Jahresbericht

über das

Gymnasium zu Mühlhausen

womit

zu den Prüfungen am 21. März 1853

ehrerbietigst und ergebenst einladet

der Director
Dr. Christian Wilhelm Haun,
Ritter des rothen Adlerordens vierter Classe.

Angefügt ist eine Abhandlung:

Zins- und Renten-Theorie

von

Albert Hartrodt,
Subrector.

MÜHLHAUSEN.
Druck von W. Rode.

Schulnachrichten

über das

Gymnasium zu Mühlhausen

von Ostern 1852 bis 1853.

I. Chronik des Gymnasiums.

Das Gymnasium erfreute sich in diesem Jahre des Besuches des Herrn Geheimen Regierungs- und Schulrathes *Dr.* Wiese, welcher den 28. und 29. Juni sämmtlichen Unterrichtsstunden beiwohnte und dadurch jede Classe und jeden Lehrer in verschiedenen Gegenständen kennen lernte, sowie er auch noch von den schriftlichen Arbeiten der Schüler aller Classen genauere Kenntniss nahm, und Bibliothek, mathematisch-physikalischen und sonstigen Lehr-Apparat sich zeigen liess. Auch wohnte derselbe Montag, den 28. Juni, Nachmittag dem religiösen Volks- und Schulfeste, dem Popperoder Schüler-Brunnenfeste, bei, das aber diessmal leider durch bald nach dem feierlichen Auszuge eintretendes anhaltendes Regenwetter so gestört wurde, dass eine eigentliche Anschauung von dem Character der Feierlichkeit am Brunnen selbst nicht gewonnen werden konnte, wiewohl vom Herrn Rector Otto die Rede, in der er darüber sprach, dass „den Eltern in ihren Kindern ein Quell beglückender, wachsender und dauernder Freude fliesse," zu Ende gehalten wurde.

Andere **Schulfeierlichkeiten** waren:

A. Der öffentliche Rede-Actus am Stiftungsfeste des Gymnasiums und der Knabenbürgerschule den 24. Mai 1852, welcher auf folgende Weise angeordnet war:

1) Hymnus: So weit der Sonne Strahlen glänzen etc., in Musik gesetzt von Bergt.
2) Schülergebet im Frühlinge, Elegie von dem Primaner Ignaz Werner aus Worbis.
3) Lateinische Rede: *Quibus virtutibus Cyrus puer optimi discipuli laude dignum se praebuerit*, von dem Primaner Wilhelm Schollmeyer aus Altengottern.

4) Französische Rede: *Parallèle de Rome et de Carthage*, von dem Primaner Otto v. Rhein aus Berlin.
5) Gesang: *Horat. Od. 1, 22. Integer vitae scelerisque purus etc.* für Männerstimmen componirt von Flemming.
6) Director *Dr.* Haun: Ueber die beiden ältesten Vogelschiessen im Homer und im Virgil.
   Vertheilung der von der Familie Lutteroth für Schüler des Gymnasiums gestifteten Legate.
7) Hymnus: Preis dir, Gottheit! etc. in Musik gesetzt von Mozart.

Zwischen den selbstgefertigten Vorträgen der Primaner traten mit Declamationen folgende Schüler der übrigen Classen auf:

Der Secundaner Franz Mellin: Die Grösse Gottes. — Der Tertianer Albrecht Rennecke: Der Sänger. — Die Quartaner Helmuth v. Weltzien und Karl Keferstein: Französisches Gespräch über die Wahl des Berufes. — Der Quintaner Victor Burmann: Frühlingswanderung.

Aus der Bürgerschule: August Becherer aus Classe 1: Die Auswanderer. — Georg Döring, aus Classe 2*a*: Heinrich, der Vogelsteller. — Achill Weidner, aus Classe 2*b*: Geduld. — Adolph Helmsdorf, aus Classe 3*a*: Frühlingsfeier. — Herrmann v. Wehren, aus Classe 3*b*: Morgenwanderung. — Karl v. Hagen, aus Classe 4*a*: Glocken und Sterne. — Christian Knorr, aus Classe 4*b*: Sigismund und sein Blümchen.

B. Der öffentliche Rede-Actus am Geburtstage Sr. Majestät des Königs am 15. October 1852, dessen Einrichtung folgende war:

1) Der Mächtige, den wir erheben etc., Cantate von Mozart.
2) Gebet für den König: Primaner Otto Grosser aus Tambach.
3) *Ode aux Prussiens*, *par Frédéric II.*, *Roi de Prusse:* Primaner Herrmann Burkhard von hier.
4) Preussenlied: Ich bin ein Preusse etc. für Männerstimmen componirt von Greulich.
5) Scene aus *Sophocl. Oedip. Rex. v. 85 — 146:* König Oedipus lässt sich von Kreon Bericht erstatten über die Antwort des Orakels auf die Frage nach der Ursache der Pest und dem Mittel zu ihrer Tilgung: Primaner Otto v. Rhein aus Berlin, und Primaner Guido Topf aus Langensalza.
6) Stelle aus *Cicero de oratore*, *I*, §. 6 — 8 und §. 13 — 19. Die Schwierigkeit der Redekunst als Grund der Seltenheit grosser Redner: Primaner Herrmann Leineweber von hier.
7) Preussisches Volkslied: Heil Dir im Siegerkranz etc., mit Instrumentalbegleitung.

Die dazwischen Declamirenden waren: Der Secundaner Gustav Sorhagen: Kurfürst Friedrich Wilhelm in der Schlacht bei Fehrbellin. — Der Secundaner

Eduard Schuchardt: Ueberlistung des Polen-Königs Boleslav durch die Preussen. — Der Tertianer Karl Frank: Der König und der Windmüller. — Der Tertianer Emil Hahn: Pipin der Kurze behauptet sich in seiner Königswürde durch den Sieg über den Löwen, den König der Thiere. — Der Quartaner Christian Ackermann: *Deux enfants. Romance.* — Der Quartaner August Hemming: Der Preusse in Lissabon. — Die Quintaner Adolph Helbig und Julius Immig: Lateinisches Gespräch beim Spaziergang im Königl. Schlossgarten.

Die zweimalige feierliche Entlassung der Abiturienten schloss sich, wie gewöhnlich, an das Oster- und Michaelis-Examen an.

Zur Vorbereitung der Schüler auf die Feier des heiligen Abendmahls am Busstage und am Reformationsfeste wurde die gewöhnliche Schulfeierlichkeit im Festsaale am Tage vorher unmittelbar vor der kirchlichen Beichthandlung gehalten. Zum Gegenstand der Rede hatte der Director beim ersten Male genommen: Die göttliche Traurigkeit und die göttliche Freude am Tische des Herrn (nach 2 Corinth. 7, 10. Hebr. 12, 11 und Joh. 16, 20 — 22. 2 Corinth. 6, 10. 1 Petri 1, 6); beim zweiten Male: Die apostolische Ermahnung (Eph. 4, 15): „Lasset uns wachsen in allen Stücken an den, der das Haupt ist" in ihrer Bedeutsamkeit am Tische des Herrn.

Am 3. August 1852 wurde die Feier des 50jährigen Jubiläums der Einverleibung Mühlhausens in die Krone Preussen von der Stadt kirchlich begangen. Wiewohl dieser Festtag mitten in die Sommerferien des Gymnasiums fiel, kamen doch auch die meisten auswärtigen Schüler, die in der Nähe ihre Heimath hatten, herein, um an dem Festzuge in die Kirche Theil zu nehmen, bei welchem der vorangehenden Geistlichkeit zunächst die sämmtlichen Schulen der Stadt mit ihren Lehrern und sodann die Königl. Beamten, der Magistrat und Gemeinderath, die Schützencompagnie, die Liedertafel, der Veteranen-Verein und die Gewerke folgten, und zwar sowohl die Schulen, als die sämmtlichen Corporationen mit Vortragung ihrer Fahnen, die sie seit dem 300jährigen Reformations-Jubelfeste im Jahre 1842 besitzen.

Das Singchor des Gymnasiums und der Bürgerschule hatte bereits früh um 6 Uhr den Festtag begrüsst durch die Gesänge: „Dich seh' ich wieder, Morgenlicht!" und „Lobet den Schöpfer, den mächtigen König der Ehren," welche von dem Stadtmusikchor mit Blasinstrumenten begleitet von der Gallerie des Thurmes der oberstädtischen Hauptkirche herab ertönend die religiöse Feststimmung des Jubeltages in den Herzen der Einwohner der Stadt wach riefen. Eben so führte das Singchor in Verbindung mit der Liedertafel und den Mitgliedern des Singvereins im Festgottesdienste die liturgischen Gesänge und die volltönende Kirchen-Musik aus.

II. Lehrverfassung.

Da wir das neue Schuljahr zu Ostern 1852 wieder beginnen mussten, ohne dass die gewünschte Besetzung der Collaboratur noch hatte bewerkstelligt werden können, so hatte sich die im vorigen Programme angegebene Vertheilung der Lehrstunden nicht verändern lassen. Bald aber trat ganz unerwartet die Nothwendigkeit einer Umgestaltung des Lehrplans von einer andern Seite an uns heran, indem schon zu Anfang Mai's der Subrector Hartrodt von einer Hüftlähmung befallen wurde, die ihn auf ein langwieriges und schmerzensvolles Krankenlager warf, auf dem wir den Freund und Collegen zu unserer grossen Betrübniss noch immer ohne nahe Aussicht auf Genesung leiden sehen. Nach den Pfingstferien übernahm daher der Subconrector *Dr.* Dilling die sämmtlichen mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehrstunden in den ersten 4 Classen, und statt seiner der Conrector *Dr.* Mühlberg das Ordinariat in Quinta, der Subconrector Recke die 4 Rechenstunden in Quinta, der *Dr.* Weigand die 4 deutschen in Quinta und noch 2 lateinische in Quarta zu den übrigen, welche er daselbst schon besorgte, der Professor *Dr.* Ameis 4 griechische in Tertia, und der Director 2 lateinische in Secunda und 2 lateinische in Quinta, und wiewohl sonach fast jeder Lehrer 4 Stunden über sein Pensum übernommen hatte, blieben doch noch 2 Stunden Geschichte und Geographie in Quarta unbesetzt, so dass wir die freundliche Hülfe, welche der Diaconus Führ in der Uebernahme dieser Lectionen bis Ostern uns darbot, gern dankbar angenommen haben.

Gegen Ende Novembers erkrankte auch der Zeichenlehrer an einem nervösen Fieber, wo uns den December hindurch der Schreiblehrer Walter und der Lehrer der Volksschule Herr Marcard freundliche Hülfe leisteten.

Mit dem neuen Jahre 1853 erhielten wir endlich durch die erwünschte Wiederbesetzung der Collaboratur eine neue Lehrkraft in der Person des Herrn Meinshausen, der von Michael 1851—52 sein Probejahr in Halberstadt abgehalten hatte und seitdem bis Weihnachten daselbst noch beschäftigt worden war. Der Magistrat als Patron der Anstalt hatte mit Zustimmung des Gemeinderathes die bisher unzulängliche Besoldung der Stelle von 100 Thlr. auf 200 Thlr. erhöht, und auf den Wunsch des Lehrercollegiums noch einen Zuschuss von 30 Thlr. aus dem Schulgeld-Ueberschuss dazu bewilligt, für welche Fürsorge und Munificenz, die sich eben so in der dem Prorector Professer *Dr.* Ameis von 1853 an verliehenen persönlichen Zulage von jährlich 100 Thlr. und endlich in der dem *Dr.* Weigand auf das Jahr 1852 zu der alten Collaboratur-Besoldung bewilligten ausserordentlichen Zulage von 12½ Thlr. erwies, wir hiermit unsern Dank auszusprechen uns verpflichtet fühlen.

Der Collaborator Meinshausen überkam nun von *Dr.* Weigand das Ordinariat in Quarta und ausserdem vom Conr. *Dr.* Mühlberg die 3 St. Geschichte und Geographie in Tertia, und vom Director die 2 St. lateinischen Stil in Secunda, so dass, da der Conrector *Dr.* Mühlberg statt jener Stunden noch die 2 lateinischen zu seinen übrigen in Quinta hinzunahm, der Director von der Mehrübernahme nun frei ward.

A) Vollendete Lehrpensa.

Da in Vorstehendem der Lehrerwechsel bei der Uebernahme andrer Lectionen bereits angegeben ist, theilen wir in Nachstehendem die vollendeten Lehrpensa nur in soweit mit, als sie in den obern Classen einen Wechsel der Schriftsteller gegen die vorjährige Angabe erfahren haben.

Prima: *a)* Hebräisch: 2 St. cursorisch: Aus *Genesis* die Geschichte Jacobs und Josephs; statarisch: Auserwählte Psalmen. Grammatik, nach Gesenius und Analysir- und Uebersetzungsübungen ins Hebräische: Conrector *Dr.* Mühlberg. — *b)* Griechisch: 2 St. *Sophoclis Aiax* und *Electra:* Director *Dr.* Haun. — 4 St. Schul- nnd Privatlectüre: *Homeri Odyss. Platonis Sympos.*, *Alcibiad. I.*, *Laches*, *Theages*, *Amatores*, *Io*, *Protagoras. Euripid. Bacch.*, *Iphig. Taur.*, *Sophocl. Antig.*, *Oedip. Rex* und *Trachin.* Grammatik. Exercitien, abwechselnd mit Excerpten aus Plutarch und metrischen Uebungen: Professor *Dr.* Ameis. — *c)* Lateinisch: 2 St. *Horat. Od. et Epist. select.* 2 St. *Cic. de oratore* und *Tacit. Annal. I.* 2 St. Correctur der freien lat. Aufsätze; Extemporalien: Director *Dr.* Haun. — 1 St. Exercitien, metrische Uebungen und Excerpte aus Abschnitten des *Livius.* 1 St. Interpretir-Uebungen über Abschnitte aus alten Classikern. Für den Zweck der mündlichen zusammenhängenden Erzählung sind privatim gelesen worden *Liv. XXXVI—XLIV*: Professor *Dr.* Ameis. — *d)* Französisch: 2 St. aus Braunhard's Handbuche: Gedichte von *Hugo*, *Lamartine*, Scenen aus *Molière's l'Avare* und *le Misanthrope. Précis de la literature française* zum Wiedererzählen in franz. Sprache. Exercitien. Metrische Uebungen: *Dr.* Weigand. *e)* Deutsch: 3 St. Correctur der freien Aufsätze. Uebungen im freien Vortrage. Geschichte der National-Literatur mit Erläuterung von Proben aus den verschiedenen Perioden: Director *Dr.* Haun.

Secunda: *a)* Hebräisch: 2 St. Gesenius Grammatik und Lesebuch. Schriftliche Declinations- und Conjugationsübungen. Anfänge des Uebersetzens in's Hebräische: Conrector *Dr.* Mühlberg. — *b)* Griechisch: 4 St. Schul- und Privatlectüre: *Homer Odyss. Herodot I et II.* Nebenbei griechische Versübungen: Professor *Dr.* Ameis. — 2 St. Syntaxis, nach Rost, und Uebersetzung vom Deutschen in's Griechische nach Rost, und vom Lateinischen in's Griech. nach Blume: Conrector *Dr.* Mühlberg. — *c)* Lateinisch: 4 St. Schul- und Privatlectüre: *Justin.*, *Ovid. Metamorph. I — V. Cic. Oratt. pro Rosc. Amer.*, *divinatio*, *in Verrem IV et V*, *de imperio Cn. Pompeii.* — 2 St. Grammatik. Extemporalien. Exercitien. Versübungen: Professor *Dr.* Ameis. — 2 St. Regeln des lat. Stils aus *Cic. orat. pro Archia poet.* und Beispiele zur Anwendung in Extemporalien: Director *Dr.* Haun. — 2 St. *Virgil. Eclog.* und *Aen. IV — VI:* Conrector *Dr.* Mühlberg. — *d)* Französisch: Aus Braunhards Handbuche: Ein Stück des Abschnitts *Histoire* und *Biographies*, zum Theil cursorisch gelesen, zum Theil grammatisch und etymologisch erläutert. Erzählen in französischer Sprache. Grammatik: Präpositionen, Conjunctionen, Wortfolge, Gebrauch der Zeiten. Repetition der unregelmässigen Verba. Exercitien und Extemporalien: *Dr.* Weigand. — *e)* 3 St. Erklärung von Schillers Wilhelm Tell und Jungfrau von Orleans und von Göthe's Herrmann und Dorothea. Freie Vorträge über selbstgewählte Themata und Beurtheilung derselben, so wie der schriftlichen Arbeiten.

B) Themata für die freien Arbeiten.

1) Themata für die lateinischen Arbeiten: Prima (Director *Dr.* Haun): *1) Quam apte Cyrus puer venandi arte praeparaverit belli gerendi artem, demonstretur e Xenoph. Cyropaed. I.* 2) *Cursus certamina ab Homero (Iliad. XXIII, 740—797) et a Virgilio (Aeneid. V, 286—301) descripta accuratius inter se comparentur.* 3) *A Sophocle primam Aiaceae fabulae partem sapientissima arte ita adornatam esse, ut Ulixes a Minerva, chorus a Tecmessa, Aiax per se ipsum de horribili pecudum nece edoceatur.* 4) *Consilii illius, quod Augustus de imperio Romano intra terminos coërcendo scriptum reliquit, causae a Tacito (Annal. I, 11) et a Dione Cassio (LVI, 33) relatae diligenter examinentur.* 5) *Teucri suum ex bello Troiano reditum sine Aiace fratre factum Telamoni patri excusare tentantis oratio ita componatur, ut omnia argumenta e Sophoclis Aiace depromantur.* 6) *Orationis a Cicerone pro Archia poeta habitae capita VI—VIII mutatis verbis reddantur (cf. Cic. de orat. I, 34, §. 154).* 7) *Ex quibus locis orationis a Cicerone pro Archia poeta habitae probabiliter coniici possit, Gratium, quum Archiam poetam accusaret, Ciceronem potius, quam illum poetam petiisse.* 8) *Quo sensu quove iure contendi possit, Hannibalem potius aut Hasdrubalem, quam Catonem vel Scipionem evertisse Carthaginem.*

Secunda (Professor *Dr.* Ameis): 1—3) Inhaltsangaben aus Abschnitten des Justin und Livius. 4) *Quas sententias Cicero explicantem fecerit Catonem maiorem in libello qui est de senectute.* 5) *Argonautarum expeditio paucis enarretur.* 6) *A quibus initiis urbs Carthago profecta sit et Carthaginiensium potestas.* 7) *Exponatur argumentum eorum quae in Ciceronis accusationis in C. Verrem libro quarto continentur.*

II) Themata für die deutschen Arbeiten. Prima (Director *Dr.* Haun): 1) Der Grad der unglücklichen Lage des Blinden oder Tauben nach dem Unterschiede des So „geboren“ oder „geworden“seins, und in beider Hinsicht nach der Glückslage, im letztern Falle aber auch noch nach Alter, Bildung, Beruf und Familienverhältniss. 2) Ob die mannigfaltig wechselnden Ideen in Goethe's Ballade „Der Sänger“ sich zu einer Hauptidee vereinigen lassen. 3) Characteristische Vergleichung der beiden dichterischen Schlachtscenen von Schiller und Grillparzer. 4) Rückert sagt: „Am Abend wird man klug für den vergangnen Tag, Doch niemals klug genug für den, der kommen mag.“ Worin liegt der Grund hiervon, und welche Lehre will der Dichter aus dieser Erfahrung gezogen wissen? 5) Die Jugendzeit — betrachtet als Lebensmorgen. 6) Der sittliche Ernst, der aus der Vergleichung des Spruches beim Juvenal X, 22 „*Cantabit vacuus coram latrone viator*“ mit *Horat. Carmin. I, 22* und *II, 13* als „idealer Schilderung der Macht des Gesanges“ hervorgeht. 7) Das Jahr

333 vor Christus und nach Christus — als Anfangs- und Endpunkt eines Zeitabschnittes, in dessen grossem Inhalte die Geburt Jesu Christi der Mittelpunkt ist. 8) Der Winter — die Nacht des Jahres, eben so nothwendig und wohlthätig, wie die tägliche, aber auch eben so reich an Gefahren und Versuchungen.

