{y}{p};$$

$$\xi = \xi_0 + ax + by,\ \eta = \eta_0 + a_1x + b_1y, \qquad ab_1 - a_1b = 1;$$

$$\xi = \frac{p}{x},\ \eta = -\frac{x^2y}{p};$$

$$\eta = q\frac{x}{y},\ \eta = \frac{y^2}{2q}.$$

Ehe wir auf die Bestimmung der aequivalenten Abbildung durch Nebenbedingungen eingehen, sei es gestattet, kurz die Resultate der Tissot'schen Untersuchungen über eine beliebige Abbildung einer Fläche auf eine andere anzugeben, soweit sie hier in Betracht kommen. Tissot weist nach:

1. In jeder aequivalenten Abbildung giebt es ein und nur ein System orthogonaler Kurvenscharen, das wieder auf ein orthogonales abgebildet wird.

2. In jeder aequivalenten Abbildung giebt es ein und nur ein System sich schiefwinklig schneidender Kurvenscharen, dessen Bilder gleiche Bogenlänge haben („Automekoische“ Kurven).

Wir wollen im Anschluss hieran 1. die Abbildungen untersuchen, für welche die Parallelen zur x- und y Axe selbst dieses orthogonale System bilden. Tissot hat diese Abbildung als *„rektangulär“* bezeichnet; ihre Behandlung ist im nächsten Abschnitt enthalten.

Es sollen ferner jetzt die Abbildungen behandelt werden, für welche *die Parallelen zur* x *Axe eine Schar automekoischer Kurven* sind. Jede Strecke auf einer solchen Parallelen wird dann in der Abbildung in ihrer wahren Länge wiedergegeben.

Die Bedingung dafür ist, wie leicht zu sehen:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = 1, \tag{5}$$

welche sich auch schreiben lässt mit Benutzung von (1):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = 1. \tag{5'}$$

Setzt man:

$$dy = \cos \psi \, d\xi + \sin \psi \, d\eta,$$

so folgt:

$$y = \xi \cos \psi + \eta \sin \psi + \int (\xi \sin \psi - \eta \cos \psi) \, d\psi;$$

also das allgemeine Integral von (5) ist:

$$\begin{cases} y = \xi \cos \psi + \eta \sin \psi + f(\psi), \\ f'(\psi) = \xi \sin \psi - \eta \cos \psi. \end{cases} \tag{6}$$

Setzt man, um ein einfaches Resultat zu erhalten:

$$\begin{aligned} f'(\psi) &= \xi_0 \sin \psi - \eta_0 \cos \psi, \\ f(\psi) &= - \xi_0 \cos \psi - \eta_0 \sin \psi, \end{aligned} \tag{7}$$

so folgt:

$$y = (\xi - \xi_0) \cos \psi + (\eta - \eta_0) \sin \psi$$

und:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0},$$

also:

$$y = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}. \tag{8}$$

Da nun:

$$x = \int \frac{d\xi}{\frac{\partial y}{\partial \eta}[\xi, y]} + F(y),$$

so folgt:

$$x = y \arcsin \frac{\xi - \xi_0}{y} + F(y)$$

oder:

$$x = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} \arcsin \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}} + F(y). \tag{9}$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher schreiben:

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi - \xi_0 = y \sin \dfrac{x - F(y)}{y}, \\ \eta - \eta_0 = y \cos \dfrac{x - F(y)}{y}. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist kurz besprochen auch bei Schellhammer l. c. pag. 78.

Die rektanguläre Abbildung.

Es handele sich zunächst allgemein um 2 beliebige Flächen, die auf orthogonale Koordinaten bezogen seien und deren Bogenelemente gegeben sind durch die Ausdrücke:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

und:

$$ds'^2 = E'\,du'^2 + G'\,dv'^2.$$

Die Gleichung der aequivalenten Beziehung ist, wie bekannt:

$$(1)\qquad \frac{\partial u'}{\partial u} \cdot \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v} \cdot \frac{\partial v'}{\partial u} = k\,\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{E'G'}}.$$

Sollen nun die Kurven, welche auf der zweiten Fläche die Kurven $u = c$ und $v = c$ abbilden, ebenfalls ein orthogonales Netz bilden, so kommt die Bedingung hinzu:

$$(2)\qquad E'\frac{\partial u'}{\partial u} \cdot \frac{\partial u'}{\partial v} + G'\frac{\partial v'}{\partial u} \cdot \frac{\partial v'}{\partial v} = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) stellen zusammen die rektanguläre Abbildung dar.

Die rektanguläre Abbildung einer Ebene auf eine andere wird also dargestellt durch das System:

$$(1')\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = k,$$

$$(2')\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Das erste Gleichungssystem lässt sich in vielen Fällen auf das zweite reducieren, so besonders einfach in dem Fall, dass eine der beiden Flächen eine Rotationsfläche ist.

Es soll deshalb hier nur die rektanguläre Abbildung *einer Ebene auf eine andere* untersucht werden.

Es handelt sich also um die Integration des Systems simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (1′) und (2′), welches leicht auf die von Bonnet gegebene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung führt.

Wir setzen dazu den Vergrösserungskoefficienten k gleich 1 und wählen ξ und η statt x und y als unabhängige Veränderliche. Man erhält dann folgendes System:

$$(1'')\qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = 1,$$

$$(2'') \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

Bezeichnen nun p, q, r, s, t die partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von y nach ξ und η, so folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{q}{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{p}{p^2+q^2},$$

y muss also der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{p^2+q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{q}{p^2+q^2}\right) = 0.$$

oder:

$$(3) \qquad (p^2 - q^2)(r - t) + 4\,p\,q\,s = 0.$$

Diese Gleichung, der auch die Veränderliche x genügt, ist bereits von Bonnel l. c. gegeben, aber nicht auf ihre Integration untersucht worden.

Um dieselbe zu integrieren, wende zunächst die Legendre'sche Transformation an und setze:

$$(4) \qquad \begin{cases} y = p\xi + q\eta - u, \\ \xi = \dfrac{\partial u}{\partial p}, \; \eta = \dfrac{\partial u}{\partial q}. \end{cases}$$

Man erhält die Gleichung:

$$(5) \qquad (p^2-q^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right) + 4\,pq\,\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = 0.$$

Führt man hierin 2 neue unabhängige Veränderliche ein:

$$(6) \qquad \begin{cases} 2\alpha = \lg \sqrt{p^2+q^2} - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{p}{q}, \\ 2\beta = \lg \sqrt{p^2+q^2} + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

so geht die Gleichung (5) über in eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koefficienten:

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0$$

und führt man noch als neue abhängige Veränderliche ein:

$$(8) \qquad v = u\,e^{-(\alpha+\beta)},$$

so erhält man für v die Gleichung:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \beta} = v.$$

Zu derselben Gleichung gelangt Korkine, indem er ausgeht von der Differentialgleichung:

$$\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} = 0.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (9) findet sich bei Poisson[1]) und Cournot[2]) in dreifach verschiedenen Formen, welche stets 2 willkürliche Funktionen enthalten. Indessen er-

[1]) Poisson, théorie de la chaleur. Paris 1835. Chap. VI, pag. 146 ss.

[2]) Cournot, Theorie der Functionen, bearb. von Schnuse, Darmstadt 1845. Bd. II, pag. 576 ss.

scheint die allgemeine Lösung in viel zu komplicierter Form, als dass sie sich mit Nutzen für die weitere Rechnung verwenden liesse; einfache partikuläre Integrale finden sich bereits in der Integralrechnung von Euler. Dieselben sind:

$$v = e^{m\alpha + n\beta}, \qquad mn = 1,$$

und:

$$v = \sin (m'\alpha - n'\beta),\ m'n' = 1,$$

$$v = \cos (m''\alpha - n''\beta),\ m''n'' = 1.$$

Statt nun x und y weiter als Funktionen von ξ und η zu bestimmen, können wir x, y, ξ und η als Funktionen der beiden Hilfsvariabeln α und β bestimmen. Hierbei ist v als bekannte Funktion von α und β anzusehen.

Es war (4):

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial (v e^{\alpha+\beta})}{\partial p} = e^{\alpha+\beta}\left\{\left(v + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial p} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial p}\right\}.$$

Setzt man für $\frac{\partial \alpha}{\partial p}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial p}$ die zugehörigen Werte in α und β ein, so folgt schliesslich:

(10) $$2\xi = \left(2v + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right)\sin(\beta - \alpha) + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\cos(\beta - \alpha)$$

und analog:

(11) $$2\eta = \left(2v + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right)\cos(\beta - \alpha) - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\sin(\beta - \alpha).$$

Ferner war nach (4):

$$2y = p \, . \, 2\xi + q \, . \, 2\eta - 2u.$$

Hieraus folgt:

(12) $$2y = \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) e^{\alpha+\beta}.$$

Schliesslich war:

$$dx = \frac{q d\xi - p d\eta}{p^2 + q^2} = \frac{q\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - p\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}}{p^2 + q^2}\, d\alpha + \frac{q\frac{\partial \xi}{\partial \beta} - p\frac{\partial \eta}{\partial \beta}}{p^2+q^2}\, d\beta.$$

Setzt man hier für p und q ihre Werte in α und β ein und ermittelt die Werte der partiellen Ableitungen von ξ und η nach α und β, so folgt:

(13) $$2\,dx = e^{-2(\alpha+\beta)}\left\{-\frac{\partial(2y)}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial(2y)}{\partial \beta}\, d\beta\right\}.$$

dx ist stets ein vollständiges Differential; die Gleichungen (10), (11), (12), (13) geben somit die vollständige Lösung des Systems (1''), (2''). Jeder bestimmte Wert von v als Function von α und β, welcher die Gleichung (9) befriedigt, führt zu einer bestimmten rektangulären Abbildung der einen Ebene auf die andere. Die allgemeine Lösung der Gleichung für v lässt sich hierbei direkt nicht verwerten, wir wollen deshalb jetzt die aequivalenten Abbildungen betrachten, die den schon erwähnten partikulären Integralen von (9) entsprechen.

Gehe aus von der Partikularlösung:

(14) $$v = e^{\alpha + \beta}.$$

Das System (10) bis (13) ergiebt:

$$\xi = 2e^{\alpha + \beta} \sin(\beta - \alpha), \quad \eta = 2e^{\alpha + \beta} (\beta - \alpha)$$

und

$$y = e^{2(\alpha + \beta)}, \qquad x - x_0 = 2(\beta - \alpha);$$

also:

(14') $$\xi = 2\sqrt{y} \sin \frac{x - x_0}{2}, \qquad \eta = 2\sqrt{y} \cos \frac{x - x_0}{2}$$

oder:

(14'') $$x - x_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta}, \qquad y = \frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2).$$

Das orthogonale System, welches den Parallelen zur x- und y Axe entspricht, wird also hier gebildet aus koncentrischen Kreisen und Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt. Den Parabeln:

$$y = A\,(x - x_0)^2$$

würden in der $\xi\eta$ Ebene Archimedische Spiralen entsprechen.

Die Abbildung ist nur eindeutig und bestimmt, wenn es sich um ein Gebiet der xy-Ebene handelt, in welchem alle Ordinaten positiv und die grösste Differenz der vorkommenden Abscissen 4π ist. Der Streifen, der durch die Parallelen $x = -2\pi$, $x = +2\pi$ und $y = 0$ begrenzt ist, wird auf die ganze $\xi\eta$ Ebene abgebildet.

Auf ganz dieselbe Art der Abbildung würde die Partikularlösung:

$$v = e^{-(\alpha + \beta)} (\beta - \alpha)$$

führen. Man erhält hier:

$$\xi = \sqrt{2(x - x_0)} \cos(y - y_0), \quad \eta = \sqrt{2(x - x_0)} \sin(y - y_0).$$

Die Lösung:

$$v = a \cos(\beta - \alpha) + b \sin(\beta - \alpha)$$

ist überhaupt nicht verwendbar.

Eine weitere allgemeinere Partikularlösung war:

(15) $$v = e^{m\alpha + n\beta}, \quad \text{wo: } mn = 1.$$

Das Gleichungssystem (10), (11), (12), (13) ergiebt hier:

$$2\xi = (m + n + 2)\, v \sin(\beta - \alpha) + (n - m)\, v \cos(\beta - \alpha),$$

$$2\eta = (m + n + 2)\, v \cos(\beta - \alpha) - (n - m)\, v \sin(\beta - \alpha),$$

$$2y = (m + n)\, v\, e^{\alpha + \beta}, \quad 2(x - x_0) = -\frac{m+1}{m-1}(m + n)\, v\, e^{-(\alpha + \beta)}.$$

Setzt man:

$$m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right), \quad n = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right),$$

wo also λ einen beliebig zu wählenden Winkel bezeichnet, so folgt:

$$\xi = \frac{2v \cos\frac{\lambda}{2}}{\cos\lambda} \sin\left(\frac{\lambda}{2} + \beta - \alpha\right), \quad \eta = \frac{2v \cos\frac{\lambda}{2}}{\cos\lambda} \cos\left(\frac{\lambda}{2} + \beta - \alpha\right),$$

$$y = \frac{v e^{\alpha + \beta}}{\cos\lambda}, \qquad x - x_0 = \frac{v e^{-(\alpha + \beta)} \cot\frac{\lambda}{2}}{\cos\lambda}.$$

Führt man in der $\xi\eta$ Ebene Polarkoordinaten ein:

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \; \eta = \rho \sin \vartheta,$$

so folgt:

$$\rho = \frac{2v \, . \cos \frac{\lambda}{2}}{\cos \lambda}, \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta = \frac{\lambda}{2} + \beta - \alpha$$

und schliesslich:

(15′)

$$\rho = \sqrt{2y(x - x_0) \sin \lambda}, \quad \vartheta + \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin \lambda} \lg \sqrt{\frac{y \cot \frac{\lambda}{2}}{x - x_0}} - \cot \lambda \lg \sqrt{\frac{y(x - x_0) \cos^2 \lambda}{\cot \frac{\lambda}{2}}}$$

und umgekehrt:

(15″)

$$y = \frac{1}{\cos \lambda} \left(\frac{\rho \cos \lambda}{2 \cos \frac{\lambda}{2}}\right)^{1 + \cos \lambda} e^{\left(\vartheta + \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \sin \lambda}, \quad x - x_0 = \frac{\cot \frac{\lambda}{2}}{\cos \lambda} \left(\frac{\rho \cos \lambda}{2 \cos \frac{\lambda}{2}}\right)^{1 - \cos \lambda} e^{-\left(\vartheta + \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \sin \lambda}.$$

Bei dieser Abbildung entsprechen also den gleichseitigen Hyperbeln:

$$y \, (x - x_0) = c$$

koncentrische Kreise in der $\xi\eta$ Ebene und den Geraden $\vartheta = c$ in der letzteren entsprechen parabolische Kurven:

$$y = A \, (x - x_0)^{\cot^2 \frac{\lambda}{2}}.$$

Das orthogonale System, in welches die Parallelen zur x- und y Axe übergehen, wird gebildet aus logaritmischen Spiralen[1]).