Secunda (*Dr.* Weigand): 1) Warum ist die Bescheidenheit besonders eine Zierde der Jugend? 2) Welches sind die üblen Folgen der Furchtsamkeit? 3) Was ist der Zweck des lyrischen Anfangs von Schillers Wilhelm Tell? 4) Definitionen und Beispiele von einigen der wichtigsten rhetorischen Figuren. 5) Ueber das Metrische in Schillers Wilhelm Tell. 6) Ein Spaziergang im Herbst, in gebundener oder ungebundener Rede. 7) Ein Besuch in der hiesigen Gemälde-Ausstellung, in Gesprächsform. 8) Was bedeutet die Erscheinung des schwarzen Ritters in Schillers Jungfrau von Orleans? 9) Erläuterung einiger Synonymen. 10) Der Gang der Handlung in Göthe's Herrmann und Dorothea.

Tertia (Subconrector Recke): 1) Wie beginnen wir auf die rechte Weise das neue Schuljahr? 2) Das rechte Verhalten der Kinder gegen ihre Eltern. 3) Schilderung des Schicksals der Lydischen Bauern nach *Ovid. Metamorph. VI, 313—381.* 4) Beschreibung des am 26. Mai 1852 hier tosenden Unwetters und seiner Verheerungen. 5) Dädalus und Ikarus nach *Ovid. Metamorph. VIII, 183 — 235.* 6) Eine Mittheilung aus dem Tagebuche. 7) Bestätigung des Spruches: „Es ist kein Unglück so gross, es ist ein Glück dabei“ durch eine Erzählung. 8) Alexander der Grosse, Characterschilderung nach Justin IX, 8. XI und XII. 9) Erzählung der in Schillers Ballade „Der Ring des Polykrates“ enthaltenen Ereignisse. 10) Veranschaulichung des Sinnes von dem Sprichworte „Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein“ an einem Beispiele aus der Geschichte. 11) Inhaltsangabe des 8. Buches von Homers Odyssee. 12) Bildung einer Erzählung aus gegebenen Wörtern.

C) Zu der Neben-Abtheilung für den Seminar-Unterricht gehörten 5 Schüler, nämlich 3 in Secunda und 2 in Tertia, die vom Griechischen und Lateinischen dispensirt an allen übrigen Gegenständen des Gymnasial-Unterrichts Theil nahmen, und ausserdem Unterricht empfingen 1) vom Herrn Pastor Barlösius *a)* in alttestamentlicher Geschichte nach Zahns biblischer Geschichte und mit Benutzung von Kurtz Lesebuch der heiligen Geschichte, *b)* Erklärung neutestamentlicher Abschnitte (Evangelium Johannis und Apostelgeschichte), *c)* Erläuterung von Kurtz christlicher Religionslehre, *d)* Geographie nach Roon. — 2) vom Musikdirector Thierfelder *a)* im Gesang, *b)* im Generalbass, *c)* im Orgelspiel.

D) Die gymnastischen Uebungen sind unter Leitung des Turnlehrers Rindfleisch im vorigen Sommer wieder angestellt worden und zwar so, dass Mittwochs und Sonnabends in einer Abendstunde die Schüler des Gymnasiums allein sich übten. Die Schüler der obern Classen widmeten sich mit Eifer dem Geschäfte des Vorturnens. Die Uebungen bestanden bis zu den Sommerferien in der Mitte Juli's in militärischen Stellungs- und Bewegungsübungen ohne Waffen, nach den Sommerferien von Mitte Augusts an im Turnen am Geräthe und in Lauf- und Springübungen. Als Turngeld wurde nur 8 Sgr. von jedem Schüler erhoben.

E) Die Selbstbeschäftigungstage, und die Docirstunden der obern Schüler mit den untern sind in der gewohnten Weise fortgesetzt worden.

III. Verordnungen und Erlasse der vorgesetzten Behörden.

A) Von dem Königl. Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten.

1) Benachrichtigung, dass dem Director eine ausserordentliche Unterstützung von 50 Thlr. verliehen worden ist. Berlin, den 31. December 1852.

B) Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegium.

1) Genehmigung der Einführung von Braunhard's Handbuch der französischen Sprache und Literatur (Erfurt, 1850) in den drei obern Classen. Berlin, den 20. März; Magdeburg, den 24. März, 1852.

2) Dass über im Civildienst beschäftigte Militär-Invaliden, die einen Pensionszuschuss aus Militär- oder Civil-Fonds beziehen, jährlich ein Attest ihrer Einkünfte an die Behörde, auf deren Etat das Gnadengehalt steht, einzusenden sei (27. März).

3) Benachrichtigung, dass von der zur Unterstützung von Gymnasial-Lehrern aus Staatsfonds für das Jahr 1852 bewilligten Summe dem hiesigen Gymnasium 280 Thlr. zugewiesen sind, nämlich dem Director 50 Thlr., von den nächsten 5 Lehrern jedem 40 Thlr., dem Musikdirector, Zeichenlehrer und Schreiblehrer, jedem 10 Thlr. (den 3. Juni).

4) Aufgabe eines Berichtes darüber, wie es mit den Dispensationen vom Unterrichte im Griechischen gehalten werde und wie hoch die Zahl der Dispensirten in jeder Classe sich belaufe (den 3. Juni).

5) Mit Bezug auf das Circular-Rescript vom 20. November 1837 wird die Revision des Manuscripts der dem Jahresberichte beigegebenen Abhandlung dem Director überlassen (den 11. August).

6) Genehmigung des eingereichten Religionslehrplanes und der Einführung der beantragten Leitfaden in den Händen der Schüler, nämlich: *a*) für Tertia: *Dr.* Möller's Leitfaden und Spruchbuch. Magdeburg, 1850. — *b*) für Quarta und

Quinta: Zahns biblische Historien. Meurs, 1852. Luthers kleiner Katechismus und Spruchbuch, von Bieck. Cüstrin, 1847. — Als zweckmässig dem Unterrichte zu Grunde zu legende Lehrbücher werden empfohlen *a*) für Prima: Petri Lehrbuch der Religion für die obern Classen protestantischer hoher Schulen. Hannover, 1850, und Kurtz Lehrbuch der heiligen Geschichte, Königsberg, 1851. *b*) für Secunda: Kurtz christliche Religionslehre nach dem Lehrbegriffe der evangelischen Kirche, Mietau, 1851. *c*) Für die Wahl der in den untern Classen zu memorirenden und der zu den Andachten des Cötus zu bestimmenden Kirchenlieder könne zum Anhalt dienen das „Gesangbuch für evangelische Gemeinen und Schulen, Berlin, bei Reimer (2 Sgr.)." [Magdeburg, den 19. April und 30. September 1852.]

7) Aufgabe einer Nachweisung der Schulgeldersätze und der sonstigen Erhebungen von den Schülern (den 6. November).

8) Ueber die erforderlichen Atteste bei Anträgen auf Pensionirung von Lehrern (Berlin, den 9. December; Magdeburg, den 16. December 1852).

9) In Folge des neuen Zutritts mehrerer Gymnasien zu dem Programmentausche sind 329 Exemplare, nämlich 146 Exemplare an die Geheime Registratur des Königl. Unterrichts-Ministeriums zu Berlin, und 183 Exemplare an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium zu Magdeburg einzusenden (den 16. April, 30. Juli, 3. August, 26. November 1852, 9. Februar 1853).

10) Bestimmungen über den noch vor Jahresschluss einzureichenden Jahresbericht und über die tabellarischen Nachweisungen zu demselben (den 10. Juni und 29. November).

11) Rescript auf den Jahresbericht *pro* 1852, mit erfreulicher Anerkennung der Wirksamkeit der Direction und des Lehrercollegiums, durch welche bei dem erschwerenden Mangel an Lehrkräften (vergl. Seite 6) es dennoch möglich geworden sei, die Anstalt in ihrem bisherigen Gange zu erhalten (den 31. Januar 1853).

12) Empfohlen wurde: *a*) die zum Besten der allgemeinen Landes-Vereins-Stiftung zur Unterstützung der Veteranen und invaliden Krieger der Preuss. Armee erscheinende neue Zeitschrift „Der National-Dank." *b*) die in dem geographischen Institute zu Weimar erscheinenden Wandkarten der alten Geographie.

13) Anheim gegeben wurde — der Beitritt zu dem Stuttgarter literarischen Verein für Herausgabe alter werthvoller Werke aus dem Gebiete der Geschichte und Literatur Deutschlands.

14) Durch Circular wurde zur Ansicht mitgetheilt: *a*) *Dr.* Alschefsky's lateinische Grammatik. Berlin, 1852. *b*) Berghaus physikalischer Atlas, 2 Bände.

C) Von dem Magistrate, als dem Patron der Anstalt.

Aus den in ähnlicher Weise und Anzahl, wie sie in den frühern Programmen einzeln angegeben sind, wiederkehrenden Erlassen über Verwaltungs-Angelegenheiten sind diessmal besonders zu erwähnen:

a) Zufertigung der mit Bestätigung von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegium zu Magdeburg und von der Königl. Regierung zu Erfurt versehenen Bestallung des gemeinsam für das Gymnasium und die Knaben- und Mädchen-Bürgerschule bisher nur auf Kündigung, nun aber definitiv angestellten Zeichenlehrers, Herrn Dreiheller's — zur Aushändigung an denselben (den 6. April 1852).

b) Benachrichtigung von dem Witzenhausen'schen im Jahre 1516 gestifteten Stipendium, das bisher nur an Familien-Angehörige des Fundators und als Universitäts-Stipendium verliehen worden ist, von nun an aber, nach genauerm Anhalte an die Stiftungsurkunde, als allgemeines Schul-Stipendium gelten soll (den 31. December 1852).

Die Königl. Regierung zu Erfurt hat nämlich auf das von der Stadt-Schul-Commission der geschehenen Aufforderung zufolge gegebene Gutachten, das der Magistrat der Stiftungs-Urkunde entsprechend fand und dem er daher beistimmte, Folgendes festgesetzt:

1) dass das Stipendium bedürftigen und würdigen Schülern des Gymnasiums und der Knabenbürgerschule verliehen werden solle, ohne indess die Schüler der gewerblichen Fortbildungsschule, als der Fortsetzung der Bürgerschule, ganz auszuschliessen.

2) dass die bedürftigen und würdigen Söhne hiesiger Einwohner, und besonders die der Familie des Stifters angehörigen geeigneten Schüler vorzugsweise zu berücksichtigen seien.

3) dass die betreffenden Schuldirigenten jährlich im Monat April dem Magistrate motivirte Vorschläge zur Vertheilung machen sollen.

4) dass, um dem Verlangen des Stifters gemäss die Verleihung feierlich geschehen zu lassen, sie am Schlusse des öffentlichen Rede-Actus am jährlichen Stiftungsfeste des Gymnasiums und der Knaben-Bürgerschule bekannt gemacht werden soll.

5) dass der jährliche Betrag von 26 Thlr. 1 Sgr. 5 Pf. nicht in zu kleine Antheile zersplittert werden möchte.

IV) Statistische Uebersicht des Gymnasiums
von Ostern 1852 bis 1853.

A) Verhältnisse der Schüler.

1) Zahl der Schüler.

Am Schlusse des vorigen Schuljahres zu Ostern 1852 hatte das Gymnasium 107 Schüler, am Schlusse des Sommerhalbjahres 119, und hat jetzt zu Ende des Schuljahres 118 Schüler, nämlich 10 in Prima, 31 in Secunda, 25 in Tertia, 26 in Quarta, 26 in Quinta.

2) Aufgenommen wurden 32:

Zu Ostern 25:

Für Secunda 2: Victor Becker, aus Langensalza. — Georg Bippard, aus Wanfried.

Für Tertia 2: Karl Meyer, aus Eigenrode. — Adolph Lamperz, von hier.

Für Quarta 3: Christian Ackermann, von hier. — Karl Linke, von hier. — Adolph Otto, von hier.

Für Quinta 18: *a*) Einheimische: Bernhard Bickel. — Otto Danner. — Wilhelm Döring. — Franz Franke. — Christian Frohne. — Herrmann Gräger. — Otto v. Hagen. — Louis Hefter. — Julius Immig. — August Kleyensteuber. — Wilhelm Mühlberg. — Louis Oppé. — August Pfeiffer. — Ernst Schäfer. — Louis Weber. — *b*) Auswärtige: Alexander Koch, aus Klein-Welsbach. — Karl Schumann, aus Langula. — Karl Zwinkau, aus Heldburg.

Zu Michaelis 6:

Für Secunda 1: Eugen Herbig, aus Abtsbessingen.

Für Tertia 3: Armin Koch, von hier. — Alfred Grosser, aus Grossengottern. — Hugo Grosser, aus Grossengottern.

Für Quarta 1: Oscar Meister, aus Weberstedt.

Für Quinta 1: Gustav Grüning, aus Gross-Uhrleben.

Im November 1:

Für Secunda 1: Adam Müller, aus Deuna.

3) Abgegangen sind 21:

a) Aus Prima nach bestandener Abiturienten-Prüfung mit dem Zeugniss der Reife auf die Universität 6:

5 (evangelischer Confession) zu Ostern 1852:

Tauf- und Familien-Name.	Alter. Jahr	Geburtsort.	Stand u. Wohnort des Vaters	Zeit des Schulbesuchs überhaupt. Jahr	Zeit des Schulbesuchs in Prima. Jahr	Universität.	Studium.
Adolph Sachs	18	Langula	Schullehr. in Lang.	9	2	Göttingn.	Philologie
Heinrich Otto	19	Erfurt	Rect.d.Kn.-Bürgerschule zu Mühlhsn.	10	2	Halle	Theologie
Bernhard Haun	19	Merseburg	Gymnasial-Direct. zu Mühlhausen	10	2	Halle	Medicin
Wilhelm Madlung	22	Mühlhausen	Stadtsecr. daselbst	11	2	—	Milit.wissensch.
Ad. Stossmeister	21	Mühlhausen	Stadtbaumstr. das.	12	2	Göttingn.	Medicin
1 (katholischer Confession) zu Michaelis 1852:							
Ignaz Werner	19	Worbis	Fabrikant (†) in Worbis	$4\frac{1}{2}$	2	—	Handelswissenschaft

b) Auf eine andere Schule 6:

Aus Prima 1: Friedrich Ochs, aus der Neben-Abtheilung für Seminar-Vorbildung in die erste Classe des Königl. Haupt-Seminars zu Erfurt.
Aus Secunda 1: Gustav Seifarth, aus Hohenbergen.
Aus Tertia 1: Herrmann Müller, aus Treffurt.
Aus Quarta 1: Wilhelm v. Wehren, aus Wintzingerode.
Aus Quinta 2: Burghard Cammerer, aus Oschersleben (wegen Wegzugs der Eltern). — Herrmann v. Bonin, aus Neuhaus (auf die Königl. Cadettenschule zu Bedburg).

c) Zu anderm Berufe 8:

Aus Prima 1: Ernst Madlung, von hier.
Aus Secunda 2: Theodor Fürer, von hier. — Franz König, aus Erfurt.
Aus Tertia 2: Karl Meyer, aus Eigenrode. — Adolph Lamperz, von hier.
Aus Quarta 3: Karl Etzel, von hier. — Benjamin Rowolt, von hier. — Karl Ose, von hier.

d) Gestorben 1:

Der Primus der Tertianer, Julius v. Marschall aus Altengottern, starb am 25. September 1852 $14^{3}/_{4}$ Jahr alt, nach kurzem Krankenlager an einer nervösen Lungen-Entzündung. Die Schule verlor an ihm einen eben so fähigen wie fleissigen und wohlgesitteten Schüler. Lehrer und Schüler begleiteten ihn zu Grabe, an welchem der Diaconus Führ zwischen den Trauergesängen Worte religiöser Betrachtung und christlichen Trostes zu der Trauerversammlung sprach.

B) Vermehrung des Lehr-Apparates.

Als Geschenke, für welche wir hiermit unsern Dank aussprechen, sind der Anstalt zugegangen:

1) Von dem Königl. Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten: *a)* Joh. Seb. Bachs Matthäus-Passion, musikalisch-ästhetisch dargestellt von *Dr.* Mosevius, Berlin, 1852. *b)* v. Spruners historisch-geographischer Atlas, 15. Lieferung (Schluss).

In einem Circulare vom 2. August 1852 war ein Verzeichniss von 73 bei dem Königl. Unterrichts-Ministerium disponibeln Werken zur Auswahl mitgetheilt worden. Von den aus demselben erbetenen 27 Numern haben uns nur 7 Numern nicht gewährt werden können, weil der Vorrath nicht ausgereicht hat; die übrigen 20 Numern sind uns durch das Königl. Provinzial-Schul-Collegium laut Verfügung vom 6. Februar 1853 (erhalten den 2. März) als Geschenke für die Bibliothek zugesandt worden, und enthalten folgende (noch ungebundene) Werke:

Das heilige Abendmahl, eine dogmengeschichtliche Untersuchung, Giessen 1815. — *Evangelia N. T. rec. et cum comment. perpet. ed. D. Fritzsche, Lps. 1830. Tom. I et II, Evang. Matth. et Marci.* — Köppen: Die Bibel, ein Werk der göttlichen Weisheit. 2 Bände. Lpz. 1837. — *Quaestiones Philoneae. Scrips. Dr. Grossmann. Lps. 1829.* — *Schumann: Pentateuchus, hebr. et graec., Vol. I. Genesis. Lps. 1829.* — *Ciceron. oratt. IV etc., ed. F. A. Wolf. Berol. 1801.* — *Hederici Lexicon graec. lat. et lat. graec., ed. Pinzger, II Tomi, Lps. 1827.* — *Matthiae: Lexicon Euripideum. Vol. I. A — Γ. Lips. 1841.* — *Aemil. Porti Dictionarium ionicum gr. lat. in Herodot., Londin. 1823.* — *Taciti dialog. de oratoribus, ed. J. C. Orelli. Turic. 1830.* — *Taciti Germania, edd. Kapp et Hess. Lps. 1824.* — *Dictionnaire de l'Academie françoise, par Catel. IV Tomi, Berol. 1800* u. *1801.* — Fiedler: Reise durch alle Theile des Königreiches Griechenland in den Jahren 1834 bis 1837. 2 Theile, mit lithographirten Tafeln und Karten. Lpz. 1840 und 1841. — A. G. Lange's vermischte Schriften, herausgegeben von K. G. Jacob. Lpz. 1832. — *Dr.* G. Schilling: Geschichte des Hauses Hohenzollern. Lpz. 1843. — Winter: Literärgeschichte der deutschen Sprach-, Dicht- und Redekunst. Lpz. 1829. — Bürja: Der selbstlehrende Geometer. 2 Theile. Lpz. 1824. — Braselmann: Gebete für Schulen. Düsseldorf, 1841. — *Enchiridion*, oder der kleine Katechismus *Dr.* Martin Luthers, mit histor. Einleitung und ausführlicher Erläuterung von *M.* Schott. Lpz. 1833. — Rist: Anweisung für Schulmeister. Hamburg, 1798.

2) Von dem Königl. Ober-Präsidium zu Magdeburg: Wesen und Unwesen des modernen Constitutionalismus etc. Stettin, 1852.

3) Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegium: Shakespeare's Macbeth, übersetzt von *Dr.* Aug. Jacob. Berlin, 1848.

4) Von Herrn Buchhändler Heinrichshofen hier: Geschichte des griechischen Kriegswesens, von Rüstow und Köchly. Aarau, 1852.

5) Von der Verlagshandlung von Ferdinand Hirt in Breslau: Auras und Gnerlich deutsches Lesebuch, 1. Theil. 3. Auflage. 1852. — v. Seydlitz Leitfaden der Geographie, 6. Auflage. 1852. — Schillings Grundriss der Naturgeschichte, 1. u. 2. Bändchen: Thier- und Pflanzenreich. — Kambly's Elementar-Mathematik. 1. Theil, Arithmetik und Algebra. 2. Theil, Planimetrie. 3. Theil, Trigonometrie.

6) Von der Verlagshandlung „Friedrich Vieweg und Sohn" in Braunschweig: Ingerslev's Lat. Deutsches Schul-Wörterbuch, 1852, 1—37 Bogen (mit Zusage der fernern Bogen nach Beendigung des Druckes).

7) Von der E. Schweizerbart'schen Verlagshandlung in Stuttgart: Reuschle's Lehrbuch der Geographie. 1. Theil: Die Physik der Erde. 2. Theil: Beschreibende Geographie, 1. Hälfte (mit Zusage der zweiten Hälfte nach ihrer Erscheinung).

8) Von der Hahn'schen Hofbuchhandlung in Hannover: Heyse's deutsche Schul-Grammatik, 17. Ausgabe, 1851. — Heyse's Leitfaden zum Unterrichte in der deutschen Sprache, 16. Auflage, 1852. — Analytischer Leitfaden für den ersten wissenschaftlichen Unterricht in der Naturgeschichte, von Leunis. 1. Heft, Zoologie. 1852.

9) Von der Schultze'schen Buchdruckerei in Berlin: Robertson's neuer Lehrgang der englischen Sprache, deutsch bearbeitet von *D.* Boltz. 2 Theile, 1852.

10) Von der Friedrichs'chen Verlagsbuchhandlung in Elberfeld: Völter's Leitfaden für den methodischen Unterricht in der Naturgeschichte. 1. Abtheil. Zoologie. 1. Heftchen: Die Gruppen und Classen des Thierreichs — für Sexta und Quinta des Gymnasiums. 1852.*)

11) Von dem Professor *Dr.* Ameis hier: *Dr.* Hoyers Stiftung, Verlassenschaft und Lebenslauf. Mühlhausen, 1797. — Reinholds Auszüge aus den im Jahre 1768 und 69 über die Glaubenslehre gehaltenen Predigten. Mühlhausen, 1770. — Ein Mühlhäusisches Gesangbuch von 1781 mit Anhang von 200 Liedern. — Vollmann Handbuch der Einleitung in die Bücher des N. T. Göttingen, 1808. — Ein Sammelband, enthaltend: *a)* Lungershausen Synodalprogramme von 1716—28. *b)* die von 1717 bis 1728 beim Rathswechsel der kaiserlich freien Reichsstadt Mühlhausen gehaltenen sogenannten Regenten-Predigten.

12) Von dem Gymnasial-Lehrer-Collegium: *a)* Klotz' und Dietsch' Jahrbücher für Philologie, Jahrgang 1852 oder 64. 65. 66. Band. — *b)* Mützell's Zeitschrift für das Gymnasialwesen. Jahrgang 1852. — *c)* Deutsche Briefe über englische Erziehung, von *Dr.* Wiese. Berlin, 1852.

Die Schulbibliothek hatte eine Einnahme von 105 Thlr. 5 Sgr., wovon aber noch ein Theil auf Berichtigung rückständiger Rechnungen zu verwenden war. Theils aus Auctionen oder aus Antiquarhandlungen, theils aus dem Buchhandel wurden beschafft: Das Neue Testament, nach Zweck, Ursprung, Inhalt, von Credner. Giessen, 1841. Neudecker: Lexicon der Religions- und christlichen Kirchengeschichte, 5 Bände. Köster: Der Apostel Johannes. Meyer: Kritisch-exegetisches Handbuch über die Apostelgeschichte. Leibnitz Theodicee. Vorlesungen über die Sittenlehre, von de Wette, 2 Bände. Commentar über die Psalmen, von de Wette. Herbart's Psychologie als Wissenschaft, 2 Bände. Lehren und Meinungen der Socratiker über Unsterblichkeit, von Tennemann. *Vollandii Historia literaria Mulhusae. Vitemb. 1709.* Stuart und Revett Alterthümer von Athen, mit 84 Lithogr. Creuzers Symbolik und Mythologie der alten Völker, 6 Bände und Kupferheft. Wieselers Theatergebäude und Denkmäler des Bühnenwesens bei den Griechen und Römern. Sinnbilder der alten Völker, von Conrad Schwenk. Krause: Geschichte der Erziehung. Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Philologisch-historische Classe 1850 und 1851, Mathematische Classe 1850. *Groddeck: Initia historiae literar. Graecor., II Partes. Achilles Tatius, ed. Jacobs. Eustathii commentar. in Homer. Iliad. et*

*) Den Zweck dieser sub Nr. 5—10 von Verlagsbuchhandlungen mir gewordenen gütigen Zusendungen glaube ich dadurch am besten zu fördern, dass ich die erhaltenen Werke zunächst im Lehrercollegio circuliren lasse, und sie dann in die Schul- oder Schülerbibliothek, je für welche sie sich am meisten eignen, aufnehme, aus denen sie dann in Folge dieser Bekanntmachung im Programme von dem Publikum, das sich für sie interessirt, und hauptsächlich von den Lehrern der Stadt und Umgegend, die sie näher kennen lernen wollen, geliehen werden können. Dadurch wird auch eine mögliche Einführung derselben als Lehrbücher, wenn sie wünschenswerth erscheint, am besten vorbereitet.

Odyss., ed. Stallbaum, VII Tomi. Buttmanni Scholia in Homer. Odyss. Lachmann de choricis systematibus tragicor. graec. Tacitus, ed. Nipperdey, Tom. I. Statii Opera, ed. Bipont. Suetonius, ed. Bipont. Plauti Comoed., ed. Bipont., II Tomi. Horatii Opera, ed. Mitscherlich, II Tomi. Virgilii Evangelisantis Christiados libri XIII, auctore Rosaeo. Braunhards Handbuch der franz. Sprache und Literatur. *A. W. Zumpt de C. T. Zumptii vita et studiis.* Karl Lachmann, von Hertz. Gedenkbuch über das Friedrichs-Denkmal, von Sommer. v. Wackerbarth Parallele zwischen Peter d. Gr. und Karl d. Gr. *Mauritii Gudeni Historia Erfurtensis.* Höhentafel der merkwürdigsten Monumente. v. Humboldt's Kosmos, 3. Bandes 2. Abtheilung. Winkler's Generalbass-Uebungen. Meichels Blumenzeichnen und Landschaftszeichnen. Adams Thierzeichnen. Mehrere kleine Schriften.

Hierzu aus besondern Fonds der Knaben-Bürgerschule: Kähler: die katechetische Baukunst. Wackernagel: Unterricht in der Muttersprache. Waitz allgemeine Pädagogik. Nacke pädagogischer Jahresbericht für 1852. Bock und Jungklaass: Schulblatt der evangel. Seminare Schlesiens, Jahrgang 1. Vogel und Körner: Die höhere Bürgerschule, Jahrgang 1. Körner: Der praktische Schulmann, Jahrgang 1. Klemm's Kulturgeschichte der Menschheit, Band 10. Barthold's Geschichte der deutschen Städte, Band 3. Schouw: Die Erde, die Pflanzen und der Mensch. Reuschle's Physik der Erde.

An Programmen erhielt die Bibliothek durch den Programmentausch 279 Stück als Gesammtzahl der zwei Sendungen vom 20. August und 4. December 1852.

Aus dem Fonds für den mathematisch-physikalischen Apparat wurden diessmal nur folgende Werke für die Bibliothek beschafft: Benzenbergs Versuche über die Gesetze des Falls. Link Handbuch zur Erkennung der Gewächse, 3 Bände. Ideler Untersuchungen über den Ursprung der Sternnamen.

Die Schüler-Bibliothek hatte durch die Beiträge der Schüler (jährlich à 12 Sgr., die den bedürftigen und würdigen Schülern, wie auch bei Verhinderung des Schulbesuchs durch dauernde Krankheit erlassen werden) in der Summe von 41 Thlr. 18 Sgr. und durch den Gymnasialantheil am Beidergewandgelde in der Summe vnn 17 Thlr. 25 Sgr., endlich durch Ersatzgelder für verlorne Bücher in der Summe von 24 Sgr. die Gesammt-Einnahme von 60 Thlr. 7 Sgr., und schaffte davon folgende Werke an: Hinrichs Erklärungen von Schillers Dichtungen, 3 Bände. Kosegartens Jucunde. Sporschil neues Heldenbuch, 3 Bände. Spazier: Biographie Jean Paul's. Fornet's Lesebuch in Biographien. Zehn Bücher fränkischer Geschichten, von Gregor v. Tour, 2 Bände. Oertel's Geschichtsparagraphen. Schlags Weltgeschichte, 1. und 2. Lieferung. Atzerodt Geographie und Geschichte von Preussen. Das Eichsfeld, von Carl Düval. Stacke Erzählungen aus der griechischen Geschichte. Pariser Bluthochzeit, von Varamundus. Des Josephus Erzählung von der Zerstörung Jerusalems. Die Busse Heinrichs IV vor Papst Gregor VII, von *Lambert. Aschaffenb.* Bayard, der Ritter ohne Furcht und Tadel, von Collmann. Zeiss Lehrbuch der allgemeinen Geschichte, 1. Theil. Sommer's Gedenkbuch über das Friedrichsdenkmal. Melos Geschichte der Reformation. Der Kampf der Democratie und Aristokratie in Rom, von Schulze. Woltmann's kleine historische Schriften. *Dr.* Martin Luther, der Mann Gottes, von Küster. Geschichten und Characterzüge aus der deutschen Kaiserzeit, von Klopp, 2 Bände. Heldensagen griechischer Vorzeit, von Werther, 2 Bände. Süpfle's lat. Stilübungen für die obersten Klassen, 3. Theil. Poppe nützliche Kenntnisse. Poppe Physik, 2 Bände. Poppe Erd- und Himmelskunde. Gude und Gruber Unterhaltungen und Studien. 1. Jahrgang. Grube: Bilder und Scenen aus Natur- und Menschenleben, 4 Bände. Das Seelenleben der Thiere, von Posner. Kletke's Musterbuch deutscher Aufsätze. Kirchner's Hodegetik, oder Wegweiser zur Universität für Studirende. Weber literar-historisches Lesebuch, 3. Bandes 1—3. Abtheilung. Schmidt's Hausschatz der schönsten Balladen. Auras und Gnerlich deutsches Lesebuch, 2. Theil. Lüben und Heinemann: Jugendbibliothek. Amalthea, Benignus, und Feierabende an der Elbe, von Strauss. Die Märtyrer, oder der Triumph der christlichen Religion, von Chateaubriand. Keschnitz Sagen und Mährchen für die Jugend, 2. und 3. Theil. Nieritz Jugendbibliothek, 1852. 6 Bändchen. Glaubrechts Goldmühle. Blüthen und Früchte, von Ahlfeld. Der deutsche Knabe in Amerika, von Baron. Capitän Tisdale, von Hoffmann. Der zerbrochene Becher, von Hoffmann. Die Uhr — und — das verschüttete Dorf, von Steiger. Körbers Jugendbibliothek, 4 Bändchen, enthaltend: Jeffersons Reise nach Californien; Ross' zweite Nordpol-Expedition; El-Dorado; Golowins Verbannung nach Sibirien. Keschnitz' Goldkörner. Keschnitz' Lohn des Fleisses. Der Kinder-Kreuzzug, von Nieritz. Horn Lebensbilder aus der Heimath und Fremde. Fiorita — und — König und Kronprinz, von Baron. Die Kartoffeln, von Nieritz, 2 Bändchen. Rufe mich an in der Noth, Erzählung von Hoffmann.

Für jede Classe sind an bestimmten Tagen Stunden festgesetzt, in denen die Schüler Werke aus der Bibliothek zur Kennenlernung oder zum Nachschlagen ins Lesezimmer, oder für längern Gebrauch mit nach Hause bekommen können.

Der historische Lese-Verein für das Gymnasium hatte von 40 Mitgliedern eine Einnahme von c. 30 Thlr. Die neu angeschafften Werke sind folgende: Das Leben des Ministers v. Stein, 3. und 4. Theil. Steger's Supplement zu K. v. Rottecks allgemeiner Geschichte. Briefwechsel zwischen Mirabeau und Fürst von Arensberg, 3 Theile. Macauley's Geschichte Englands, 4 Theile. Vehse Geschichte des Oesterreich. Adels und Hofes, 4 Theile. Korn Neueste Chronik der Magyaren, 2. Band: Die Russen in Ungarn und die Ungarn in Deutschland. Vehse Geschichte des Hauses Braunschweig in Deutschland und England, 2 Theile.

Indem wir den Mitgliedern des Vereins für die bleibende Theilnahme unsern Dank hiermit aussprechen, bemerken wir zugleich, dass der den Verein leitende Conrector *Dr.* Mühlberg ferner bemüht sein wird, das Interesse an dem Institute durch Beschaffung der neuesten und werthvollsten historischen Werke lebendig zu erhalten.

C) Geschenke, Legate, Stiftungen.

Dankbar haben wir auch an dieser Stelle zu erwähnen:

1) die ausserordentlichen Unterstützungen, welche laut der auf Seite 10 A 1) und B 3) angeführten Verfügungen von dem Königl. Ministerium und Königl. Provinzial-Schul-Collegium den Lehrern verliehen worden sind;

2) die von dem Magistrat als dem Patron der Anstalt gewährte höhere Dotirung einiger Lehrstellen und verliehene Zulage (vergl. Seite 6).

Die 28 Thlr. des Lutterothschen Legates wurden stiftungsgemässnach Abzug von 1 Thlr. Gebühren an den Director an 7 Schüler so vertheilt, dass die sechs ersten, jeder 4 Thlr., der letzte 3 Thlr. erhielt, deren Verwendung zu Kleidungen oder Büchern sie nachweisen müssen.

Aus der v. Hansteinschen Stiftung erhielten zwei Schüler des Gymnasiums, und zwei Schüler der Knaben-Bürgerschule, jeder Tuch zu einem Oberrock, und ein Schüler der letzterwähnten Schule Tuch zu Beinkleidern, überdiess 2 Schüler des Gymnasiums Bücher in dem Gesammtwerthe von 2 Thlr. 12 Sgr. 6 Pf. und 4 Schüler der Knabenbürgerschule, jeder ein Gesangbuch im Werthe von 15 Sgr.

Der Gymnasial-Antheil am Schuhgelde und an den Stephan-Helmsdorf-Griesbachschen Legaten im Betrage von 23 Thlr. 5 Sgr. 3 Pf. wurde so vertheilt, dass 1 Primaner 1 Thlr. 10 Sgr. 3 Pf., 1 Primaner 1 Thlr., 6 Secundaner, jeder 1 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf., 2 Tertianer, jeder 1 Thlr., 10 Quartaner, jeder 22 Sgr. 6 Pf., 10 Quintaner, jeder 17 Sgr. 6 Pf., als solcher Unterstützung bedürftig und würdig, erhielten.

Zu diesen Legaten für Schüler ist nun das bereits oben Seite 12 angeführte Witzenhausen'sche gekommen, das aber erst beim nächsten Stiftungsfeste 1853 zum ersten Male nach der neuen Bestimmung verliehen werden wird, und zwar in diesem Jahre die rückständigen Beträge der beiden Jahre 1851 und 1852 à 26 Thlr. 1 Sgr. 5 Pf., über deren Vertheilung daher erst im Programme des nächsten Jahres berichtet werden kann.

Im Oster-Examen 1852 wurden von der dazu ausgesetzten Summe von 20 Thlr. an durch Fleiss und gute Sitten der Belohnung würdige Schüler aus jeder Classe folgende 15 Prämienbücher vertheilt: In Prima: Deutsche Geschichte in Gedichten, herausgegeben von Grube. In Secunda: Nägelsbach Anmerkungen zu Homers Ilias. Braunhard Handbuch der französischen Sprache und Literatur. Nägelsbach lateinische Stilistik. Stolls Handbuch der Religion der Griechen. In Tertia: Vega Handbuch der Logarithmen. Dethier Geschichte der alten Welt in ausführlichen Biographien, 1. und 2. Band. Dietsch Lehrbuch der allgemeinen Geschichte, 3. Theil, Neuere Geschichte. In Quarta: *Gradus ad Parnassum, ed. Conrad.* Echtermeyer Auswahl deutscher Gedichte. Crusius Wörterbuch zum Homer. In Quinta: Borussia, Sammlung deutscher Gedichte aus dem Gebiete der Geschichte Preussens, von Lehmann, 1. und 2. Theil. Schmidt Preussische Vaterlandskunde. — Ausserdem erhielt noch ein Schüler zu seiner Confirmation ein Gesangbuch, womit nun das zweite von den im Jahre 1850 durch den Magistrat hierzu erhaltenen 5 Exemplaren der neuen Auflage vertheilt ist.

Von dem Schulgeld-Ueberschusse wurden zunächst 25 Thlr. für die zum Oster-Programm 1852 gelieferte Abhandlung, und c. 23 Thlr. für den philologischen Leseverein des Lehrercollegiums bestimmt. Der übrige grösste Theil musste auf Honorirung von Vicariatsstunden verwandt werden, so dass nur die kleine Summe von 58 Thalern für Zuschüsse zu den Besoldungen übrig blieb, wovon die zwei am geringsten besoldeten Lehrer jeder 17 Thlr., die zwei nächsten jeder 8 Thlr., die drei folgenden jeder 6 Thlr. erhielten.

V. Ueber die Schulprüfungen.

Zu Michael 1852 fand die gewöhnliche Prüfung aller Classen nebst Censurvertheilung nur vor dem Schul-Curatorium und Lehrercollegium statt. Die Gegenstände derselben waren: Prima: Religionslehre: Director *Dr.* Haun. Mathematik: Subconrector *Dr.* Dilling. — Secunda: *Homer Odyss.*: Professor *Dr.* Ameis. *Virgil. Eclog.*: Conrector *Dr.* Mühlberg. — Tertia: Mathematik: Subconrector *Dr.* Dilling. Französisch: *Dr.* Weigand. — Quarta: Geschichte und Geographie: Diaconus Führ. Griechisch: Subconrector Recke. — Quinta: Lateinisch: Conrector *Dr.* Mühlberg. Rechnen: Subconrector Recke. — Ausserdem in Tertia, Quarta und Quinta Gesang: Musikdirector Thierfelder.

In der öffentlichen Oster-Prüfung d. J. werden die Ausarbeitungen und Scripta in den verschiedenen Sprachen und Wissenschaften, sowie die Zeichnungen, Schreibebücher u. s. w. von allen Classen vorliegen. Die Prüfung ist auf folgende Art angeordnet:

1) **Im Gymnasium:** Montag, den 21. März Vormittag von 8—11 Uhr Prima und Secunda; von 11 — 12 Uhr Tertia, Nachmittag von 2 — 4 Uhr Quarta und Quinta.