Wir untersuchen endlich noch diejenige Abbildung, welche vermittelt wird durch das Integral:

(16) $$v = \sin (m\alpha - n\beta), \qquad mn = 1.$$

Setzt man hier wieder:

$$m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right), \quad n = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right),$$

so erhält man nach einiger Rechnung die Werte:

$$y = - e^{(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\lambda} \cos (m\alpha - n\beta), \quad x - x_0 = e^{-(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\lambda} \sin (m\alpha - n\beta - \lambda)$$

und:

$$\xi \cos \lambda = \sin (\beta - \alpha) \sin (m\alpha - n\beta - \lambda) - \cos (\beta - \alpha) \cos (m\alpha - n\beta),$$

$$\eta \cos \lambda = \cos (\beta - \alpha) \sin (m\alpha - n\beta - \lambda) + \sin (\beta - \alpha) \cos (m\alpha - n\beta).$$

Die Ausdrücke für x und y als Funktionen von ξ und η werden hier kompliciert; setzt man wieder:

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \; \eta = \rho \sin \vartheta$$

und ferner:

$$r^2 = 2\rho^2 - \rho^4 \cos^2 \lambda - 1, \; \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\rho^2 - r}{\rho^4 \cos^2 \lambda + (\rho^2 - 1)^2}, \quad \cos (\varphi_2 \operatorname{tg} \lambda) = \sqrt{\frac{\rho^2 + r}{2 \sin \lambda}} \cos \lambda,$$

---

[1]) Die beiden hier gegebenen Abbildungen hat Korkine ebenfalls mitgeteilt.

so erhält man schliesslich:

$$(16') \quad y = -e^{(\varphi_2 - \varphi_1 + \vartheta)\sin\lambda} \sqrt{\frac{(\rho^2 + r)\sin\lambda}{2}}, \quad x - x_0 = e^{-(\varphi_2 - \varphi_1 + \vartheta)\sin\lambda} \sqrt{\frac{(\rho^2 - r)\sin\lambda}{2}}.$$

Die Bilder der Parallelen zur x- und y Axe sind also wenig einfache transcendente Kurven. Den gleichseitigen Hyperbeln:

$$y\,(x - x_0) = c$$

entsprechen auch hier wieder koncentrische Kreise.

Blicken wir auf den eingeschlagenen Integrationsweg zurück, so haben wir aus dem ursprünglichen simultanen System:

$$(1'') \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = 1,$$

$$(2'') \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung abgeleitet:

$$(3) \qquad (p^2 - q^2)(r - t) + 4pqs = 0,$$

deren Koefficienten die Ableitungen der ersten Ordnung enthalten und welcher sowohl x als y Genüge leisten. Durch die Legendre'sche Transformation wurden nun p und q selbst als neue Veränderliche eingeführt.

Nimmt man nun an, dass Lösungen möglich sind, in welchen diese Ableitungen: $p = \frac{\partial y}{\partial \xi}$, $q = \frac{\partial y}{\partial \eta}$ nicht mehr von einander unabhängig sind, so würde die obige Transformation hier nicht verwendbar, die weitere Integration in der angegebenen Art hier nicht durchführbar sein. Fasst man die Differentialgleichung zweiter Ordnung als Gleichung einer Flächenschar auf, so würde der eingeschlagene Integrationsweg also unzulänglich sein, um die in der Flächenschar enthaltenen abwickelbaren Flächen zu ermitteln. Oder bleibt man bei dem vorgelegten geometrischen Problem, so haben die erwähnten Lösungen folgende geometrische Eigenschaft: Die Ableitungen von y nach ξ und η, also auch die ersten partiellen Ableitungen von x, also auch umgekehrt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ hängen nur von einer bestimmten Funktion $t(x,y)$ ab. Sie bleiben also konstant, wenn t konstant ist, d. h. wenn (x,y) sich auf einer Kurve einer bestimmten Kurvenschar, (ξ,η) sich auf deren Bilde bewegt. Für alle Punkte einer solchen Kurve bleiben also auch:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}$$

konstant; *die Tissot'sche Indikatrix jedes solchen Punktes hat konstante Axen, also die Deformationen für alle Punkte einer solchen Kurve sind überall die nämlichen.*

Zur Behandlung dieses besonderen Falles gehen wir zurück auf das System:

$$(1') \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,$$

$$(2') \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Diesem System wird unmittelbar Genüge geleistet, wenn man setzt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a \cos \varphi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = - a \sin \varphi, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{a} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{a} \cos \varphi.$$

Es ergeben sich hieraus für a und φ die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin \varphi}{a}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(a \cos \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos \varphi}{a}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(a \sin \varphi) = 0;$$

aus welchen durch Addition und passende Multiplikation folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{a^3} \frac{\partial a}{\partial x}. \tag{18}$$

Bis hierher ist die Rechnung ganz allgemein; führt man jetzt die Bedingung ein, dass die Ableitungen von ξ und η nach x und y nur von einer Grösse abhängen sollen, so ist diese dann erfüllt, wenn a und φ von einander abhängen, also wenn:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung erhält man aus (18):

$$a \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a^3} \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2$$

oder:

$$\frac{\partial a}{\partial y} = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial x}. \tag{19}$$

Das zweite Vorzeichen führt sofort zu Widersprüchen. Die Gleichung (18) ergiebt dann weiter:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{1}{b} \frac{\partial a}{\partial y},$$

also:

$$\varphi = \lg \frac{c}{a}, \tag{20}$$

wo c eine beliebige Konstante ist.

Für das System (17) lässt sich also nun schreiben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a \cos \lg \frac{c}{a}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = - a \sin \lg \frac{c}{a}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{a} \sin \lg \frac{c}{a}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{a} \cos \lg \frac{c}{a}. \tag{21}$$

Man sieht, dass:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 1 \tag{22}$$

und schreibt man die Gl. (19) in der Form:

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{1}{a}\right)}{\partial x},$$

so sieht man, dass Gl. (19) die Bedingung dafür enthält, *dass es eine Funktion σ giebt, deren Ableitungen nach den Axen die Grössen* $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ *sind.* Dies ist also eine besonders bemerkenswerte Eigenschaft der zu untersuchenden Abbildungen. Die Gleichung (22) lässt sich also als Differentialgleichung der Funktion σ auffassen, deren allgemeines Integral gegeben ist durch das System:

(23) $$\sigma = a x + \frac{y}{a} + f(a), \qquad 0 = x - \frac{y}{a^2} + f'(a).$$

Diese Eigenschaft, dass es eine derartige Funktion σ giebt, ist für die obigen Abbildungen charakteristisch; *sie tritt überhaupt nur auf bei aequivalenten Abbildungen;* bei konformen nur dann, wenn dieselben kongruent sind oder sich durch Koordinatentransformation auf eine kongruente reducieren lassen.

Wir kehren zurück zur Gleichung (21).

$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ sind alle nur von der einen Grösse a abhängig, welche aus der 2. Gleichung von (23) als Funktion von (x, y) bekannt ist. Fasst man in dieser Gleichung a als veränderlichen Parameter auf, so stellt sie eine Schar von Geraden in der xy Ebene vor und der zugehörige Richtungskoefficient ist: $y' = a^2$.

Bildet man nun:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + y' \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + y' \frac{\partial \xi}{\partial y}},$$

so sieht man, dass für obigen Wert von y' auch $\frac{d\eta}{d\xi}$ nur von a abhängt und für jeden besonderen Wert von a konstant ist. Es haben also unsere Abbildungen folgende weitere Eigenschaft:

Es giebt immer in der xy Ebene eine Geradenschar, welche in der $\xi\eta$ Ebene wieder auf eine Schar von Geraden abgebildet wird. Der Enveloppe der ersten Schar entspricht die Enveloppe der zweiten; für alle Punkte ein und derselben Geraden sind die Deformationen bei der Abbildung die gleichen.