Prima: *Sophoclis Electra:* Director *Dr.* Haun. — Geschichte: Professor *Dr.* Ameis.

Secunda: Mathemathik: Subconrector *Dr.* Dilling. — Französisch: *Dr.* Weigand.

Tertia: *Ovid. Metamorph.*: Subconrector Recke. — Geschichte: Collaborator Meinshausen.
Quarta: Religionslehre: Subconrector Recke. — *Cornelius Nepos*: Collaborator Meinshausen.
Quinta: Lateinisch: Conrector *Dr.* Mühlberg. — Französisch: *Dr.* Weigand.
Ausserdem Gesang in Tertia, Quarta und Quinta: Musikdirector Thierfelder.

2) Im Neben-Seminar: Montag, den 21. März Nachmittag von 4 Uhr an:

Religionslehre und Bibelerklärung: } Pastor Barlösius.
Geographie und Geschichte: }
Generalbass und Orgelspiel: Musikdirector Thierfelder.

Zu diesen beiden Prüfungen den 21. März werden hiermit ganz ergebenst eingeladen: Der verehrliche Patron, die Stadt-Schul-Commission, die Königlichen Militär- und Civil-, sowie die städtischen Behörden, die Herren Geistlichen und Lehrer, die Eltern unserer Schüler, und alle Gönner und Freunde des Schulwesens.

Die Vertheilung der Prämienbücher und der Censuren, sowie die Versetzung der Schüler und die Abiturienten-Entlassung findet Mittwoch den 23. März Vormittag 10 Uhr nur vor dem Schulcuratorium und Lehrercollegium Statt.

Der Sommercursus beginnt Montag den 4. April.

Mühlhausen, den 12. März 1853.

Dr. Haun, *Director.*

UEBERSICHT

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums zu Mühlhausen im Schuljahre Ostern 1852 bis 1853.

I. Lehrer.

Director *Dr.* Haun.
Pror. Prof. *Dr.* Ameis.
Conr. *Dr.* Mühlberg.
Subrect. Hartrodt.
Subconr. I. Recke.
Subc. II. *Dr.* Dilling.
Dr. Weigand, Lehrer der franz. Sprache.
Collaborator Meinshausen.
Pastor Barlösius, Hauptlehrer am Neben-Seminar.
Diaconus Führ.
Mskd. Thierfelder.
Zeichenlehrer Dreiheller.
Schreibl. Walter.
Turnl. Rindfleisch.

II. Allgemeiner Lehrplan.

Unterrichts-Gegenstände.	Stundenzahl. I	II	III	IV	V	Summa
a) Sprachen:						
Hebräisch . . .	2	2	—	—	—	4
Griechisch . . .	6	6	6	6	—	24
Lateinisch . . .	8	10	10	10	10	48
Deutsch	2	3	2	2	4	13
Französisch . . .	2	2	2	2	2	10
b) Wissenschaften:						
Religion	2	2	2	2	2	10
Mathematik . . .	4	4	3	3	—	14
Rechnen	—	—	—	—	4	4
Physik	2	1	—	—	—	3
Naturbeschreibung	—	—	2	2	2	6
Gesch. u. Geograph.	2	2	3	2	3	12
National-Literatur	1	—	—	—	—	1
Philos. Propädeutik	1	—	—	—	—	1
c) Fertigkeiten:						
Zeichnen	2	2	2	2	2	10
Singen	—	—	1	1	2	4
Schönschreiben .	—	—	—	2	2	4
Summa	34	34	33	34	33	168

III. a) Verhältnisse der Schüler.

In Classe	waren zu Ostern 1852	ausgeschieden durch Abgang	ausgeschieden durch Versetzung	Summa.	aufgenommen durch Reception	aufgenommen durch Versetzung	Summa.	sind jetzt zu Ostern 1853
I	10	8	—	8	—	8	8	10
II	20	3	8	11	4	18	22	31
III	29	4	18	22	5	13	18	25
IV	24	4	13	17	4	15	19	26
V	24	2	15	17	19	—	19	26
Sma.	107	21	—	—	32	—	—	118

b) Verhältnisse der Abiturienten.

sind entlassen	Zahl.	studiren wo?	Zahl.	studiren was?	Zahl.
zu Ostern 1852	5	in Halle	2	Theologie	1
		in Göttingen	2	Philologie	1
zu Michael 1852	1	in prakt. Beruf getreten	2	Medicin	2
				ins Militär	1
				ins Fabrikwesen	1
	6		6		6

Zins- und Renten-Theorie

von

Albert Hartrodt,
Subrector.

Beatus ille qui procul negotiis,
Ut prisca gens mortalium,
Paterna rura bobus exercet suis,
Solutus omni fenore.
Horatius.

§. I.
Begriffsbestimmungen.

1) Jeder Gegenstand, der fort und fort eine in sich selbst begründete Veränderung erfährt, heisst im Allgemeinen ein Grundstock, eine Stammgrösse, Anlage *(le fonds)* und im Besondern, wo namentlich von sich verwerthenden Geldsummen oder durch ein Geldäquivalent vertretbaren Sachen die Rede ist, ein Kapital *(sors, capitale)*. Das nach Ablauf einer gewissen Zeit sich ergebende, mit dem Grundstocke gleichartige, Veränderungsquantum nennt man Zunahme, Ertrag, öfterer wohl noch, vorzüglich, wenn es sich um Entschädigung oder Vergütung für den aus dem Niessbrauche eines physischen Gutes hervorgehenden Vortheil handelt, Zinsen *(census, usurae)*, Interessen *(interesse* Nutzen oder Gewinn bringen), Wucher (in eigentlicher Bedeutung = Anwachs, Zuwachs, *fenus*, *τόκος*; in engerer Bedeutung = hohe, übertriebene Zinsen).

Wird der Zinsenberechnung eine bestimmte Zeiteinheit zu Grunde gelegt — gewöhnlich ist eine Frist von Einem Jahre zu verstehen, wenn nicht vorher ausdrücklich ein anderes Zeitmaas bemerkt ist, — so werden die Zinsen für Eine Einheit der Stammgrösse Zinsfuss, Einheitszinsen *(quotae usurariae*, Zinsquote), für 100 Einheiten Procent oder Procente *(pro centum, p. c.*, %), so wie das nach Verfluss der ersten Zeiteinheit um den Zinsfuss vermehrte Einheitskapital der terminliche (jährliche, monatliche . . .) Vermehrungs- oder Veränderungs-Factor genannt.

Die Bestimmung der Zinsen oder Interessen aus der Grösse des Kapitals, des Zinsfusses und der Zeitdauer, nebst den verschiedenartigsten hieher gehörigen Beziehungen, Modificationen und Anwendungen machen den Gegenstand der Zins- oder Interessen-Rechnung aus.

2) Wird nach Verlauf einer Anzahl von Zeitabschnitten ausser dem Kapital bloss die Summe der in den einzelnen Terminen fälligen Zinsen (Hauptzinsen) in Rechnung gebracht, ohne dieselben wieder als Kapital zu benutzen, so geschieht die Verzinsung nach einfachem Zins; werden dagegen Zinsen von den Zinsen (Nebenzinsen) genommen, indem man die Zinsen am Ende jedes Termins wieder als ein neues verzinsliches Kapital betrachtet und dem Grundkapitale hinzugefügt (zugeschlagen) denkt, so rechnet man nach zusammengesetzten oder Zinseszinsen (*ἀνατοκισμός*). Hiernach unterscheidet man einfache oder niedere und zusammengesetzte oder höhere Zinsrechnung.

Das ursprüngliche (reine) Kapital heisst der bare, gegenwärtige oder Anfangswerth, das nach Ablauf einer bestimmten Anzahl von Terminen um die aufgelaufenen Zinsen vermehrte Kapital der zukünftige oder Endwerth, der Unterschied zwischen dem End- und Anfangswerthe eines Kapitales, dessen Zinsen innerhalb eines bestimmten Zeitintervalles im Rückstande geblieben sind, der Zinsenbelauf, die Zwischenzinsen (*interusurium; commodum temporis*).

Bei Vorausbezahlungen (*anticipationes*) — wo eine erst nach einer festgesetzten Frist unverzinslich fällige Summe in Folge getroffener Uebereinkunft oder aus irgend einem Rechtsgrund vor der Verfallzeit (d. i. bar) bezahlt und der Billigkeit und dem Rechte gemäss dem Schuldner ein gewisser Vortheil für die früher geleistete Zahlung (*commodum in repraesentatione*) bewilligt und dieser sofort durch Abzug von der ganzen Schuldpost in Anrechnung gebracht wird — nennt man die Abzugszinsen Rabatt oder Disconto (*rabatto* = Niederschlag, Nachlass; *disconto* = Abrechnung, Abzug). Der bare Werth wird im letztern Falle der discontirte (rabattirte) Werth, der Endwerth das zu discontirende (rabattirende) Kapital, und die Ableitung des baren Werthes aus dem Endwerthe das Discontiren (Rabattiren) eines Kapitals auf bestimmte Zeit, so wie umgekehrt die Bestimmung des Endwerthes aus dem baren Werthe das Aufzinsen, Accumuliren (*l'accumulation*) einer Summe auf bestimmte Zeit genannt.

3) Bei der Verzinsung auf längere Zeit kann entweder ein einziger Grundstock in Untersuchung gezogen werden, oder man betrachtet mehrere Stammgrössen zugleich, indem der ursprüngliche Grundstock in jedem successiven Zeitabschnitte durch Hinzufügen (oder Hinwegnehmen) eines neuen Grundstockes verändert wird; hiernach unterscheidet man: Zinsrechnung mit einmaliger oder constanter Kapitalanlage (Zinstheorie im engern Sinne) und Zinsrechnung mit mehrmaligen oder veränderten Kapitalanlagen (Rententheorie).

Erste Abtheilung.

Zinsrechnung mit einmaliger Kapitalanlage.

§. 2.

Grundformeln für die Zinsrechnung überhaupt.

1. Aufgabe. Den Zusammenhang zwischen dem jährlichen Vermehrungsfactor r, dem Zinsfusse q und den Procenten p anzugeben.

Aus §. 1. folgt unmittelbar:

$$1)\ r = 1 + q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}0p. \quad 2)\ q = r - 1 = \frac{p}{100} = 0{,}0p. \quad 3)\ p = 100\,q = 100\,(r-1).$$

2. Aufgabe. Wie gross ist der jährliche Zinsenertrag J eines Kapitales K bei dem Zinsfusse q oder p%?

Da das Kapital 1 am Ende eines jeden Jahres q Zinsen trägt, so bringt das Kapital K am Ende des Jahres qK Zinsen, mithin ist:

$$4)\ J = qK = 0{,}0p.\ K. \qquad 5)\ K = \frac{J}{q} = \frac{100.}{p}\ J. \qquad 6)\ p = 100.\frac{J.}{K.}$$

zu 4) „Die jährlichen Zinsen sind dem Producte aus Kapital und Zinsfuss gleich."

Πάντα δὴ ταῦτα ἄλογα, καὶ μάχεται αὐτὰ καὶ ἑαυτοῖς, καὶ τοῖς εὐλόγοις.

Aristoteles.

§. 3.

Grundformeln für niedere Zinsrechnung.

Aufgabe. Ein Kapital K ist zu dem Zinsfusse q auf n Jahre auszuleihen und nach Ablauf dieser Zeit mit den Gesammtzinsen J_n zu dem Endwerthe K_n angewachsen; man soll die gegenseitige Abhängigkeit dieser Grössen von einander entwickeln, wenn nur einfache Zinsen berechnet werden.

Das Kapital K gibt am Ende des ersten Jahres (Formel 3) qK Zinsen, mithin betragen die reinen Zinsen nach n Jahren nqK; hiernach ist:

$$7)\ J_n = nqK. \quad 8)\ K_n = K + J_n = K + nqK = K\,(1 + nq). \quad 9)\ K = \frac{K_n}{1 + nq}.$$

$$10)\ n = \left(\frac{K_n}{K} - 1\right) : q. \qquad 11)\ q = \left(\frac{K_n}{K} - 1\right) : n$$

zu 8) „Bei einfachem Zins wird der Endwerth eines Kapitales gefunden, wenn man das Kapital mit dem um 1 vermehrten Producte aus Zinsfuss und Zeit multiplicirt."

zu *9)* „Der gegenwärtige Werth eines Kapitales wird bestimmt, indem man den zukünftigen Werth durch das um 1 vermehrte Product aus Zinsfuss und Zeit dividirt."

Zusatz 1. Die aufgestellten Formeln gelten zwar nur unter der Voraussetzung, dass die Zeiteinheiten, nach welchen n bestimmt ist, ebenso benannt sind, als die, nach welchen der Zinsfuss angegeben wurde. Indessen sind dieselben nach Reduction des Zinsfusses auch leicht für den Fall anwendbar, wenn n in anders benannten Zeiteinheiten ausgedrückt ist. Ist q^1 der dem einjährigen Zinsfuss q entsprechende $^1/m$ jährliche Zinsfuss, so belaufen sich die Zinsen nach m Terminen oder am Ende des Jahres auf $mq^1 = q$; folglich ist:

$$12)\ q^1 = q/m.$$

„Bei einfachem Zins beträgt der Zinsfuss für $^1/m$ Jahr $^1/m$ des Jahreszinsfusses."

Diesen der Zeit einfach-proportionalen Zinsfuss q^1 wollen wir den relativen (usuellen) nennen. Hierbei muss jedoch erinnert werden, dass die aliquoten Zinsen auf $^1/_2$, $^1/_4$ . . . . Jahr bloss in den Fällen anzuwenden sind, wenn $^1/_2$, $^1/_4$ . . . . jährliche Zinszahlungstermine ausdrücklich bedungen sind; denn es würde durchaus falsch sein, auf $^1/_2$, $^1/_4$ . . . . Jahr $q/_2$, $q/_4$ . . . . zu rechnen, wenn die jährlichen Zinsen mit q ausgemacht wären (vgl. §. 4, Zusatz 1).

Zusatz 2. Die Formel *8)* bezeichnet den Werth eines Kapitals K, zu welchem dasselbe, von einem bestimmten Zeitpunkte aus gerechnet, nach n Jahren mit den einfachen Zinsen anwächst; wollte man hieraus auf consequente Weise den Werth bestimmen, welchen das Kapital K, von demselben Zeitpunkte an genommen, vor n Jahren hatte, so würde man nur in die obige Formel $-n$ statt n zu substituiren haben; dadurch erhält man $K_{-n} = K\ (1 - nq)$, oder wenn man hierin statt K_{-n} K, statt K K_{-n} setzt:

$$13)\ K = K_n\ (1 - nq).$$

„Die Formeln *9)* und *13)*, welche den baren (discontirten) Werth eines nach n Jahren ohne Zinsen fälligen Kapitales Kn ausdrücken, differiren wesentlich von einander, ungeachtet dieselben durch richtige Schlüsse aus der nämlichen Formel *8)* hergeleitet sind; nur für kleinere Zeitabschnitte, niedrigen Zinsfuss und nicht zu grosse Summen fallen die nach beiden Formeln berechneten numerischen Werthe ziemlich nahe zusammen. — Setzt man in die Formel *13)* $n = {}^1/q$, so ist $K = 0$, d. i. „Der Schuldner ist nichts mehr schuldig." Macht man $n > {}^1/q$, so wird K negativ, d. i. „Der Schuldner wird zum Gläubiger." Formel *13)* enthält demnach eine Ungereimtheit und ist somit für die Berechnung ganz unbrauchbar; nichts desto weniger wird dieselbe hier und da noch bei antipicirten Zahlungen von einigen Juristen angewendet (Carpzov'sche Interusurien-Formel) und auch im merkantilischen Leben rechnet man sehr häufig nach dieser Vorschrift (bei sogen. Rabattbestimmungen im Hundert). Ebenso weiss der schmutzige Plusmacher diese Formel zu seinem Vortheil auszubeuten, indem er den erst nach Verlauf einer bestimmten Zeit zahlbaren vollen Zinsenbetrag sogleich vom ausgeliehenen Kapital abzieht und somit eine Ungerechtigkeit begeht."

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass die Formel 8) **keine Allgemeingültigkeit besitzt, sondern zunächst nur auf solche Fälle beschränkt ist, wo n eine beliebige positive Zahl bezeichnet.**

Zusatz 3. Um die Haltbarkeit und Grenze der Anwendbarkeit der Formel 8) und der daraus hergeleiteten Formel 9) (Hofmann'sche Interusurienformel) nachzuweisen, stellen wir folgende Raisonnements an:

a) Das Kapital K, welches B nach n Jahren an A ohne Zinsen zu zahlen hat, soll sogleich mit einem Rabatt nach dem Zinsfusse q abgetragen werden; wie viel ist zu zahlen? A verlangt nach Formel 9) den baren Werth $\frac{K}{1+nq} = A$; B dagegen, welcher n Jahre lang von dem in Händen befindlichen Kapital K eine jährliche Nutzung qK hat, fordert als Erlass für die früher geleistete Zahlung die Summe der gegenwärtigen Werthe dieser einzelnen Zinsenbeträge, also $\frac{qK}{1+q} + \frac{qK}{1+2q} + \ldots\ldots + \frac{qK}{1+nq} = B$; die Forderung und Gegenforderung beider Interessenten an die fragliche Summe, auf die Gegenwart zurückgebracht, ist demnach $A + B = \frac{K}{1+nq} + \frac{qK}{1+q} + \frac{qK}{1+2q} + \ldots\ldots + \frac{qK}{1+nq}$. Nun ist nach dem Binominal-Theorem $(1+q)^n = 1 + nq + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} q^2 + \ldots\ldots > 1 + nq$ (wenn n positiv und grösser als 1 ist), mithin ist $\frac{1}{1+nq} > \frac{1}{(1+q)^n}$, folglich $\frac{K}{1+nq} > \frac{K}{(1+q)^n}$, $\frac{qK}{1+nq} > \frac{qK}{(1+q)^n}$, $\frac{qK}{1+(n-1)q} > \frac{qK}{(1+q)^{n-1}}, \ldots\ldots \frac{qK}{1+2q} > \frac{qK}{(1+q)^2}$ und $\frac{qK}{1+q} = \frac{qK}{1+q}$. Durch Summirung dieser Ungleichungen und der letzten Gleichung erhält man: $\frac{K}{1+nq} + \frac{qK}{1+nq} + \frac{qK}{1+(n-1)q} + \ldots\ldots \frac{qK}{1+2q} + \frac{qK}{1+q} > \frac{K}{(1+q)^n} + qK \left\{ \frac{1}{(1+q)^n} + \frac{1}{(1+q)^{n-1}} + \ldots\ldots \frac{1}{(1+q)^2} + \frac{1}{1+q} \right\}$. Die eingeklammerte Reihe ist eine geometrische Progession, deren Summe $= \frac{1}{q} - \frac{1}{(1+q)^n \cdot q}$. Hiernach ist $A + B > \frac{K}{(1+q)^n} + K - \frac{K}{(1+q)^n} > K$. Dieses Resultat ist aber widersinnig, da die gegenseitigen Ansprüche, wenn sie zu Recht bestehen sollen, genau der angeführten Summe gleich sein müssten; während nach dieser Art der Berechnung von beiden Personen zusammen eine höhere Summe beansprucht wird, als wirklich vorhanden ist, und also entweder der Schuldner oder der Gläubiger beeinträchtigt wird, je nachdem man nämlich von der Forderung des Zweiten oder der des Ersten ausgeht. Am auffallendsten tritt aber die Absurdität hervor, wenn n eine unendlich grosse Zahl bedeutet, also die Summe in der Ewigkeit (d. h. nie) bezahlt werden soll; dann ist die Forderung des $A = \frac{K}{1 + \infty\, q} = \frac{K}{\infty} = o$, wie es sein muss; die des B würde aber $> K - \frac{K}{(1+q)^{\infty}} > K - \frac{K}{\infty} > K$, während sein Anspruch doch immer nur der Summe K gleich sein kann.

b) Jemand will ein nach n Jahren unverzinslich fälliges Kapital K schon nach $n - t$ Jahren, also t Jahre vor der Verfallzeit abtragen, der Zahlwerth ist hiernach: $\frac{K}{1 + tq}$; fällt es ihm plötzlich ein, diese letztere Summe wieder $n - t$ Jahre früher zu zahlen, so würde der bare Werth derselben sein: $\frac{K}{(1+tq)\,(1+(n-t)\,q)}$. Der bare Werth des auf $t + (n-t) = n$ Jahre unmittelbar discontirten Kapitals ist aber: $\frac{K}{1+nq}$, mithin müsste $\frac{K}{1+nq} = \frac{K}{(1+tq)\,(1+(n-t)\,q)}$ d. h. $1 + nq = (1+tq)\,(1 + (n-t)\,q) = 1 + nq + (n-t)\,tq^2$ sein, was unmöglich ist. Zu derselben Gleichung gelangt man, wenn man das Kapital K einmal unmittelbar auf n Jahre, ein andermal zunächst auf $(n-t)$ und sodann den accumulirten Werth wieder auf t Jahre ausgeliehen denkt. Aus diesen Untersuchungen a) b) folgt:

„Das Princip einer Berechnung nach einfachem Zins bei einer längern Zeitdauer ist ein falsches, indem es immer zu Absurditäten und Inconsequenzen in den Schlussfolgerungen führt, die um so erheblicher werden, je weiter der Spielraum (n) ist, innerhalb dessen eine Verrückung des Zahltermines nach vorn oder nach hinten gedacht werden kann.