Die Enveloppe der Geradenschar in der xy Ebene ist gegeben durch das System:

$$0 = x - \frac{y}{a^2} + f'(a), \qquad 0 = \frac{2y}{a^3} + f''(a)$$

oder durch folgendes System:

(24) $$x = -\frac{a}{2} f''(a) - f'(a), \quad y = -\frac{a^3}{2} f''(a).$$

Die Integration selbst bietet nun keine Schwierigkeiten. Es folgt aus (21):

$$d\xi = a \cos \lg \frac{c}{a} \cdot dx + \frac{1}{a} \sin \lg \frac{c}{a} \cdot dy, \quad d\eta = -a \sin \lg \frac{c}{a} \cdot dx + \frac{1}{a} \cos \lg \frac{c}{a} \cdot dy.$$

$d\xi$ und $d\eta$ sind vollständige Differentiale; man erhält durch leichte Rechnung:

(25) $$\xi - \xi_0 = \frac{y}{a}\left(\sin \lg \frac{c}{a} + \cos \lg \frac{c}{a}\right) - \int a\, f''(a) \cos \lg \frac{c}{a}\, da.$$

(26) $$\eta - \eta_0 = \frac{y}{a}\left(\cos\lg\frac{c}{a} - \sin\lg\frac{c}{a}\right) + \int a\, f''(a)\sin\lg\frac{c}{a}\, da.$$

Hierzu gehören die Gleichungen:

(23) $$0 = x - \frac{y}{a^2} + f'(a), \quad \sigma = ax + \frac{y}{a} + f(a).$$

Es lässt sich also für diesen Fall die Rechnung allgemein durchführen; bestimmte Abbildungen erhält man, wenn man der willkürlichen Funktion f besondere Werte giebt. Die einfachsten Werte sind hierbei diejenigen, für welche sich die Integrale in (25) und (26) ausführen lassen und die durch (24) gegebene Enveloppe der Geradenschar eine einfache Form annimmt.

I. Die einfachste unter allen diesen Abbildungen, auf welche sich Korkine bei der Untersuchung dieses besonderen Falles beschränkt hat, erhält man, wenn man setzt:

(27) $$f'(a) = 0\,, \qquad \sigma = ax + \frac{y}{a} + k,$$

also:

$$a = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Auf eben diesen Fall lässt sich mittelst Koordinatenänderung der Fall reducieren:

$$f'(a) = -m + \frac{n}{a^2}.$$

Man erhält weiter für $f'(a) = o$:

$$\xi = \frac{y}{a}\left(\sin\lg\frac{c}{a} + \cos\lg\frac{c}{a}\right), \quad \eta = \frac{y}{a}\left(\cos\lg\frac{c}{a} - \sin\lg\frac{c}{a}\right)$$

oder:

(27') $$\xi = \sqrt{xy}\cos\lg\left(c_1\sqrt{\frac{x}{y}}\right), \qquad \eta = \sqrt{xy}\sin\lg\left(c_1\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Führt man in der $\xi\eta$ Ebene Polarkoordinaten ρ, ϑ ein, so folgt:

$$\rho = \sqrt{xy}\,, \qquad e^{\vartheta} = c_1\sqrt{\frac{x}{y}},$$

also:

(27'') $$x = \frac{1}{c_1}\rho e^{\vartheta}, \quad y = c_1\rho e^{-\vartheta}.$$

Logaritmische Spiralen sind also die Bilder der Parallelen zur x- und y Axe, während den gleichseitigen Hyperbeln $xy = A$ in der $\xi\eta$ Ebene koncentrische Kreise und den Geraden durch den Anfangspunkt in der xy Ebene wieder koncentrische Geraden der $\xi\eta$ Ebene entsprechen. Diese Geraden sind hier die Kurven von konstanter Deformation.

II. Betrachte ferner die Abbildung, welche entspricht dem Werte:

$$f'(a) = -m + \frac{n}{a^2} + \frac{g}{2}a^2.$$

Die Untersuchung dieses Falles lässt sich reducieren auf die Untersuchung von:

$$(28) \qquad f'(a) = \frac{g}{2}a^2, \quad \sigma = ax + \frac{y}{a} + \frac{ga^3}{6}, \quad 0 = x - \frac{y}{a^2} + \frac{g}{2}a^2.$$

Man erhält also für a^2 eine quadratische Gleichung und:

$$a^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 2yg}}{g} = \frac{2y}{x + \sqrt{x^2 + 2yg}}.$$

Die zweite Wurzel ergiebt nichts wesentlich verschiedenes. Wir setzen ferner fest, dass immer:

$$x^2 + 2yg \geqq 0.$$

Wir betrachten also nur die Abbildung des Teils der xy Ebene, der ausserhalb der Parabel liegt. Diese Parabel ist zugleich, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Enveloppe der Geradenschar, welche in der $\xi\eta$ Ebene wieder auf eine Geradenschar abgebildet wird. Für sämmtliche Punkte einer solchen Tangente sind, wie bereits allgemein abgeleitet, alle Deformationen konstant.

Man erhält weiter:

$$(28') \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{y}{a}\left(\sin \lg \frac{c}{a} + \cos \lg \frac{c}{a}\right) - \frac{ga^3}{10}\left(3 \cos \lg \frac{c}{a} - \sin \lg \frac{c}{a}\right), \\ \eta &= \frac{y}{a}\left(\cos \lg \frac{c}{a} - \sin \lg \frac{c}{a}\right) + \frac{ga^3}{10}\left(3 \sin \lg \frac{c}{a} + \cos \lg \frac{c}{a}\right). \end{aligned}$$

oder:

$$\xi \sin \lg \frac{c}{a} + \eta \cos \lg \frac{c}{a} = \frac{y}{a} + \frac{ga^3}{10}, \quad \xi \cos \lg \frac{c}{a} - \eta \sin \lg \frac{c}{a} = \frac{y}{a} - \frac{3ga^3}{10}.$$

Hieraus folgt:

$$(28'') \qquad \xi\left(\sin \lg \frac{c}{a} - \cos \lg \frac{c}{a}\right) + \eta\left(\cos \lg \frac{c}{a} + \sin \lg \frac{c}{a}\right) = \frac{2ga^3}{5}.$$

Dies ist die Gleichung der Geradenschar in der $\xi\eta$ Ebene. Ihre Enveloppe ist eine Archimedische Spirale.

Die Bilder der Parallelen zur x- und y Axe sind transcendente Kurven von komplicierter Gestalt.

III. Geht man aus von:

$$(29) \qquad f'(a) = \frac{k}{a^4},$$

so folgt:

$$(29') \qquad 0 = x - \frac{y}{a^2} + \frac{k}{a^4};$$

also:

$$a^2 = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4kx}}{2x} = \frac{2k}{y \mp \sqrt{y^2 - 4kx}}.$$

Wähle das obere Vorzeichen und setze fest, dass immer:

$$y^2 - 4kx \geqq 0.$$

Wir betrachten also wieder nur den Raum ausserhalb dieser Parabel; dieselbe ist die Enveloppe der Geradenschar (29').

Ferner folgt:

$$(29'') \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{y}{a}\left(\sin\lg\frac{c}{a} + \cos\lg\frac{c}{a}\right) - \frac{4k}{10a^3}\left(3\cos\lg\frac{c}{a} + \sin\lg\frac{c}{a}\right), \\ \eta &= \frac{y}{a}\left(\cos\lg\frac{c}{a} - \sin\lg\frac{c}{a}\right) + \frac{4k}{10a^3}\left(3\sin\lg\frac{c}{a} - \cos\lg\frac{c}{a}\right). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Geradenschar der $\xi\eta$ Ebene ist:

$$(29''') \quad \xi\left(\sin\lg\frac{c}{a} - \cos\lg\frac{c}{a}\right) + \eta\left(\cos\lg\frac{c}{a} + \sin\lg\frac{c}{a}\right) = \frac{8k}{10a^3}.$$

Ihre Enveloppe ist eine logaritmische Spirale!