Aus diesem Grunde ist auch die Anwendung der Formel *8)* — *11)* zu beschränken und nur auf kleinere Zeiträume (1 Jahr und darunter) auszudehnen, in welchem Falle Differenzen in den numerisch berechneten Werthen von Zahlungen nur gering ausfallen, wenn etwa der Zahltag vor- oder zurückgeschoben wird.

> Ἆρ' οὐκ ἄλλην μέν τινα ἀριθμητικὴν
> τὴν τῶν πολλῶν, φατέον, ἄλλην δ' αὐτὴν
> τῶν φιλοσοφούντων;
> Plato.

§. 4.

Grundformeln für die höhere Zinsrechnung.

Aufgabe. Das Kapital K ist zu dem Zinsfusse q auf n Jahre ausgeliehen und nach dieser Zeit mit den Zinsen J_n auf K_n angewachsen. Man soll den Zusammenhang zwischen diesen Grössen aufsuchen, wenn die Zinsen am Ende jedes Termines immer wieder zum Grundkapitale geschlagen werden.

Sind $K_1, K_2, K_3 \ldots\ldots K_{n-1}, K_n$ die Werthe des Kapitales K am Ende des 1., 2., 3., ... $n-1$., nten Jahres mit den bezüglichen Jahreszinsen, so ist (Formel *8)*):

$K_1 = K(1+q)$, $K_2 = K_1(1+q)$, $K_3 = K_2(1+q)$ ...., $K_n = K_{n-1}(1+q)$. Multiplicirt man sämmtliche n Gleichungen in einander, so erhält man nach Hebung der mittleren Grössen $K_1, K_2, \ldots\ldots K_{n-1}$:

14) $K_n = K(1+q)^n$. *15)* $K = \frac{K_n}{(1+q)^n}$. *16)* $n = (\log K_n - \log K) : \log(1+q)$.

17) $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K}} - 1$. *18)* $J_n = K_n - K = K\left((1+q)^n - 1\right) = K_n\left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right)$

zu *14)* „Bei zusammengesetztem Zins ist der nach n Jahren accumulirte Werth dem Producte des Kapitales in die nte Potenz des Vermehrungsfactors gleich."

zu *15)* „Der gegenwärtige Werth eines nach n Jahren unverzinslich fälligen Kapitales wird gefunden, wenn man das Kapital durch die nte Potenz des Vermehrungsfactors dividirt."

Zusatz 1. Die Formel *14)* gilt zunächst nur für den Fall, wenn die Zinsen am Ende eines jeden Jahres zum Kapital geschlagen und für die fernere Dauer des Geschäftes verzinst werden, kann aber auch der Verzinsung für jede andere Zeit zu Grunde gelegt werden. Entspricht nämlich dem jährlichen Vermehrungsfactor $1+q$ der $^1/_m$ jährliche Vermehrungsfactor $1+q^1$ und geschieht die Verzinsung von $^1/_m$ zu $^1/_m$ Jahr, so ist der Formel *14)* analog:

19) $1 + q = (1+q^1)^m$. *20)* $1 + q^1 = \sqrt[m]{1+q}$. *21)* $q^1 = \sqrt[m]{1+q} - 1$.

zu *20)* „Bei zusammengesetztem Zins ist der $^1/_m$ jährliche Vermehrungsfactor der mten Wurzel aus dem jährlichen Vermehrungsfactor gleich."

Den auf solche Weise aus dem jährlichen Zinsfusse q abgeleiteten $^1/_m$ jährlichen Zinsfuss $q^1 = \sqrt[m]{1+q} - 1$ wollen wir den absoluten (adäquaten, conformen) nennen.

Das Kapital K wird demnach in n Jahren, wenn die Zinsen von $^1/_m$ zu $^1/_m$ Jahren (also in mn Terminen) zugeschlagen werden:

22) $(1+q^1)^{mn} \cdot K =$ (Formel *19)*) $(1+q)^n \cdot K =$ (Formel *14)*) K_n.

„Ein Kapital, welches in kleineren Zeitintervallen Zinsen abwirft, vermehrt sich bei Zugrundlegung des absoluten Zinsfusses mit den Zinseszinsen gerade ebenso, als wenn die Verzinsung jährlich vor sich geht."

Bestimmt man daher den Zins für kleinere Zeiteinheiten aus dem jährlichen nach den Formeln *20) 21)*, so wird dem durch Gesetze oder Convention festgesetzten Zinsfusse, wornach jährlich q gerechnet werden soll, entsprochen, und es ist dann — aber auch nur unter dieser Bedingung — nicht Ungerechtigkeit und Wucher, wenn ein Gläubiger nach kleineren Zeittheilen die Zinsen berechnet.

Zusatz 2. Da es im Geschäftsleben und im täglichen Verkehr fast allgemein gebräuchlich ist, die Zinsen für $^1/_m$ Jahr gleich $^1/_m$ der Jahreszinsen, also $q = q/m$ zu setzen (§. 3, Zusatz 1), so erhält man im letzteren Falle zur Bestimmung des eigentlichen Jahreszinsfusses q'' (verw. Formel *19*):

$$23)\ 1 + q'' = \left(1 + \frac{q}{m}\right)^m.$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung in eine Reihe, so bekömmt man:

$$24)\ 1 + q'' = 1 + m \,.\, q/m + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2.}\, q^2/m^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3.} . q^3/m^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 + q + (1 - {}^1/_m)\,\frac{q^2}{2} + (1 - {}^1/_m)\,(1 - {}^2/_m)\,\frac{q^3}{6} + \ldots\ldots$$

Der Werth von q'' ist demnach grösser als der eigentliche Jahreszinsfuss q und wächst mit der Menge der terminlichen Zahlungen (m). Um die Grenze q''' dieses Wachsthums zu finden, denke man die Zinsen von Augenblick zu Augenblick (*quovis momento*, momentan) fällig, was dadurch geschieht, dass die Zahl sämmtlicher einem Jahre zugehöriger Zeitabschnitte unbestimmbar oder unendlich gross angenommen, also $m = \infty$, $^1/_m = o$ gesetzt wird; in diesem Falle ergibt sich:

$$25)\ 1 + q''' = 1 + q + \frac{q^2}{2} + q^3 + \ldots\ldots$$

Aus Formel 23) folgt aber $\sqrt[q]{1 + q''} = \left(1 + \frac{q}{m}\right)^{\frac{m}{q}} = 1 + \frac{m}{q} \cdot \frac{q}{m} + \frac{\frac{m}{q} \cdot \frac{m}{q} - 1}{1.\ 2.} \cdot$
$\frac{q^2}{m^2} + \frac{\frac{m}{q} \cdot \frac{m}{q} - 1 \,.\, \frac{m}{q} - 2}{1.\ \ 2.\ \ 3.} \cdot \frac{q^3}{m^3} + \ldots\ldots = 1 + 1 + \frac{(1 - q/m)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{q}{m}\right)\left(1 - \frac{2q}{m}\right)}{1.\ 2.\ 3.} + \ldots\ldots$

Setzt man in dieser Reihe $m = \infty$, so resultirt:

$$26)\ \sqrt[q]{1 + q'''} = 1 + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_6 + {}^1/_{24} + \ldots\ldots = 2{,}71828 \ldots\ldots = e$$ (Basis des natürlichen Log. Systems).

Mithin ist

$$27)\ 1 + q''' = e^q. \qquad 28)\ q = \log.\ (1 + q''') : \log.\ e.$$

Demnach wird das Kapital K nach n Jahren, wenn die Zinsen von $^1/_m$ zu $^1/_m$ Jahre zugeschlagen werden, für den relativen Zinsfuss im Allgemeinen:

$$29)\ K_n^1 = K(1 + q/m)^{mn},$$

für den momentanen in's Besondere:

$$30)\ K_n'' = K \,.\, e^{nq}.$$

Zusatz 3. Aus Formel *14*), welche den Werth des Kapitales K mit den Zinseszinsen nach n Jahren ausdrückt, erhält man durch Substitution von $-$ n statt n den Werth des Kapitales K vor n Jahren, nämlich $K_{-n} = K(1+q)^{-n} = \frac{K}{(1+q)^n}$, oder wenn man statt K_{-n} K, statt K K_n setzt, $K = \frac{K_n}{(1+q)^n}$ (Leibnitz'sche Interusurien-Formel), welcher Ausdruck mit Formel *15)* genau congruirt. Hieraus und aus Formel 22) erhellet, dass die Formel *14)* für ganze und gebrochene, positive und negative Werthe von n gültig ist. Das + n deutet die Zukunft oder den zukünftigen Werth eines Kapitales (also eine Vermehrung), das — n die Vergangenheit oder die Gegenwart, als der Zukunft gegenüberstehend, (also eine Abnahme, Werthverminderung) an.

Zusatz 4. Führt man, um die Zuverlässigkeit der Formeln *14) 15)*.... gehörig schätzen zu können, die im §. 4. Zusatz 3. gemachten Argumentationen mit Zugrundlegung von Zinseszinsen aus, so erhält man:

a) für die Summe der Ansprüche zweier Personen an das nach n Jahren unverzinslich zahlbare Kapital K unter allen Bedingungen (n mag eine endliche oder eine unendlich grosse Zahl bedeuten): $A + B = \frac{K}{(1+q)^n} + \frac{qK}{(1+q)^1} + \frac{qK}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{qK}{(1+q)^n} = \frac{K}{(1+q)^n} + \frac{qK}{q}\left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right) = K.$ Nach dieser Art des Discontirens ist die Summe der Forderungen beider Interessenten dem Objecte vollkommen gleich und es wird demnach keine Ungerechtigkeit gegen den einen oder den andern der Betheiligten begangen, also keiner vor dem andern bevorzugt, man mag von der Forderung des A oder von der Gegenforderung des B ausgehen, sondern ein jeder erhält soviel, als ihm nach Fug und Recht gebührt.

b) In Bezug auf die Verlegung des Zeitpunktes der Vergleichung ist $\frac{K}{(1+q)^t\,(1+q)^{n-t}} = \frac{K}{(1+q)^n}$; $K(1+q)^{n-t}(1+q)^t = K(1+q)^n$; $\frac{K(1+q)^{n+t}}{(1+q)^t} = K(1+q)^n$, woraus folgt, dass die Anwendung von Zinseszinsen in eine solche Ambiguität in den Formeln bei einer vor- oder rückläufigen Verschiebung eines Zahltermines eintritt, wie wir sie bei der einfachen Zinsrechnung kennen gelernt haben.

Es liegt demnach in diesen Resultaten ein sicheres Kriterium für die Richtigkeit der Anwendung von Zinseszinsen bei einer Verzinsung auf eine längere Zeitdauer.

Denn wie die Wahrheit von verschiedenen Seiten her zugänglich ist, so ist es auch ein Kennzeichen der Wahrheit eines Satzes, wenn man auf ganz verschiedenen Wegen zu demselben Satze gelangt.

Zusatz 5. Ist die Zeitdauer eine gemischte Zahl $= n + \frac{r}{s}$, so hat man zunächst den Werth zu bestimmen, zu welchem das ursprüngliche Kapital K nebst Zinseszinsen in n Jahren anwächst und alsdann den erhaltenen Werth auf $\frac{r}{s}$ Jahre zu verzinsen.

Nach dem absoluten Zinsfusse erhält man:

$$31)\ K_{n+\frac{r}{s}} = K(1+q)^n \cdot (1+q)^{\frac{r}{s}} = K(1+q)^{n+\frac{r}{s}}.$$

Nach dem relativen Zinsfusse ergibt sich:

$$32)\ K_{n+\frac{r}{s}} = K(1+q)^n \cdot \left(1+\frac{r}{sq}\right).$$

Zur Prüfung dieser beiden Formeln beachte man, dass wegen $n + \frac{r}{s} = n + 1 - \left(1 - \frac{r}{s}\right)$ es für den Calcul einerlei sein muss, ob das Kapital $n + \frac{r}{s}$ Jahre ausgeliehen oder ob dasselbe $(n + 1)$ ausgethan und wiederum $1 - \frac{r}{s}$ Jahr discontirt gedacht wird. Nach dem absoluten Zinsfusse erhält man: $K_{n+1-\left(1-\frac{r}{s}\right)}$ $K_{n+\frac{r}{s}} = \frac{K(1+q)^{n+1}}{(1+q)^{1-\frac{r}{s}}} = K(1+q)^{n+\frac{r}{s}}$, welcher Ausdruck mit Formel *31)* identisch ist. Nach dem relativen Zinsfusse resultirt: $K_{n+\frac{r}{s}} = \frac{K(1+q)^{n+1}}{1+\left(1-\frac{r}{s}\right)^q}$. Aus Vergleichung dieses letzteren Ausdrucks mit Formel *32)* folgt: $\frac{(1+q)^{n+1}}{1+\left(1-\frac{r}{s}\right)^q} = (1+q)^n\left(1+\frac{r}{sq}\right)$ d. h. $1+q = \left(1+\frac{r}{sq}\right)\left(1+\left(1-\frac{r}{s}\right)^q\right) = 1+q+\frac{r}{s}\left(1-\frac{r}{s}\right)^{q^2}$, welche Gleichung ebenfalls einen Widerspruch involvirt, woraus wir schliessen, dass wenn einmal nach Zinseszinsen gerechnet wird, nicht zu gleicher Zeit auch eine Verzinsung nach einfachem Zins in Anrechnung zu bringen sei, also auch in Terminen, welche kleiner als die angenommenen Zahltermine sind, nach dem absoluten Zinsfusse gerechnet werden müsse, indem die Ausführung nach dem relativen Zinsfusse auf Absurditäten führt.

Es ist durchaus falsch, wenn man annimmt, dass das Kapital am Ende des Jahres oder Zahltermines einen plötzlichen Zuwachs durch seine Zinsen erhalte; denn bei einem jeden Kapitale, welches nach Zinseszinsen benutzt wird, erfolgt die Zunahme in den Zwischenzeiten in eben dem Verhältnisse und nach denselben Gesetzen, als bei ganzen Jahren, und dieses ist um so strenger genommen richtig, je kleiner man die Zeiträume annimmt.

Aus den Betrachtungen in Zusatz 1 — 5 ergibt sich die völlige Allgemeingültigkeit der Formel *14*), indem dieselbe für jedes beliebige n anwendbar ist; auch bringt sie Harmonie, Symmetrie und eine gewisse Eleganz in den Calcul, welche den Formeln für ganz oder theilweis einfachen Zins durchaus abgehen; zugleich wird durch dieselbe alle Willkür und Ambiguität, wodurch ein Nachtheil für den einen oder andern Interessenten bei der Verrückung des Zahltermines entstehen kann, entfernt, und somit wird durch sie allein dem Calcul diejenige Sicherheit und Festigkeit gegeben, die ihn gegen Misstrauen und Unzuverlässigkeit schützt und ihn ein für alle Mal aus dem Gebiete der Unbestimmtheit in das der festen und wissenschaftlichen Begründung versetzt.

Zweite Abtheilung.

Renten-Theorie.

§. 5.

Begriffsbestimmungen.

1) Jede Einnahme oder Leistung, die wiederholt in bestimmten Zwischenräumen erhoben oder gezahlt wird und als Ertrag oder Abtrag in kleineren terminlichen Raten für ein jetzt oder künftig fälliges Kapital angesehen werden kann, nennt man eine Rente (=Zahlung, *reditus, vectigal;* von dem alten raiten, reiten=Striche machen, zählen, rechnen). Der gegenwärtige Werth einer Rente oder die bare Geldsumme, gegen deren Erlegung eine bestimmte Rate acquirirt wird, heisst Einlage, Einsatz (*la mise*), und die Summe, zu welcher eine gewisse Anzahl Renten nach einer Reihe von Jahren angewachsen sind, der accumulirte Werth der Renten; die Bestimmung des Einsatzes oder des accumulirten Werthes einer Rente bezeichnet man mit den Ausdrücken: eine Rente kapitalisiren, accumuliren. Der Empfänger oder Käufer einer Rente wird Rentennehmer, Rentenirer (*le rentier*), der Auszahler derselben Rentengeber, die Kasse (*l'actionnaire, l'entrepreneur*) genannt.

Nach der Grösse der Zahlungsintervalle unterscheidet man jährliche, $^1/_2$, $^1/_4$,.... $^1/_m$jährliche Renten; nach dem Zeitpunkte der Auszahlung laufende oder fliessende, die sogleich im Laufe des Acquisitionsjahres beginnen, aufgeschobene, die erst nach Verfluss einer bestimmten Anzahl von Jahren zahlbar werden (laufen, fliessen), aufgesparte, die zwar sogleich fällig sind, aber eine Reihe von Jahren (nach Vorausbestimmung oder nach dem Willen des Empfängers) nicht ausgezahlt werden (ruhen), indem nach Ablauf der bezeichneten Frist die aufgehäufte Summe entweder auf einmal ausgezahlt wird, oder statt dessen die späteren Rentenzahlungen vergrössert werden, in welchem letzteren Falle die Rente durch Ruhe gewachsen heisst.

Nach dem Verhältnisse der einzelnen Hebungen zu einander hat man zu unterscheiden unveränderliche (fixe, constante) Renten, wenn in jedem Termine gleich viel gezahlt wird, und veränderliche (variable) Renten, deren Grösse sich (meistens nach einem bestimmten Gesetze) ändert; die gesetzmässige Aenderung geschieht in den mehresten Fällen nach einfachen arithmetischen oder geometrischen Verhältnissen und kann entweder eine Zunahme oder Abnahme der Zahlungen sein, wodurch steigende und fallende Renten entstehen. Gewöhnlich findet die Auszahlung einer Rente mit Ende eines jeden Termines (*postnumerando*) statt (nachschüssige, Nachschussrente); jedoch kommen auch Hebungen vor, welche mit Anfang eines Termines (*praenumerando*) beginnen (vorschüssige, Vorschussrente).

2) Die Renten zerfallen in zwei Hauptklassen: I. Unbedingte oder Zeitrenten, deren Dauer im Voraus genau stipulirt ist und deren Zahlung unter allen Umständen geleistet wird. Die Zeitrente ist *a)* eine aufhörende, erlöschende, temporäre (*rente annuelle*, *annuité*, Annuität), wenn sie auf eine gewisse Anzahl Jahre beschränkt ist; *b)* eine immerwährende, ewige, perpetuirliche (*r. perpetuelle*, *perpetuité*, Perpetuität), wenn die Hebungen ewig fortdauern. Die Mise ist im ersteren Falle ein tilgbarer Fonds oder ein verlornes Kapital (*le fonds amortissable*, *perdu*), im letzteren Falle ein untilgbarer Fonds oder ein eisernes Kapital (*le fonds inamortissable*). — II. Bedingte Renten oder Anwartschaften im Allgemeinen (*expectatives*, Expectanzen), deren Dauer und Hebung überhaupt nicht voraus bestimmt, sondern an gewisse Bedingungen (Zufälligkeiten, Ereignisse) geknüpft ist, die sich beinahe alle auf Probleme der Wahrscheinlichkeit und der mathematischen Hoffnung zurückführen lassen (Versicherungen aller Art).

In dem besondern Falle, wo der Genuss einer bedingten Rente von dem Leben (oder Tode) einer oder mehrerer vorher bezeichneter Personen abhängt, nennt man dieselben Lebensrenten (oder Erbschaften), deren Berechnung auf den Principien der Lebenswahrscheinlichkeit beruht, indem das Leben selbst als ein Kapital oder physisches Gut zu betrachten ist, dessen Erwartungswerth sich ebenso in Zahlen angeben lässt, wie die Hoffnung auf irgend einen andern materiellen Gewinn.

Eine Lebensrente ist *a)* temporär, auf Zeit, wenn die Zahlungen sogleich beginnen, aber mit Eintritt eines bestimmten Alters einer bemerkten Person aufhören. *b)* aufgeschoben-temporär, wenn die Rente erst nach einer bestimmten Anzahl von Jahren (Probejahren) beginnt und nach andern bestimmten Jahren wieder erlischt. *c)* lebenslänglich, wenn die Zahlungen sogleich statt finden und während der ganzen Lebenszeit einer bezeichneten Person geleistet werden. *d)* aufgeschoben-lebenslänglich, wenn die Rente erst mit dem Eintritt eines bestimmten Alters der Person, auf welche die Rente lautet, und dann lebenslänglich ausgezahlt wird. (Als Grundsatz gilt hier für *a)* *b)* *d)*, dass die Verbindlichkeit des Verkäufers oder der Rentenanstalt wegfällt, wenn der Rentenkäufer vor dem angesetzten Termine mit Tode abgeht.)

3) Die Lebensrenten sind 1) einfache, wenn sie vom Leben einer einzigen Person abhängen, und heissen *a)* Leibrenten *(rente viagère, vitalitium,* Gülte, vom mittellat. *gulta* = Schuld*)*, wenn sie auf die ganze Lebenszeit (lebenslängliche Leibrenten) oder eine bestimmte Anzahl Jahre (temporäre Leibrenten) des Empfängers, Gebers oder einer dritten Person lauten, mit dem Tode des Interessenten aber erlöschen; *b)* Lebensversicherungen, Assecuranzen *(assurances)*, gleichsam umgekehrte, inverse Leibrenten, wenn die Auszahlung eines bedungenen Kapitales in ein- oder mehrmaligen Raten (Actien) von Seiten der Actionnaire (Assecuranten, Versicherungsanstalt) erst mit dem Tode des Käufers oder einer andern bezeichneten Person (Versicherte, Assecurat) geschieht. Die Versicherung ist eine totale, lebenslängliche oder eine eigentliche Lebensversicherung, wenn die Anstalt beim Tode des Versicherten überhaupt die Versicherungssumme unbedingt zahlen muss; dagegen eine partielle, oder Versicherung auf Zeit, wenn die Zahlung der Versicherung nur geschehen muss, falls der Versicherte innerhalb eines bestimmten Zeitraumes stirbt. — Specielle Fälle von *a)* bilden noch die Aussteuer- und Studien-Versicherungen und die (Selbst-) Pensionirungen.

Die Lebensrenten sind 2) zusammengesetzte, wenn sie an das Leben mehrerer Personen geknüpft sind (Versicherungen auf zwei oder mehrere verbundene Leben). Man unterscheidet *a)* Renten auf das kürzeste Leben, oder Verbindungsrenten überhaupt, deren Zahlung von der Dauer des Zusammenlebens zweier oder mehrerer Personen abhängt, indem die Zahlung mit dem Tode einer dieser Personen aufhört. *b)* Renten auf das längste Leben, Ueberlebungsrenten, Gesellschaftsrenten, Tontinen (1689 vom Neapolitaner Tonti in Frankreich eingeführt), welche so lange vom Entrepreneur (Tontinarius) ausgezahlt und unter die noch lebenden Mitglieder (Tontinisten) gleichmässig oder nach Verhältniss des Alters und der Einzahlung vertheilt werden, als noch irgend eine Person aus der Verbindung am Leben ist, wobei es ganz gleichgültig ist, welche Person eher stirbt. *c)* Renten auf ein bestimmtes längstes Leben, Ehe-renten, und im besondern Falle Wittwenpensionen, bei welchen die versicherte

Summe (Pension) nur dann an die überlebende Person (Pensionist) ausgezahlt wird, wenn die andere vorher bezeichnete Person (Versicherer, Versorger) zuerst stirbt. — Specielle Fälle von *c)* bilden noch die Waisenpensionen.

4) Bei der Berechnung der Renten überhaupt gilt als Grundsatz, dass Einnahme und Ausgabe, auf dieselben Termine reducirt, gleich sein müssen. Man hat daher die gegenseitigen Leistungen und Ansprüche beider Contrahenten (des Rentenirers und des Entrepreneurs) immer auf den nämlichen Zeitpunkt zurück zu führen; also entweder die Endwerthe der einzelnen terminlichen Zahlungen nach Verlauf einer bestimmten Zeit, oder die baren Werthe derselben zu berechnen und die ersteren mit dem Gesammt-Endwerthe, die letzteren mit dem gesammten baren Werthe in die der Aufgabe entsprechende Verbindung zu bringen. Beide Methoden führen bei Zugrundlegung von Zinseszinsen auf Ausdrücke, die nur formell verschieden sind, indem dieselben nach gehöriger Reduction dasselbe Resultat geben, während die Anwendung von einfachen Zinsen bei Verrückung der Termine nach vorn oder hinten materielle Unterschiede herausstellt. Aus diesem Grunde werden auch bei Rentenrechnungen nur Zinseszinsen in Rechnung gebracht.

5) Bei der Berechnung der Lebensrenten kommt ausser den gewöhnlichen Bestimmungsgrössen noch das Alter der Person oder der Personen, auf deren Leben der Vertrag lautet, hauptsächlich in Betracht, weil es den Masstab für die durchschnittliche (mittlere) Dauer des versicherten Lebens oder für die Dauer des Zusammenlebens zweier oder mehrerer Personen, mithin für die Zahl der Jahre gibt, nach deren Ablauf die versicherten Kapitalien zu entrichten sind, oder Zahlungen eingestellt werden. Die Berechnung selbst ist ganz analog dem Verfahren, welches bei Glücksspielen angewendet wird.

Erster Abschnitt: Unbedingte oder Zeit-Renten.

§. 6.

Grundformeln für unveränderliche Zeit-Renten.

1. Aufgabe. Die Einlage P einer perpetuirlichen Rente R für den Zinsfuss q zu berechnen.

Um die baren Werthe der fort und fort zahlbaren Rente R zu bestimmen, hat man dieselben nach der Reihe auf 1, 2, 3, 4 . . . . . Jahre, und so fort bis in's Unendliche, zu discontiren; hiernach erhält man für die Summe der baren Werthe der einzelnen Renten: $P = \frac{R}{1+q} + \frac{R}{(1+q)^2} + \frac{R}{(1+q)^3} + \dots\dots$ *in infin.*, und nach gehöriger Reduction dieser unendlichen geometrischen Progression:

$$33)\ P = \frac{R}{q}. \qquad 34)\ R = q.\ P. \qquad 35)\ q = \frac{R}{P}.$$

zu 33) Der bare Werth einer perpetuirlichen Rente ist der jährlichen Rente, dividirt durch den Zinsfuss, gleich."

Anm. Die Formeln 33) — 35), welche die Grundlage für die bei Ablösung von Reallasten vorkommenden Fragen ausmachen, stimmen genau mit den Formeln 4)—6) überein (wenn man $K = P$, $J = R$ setzt), worin ein neues Kriterium für die Richtigkeit der Methode des Aufzinsens und Discontirens nach zusammengesetztem Zins bei längerer Zeitdauer liegt, während die Berechnung nach einfachem Zins auf $P > \frac{R}{q}$ führen würde (§. 3, Zusatz 3), was ungereimt ist, da der Werth einer immerwährenden Rente, auf einen Kapitalwerth in der Gegenwart zurückgebracht, offenbar nicht grösser sein kann, als dasjenige Kapital, welches bei einem bestimmten Zinsfusse auf Zinsen ausgeliehen ohne Aufhören jährlich die genannte Summe hervorbringt.

2. Aufgabe. Eine Rente wird n Jahre lang am Ende jedes Jahres ausgezahlt; man soll die Mise R_n für den Zinsfuss q angeben.

Die Auflösung ist der obigen analog; da aber die Reihe für den vorliegenden Fall mit dem nten Gliede abbricht, so ist $R_n = \frac{R}{1+q} + \frac{R}{(1+q)^2} + \ldots. + \frac{R}{(1+q)^n}$; durch Summirung dieser geometrischen Progression ergibt sich:

$$36)\ R_n = \frac{R}{q}\left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right) = (33)\ P - \frac{P}{(1+q)^n}. \quad 37)\ R = qR_n : \left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right).$$

$$38)\ n = \{\log R - \log.(R - qR_n)\} : \log(1+q). \quad 39)\ (1+q)^n\left(1 - \frac{qR_n}{R}\right) - 1 = 0.$$

zu 36) „Der bare Werth einer n Jahre laufenden Rente wird gefunden, wenn man von der Einlage einer gleich grossen perpetuirlichen Rente den auf n Jahre discontirten Werth dieser Einlage subtrahirt."

Anmerkung 1. Die Bestimmung des Zinsfusses vermittelst Formel 39) kann in den meisten Fällen nur auf indirectem Wege (durch Versuche, Probiren) geschehen. Um schnell einen Näherungswerth für q zu erhalten, nehme man $(1+q)^n = \frac{1+\alpha q}{1+\beta q}$, wo α und β unbestimmte Coefficienten sind, und entwickele beide Seiten dieser Gleichung in Reihen, indem man sich mit 3 Gliedern begnügt, da q seiner Bedeutung nach ein kleiner Bruch ist und daher die höheren Potenzen von q als verschwindend klein angesehen werden können; hiernach resultirt:

$1 + nq + \frac{n \cdot n-1}{1.\ 2.} q^2 + \ldots\ldots = 1 + (\alpha-\beta)\ q - (\alpha-\beta)\beta q^2 + \ldots\ldots$ Setzt man nun die in gleiche Potenzen von q multiplicirten Coefficienten einander gleich, so hat man $n = \alpha - \beta$, $\frac{n \cdot n-1}{1.\ 2.} = -(\alpha-\beta)\beta$, woraus man $\beta = -\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $\alpha = \frac{n+1}{2}$ findet; demnach wird aus Formel *39)*: $\frac{1+\left(\frac{n+1}{2}\right)q}{1-\left(\frac{n-1}{2}\right)q}\left(1 - \frac{qR_n}{R}\right) - 1 = 0$; folglich ist approximativ:

$$3q'.\quad q = 2\left(\frac{nR - R_n}{(n+1) \cdot R_n}\right).$$

Dieser Werth muss noch rectificirt werden, was am Besten mit Hülfe des falschen Satzes geschieht. (Für 2000 Thlr. erhält man auf 22 Jahre eine jährliche Rente von 150 Thlrn.; wie hoch ist der Zinsfuss? $q = \frac{2(22.\ 150-2000)}{23.\ 2000.} = 0{,}05 \ldots$. Substituirt man diesen Werth in Formel *39)*, so ist $1{,}05^{22}\ (1 - \frac{40}{3} \cdot 0{,}05) - 1 = - 0{,}024913$; macht man nun $q = 0{,}048$, so wird $1{,}048^{22}\ (1 - \frac{40}{3} \cdot 0{,}048) - 1 = + 0{,}00983$. Nach der *regula falsi* ist $q - 0{,}05 : q - 0{,}048 = + 0{,}024913 : - 0{,}00983$, woraus man ziemlich genau $q = 0{,}04856$, $p = 4\frac{6}{7}$ % findet.)

Anmerkung 2. Für $n = \infty$, $R_\infty = \frac{R}{q} = (33)\ P$.

Zusatz 1. Für eine vorschüssige Rente, bei welcher die Hebung um 1 Jahr früher statt findet, ist die Mise:

$$40)\ R_n' = (1 + q)\ R_n.$$

Zusatz 2. Ist die Rente m Jahre aufgeschoben und fängt erst mit Ende des mten oder dem Anfange des m+1ten Jahres an zu laufen, so muss der bare Werth der n Jahre dauernden Vorschussrente auf m — 1 Jahr discontirt werden. Die Mise ist demnach:

$$41)\ R_n'' = \frac{R_n}{(1 + q)^{m-1}}.$$

3. Aufgabe. Eine Rente ϱ wird m mal in gleichen Terminen des Jahres bezahlt; wie gross ist die Mise R_{mn} für die n Jahre lang zu hebende Rente, wenn der jährliche Zinsfuss q ist?

Man substituire in Formel *36)* für n mn, für q den entsprechenden ¹/m jährlichen Zinsfuss $q' = (21) \sqrt[m]{1+q} - 1$, und für R ϱ, so erhält man:

$$42)\ R_{mn} = \frac{\varrho}{q'} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+q')^{mn}} \right\} = \frac{\varrho}{\sqrt[m]{1+q} - 1} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+q)^n} \right\}.$$

Zusatz 1. Sollen die Misen für die jährlichen und ¹/m jährlichen Hebungen gleich sein, so muss $R_{mn} = R_n$, d. h. $\frac{R}{q}\left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right) = \frac{\varrho}{\sqrt[m]{1+q} - 1}\left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right)$.

Hieraus folgt:

$$43)\ \varrho = \left(\sqrt[m]{1+q} - 1\right) \cdot \frac{R}{q}.$$

Entwickelt man $\sqrt[m]{1+q}$ in eine Reihe, so ist $\sqrt[m]{1+q} = 1 + \frac{q}{m} + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{1.\ 2.} q^2 + \ldots$, mithin $\varrho = \frac{R}{m}\left(1 - \frac{m-1}{2\,m} q + \frac{(2m-1)\,(m-1)}{6m^2} q^2 \ldots\ldots\right)$. In der Praxis setzt man approximativ:

$$43'.\ \varrho = \frac{R}{m} - \frac{m-1}{2m^2} . q . R.$$

Ist $m = 2$ (halbjährlich), so ist $\varrho = \frac{R}{2} - \frac{q}{8}.R$; $m = 4$ (vierteljährlich), so ist $\varrho = \frac{R}{4} - \frac{3}{32} q.\ R$; für noch kleinere Termine hat man $\varrho = \frac{R}{m} - \frac{qR}{2m}$ (indem man $m = \infty$ setzt).

Zusatz 2. Verlangt man für ¹/m jährliche Hebung ¹/m einer Jahresrente, so ist die Mise

$$44)\ R_{mn} = \frac{R}{m(\sqrt[m]{1+q} - 1)} \left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right) = (36)\ \frac{q\ .\ R_n}{m(\sqrt[m]{1+q} - 1)}.$$

Nun ist $m(\sqrt[m]{1+q} - 1) = (\text{Zusatz } 1)\ q - \left(\frac{m-1}{2m}\right) q^2 + \ldots$, mithin $q : q - \left(\frac{m-1}{2m}\right) q^2 + \ldots = 1 + \frac{m-1}{2m} q \ldots$, $R_{mn} = R_n \left(1 + \frac{m-1}{2m} q \ldots\ldots\right) = R_n + \frac{m-1}{2m} . R \left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right)$, wofür man im commerciellen Leben näherungsweise annimmt:

$$44'.\quad R_{mn} = R_n + \left(\frac{m-1}{2m}\right) R.$$

Für $m = 2$ ist $R_{mn} = R_n + \frac{1}{4} R$, für $m = 4$, $R_n + \frac{3}{8} R$; für noch kleinere Termine erhält man (wenn $m = \infty$ genommen wird) $R_{mn} = R_n + \frac{1}{2} R$.

4. Aufgabe. Eine n Jahre lang zu Ende jedes Jahres zahlbare Rente R wird aufgespart; wie gross ist der accumulirte Werth S_n im Augenblicke der letzten Zahlung (d. i. zu Ende des nten Jahres)?

Offenbar ist der aufgesparte Werth der Renten dem auf n Jahre accumulirten Werthe der Mise gleich, mithin

$$45)\quad S_n = (1+q)^n \cdot R_n = (36)\,(1+q)^n\, \frac{R}{q}\left(1 - \frac{1}{(1+q)^n}\right) = \frac{R}{q}\,\left((1+q)^n - 1\right) =$$

$$(33)\ P \cdot (1+q)^n - P.$$

„Der accumulirte Werth einer n Jahre laufenden Nachschussrente wird gefunden, wenn man von der n Jahre lang accumulirten Einlage einer gleichgrossen perpetuirlichen Rente diese Einlage selbst subtrahirt.“

5. Aufgabe. Das Kapital K wird zu Anfang des Jahres ausgeliehen und am Ende des 1., 2., ... nten Jahres immer die nämliche Summe R hinzugefügt oder hinweggenommen; welches ist der Stand T_n der Schuld nach Verlauf von n Jahren?

Da das Kapital K n Jahre steht und die Rentenzahlungen zusammen dem accumulirten Werthe S_n derselben gleich sind, so ist

$$46)\quad T_n = K\,(1+q)^n \pm S_n = (45)\ K(1+q)^n \pm \frac{R}{q}\,\left((1+q)^n - 1\right).$$

§. 7.

Grundformeln für veränderliche Zeit-Renten.

1. Aufgabe. Für ein Kapital K erhält man nach der Reihe am Ende des 1., 2., 3. .... nten Jahres die Renten A, B, C, ... N ausgezahlt; welches ist der Stand der Schuld Q_n am Ende des nten Jahres?