IV. Wir setzen weiter:

$$(30) \quad f'(a) = \frac{2b}{a}; \quad \text{(b eine Konstante)}$$

a ergiebt sich aus der Gleichung:

$$(30') \quad 0 = x - \frac{y}{a^2} + \frac{2b}{a},$$

also:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{xy + b^2}}{x} = \frac{y}{b \pm \sqrt{xy + b^2}}.$$

Wähle das obere Vorzeichen und setze fest, dass:

$$xy + b^2 \geqq 0.$$

Es wird also hier derjenige Teil der xy Ebene abgebildet, welcher ausserhalb einer gleichseitigen Hyperbel liegt. Diese Hyperbel ist wieder die Enveloppe der Geradenschar. Man erhält ferner:

$$(30'') \quad \xi = \left(\frac{y}{a} - 2b\right)\sin\lg\frac{c}{a} + \frac{y}{a}\cos\lg\frac{c}{a}, \quad \eta = \left(\frac{y}{a} - 2b\right)\cos\lg\frac{c}{a} - \frac{y}{a}\sin\lg\frac{c}{a}.$$

Die Geradenschar der $\xi\eta$ Ebene hat die Gleichung:

$$\xi\left(\cos\lg\frac{c}{a} - \sin\lg\frac{c}{a}\right) - \eta\left(\sin\lg\frac{c}{a} + \cos\lg\frac{c}{a}\right) = 2b.$$

Ihre Enveloppe ist der Kreis:

$$\xi^2 + \eta^2 = 2b^2.$$

Führt man in der $\xi\eta$ Ebene Polarkoordinaten ein,

$$\xi = \rho\cos\vartheta, \quad \eta = \rho\sin\vartheta,$$

so folgt weiter:

$$\rho^2 = 2\,(2b^2 + xy).$$

Allen gleichseitigen Hyperbeln, welche die Axen zu Asymptoten haben, entsprechen also koncentrische Kreise.

Setzt man ferner:

$$\frac{\sqrt{b^2 + xy} + b}{\sqrt{b^2 + xy} - b} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\rho^2 - 2b^2)} + b}{\sqrt{\frac{1}{2}(\rho^2 - 2b^2)} - b} = \operatorname{tg} \vartheta_1,$$

so folgt:

$$(30''') \qquad x = \frac{1}{c}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\rho^2 - 2b^2)} - b\right) e^{\vartheta - \vartheta_1}, \qquad y = c\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\rho^2 - 2b^2)} + b\right) e^{-(\vartheta - \vartheta_1)}.$$

Für $x=c$ oder $y=c$ erhält man also hieraus die orthogonalen Kurven, welche die Bilder der Parallelen zur x- und y Axe sind.

V. Geht man aus von:

$$(31) \qquad f'(a) = ka \qquad \text{oder: } f'(a) = \frac{k}{a^3},$$

so erhält man für a bereits eine kubische Gleichung; die Enveloppe der Geradenschar der xy Ebene ist eine kubische Parabel.

VI. Man kann endlich den Wert der willkürlichen Funktion f, der Grösse a und die zugehörige Abbildung dadurch zn bestimmen suchen, dass man eine bestimmt vorgegebene Kurve als Enveloppe der Geradenschar der xy Ebene wählt.

Sei dies etwa eine Ellipse:

$$(32) \qquad \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

oder:

$$x = m \cos \vartheta, \quad y = n \sin \vartheta.$$

Die Gleichungen (24) ergeben:

$$\frac{a^3 f''(a)}{2} = -n \sin \vartheta, \quad f'(a) + \frac{a f''(a)}{2} = -m \cos \vartheta.$$

Es folgt:

$$f'(a) = -m \cos \vartheta + \frac{n}{a^2} \sin \vartheta,$$

also:

$$\frac{a^3}{2} f''(a) = \left(m \sin \vartheta + \frac{n}{a^2} \cos \vartheta\right) \frac{a^3}{2} \vartheta'(a) - n \sin \vartheta$$

und:

$$\frac{a^3}{2} f''(a) = -n \sin \vartheta.$$

Also:

$$\left(m \sin \vartheta + \frac{n}{a^2} \cos \vartheta\right) \vartheta'(a) \cdot \frac{a^3}{2} = 0.$$

Da ϑ nicht konstant sein kann, so folgt:

$$(32') \qquad m \sin \vartheta + \frac{n}{a^2} \cos \vartheta = 0, \quad \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{n}{m a^2}.$$

Es ergiebt sich nun leicht:

$$(32'') \qquad f'(a) = -\frac{\sqrt{m^2 a^4 + n^2}}{a^2}$$

und a folgt aus der Gleichung:

$$0 = x - \frac{y}{a^2} - \frac{\sqrt{m^2 a^4 + n^2}}{a^2}.$$

Diese quadratische Gleichung liefert dann den Wert:

$$a^2 = \frac{1}{x^2 - m^2}\left\{x y \pm m n \sqrt{\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - 1}\right\}.$$

Die Integrale, die in den Ausdrücken für ξ und η vorkommen, sind hier allerdings nicht ausführbar.

Die aequivalente Abbildung im Zusammenhang mit den Flächen konstanter Krümmung.

Die Theorie der aequivalenten Abbildung steht in einfachem Zusammenhang mit den Flächen konstanter Krümmung. Denkt man sich eine beliebige Fläche auf die Gauss'sche Einheitskugel nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen abgebildet, so gilt der bekannte Satz, dass die Abbildung konform ist, wenn die Fläche eine Minimalfläche ist.

Aus dem Begriff des Krümmungsmasses folgt sofort, *dass die Abbildung aequivalent ist, wenn die Fläche konstante Krümmung hat und umgekehrt.*

Die Frage nach den Flächen konstanter Krümmung ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Flächen zu finden, deren sphaerische Abbildung aequivalent ist.

Diese Betrachtung lässt sich verallgemeinern: Die Flächen, die mit einer gegebenen in allen entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass haben, sind zugleich diejenigen, die auf die erste nach dem Princip gleichgerichteter Normalen abgebildet, eine aequivalente Beziehung ergeben.

Diese Flächen sind bekanntlich Biegungen der ersten, wenn die erste Fläche konstante Krümmung hat.

Seien nun x,y,z die rechtwinkligen Koordinaten einer beliebigen Fläche; die Einheitskugel sei dargestellt durch:

(1) $$\xi = \cos\lambda \cos\varphi, \quad \eta = \cos\lambda \sin\varphi, \quad \zeta = \sin\lambda,$$

(1') $$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\lambda^2 + \cos^2\lambda \, d\varphi^2.$$

Sollen sich nun die Punkte, welche gleichgerichtete Normalen haben, entsprechen, so folgt:

(2) $$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} = -\cos\lambda\cos\varphi, \qquad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} = -\cos\lambda\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}=\sin\lambda \tag{2}$$

oder:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\cot\lambda\cos\varphi,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\cot\lambda\sin\varphi. \tag{2'}$$

Soll eine derartige Funktion z von x und y möglich sein, so folgt eine Bedingungsgleichung für x und y als Funktionen von λ und φ, nämlich:

$$\sin\lambda\cos\lambda\left(-\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)+\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\sin\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)=0. \tag{3}$$

Diese zunächst beliebige Fläche ist nun von konstanter Krümmung, wenn die Abbildung aequivalent ist, wenn also die Bedingung hinzukommt:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}=\frac{k\cos\lambda}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

oder:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}=k\sin\lambda\cos\lambda. \tag{4}$$

Hier ist **k** das Verhältnis entsprechender Flächenstücke auf Kugel und Fläche, d. h. die Krümmung der Oberfläche. k kann hier sowohl positiv als negativ sein.

Die Ermittelung der Flächen konstanter Krümmung ist also zurückgeführt auf die Integration zweier simultaner partieller Differentialgleichungen (3) und (4). Diese in Verbindung mit (2') liefern die Koordinaten x,y,z der gesuchten Fläche als Funktionen von λ und φ.

Vor der weiteren Behandlung sei zunächst auf zwei Sätze aus der Theorie der Gaus'schen Abbildung hingewiesen:

1. Die Tangenten der Krümmungslinien auf der Fläche sind den Tangenten der Bilder auf der Kugel parallel.

2. Das System von Krümmungslinien auf der Fläche hat zum Abbild ein orthogonales System auf der Kugel und wenn man die Minimalflächen ausschliesst, so hat nur das System der Krümmungslinien diese Eigenschaft.