Das Kapital K steht n Jahre, die Renten A, B, ... N resp. $n-1$, $n-2$, ... 1,0 Jahre, mithin ist

$$47)\quad Q_n = K\,(1+q)^n - \left\{A\,(1+q)^{n-1} + B\,(1+q)^{n-2} + \ldots\ldots + N\right\}.$$

Zusatz 1. Aendern sich die Renten nach dem Gesetze einer arithmetischen Reihe, d. h. betragen die n Rentenhebungen am Ende des 1., 2., ... n Jahres bezüglich R, R + D, R + 2D, ... R + (n − 1) D, so ist $Q_n = K(1+q)^n - R\{(1+q)^{n-1} + (1+q)^{n-2} + \ldots\ldots + 1\} - D\{(1+q)^{n-2} + (1+q)^{n-3} + \ldots\ldots + (n-2)(1+q) + n - 1\}$. Nun ist $(1+q)^{n-1} + (1+q)^{n-2} + \ldots\ldots 1 = \frac{(1+q)^n - 1}{q}$; um die Reihe $x = (1+q)^{n-2} + 2(1+q)^{n-3} + \ldots\ldots + (n-2)(1+q) + n - 1$ zu summiren, hat man $(1+q)x = (1+q)^{n-1} + 2(1+q)^{n-2} + \ldots\ldots + (n-2)(1+q)^2 + (n-1)(1+q)$, mithin $qx = (1+q)^{n-1} + (1+q)^{n-2} + \ldots\ldots (1+q) + 1 - n = \frac{(1+q)^n - 1}{q} - n$, $x = \frac{(1+q)^n - 1}{q^2} - \frac{n}{q}$; demnach ist

$$48)\quad Q_n = K(1+q)^n - \frac{R}{q}\left((1+q)^n - 1\right) - \frac{D}{q}\left\{\frac{(1+q)^n - 1}{q} - n\right\}.$$

Zusatz 2. Fallen oder steigen die Renten nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe, d. h. betragen die Zahlungen am Ende des 1., 2., ... nten Jahres resp. R, Rs, Rs^2, ... Rs^{n-1}, so ist $Q_n = K(1+q)^n - R\{(1+q)^{n-1} + (1+q)^{n-2}.s + \ldots\ldots + (1+q)s^{n-2} + s^{n-1}\}$. Setzt man $\frac{s}{1+q} = z$, so geht die eingeklammerte Reihe über in: $(1+q)^{n-1} + (1+q)^{n-1}.z + \ldots\ldots + (1+q)^{n-1}.z^{n-1} = (1+q)^{n-1}\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)$, folglich ist:

$$49)\quad Q_n = K(1+q)^n - R(1+q)^{n-1}\left\{\frac{1-\left(\frac{s}{1+q}\right)^n}{1-\frac{s}{1+q}}\right\} - K(1+q)^n - \frac{R(1+q)^n\left(1-\left(\frac{s}{1+q}\right)^n\right)}{1+q-s}.$$

2. Aufgabe. Ein Kapital K, das bei jährlicher Verzinsung zu dem Zinsfusse q aufgenommen ist, soll so getilgt werden, dass am Ende des ersten Jahres p′% vom Kapitale abgetragen und die jährliche Abtragssumme um p″% erhöht und ausserdem die laufenden Zinsen des Kapitales bezahlt werden; wie geht die Amortisation vor sich?

Die am Ende des ersten Jahres abzutragende Summe ist = 0,0p′ . K, die Abtragssummen steigen jährlich um p″%, daher wächst jede um 0,0p″ = ϱ, der Masstab dieser Vergrösserung ist $1 + \varrho$, daher sind die am Ende des 1., 2., ... nten Jahres erforderlichen Abtragssummen R, $(1 + \varrho)\ R$, ... $(1 + \varrho)^{n-1}\ R$; da nun am Ende des nten Jahres die Summe aller Theilzahlungen dem Kapitale K gleich sein muss, so ist

$$50)\ K = R\left(\frac{(1+\varrho)^n - 1}{\varrho}\right) = 0{,}0p'.\ K\left(\frac{1{,}0p''^n - 1}{0{,}0p''}\right).$$

Am Ende des mten Jahres ist die Grösse aller Ablösungssummen $= 0{,}0p'\ .\ K \left(\frac{1{,}0p''^m - 1}{0{,}0p''}\right)$, mithin der Stand der Schuld am Ende des mten oder im Laufe des $m + 1$ten Jahres:

$$51)\ S_m = K - 0{,}0p'\ .\ K\left(\frac{1{,}0p''^m - 1}{0{,}0p''}\right).$$

Die Grösse einer jeden Jahresleistung H_m besteht aus der jeweiligen Abtragssumme $R\ (1 + \varrho)^{m-1}$ und den Zinsen der am Ende des verflossenen Jahres noch rückständigen Schuld, also

$$52)\ H_m = 0{,}0p'.1{,}0p''^{m-1}.K + \left\{K - 0{,}0p'.K.\left(\frac{1{,}0p''^{m-1} - 1}{0{,}0p''}\right)\right\}.0{,}0p.$$

Zweiter Abschnitt: Wahrscheinlichkeit.

> Die wichtigsten Fragen, die unsere geselligen Verhältnisse, unser Leben und uns selbst betreffen, lassen sich beinahe alle auf Probleme der Wahrscheinlichkeit zurückführen. Littrow.

§. 8.

Wahrscheinlichkeit im Allgemeinen.

Jedes durch eine bestimmte Ursache hervorgerufene Ereigniss, welches mit Nothwendigkeit auftritt, heisst gewiss, und wenn dasselbe unter obwaltenden Umständen zum Vorschein kommen kann, ohne dass es gerade einzutreten braucht, möglich; sprechen für das Hervorgehen der einen von den möglichen Folgen einer Ursache eben so viel Gründe, als für das Hervorgehen einer jeden andern, so nennt man die Ereignisse gleich-möglich, und dasjenige unter den gleich-möglichen Ereignissen, welches für uns als vortheilhaft, Glück oder Gewinn bringend, angesehen wird, günstig, und im Gegenfalle ungünstig. Durch ein genaues Gegenüberstellen des Für und Wider, oder durch ein sorgfältiges Abwägen der Hoffnungen für das

Zutreffen eines Phänomenes und der Befürchtung für das Gegentheil bildet sich unser Geist ein Urtheil in Betreff der Möglichkeit des Eintreffens eines Ereignisses; die Uebertragung oder Einkleidung eines solchen Urtheils in eine mathematische Form, d. h. „die Angabe des numerischen Verhältnisses der günstigen Fälle zu allen gleich-möglichen", nennt man mathematische, einfache, absolute Wahrscheinlichkeit (*probabilitas*), oder vielmehr das Maass, die Grösse, den Grad der Wahrscheinlichkeit, dass ein wirkliches Ereigniss ein günstiges werde; dagegen wird „das Verhältniss der einem bestimmten Ereignisse ungünstigen Fälle zu allen gleich-möglichen" die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, auch wohl die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit (*complementum probabilitatis*) genannt.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus den nöthigen Daten heisst Wahrscheinlichkeitsrechnung (*ars conjectandi*, *calculus probabilitatis*, *doctrine of chances*). — Theoretische Wahrscheinlichkeit oder Wahrscheinlichkeit aus Gründen, *a priori*; practische Wahrscheinlichkeit oder Wahrscheinlichkeit aus Beobachtung, *a posteriori* (Gesetz der grossen Zahlen).

§. 9.

Numerische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit.

1) Drückt m die Zahl der gleich-möglichen, g die der günstigen, mithin m - g die der ungünstigen Fälle aus, und ist w die Wahrscheinlichkeit, dass ein günstiges, w' die Wahrscheinlichkeit, dass ein ungünstiges Ereigniss eintrete, so ist (§. 8, 1):

$$53)\ w = g : m = \frac{g}{m}. \qquad 54)\ w' = m - g : m = 1 - \frac{g}{m} = 1 - w.$$

$$55)\ w + w' = 1.$$

zu 53) „Die mathematische Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines gewünschten Ereignisses ist ein ächter Bruch, dessen Zähler die Summe aller günstigen und dessen Nenner die Summe aller gleich-möglichen Fälle bezeichnet."

zu 54) „Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit wird gefunden, indem man die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden eines günstigen Ereignisses von der Einheit abzieht."

zu 55) „Mathematische Wahrscheinlichkeit und entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ergänzen sich zur Einheit", oder „die Einheit ist das Symbol der vollständigen (absoluten) Gewissheit."

Hiernach ist die Gewissheit (Wahrheit, Sicherheit) immer nur eine einzige, die Ungewissheit (Wahrscheinlichkeit, Annäherung zur Wahrheit) dagegen kann in verschiedenen **Graden** auftreten, deren **Höhe**, **Gewicht** (*momentum, pondus*) durch die Grösse des Bruches bestimmt wird, welcher das Maass der Wahrscheinlichkeit numerisch ausdrückt.

2) Wenn es für irgend ein Ereigniss g_1 günstige Fälle **einer** Art, g_2 günstige Fälle einer **zweiten** Art . . . . . gibt, und g die Anzahl aller günstigen Fälle in Bezug auf das Eintreffen des einen **oder** eines andern Ereignisses, m die Zahl aller möglichen Fälle, w die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines günstigen, w_1, w_2 . . . . . die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines günstigen Ereignisses der ersten, zweiten . . . . . Art bezeichnen, so ist

$$56)\quad w = \frac{g}{m} = \frac{g_1 + g_2 + \ldots}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \ldots = w_1 + w_2 + \ldots$$

„Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines günstigen Ereignisses unter **mehreren** günstigen Fällen ist der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen günstigen Ereignisse gleich.“ (**Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.**)

3) Hängen Ereignisse von zwei oder mehreren Ursachen ab, und sind unter den m_1, m_2, ... möglichen Fällen resp. g_1, g_2, ... günstige Fälle, und fragt man nach der Wahrscheinlichkeit w, dass **gleichzeitig** oder im Wiederholungsfalle **unmittelbar hinter einander** ein günstiges Ereigniss der ersten, zweiten . . . . . Art sich zutragen werde, so ist, da jedes der m_1 möglichen Ereignisse mit jedem der m_2 möglichen Ereignisse combinirt werden kann, die Anzahl **aller** Ereignisse $= m_1 \cdot m_2 \ldots$, und analog die Anzahl aller **günstigen** Ereignisse $= g_1 \cdot g_2 \ldots$; hiernach wird

$$57)\quad w = \frac{g_1 \cdot g_2 \ldots}{m_1 \cdot m_2 \ldots} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \ldots = w_1 \cdot w_2 \ldots$$

„Die Wahrscheinlichkeit des unmittelbaren Aufeinanderfolgens oder gleichzeitigen Zusammentreffens mehrerer Ereignisse ist dem Producte der absoluten Wahrscheinlichkeit gleich, dass jedes der einzelnen Ereignisse sich zutragen werde. (**Abhängige oder concurrirende** Wahrscheinlichkeit.)

4) Sind w und w_1 die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen zweier Ereignisse, so sind $1 - w$, $1 - w_1$ die Wahrscheinlichkeiten, dass das erste und zweite Ereigniss nicht eintreffe; hiernach ist:

a) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zugleich eintreffen $= w \cdot w_1$;

b) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse nicht zugleich eintreffen $= 1 - w \cdot w_1$;

c) die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Ereigniss nicht, wohl aber das zweite eintreffe $= (1 - w)\, w_1$;

d) die Wahrscheinlichkeit, dass das erste, aber nicht das zweite eintreffe $= w\,(1 - w_1)$;

e) die Wahrscheinlichkeit, dass von beiden Ereignissen weder das erste, noch das zweite eintreffe $= (1 - w)\,(1 - w_1)$;

f) die Wahrscheinlichkeit, dass entweder das erste, oder, wenn dies nicht der Fall ist, doch das zweite eintreffe $= 1 - (1 - w)\,(1 - w_1)$ (Wahrscheinlichkeit für wechselseitige Ereignisse).

§. 10.

Mathematische Hoffnung.

1) In dem Falle, dass mit dem Eintreffen eines günstigen Ereignisses für uns ein reeller Vortheil (Gewinn, oder Besitz eines physischen Gutes) verbunden ist, erhält das Ereigniss einen gewissen Werth und wir können etwas wagen, um dadurch den reellen Vortheil gleichsam zu erkaufen. Je mehr Hoffnung auf das Eintreffen eines günstigen Ereignisses vorhanden ist, je bedeutender zugleich die zu gewinnende Summe ist, desto mehr Werth hat das Ereigniss für uns und desto mehr riskiren wir, und so umgekehrt.

2) Ist a der reelle Vortheil, den wir beim Eintreffen eines günstigen Ereignisses zu beziehen haben, so ist der Gesammtwerth aller g günstigen Fälle $= ga$; ist h der Werth irgend eines von den m möglichen Ereignissen für uns, so ist der Gesammtwerth dieser Ereignisse $= hm$; beide Ausdrücke müssen, wenn das Zuerwartende und das Zuverlierende in richtigem Verhältnisse zu einander stehen sollen, gleiche Währung haben (äquivalent sein, *al pari* stehen), mithin muss $hm = ga$, d. i.:

$$58)\quad h = \frac{g}{m}\,.\,a = (53)\ w\,.\,a.$$

„Die Grösse eines zu erwartenden Gewinnes oder der wahre, wirkliche Werth (Kaufpreis, Zahlwerth) einer ungewissen, zu hoffenden Summe (des nominellen oder Nennwerthes) ist dem Producte der zu gewinnenden Summe in die Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, gleich."

Dieses Product $w\,.\,a$ nennt man die mathematische Hoffnung oder den gegenwärtigen Werth einer zu hoffenden, zu erwartenden Summe (*sors*, *lucrum*).

3) Hat Jemand mehrere Gewinne $a_1, a_2, a_3 \ldots$ zu erwarten, deren zugehörige Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3 \ldots$ sind, so ist offenbar der Totalwerth aller Hoffnungen h der Summe der einzelnen Hoffnungen $h_1, h_2, h_3 \ldots$ gleich, mithin

$$59)\ h = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = w_1 . a_1 + w_2 . a_2 + w_3 . a_3 + \ldots$$

„Die mathematische Hoffnung, mehrere Summen zu gewinnen, ist der Summe der Producte der einzelnen zu hoffenden Summen in die resp. Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, gleich.“

§. 11.

Lebenswahrscheinlichkeit.

1) Die Lebenswahrscheinlichkeit hat nicht zum Zweck, die Wirklichkeit (das wirkliche physische Leben, die absolute Lebensdauer) darzustellen, also mit Sicherheit anzugeben, ob dieser oder jener Mensch von bestimmtem Alter an einem bezeichneten Tage stirbt, ob derselbe nach einer gewissen Anzahl von Jahren noch bestimmt am Leben sein werde; sie sagt demnach nichts voraus über einen ganz individuellen Fall, sie prophezeit nicht; — die Lebenswahrscheinlichkeit stellt sich vielmehr eine ganz andere Aufgabe; sie will das Gesetzmässige in den mannigfachen und scheinbar chaotischen Erscheinungen des Lebens und Sterbens an einem sogenannten mittleren Menschen enthüllen und auf Maass und Zahl zurückführen, indem sie aus der Betrachtung besonderer Fälle das Allgemeine (Gesetz, Norm, Princip) herauszufinden sucht, d. h. das, was im Mittel, im Durchschnitt stattfinden wird, wenn man eine hinlänglich grosse Anzahl zusammenlebender Individuen (das Leben im grossen Ganzen) betrachtet, wobei die einzelnen Specialitäten (Unregelmässigkeiten, Abweichungen) sich gegenseitig aufheben und compensiren.

2) Die nächste Aufgabe der Lebenswahrscheinlichkeit ist, auf dem Wege der Beobachtung eine Regel des successiven Absterbens einer Anzahl gleich alter Personen (das Gesetz der Sterblichkeit, die Sterbensordnung) zu ermitteln, indem man aufzufinden sucht, wie viele von einer gewissen Anzahl Neugeborner in jedem späteren Lebensalter noch vorhanden sind oder wie viel in den verschiedenen Perioden des Lebens absterben werden.

Aus sorgfältig geführten Mortalitätslisten fertigt man sich eine Tabelle an, in welcher die Anzahl der in jedem Lebensalter Verstorbenen aufgezeichnet ist, wobei ein bestimmter, nicht zu kleiner Zeitraum der Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Für unsern nächsten Zweck ist es ganz gleichgültig, welche Mortalitätstabelle benutzt wird, da wir von den Zahlenangaben nur einen beispielsweisen Gebrauch machen werden. Die aufgestellten Principien und abgeleiteten Regeln sind allgemein und ohne Rücksicht auf besondere Fälle abgefasst, können also auf jede beliebige Tabelle angewendet werden.

3) Die beigefügte Tabelle I enthält die Sterblichkeitsordnung der Mühlhäuser ohne Unterschied des Geschlechts und sonstiger Verhältnisse für einen Zeitraum von

10 Jahren (1826 — 1836, mit Ausschluss des Cholera-Jahres 1832). Die erste Kolumne (A ; n) umfasst die Lebensjahre von der Geburt (o) bis zum ohngefähren höchsten Lebensalter (t = 93) der Mühlhäuser; die zweite Kolumne (B; $a_n - a_{n+1}$) gibt die Zahl der in jedem nebenstehenden Alter Verstorbenen oder den jährlichen Abgang (Decrement) an, welcher nicht plötzlich zu Anfang oder Ende eines Jahres, sondern allmälig während des ganzen Jahres erfolgt; die dritte Kolumne (C; a_n) zeigt die Zahl der im Anfange eines jeden nebenstehenden Lebensalters noch Lebenden an und wird gefunden, indem man entweder die Zahlen der 2. Kolumne von unten herauf successiv addirt, oder von den überhaupt Gebornen Schritt vor Schritt von oben herab die im nebenstehenden Jahre Gestorbenen subtrahirt. (Der Einfachheit und bequemen Vergleichung wegen ist die Zahl der im o ten Jahre Lebenden, d. h. der überhaupt Gebornen, auf 1000, und diesem Maasstabe entsprechend jede Zahl in der 2. und 3. Kolumne reduzirt).

4) Um den Grad der Hoffnung oder die Wahrscheinlichkeit eines n jährigen zu berechnen, dass er das n + x te Lebensjahr erreichen oder noch x Jahre durchleben werde, sei w_n^{n+x} diese Wahrscheinlichkeit, a_n die Anzahl der im nten, a_{n+x} die Zahl der im n + x ten Lebensjahre vorhandenen Individuen, so ist a_{n+x} die Zahl der günstigen, a_n die Zahl der möglichen Fälle, mithin (Formel *53*) $w_n^{n+x} = \frac{a_{n+x}}{a_n}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass der n jährige das n + x te Jahr nicht erreichen, also innerhalb der nächsten x Jahre sterben werde $= 1 - w_n^{n+x} = 1 - \frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+x}}{a_n}$.

Die Wahrscheinlichkeit des 20jährigen, noch 10, 20, 30 Jahre zu leben, ist: $w_{20}^{30} = \frac{495}{548} = 0{,}903$; $w_{20}^{40} = \frac{437}{548} = 0{,}799$; $w_{20}^{50} = \frac{366}{548} = 0{,}669$; also die Wahrscheinlichkeit zu sterben: 0,097; 0,201; 0,331.

5) Die Wahrscheinlichkeit des njährigen, im Laufe des x ten Jahres oder innerhalb des n + x ten und n + x + 1 ten Lebensjahres zu sterben, ist, da der Abgang in dieser Zeit $a_{n+x} - a_{n+x+1}$ beträgt, $= \frac{a_{n+x} - a_{n+x+1}}{a_n} = w_n^{n+x} - w_n^{n+x+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit des 20jährigen, innerhalb des 30. und 31. Lebensjahres zu sterben $= w_{20}^{30} - w_{20}^{31} = \frac{495 - 489}{548} = 0{,}0109$; also die Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieser Jahre nicht zu sterben $= 0{,}9891$.