Wir wollen nun die Gleichungen (3) und (4) benutzen, um einige besondere Flächen konstanter Krümmung abzuleiten.

I. Wir fragen nach denjenigen Flächen konstanter Krümmung, auf denen die Kurven, welche den Meridianen und Parallelkreisen der Kugel entsprechen, ein orthogonales System bilden, also Krümmungslinien sind.

Diese Bedingung drückt sich analytisch aus in der Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=0. \tag{5}$$

Aus (3) und (4) erhält man nun:

$$\left(-\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial x}{\partial\lambda}=k\sin\lambda\cos\lambda\cos\varphi-\frac{1}{\sin\lambda\cos\lambda}\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\sin\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial x}{\partial\varphi} \tag{6}$$

und:

(6′) $$\left(-\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial y}{\partial\lambda}=k\sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi-\frac{1}{\sin\lambda\cos\lambda}\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\sin\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial y}{\partial\varphi}.$$

Multipliciert man (6) mit $\frac{\partial x}{\partial\varphi}$, (6′) mit $\frac{\partial y}{\partial\varphi}$, so erhält man mit Benutzung von (5):

(7) $$\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\sin\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2-k\sin^2\lambda\cos^2\lambda\right\}=0.$$

Da man auf Widersprüche stösst, wenn man den zweiten Faktor gleich 0 setzt, so folgt hieraus:

(8) $$\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\sin\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}=0.$$

Aus den Gleichungen (2′) folgt dann:

(9) $$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0.$$

Aus (3) ergiebt sich weiter:

(10) $$-\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\lambda}=0.$$

Es lassen sich nun x und y als Funktionen von λ und φ bestimmen. Die Gleichungen (8) und (10) ersetze durch:

(11) $$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=U\cos\varphi,\qquad\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-V\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}=U\sin\varphi,\qquad\frac{\partial y}{\partial\varphi}=V\cos\varphi.$$

Dann folgt aus (4):

$$U.V=k\sin\lambda\cos\lambda=kL;$$

also:

(11′) $$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{kL}{V}\cos\varphi,\qquad\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-V\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}=\frac{kL}{V}\sin\varphi,\qquad\frac{\partial y}{\partial\varphi}=V\cos\varphi.$$

Hieraus ergeben sich 2 Bedingungsgleichungen für V, nämlich:

$$\frac{kL}{V^2}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial V}{\partial\lambda}-\frac{kL}{V}=0.$$

Also V ist nur Funktion von λ und zwar erhält man:

$$V^2=k\sin^2\lambda+a.\qquad\text{(a eine willkürliche Konstante)}$$

Also:

(11″) $$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{k\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{k\sin^2\lambda+a}}\cos\varphi,\qquad\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\sqrt{k\sin^2\lambda+a}\cdot\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}=\frac{k\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{k\sin^2\lambda+a}}\sin\varphi,\qquad\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\sqrt{k\sin^2\lambda+a}\cdot\cos\varphi.$$

also:

(12) $$x=\sqrt{k\sin^2\lambda+a}\,\cos\varphi,\qquad y=\sqrt{k\sin^2\lambda+a}\cdot\sin\varphi.$$

Da z nur von λ abhängt, so folgt aus (2'):

$$\frac{dz}{d\lambda} = -\cot\lambda\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \sin\varphi\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)$$

und:

(12') $$z = -\int\frac{k\cos^2\lambda\, d\lambda}{\sqrt{k\sin^2\lambda + a}}.$$

Die Gleichungen (12) und (12') enthalten das Resultat:

Die einzigen Flächen konstanter Krümmung, deren Krümmungslinien bei der sphaerischen Abbildung in die Meridiane und Breitenkreise der Kugel übergehen, sind die Rotationsflächen.

Zu denselben Gleichungen (12) und (12') kommt man natürlich, wenn man direkt von der Gleichung einer beliebigen Rotationsfläche ausgeht.

Setzt man in den Gleichungen (12) und (12') entweder:

$$k = +\frac{1}{r^2}$$

oder:

$$k = -\frac{1}{r^2},$$

so erhält man die Rotationsflächen, welche auf die Kugel und die, welche auf die pseudosphaerische Fläche abwickelbar sind.

II. Es sollen zweitens *die Helikoidflächen konstanter Krümmung* bestimmt werden.

Die Gleichung einer beliebigen Helikoidfläche ist:

(13) $$z = m\vartheta + F(\rho), \quad x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta;$$

die Funktion F ist zu bestimmen. Die Gleichungen (2') ergeben:

$$m\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + F'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\cot\lambda\cos\varphi,$$

$$m\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + F'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} = -\cot\lambda\sin\varphi$$

oder:

(14) $$\begin{aligned} -\frac{m}{\rho}\sin\vartheta + F'(\rho)\cos\vartheta &= -\cot\lambda\cos\varphi, \\ \frac{m}{\rho}\cos\vartheta + F'(\rho)\sin\vartheta &= -\cot\lambda\sin\varphi. \end{aligned}$$

Es folgt dividendo:

(15) $$\frac{-m\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \rho F'(\rho)}{m + \rho F'(\rho)\,\mathrm{tg}\,\vartheta} = \cot\varphi.$$

Setzt man also:

(16) $$\rho F'(\rho) = m\,\mathrm{tg}\,q,$$

so folgt:

(15') $$\vartheta = q + \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Aus den Gl. (14) folgt, wenn man quadriert und addiert:

(17) $$\frac{m^2}{\rho^2} + F'(\rho)^2 = \cot^2\lambda.$$

Also ist ρ nur von λ abhängig, also auch q nur Funktion von λ. Der Wert von ρ ergiebt sich aus der Gleichung (4), es folgt aus ihr:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \rho \frac{d\rho}{d\lambda} = k \sin\lambda \cos\lambda;$$

also:

(18) $$\rho^2 = k \sin^2\lambda + a.$$

Die Bedingungsgleichung (3) ist jetzt von selbst erfüllt. Damit ergiebt sich nun auch leicht der Wert von $F(\rho)$:

(19) $$F(\rho) = \int \sqrt{\frac{k}{\rho^2 - a} - \frac{m^2}{\rho^2} - 1}\, d\rho.$$

Je nach dem Vorzeichen von k ergeben sich hieraus die Helikoidflächen von konstanter, positiver oder negativer Krümmung.

Wir haben bisher die zu Grunde gelegte Einheitskugel auf ihre Meridiane und Parallelkreise bezogen und die Koordinaten der Fläche konstanter Krümmung als Funktionen von λ und φ dargestellt. Die Untersuchung soll nun in folgender Weise erweitert werden:

Wir denken uns die Oberfläche und die Einheitskugel auf *dieselben Parameter* u, v bezogen, welche auf beiden Flächen ein orthogonales System bestimmen, also für die Oberfläche selbst die Krümmungslinien ergeben.

Seien jetzt x,y,z die Koordinaten eines Punktes der Einheitskugel; ξ,η,ζ die des entsprechenden auf der Oberfläche, dessen Normale also mit der Normale des ersten gleichgerichtet ist. Hieraus folgt:

(20) $$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = -\frac{y}{z}$$

und hieraus die Bedingungsgleichung:

(21) $$\frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}.$$

Die Gleichung der aequivalenten Abbildung wird dann:

(22) $$\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{z\sqrt{EG}}{k},$$

wo:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Die Bedingung dafür, dass u und v ein orthogonales System auf der Fläche geben, ist ferner:

(23) $$z^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) + \left(x \frac{\partial \xi}{\partial u} + y \frac{\partial \eta}{\partial u}\right)\left(x \frac{\partial \xi}{\partial v} + y \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) = 0.$$

Drückt man nun aus (21) und (22) die Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ durch $\frac{\partial \xi}{\partial v}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ aus, setzt diese Werte in (23) ein und benutzt die bekannten Gleichungen, die für eine beliebige auf ihre Krümmungslinien bezogene Fläche gelten:

(23) $$\frac{\partial \xi}{\partial u} = r_u \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = r_v \frac{\partial x}{\partial v},$$

und die analogen für η, ζ, so erhält man nach leichter Rechnung:

(24) $$\frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0,$$

(25) $$\frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0.$$

Diesen beiden Gleichungen genügt man, wenn man setzt:

(26) $$\frac{\partial \xi}{\partial u} = P \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -P \frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -Q \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = Q \frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial u}.$$

die Gleichung (22) giebt dann:

(26') $$PQ = \frac{z^4}{k}.$$

Setzt man also:

$$P = \frac{Rz^2G}{\sqrt{EG}} \cot\gamma, \qquad Q = \pm \frac{Rz^2E}{\sqrt{EG}} \operatorname{tg}\gamma,$$

je nachdem:

$$k = \pm \frac{1}{R^2},$$

so erhält man:

(26'') $$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{Rz^2G}{\sqrt{EG}} \cot\gamma \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial v}, & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= -\frac{Rz^2G}{\sqrt{EG}} \cot\gamma \frac{\partial \frac{x}{z}}{\partial v}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \mp \frac{Rz^2E}{\sqrt{EG}} \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial u}, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \pm \frac{Rz^2E}{\sqrt{EG}} \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial \frac{y}{z}}{\partial u} \end{aligned}$$

und nach kurzer Umrechnung:

(26''') $$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= R \cot\gamma \frac{\partial x}{\partial u}; & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \pm R \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial x}{\partial v}. !! \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= R \cot\gamma \frac{\partial y}{\partial u}; & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \pm R \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial y}{\partial v}. \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= R \cot\gamma \frac{\partial z}{\partial u}; & \frac{\partial \rho}{\partial v} &= \pm R \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Diese Formeln in Verbindung mit (23) enthalten zunächst das erwartete Resultat, dass für die betrachtete Fläche das Produkt der Hauptkrümmungsradien einen konstanten, positiven oder negativen Wert besitzt; sie weisen ferner darauf hin, dass *die Ermittelung der Flächen konstanter Krümmung führt auf die Ermittelung des orthogonalen Kurvensystems auf der Kugel, welches bei der Gauss'schen Abbildung den Krümmungslinien entspricht.*

Eine vollkommene Analogie für die Behandlung der Flächen konstanter, negativer und positiver Krümmung erhält man, wenn man setzt:

$$r_u = R \cot\gamma, \qquad r_v = R \operatorname{tg}\gamma,$$

respective:

$$r_u = R \operatorname{coth}\gamma_1, \quad r_v = R \operatorname{tgh}\gamma_1.$$

Die weitere Untersuchung soll sich deshalb hier auf *die Flächen negativer Krümmung* beschränken.

Bildet man aus den Gleichungen (26''') auf doppelte Weise die Ableitungen $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} \cdots$, so erhält man durch Vergleichung und Addition:

$$(27) \qquad \left(\cot\gamma \mp \operatorname{tg}\gamma\right)\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{E}{\sin^2\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0$$

und:

$$\left(\cot\gamma \mp \operatorname{tg}\gamma\right)\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \mp \frac{G}{\cos^2\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0$$

und hieraus die Formeln für die Fläche negativer Krümmung:

$$(28) \qquad E = f(u) \sin^2\gamma, \qquad G = F(v) \cos^2\gamma.$$

Diese Formeln und die allgemeineren für alle Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine Beziehung besteht, sind 1863 von Weingarten gegeben worden.

Für γ selbst lässt sich leicht eine bekannte Differentialgleichung aufstellen.

Es handelt sich also jetzt um Ermittelung eines orthogonalen Systems auf der Kugel ($u = c$, $v = c$), für welches:

$$(29) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = f(u)\sin^2\gamma, \\ &\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = F(v)\cos^2\gamma. \end{aligned}$$

Setze hier:

$$(30) \qquad \sqrt{f(u)}\, du = d\alpha, \qquad \sqrt{F(v)}\, dv = d\beta;$$

so folgt:

$$(29') \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 = \sin^2\gamma, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 = \cos^2\gamma.$$

Wir setzen nun wieder:

$$x = \cos\varphi \cos\lambda, \qquad y = \sin\varphi \cos\lambda, \qquad z = \sin\lambda;$$

dann folgt:

$$(29'') \qquad \begin{aligned} &\cos^2\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 = \sin^2\gamma, \\ &\cos^2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0, \\ &\cos^2\lambda \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\right)^2 = \cos^2\lambda. \end{aligned}$$

Dieses System lässt sich ersetzen durch:

$$(30)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \sin\gamma\sin\varepsilon, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = -\cos\gamma\cos\varepsilon.$$
$$\cos\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \sin\gamma\cos\varepsilon, \qquad \cos\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \cos\gamma\sin\varepsilon.$$

Hieraus ergiebt sich die Bedingungsgleichung:

$$(31)\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} = \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} - \operatorname{tg}\lambda\sin\gamma\cos\varepsilon, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta} = \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} - \operatorname{tg}\lambda\cos\gamma\sin\varepsilon$$

und hieraus für γ die bekannte Gleichung:

$$(32)\qquad \frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial\beta^2} = \sin\gamma\cos\gamma.$$

Wir wollen nun die bis hierher allgemein geführte Untersuchung beschränken und festsetzen, dass γ *etwa nur von β abhängig* sei. Es würden dann also auch die Grössen E, G und die Hauptkrümmungsradien der betrachteten Fläche nur von β abhängen, auf einer Kurve $\beta = c$ also konstant sein. Wir fragen also nach *denjenigen Flächen konstanter negativer Krümmung, für welche auf allen Kurven der einen Schar von Krümmungslinien beide Hauptkrümmungsradien für sich konstant sind.*

Für γ ergiebt sich in diesem Fall:

$$(32')\qquad \frac{d^2\gamma}{\partial\beta^2} = -\sin\gamma\cos\gamma, \qquad \gamma = \operatorname{am}\frac{\beta - b}{m} \qquad \text{(b und m konstante)};$$

also:

$$E = \operatorname{sn}^2\frac{\beta - b}{m}, \qquad G = \operatorname{cn}^2\frac{\beta - b}{m}.$$

Die Gl. (31) geben dann:

$$(31')\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} = \frac{d\gamma}{d\beta} - \operatorname{tg}\lambda\sin\gamma\cos\varepsilon, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta} = -\operatorname{tg}\lambda\cos\gamma\sin\varepsilon.$$

Wir führen statt β eine neue Veränderliche ein, ω, durch die Gleichung:

$$(33)\qquad d\beta = d\omega\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

Dann ist:

$$(31'')\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = -\operatorname{tg}\lambda\sin\gamma\sin\varepsilon$$

und für ε folgt die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(34)\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\cot\varepsilon = \frac{d\gamma}{d\beta}.$$

Die rechte Seite lässt sich auch als Funktion von ω ansehen. Aus (31′) und (31″) folgt aber noch ferner die Gleichung:

$$(35)\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\omega^2} = 0$$

und aus diesen beiden lässt sich nun ε und damit der Wert der Ableitungen von λ und φ

nach α und β vollkommen bestimmen. Die Integration von (34) ergiebt nach einiger Umrechnung:

(34′)
$$\alpha = m \,.\, \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-m^2\sin^2\gamma}\,\operatorname{tg}\varepsilon\right) + f(\sin\gamma\sin\varepsilon).$$

α also ist durch γ und ε ausgedrückt. Nimmt man entsprechend auch in (35) ε und ω zu unabhängigen Veränderlichen, so geht die Gleichung (35) über in:

(35′)
$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varepsilon^2} - 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varepsilon\partial\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\right)^2 = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\right)^2.$$

Setzt man nun hier die Werte der Ableitungen von α, die aus (34′) folgen, ein, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die bisher noch willkürliche Funktion f. Bezeichnen wir das Argument von f der Abkürzung halber etwa mit q:

(36)
$$q = \sin\gamma\sin\varepsilon,$$

so lautet die Gleichung, die für f entsteht:

(37)
$$f''(q) - \frac{q(1-m^2q^2)}{m^2}f'^3(q) - \frac{3m^2q}{1-m^2q^2}f'(q) = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich integrieren; die Substitution:

$$f'(q)^2 = F(q)$$

ergiebt:

$$\frac{1}{2}F'(q) - \frac{q(1-m^2q^2)}{m^2}F(q)^2 - \frac{3m^2q}{1-m^2q^2}F(q) = 0$$

und setzt man:

$$F(q) = -\frac{1}{\Phi(q)},$$

so folgt:

$$\Phi'(q) + \Phi(q)\frac{6m^2q}{1-m^2q^2} - \frac{2q(1-m^2q^2)}{m^2} = 0.$$

Diese Gleichung auf bekannte Weise integriert, ergiebt:

$$\Phi(q) = \frac{(1-m^2q^2)^2}{m^4}\left[1 + c(1-m^2q^2)\right];$$

also:

$$\left.\begin{matrix}F(q)\\ f'(q)^2\end{matrix}\right\} = -\frac{m^4}{(1-m^2q^2)^2[1+c(1-m^2q^2)]}.$$

Also ist:

(37′)
$$f(q) = \int\frac{m^2dq}{(1-m^2q^2)\sqrt{c\,m^2q^2-(c+1)}}.$$

Soll f(q) reell sein, so muss sein:

$$c\,m^2q^2 - (c+1) > 0.$$

Da q seiner Natur nach ein echter Bruch ist, so können wir 2 Fälle unterscheiden:

A) $c = +a^2$, es folgt: $m > 1$;

B) $c = -a_1^{\,2}$, es folgt: $m < 1$.

Die Integration verläuft in beiden Fällen analog; von der Integrationskonstanten lässt sich absehen.

Im Falle (A) setze: $a^2 = \dfrac{1}{(m^2-1)\sin^2 h}$;

im Falle (B):

$$a^2_1 = \frac{\sin^2 h_1}{1 - m^2}.$$

Im Falle (A) folgt:

(38) $$f(q) = - m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{m^2 q^2 - 1 - (m^2 - 1) \sin^2 h}}{m \sqrt{m^2 - 1} \sin h\, q};$$

im Falle (B):

(38') $$f(q) = m \operatorname{arctg} \frac{m \sqrt{1 - m^2 q}}{\sqrt{\sin^2 h (1 - m^2 q^2) - (1 - m^2)}}.$$

Es soll hier nur Fall (B) weiter behandelt werden ($m < 1$).

Setzen wir zur weiteren Abkürzung noch:

(39) $$\rho = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \gamma}, \qquad \sqrt{1 - m^2} = m',$$

so ergiebt sich aus (34'):

$$\operatorname{tg} \frac{a - \alpha_0}{m} = \frac{m m' \rho q \operatorname{tg}\varepsilon - \sqrt{(1 - m^2 q^2) \sin^2 h - m'^2}}{m m' q + \rho \operatorname{tg}\varepsilon \sqrt{(1 - m^2 q^2) \sin^2 h - m'^2}}.$$

Setze:

(40) $$\alpha_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{m},$$

so folgt weiter für ε als Funktion von α und γ:

(41)

$$\sin \varepsilon = \frac{c \,.\, \cos \alpha_1}{\sqrt{(m m' \sin \gamma - \rho c \sin \alpha_1)^2 + c^2 \cos^2 \alpha_1}}, \quad \cos \varepsilon = \frac{m m' \sin \gamma - c \rho \sin \alpha_1}{\sqrt{m m' \sin \gamma - \rho c \sin \alpha_1)^2 + c^2 \cos^2 \alpha_1}};$$

wo:

$$c = \sqrt{\sin^2 h - m'^2}.$$

Ferner:

(42) $$\sin \lambda = \frac{m' \rho + m c \sin \gamma \sin \alpha_1}{\sin h}, \qquad \cos \lambda = \frac{\sqrt{(m m' \sin \gamma - c \rho \sin \alpha_1)^2 + c^2 \cos^2 \alpha_1}}{\sin h}.$$

Endlich ergiebt sich:

(43)

$$\sin \varphi = \frac{m \sin \gamma \sin h \,.\, \cos \alpha_1}{\sqrt{(m m' \sin \gamma - c \rho \sin \alpha_1)^2 + c^2 \cos^2 \alpha_1}}, \quad \cos \varphi = \frac{\rho c - m m' \sin \gamma \sin \alpha_1}{\sqrt{m m' \sin \gamma - c \rho \sin \alpha_1)^2 + c^2 \cos^2 \alpha_1}}.$$

Da nun λ und φ als Funktionen von α und γ bekannt sind, ergeben sich auch leicht die Werte von x, y, z, nämlich:

(44) $$x = \frac{\rho c - m m' \sin \gamma \sin \alpha_1}{\sin h}, \qquad y = m \sin \gamma \cos \alpha_1, \qquad z = \frac{m' \rho + m c \sin \gamma \sin \alpha_1}{\sin h}.$$

Hier ist also:

$$m < 1, \quad m'^2 = 1 - m^2; \quad \alpha_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{m}, \quad c^2 = \sin^2 h - m'^2, \quad \rho^2 = 1 - m^2 \sin^2 \gamma.$$

Hieraus folgt, dass:

(45) $$c x + m' z = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \gamma} \sin h, \quad - m_1 x + c z = m \sin h \sin \gamma \sin \alpha_1$$

und demnach:

(45') $$\frac{- m_1 x + c z}{y} = \sin h \,.\, \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Die erste Gleichung sagt, dass die Kurven $\gamma = c$ oder $\beta = c$, also die eine Schar der Krümmungslinien auf der Kugel in parallelen Ebenen liegen, welche der y Axe parallel sind. Die Schar von Krümmungslinien auf der Fläche liegt also auch in parallelen Ebenen; ihre Bilder auf der Kugel sind Kreise.

Die zweite Gleichung zeigt, dass die zweite Schar des orthogonalen Systems auf der Kugel grösste Kugelkreise sind mit der gemeinsamen Axe:

$$y = 0, \quad z = \frac{m'}{c} x.$$

Die zweite Schar von Krümmungslinien auf der Fläche muss also auch in Ebenen gelegen sein, welche eine gemeinsame Schnittlinie haben.

Da also die Krümmungslinien der gesuchten Fläche in der sphärisch aequivalenten Abbildung Meridiane und Parallelkreise zu Bildern haben, so ist, wie oben gezeigt, *die gesuchte Fläche eine Rotationsfläche.* Nimmt man in der $\xi\eta$ Ebene eine Drehung vor und setzt:

$$-m'\xi + c\zeta = \xi_1 \sin h, \qquad c\xi + m_1 \zeta = \eta_1 \sin h,$$

so wird die Gleichung der Rotationsfläche selbst:

$$(46) \quad \xi_1 = R\, m \cos\gamma \sin\frac{\alpha - \alpha_0}{m}, \qquad \eta_1 = R\, m \cos\gamma \cos\frac{\alpha - \alpha_0}{m}, \qquad \zeta_1 = R\, m^2 \int \frac{\sin^2\gamma \, d\gamma}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\gamma}}.$$

Dies ist der hyperbolische Typus der pseudosphaerischen Fläche.

Ebenso ergiebt die Rechnung ganz analog für $m < 1$ den elliptischen und für $m = 1$ den parabolischen Typus.

Für die Flächen konstanter positiver Krümmung ist die Rechnung ganz analog, wenn man hyperbolische Funktionen einführt. Man erhält also das Resultat:

Die Rotationsflächen konstanter Krümmung sind die einzigen Flächen konstanter Krümmung von der Eigenschaft, dass auf einer Schar von Krümmungslinien beide Hauptkrümmungsradien für sich konstant sind.

Mülheim (Ruhr), März 1891.