6) Frägt man nach dem Grade der Hoffnung oder nach der Wahrscheinlichkeit, dass eine Verbindung zweier Personen irgend eine Anzahl Jahre bestehe oder nach

irgend einer Anzahl von Jahren durch den Tod aufgelöst sein werde, so hat man (§. 9, 4), wenn a_n und a_m die Anzahl der im Alter von n und m Jahren Lebenden, a_{n+x} und a_{m+x} die Anzahl der nach x Jahren von jenen noch Lebenden bezeichnet:

a) die Wahrscheinlichkeit, dass nach x Jahren eine n und mjährige Person noch beisammenleben $= w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x} = \frac{a_{n+x} \cdot a_{m+x}}{a_n \cdot a_m}$;

b) die Wahrscheinlichkeit, dass von jenen Personen wenigstens Eine schon früher gestorben sei $= 1 - w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x} = \frac{a_n \cdot a_m - a_{n+x} \cdot a_{m+x}}{a_n \cdot a_m}$;

c) die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Person noch lebe, die zweite todt sei, $= w_n^{n+x}\left(1 - w_m^{m+x}\right) = \frac{a_n\,(a_m - a_{m+x})}{a_n \cdot a_m}$;

d) die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Person todt sei, die zweite noch lebe $= \left(1 - w_n^{n+x}\right) w_m^{m+x} = \frac{(a_n - a_{n+x})\ a_m}{a_n \cdot a_m}$;

e) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen todt sind $= \left(1 - w_n^{n+x}\right) \cdot \left(1 - w_m^{m+x}\right) = \frac{(a_n - a_{n+x})\ (a_m - a_{m+x})}{a_n \cdot a_m}$;

f) die Wahrscheinlichkeit, dass nicht beide Personen todt sind, sondern eine, auch wohl beide, noch leben $= 1 - \left(1 - w_n^{n+x}\right)\left(1 - w_m^{m+x}\right)$.

Für einen 36jährigen und 28jährigen ist die einfache Wahrscheinlichkeit, noch 20 Jahre zu leben: $w_{36}^{56} = \frac{a_{56}}{a_{36}} = \frac{309}{460} = 0{,}6701$; $w_{28}^{48} = \frac{a_{48}}{a_{28}} = \frac{382}{505} = 0{,}7564$; mithin *a*) $w_{36}^{56} \cdot w_{28}^{48} = 0{,}5081$; *b*) $1 - w_{36}^{56} \cdot w_{28}^{48} = 0{,}4919$; *c*) $w_{36}^{56}\left(1 - w_{28}^{48}\right) = 0{,}1636$; *d*) $\left(1 - w_{36}^{56}\right) w_{28}^{48} = 0{,}2483$; *e*) $\left(1 - w_{36}^{56}\right)\left(1 - w_{28}^{48}\right) = 0{,}0799$; *f*) $1 - \left(1 - w_{36}^{56}\right)\left(1 - w_{28}^{48}\right) = 0{,}9201$.

7) Bei Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Personen, welche n und m Jahre zählen, Eine innerhalb des x. und x + 1ten Jahre stirbt, hat man d r e i mögliche Fälle zu beachten: e n t w e d e r stirbt die njährige vor der mjährigen — o d e r umgekehrt — und die überlebende lebt noch am Ende des Jahres, o d e r beide Personen sterben im Laufe des fraglichen Jahres; hiernach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Absterbens Einer Person innerhalb des x. und x + 1ten Jahres der Summe dieser drei Wahrscheinlichkeiten gleich, mithin $= \frac{(a_{n+x} - a_{n+x+1}) \cdot a_{m+x+1}}{a_n \cdot a_m} +$

$$\frac{a_{n+x+1}(a_{m+x} - a_{m+x+1})}{a_n \cdot a_m} + \frac{(a_{n+x} - a_{n+x+1})(a_{m+x} - a_{m+x+1})}{a_n \cdot a_m} =$$

$$\frac{a_{n+x} \cdot a_{m+x} - a_{n+x+1} \cdot a_{m+x+1}}{a_n \cdot a_m} = w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x} - w_n^{n+x+1} \cdot w_m^{m+x+1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von einem 36jährigen und 28jährigen Einer innerhalb des 20. und 21. Jahres stirbt $= \frac{309}{460} \cdot \frac{482}{505} - \frac{297 \cdot 374}{460 \cdot 505} = 0{,}02996$, mithin die Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieser Jahre nicht zu sterben $= 0{,}97004$.

Dritter Abschnitt: Bedingte Renten.

> Das Handeln mit Lebensrenten ist kein gemeines Hazardspiel, dem es nur um Gewinn zu thun ist, sondern ein Spiel, das auf das Gemeinwesen in pecuniärer und moralischer Hinsicht einen sehr wohlthätigen Einfluss ausübt. Littrow.

§. 12.

Leibrenten.

1. Aufgabe. Eine $n$jährige Person will eine lebenslängliche Leibrente R kaufen, welche so lange am Ende jedes Jahres ausgezahlt wird, als die Person lebt, mit dem Tode derselben aber wegfällt. Wie gross ist die Mise L_n, wenn der Zinsfuss q ist?

Die baren Werthe der am Ende des 1., 2., 3., ... $x$ten Jahres fälligen Leibrenten sind: $\frac{R}{1+q}, \frac{R}{(1+q)^2}, \ldots \frac{R}{(1+q)^x}$; da aber diese Werthe noch von dem wahrscheinlichen Leben des Rentenirers abhängen, so müssen diese Grössen der Bedingung gemäss resp. in die Wahrscheinlichkeit $w_n^{n+1}, w_n^{n+2}, \ldots w_n^{n+x}$, dass der Rentenirer das $n+1, n+2, \ldots n+x$te Lebensjahr erreiche, multiplicirt werden, wobei $n + x = t$ das höchste zu erlangende Lebensalter in der zu Grunde gelegten Sterblichkeitstabelle bezeichnet; mithin ist der Gesammtwerth der Hoffnungen des Rentenirers oder die Gesammtforderung des Rentengebers:

$$60)\ L_n = R\left(\frac{w_n^{n+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2}}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{w_n^{n+x}}{(1+q)^x}\right) = R\,(1+q)^n$$

$$\left\{\frac{w_n^{n+1}}{(1+q)^{n+1}} + \frac{w_n^{n+2}}{(1+q)^{n+2}} + \ldots + \frac{w_n^{n+x}}{(1+q)^{n+x}}\right\} = (\S.\ 11,\ 4)\ R$$

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{(1+q)^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{(1+q)^{n+2}} + \ldots + \frac{a_t}{(1+q)^t}\right\} : \frac{a_n}{(1+q)^n}.$$

Setzen wir der Einfachheit wegen $R = 1$ (Thaler), so bezeichnet L_n die Mise eines Leibrententhalers (welche im Folgenden immer zu verstehen ist); für jede andere Rente hat man nur diesen Werth durch die jährliche Leibrente R zu multipliciren, um den gegenwärtigen Werth derselben zu erhalten. Setzt man für n in Formel 60) successiv 0, 1, 2, 3 . . . . und $R = 1$, so erhält man die Werthe eines Leibrententhalers für den 0, 1, 2, 3 . . . . jährigen:

$$L_0 = \frac{a_1}{1+q} + \frac{a_2}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{a_t}{(1+q)^t} : \frac{a_0}{(1+q)^0}.\quad L_1 = \frac{a_2}{(1+q)^2} + \frac{a_3}{(1+q)^3}$$

$$+ \ldots + \frac{a_t}{(1+q)^t} : \frac{a_1}{(1+q)^1}.\quad L_2 = \frac{a_3}{(1+q)^3} + \frac{a_4}{(1+q)^4} + \ldots + \frac{a_t}{(1+q)^t} : \frac{a_2}{(1+q)^2}.$$

$$L_3 = \frac{a_4}{(1+q)^4} + \frac{a_5}{(1+q)^5} + \ldots + \frac{a_t}{(1+q)^t} . \frac{a_3}{(1+q)^3}.$$

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man sogleich, dass die numerische Berechnung des Werthes einer lebenslänglichen Leibrente auf eine blosse Addition und darauf folgende Division reduzirt wird, wenn man die Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots . a_t$ aus einer bestimmten Sterblichkeitstabelle entnimmt, hierauf die Werthe der einzelnen Ausdrücke $\frac{a_1}{1+q}, \frac{a_2}{(1+q)^2}, \frac{a_3}{(1+q)^3} \ldots .$ bis zum höchsten Lebensalter (die sogenannten discontirten Zahlen der Lebenden) ein für allemal nach einem bestimmten Zinsfusse berechnet und in einer Tabelle der Reihe nach unter einander geordnet zusammenstellt. Von dem letzten Werthe ausgehend, addirt man diese discontirten Zahlen der Lebenden successiv bis a_1 nach der in den Mortalitätstabellen üblichen Manier; diese einzelnen Summen (die sogenannten Summen der discontirten Zahlen der Lebenden) geben die eingeklammerten Werthe der Leibrente.

„Der bare Werth einer lebenslänglichen Leibrente eines n jährigen wird gefunden, wenn man die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für das $n + 1$. Lebensjahr durch die discontirte Zahl der Lebenden für das n. Lebensjahr dividirt und den erhaltenen Quotienten mit der jährlichen Rente multiplicirt."

Auf diese Weise sind 1) die discontirten Zahlen der Lebenden, 2) die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden, und 3) die Einlagen eines Leibrententhalers für die Lebensjahre 0 — 93, basirt auf die Sterblichkeitsordnung der Mühlhäuser, für 3 % berechnet, und in Tabelle I, Kolumne D, E, F aufgestellt worden.

Ein 20jähriger will eine lebenslängliche Leibrente von 1000 Thlrn. kaufen, die Einlage beträgt bei 3 %? Die discontirte Zahl der Lebenden für den 20jährigen bei 3 % = 303,414, die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden neben dem 21-jährigen = 6172,065, die verlangte Mise = 100 . 6172,065 : 303,414 = 2034,20 Thlr. Für einen 40jährigen ist die Einlage für 100 Thlr. bei 3% = 100 . 2073,075 : 134,272 = 1543,93 Thlr.

Zusatz 1. Lautet die Leibrente auf eine bestimmte Anzahl (m) Jahre, so hat man nur in der Formel *60)* die ersten m Glieder zu summiren, d. h. statt t (= n + x) n + m zu setzen, und man erhält für die Mise L_n^m einer auf n Jahre lautenden Rente:

$$61)\quad L_n^m = R\left\{\frac{a_{n+1}}{(1+q)^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{(1+q)^{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}}\right\} : \frac{a_n}{(1+q)^n}.$$

Nun ist der Werth der lebenslänglichen Leibrente eines (n + m) jährigen nach Formel *60)*, indem man n + m statt n substituirt:

$$L_{n+m} = R\left\{\frac{a_{n+m+1}}{(1+q)^{n+m+1}} + \ldots + \frac{a_t}{(1+q)^t}\right\} : \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}};\ \text{mithin ist}\ L_n^m . \frac{a_n}{(1+q)^n}$$

$$+ L_{n+m} . \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} = R\left\{\frac{a_{n+1}}{(1+q)^{n+1}} + \ldots \frac{a_t}{(1+q)^t}\right\} = (\text{Formel } 60)$$

$L_n . \dfrac{a_n}{(1+q)^n}$; hieraus findet man

$$62)\quad L_n^m = L_n - L_{n+m} . \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}.$$

Ein 20jähriger will eine Leibrente von 100 Thlr. auf 20 Jahre kaufen, wie viel beträgt die Mise bei 3%? $L_{20}^{20} = L_{20} - L_{40} . \dfrac{a_{40}}{1{,}03^{40}} : \dfrac{a_{20}}{1{,}03^{20}} =$ **2034,20 — 1543,93 . 134,272 : 303,414 = 2034,20 — 683,24 = 1350,96** Thlr.

Zusatz 2. Ist die Leibrente m Jahre aufgeschoben und dann lebenslänglich fliessend, so findet man die Mise L_n^{-m}, wenn man von dem Werthe einer lebenslänglichen Leibrente den Werth der Leibrente auf m Jahre subtrahirt; mithin ist

$$63)\ L_n^{-m} = L_n - L_n^m = (62)\ L_{n+m} \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}.$$

Ein 20jähriger kauft eine Leibrente von 100 Thlr., die 20 Jahre aufgeschoben ist und dann lebenslänglich fliesst. Die Einlage beträgt 2034,20 — 1350,96 = 683,24 Thlr.

2. Aufgabe. Eine Person vom Alter n hat nach m Jahren, also am Ende des $n + m$ten Lebensjahres eine Summe A (Lebensactie) zu erwarten, wenn sie dann noch leben sollte, widrigenfalls die Zahlung ganz wegfällt; man fragt nach dem gegenwärtigen Werthe A_n^{n+m} dieser Anwartschaft.

Der gegenwärtige Werth der nach m Jahren unbedingt zahlbaren Summe A ist $= \frac{A}{(1+q)^m}$; da dieser Werth unserer Aufgabe gemäss noch in die Wahrscheinlichkeit w_n^{n+m} des njährigen, das $n + m$te Lebensjahr zu erreichen, multiplicirt werden muss, so ist

$$64)\ A_n^{n+m} = \frac{A \cdot w_n^{n+m}}{(1+q)^n} = A \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}$$

„Man findet den gegenwärtigen Werth einer nach m Jahren zahlbaren Lebensactie für einen njährigen, wenn man die zu hoffende Summe mit der discontirten Zahl der Lebenden des $n + m$ten Lebensalters multiplicirt und mit der discontirten Zahl der Lebenden des nten Lebensalters dividirt."

Jemand will für seinen neugebornen Sohn ein Stipendium von 100 Thlr. auf drei Jahre (für das vollendete 18., 19., 20. Jahr) kaufen; wie gross ist das Anlage-Kapital bei 3%? $A_0^{18} = 100 \cdot 327{,}179 : 1000 = 32{,}718$ Thlr.; $A_0^{19} = 100 \cdot 315{,}368 : 1000 = 31{,}537$ Thlr.; $A_0^{20} = 100 \cdot 303{,}414 : 1000 = 30{,}341$ Thlr., folglich die Gesammteinlage = 94,596 Thlr. — Ein Vater sichert seiner Tochter, welche jetzt 6 Jahr alt ist, für das vollendete 24. Jahr eine Aussteuer von 1000 Thlr.; die Einlage beträgt bei 3%: $A_0^{24} = 1000 \cdot 260{,}725 : 531{,}378 = 507{,}88$ Thlr.

Zusatz. Soll das Kapital A_n^{n+m} durch jährliche vorschüssige Beiträge (Prämien) B aufgebracht werden, so hat man $A_n^{n+m} = B + \frac{B}{1+q} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{B}{(1+q)^2} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_n} + \ldots + \frac{B}{(1+q)^{m-1}} \frac{a_{n+m-1}}{a_n} = B + B\left(\frac{a_{n+1}}{(1+q)^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{(1+q)^{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}}\right)$

$: \frac{a_n}{(1+q)^n} - B \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n} =$ (Formel 61) $B + B\, L_n^m - B \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} :$
$\frac{a_n}{(1+q)^n} =$ (62) $B\,(1 + L_n) - B\,(1 + L_{n+m}) \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}$, mithin

$$65)\ B = A_n^{n+m} : \left\{1 + L_n - (1 + L_{n+m}) \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}\right\} = (64)$$
$$A : \left\{(1 + L_n) \frac{a_n}{(1+q)^n} : \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} - (1 + L_{n+m})\right\}.$$

Für einen Neugebornen, welcher mit Vollendung des 18. Jahres 100 Thlr. erhalten soll, betragen die jährlichen Prämien bei 3%: 100 : ((1 + 15,301) 1000 : 327,179 — (1 + 20,756)) = 100 : (49,822 — 21,756) = 3,562 Thlr.

Anmerkung. Gewöhnlich pflegen die Kassen die Beiträge als nachschüssige zu berechnen, weil eines Theils die (durch Agenten erhobenen) Prämien nicht so pünktlich eingehen, andern Theils die eingelaufenen Kapitalien nicht unmittelbar auf Zinsen ausgethan werden können, also Ein Jahr ruhend gedacht werden, und setzen daher $B^1 = (1 + q)\, B$.

3. Aufgabe. Ein njähriger zahlt sofort und die nächstfolgenden m Jahre hindurch eine bestimmte Prämie B, um sich dadurch ein Jahr nach der letzten Prämienzahlung (d. h. im $n+m+1$ten Lebensjahre) eine lebenslängliche Rente (Pension) R zu sichern. Man soll die Relation zwischen diesen Daten bestimmen.

Die Leistung des Einkäufers, auf die Gegenwart zurückgebracht, ist $= B + \frac{B}{1+q}$ $\cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} + \dots + \frac{B}{(1+q)^m} \cdot \frac{a_{n+m}}{a_n} = B + B\, L_n^m = B + B\, L_n - B\, L_{n+m} \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} :$ $\frac{a_n}{(1+q)^n}$; die Gegenleistung der Bank, auf denselben Termin reduzirt, ist $\frac{R}{(1+q)^{m+1}} \cdot$
$\frac{a_{n+m+1}}{a_n} + \frac{R}{(1+q)^{m+2}} \cdot \frac{a_{n+m+2}}{a_n} + \dots + \frac{R}{(1+q)^{m+t-n}} \cdot \frac{a_t}{a_n} = \frac{R}{(1+q)^m} \cdot$
$\frac{a_{n+m}}{a_n \cdot a_{n+m}} \left\{\frac{a_{n+m+1}}{1+q} + \frac{a_{n+m+2}}{(1+q)^2} + \dots + \frac{a_t}{(1+q)^{t-n}}\right\} = \frac{R}{(1+q)^m} \cdot \frac{a_{n+m}}{a_n} \cdot L_{n+m}$
$= R \cdot L_{n+m} \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}$; beide Ausdrücke sind äquivalent, daher

$$66)\quad B = R \,.\, L_{n+m} \,.\, \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n} : \left(1 + L_n - L_{n+m} : \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}\right)$$

$$= R : \left\{(1 + L_n)\, \frac{a_n}{(1+q)^n} : \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} \,.\, L_{n+m} - 1 \right\}.$$

Wie gross ist der jährliche Beitrag eines 30jährigen, welcher vom 56. Lebensjahre ab eine lebenslängliche jährliche Pension von 100 Thlr. beziehen will, wenn 3% gerechnet wird? Hier ist $n = 30$, $m = 25$, $\frac{a_{30}}{(1{,}03)^{30}} = 203{,}934$, $\frac{a_{55}}{1{,}03^{55}} = 63{,}556$, $L_{30} = 18{,}192$, $L_{55} = 10{,}492$, $R = 100$, mithin $B = 100 : ((1 + 18{,}192)\; 203{,}934 : 10{,}492 \,.\, 63{,}556 - 1) = 100 : (5{,}869 - 1) = 20{,}54$ Thlr.

§. 13.

Lebensversicherungen.

Aufgabe. Ein njähriger will sein Leben auf die ganze Lebensdauer für die Summe V versichern, d. h. sein Erbe oder der Inhaber des Versicherungsscheines *(police)* soll am Ende des Jahres, in welchem der Versicherte stirbt, den einmaligen Betrag (Versicherungssumme) V erhalten. Man soll den gegenwärtigen Werth dieser Versicherungssumme oder das Einlage-Kapital V_n bestimmen, wenn der Zinsfuss q ist.

Die Wahrscheinlichkeit des njährigen, innerhalb des $n + x$. und $n + x + 1$ten Lebensjahres zu sterben, ist (§. 11, 5) $w_n^{n+x} - w_n^{n+x+1}$; für den, welcher innerhalb dieses Zeitraumes stirbt, zahlt die Anstalt V; mithin ist der bare Werth der Versicherung für die Zeit: $V \frac{\left(w_n^{n+x} - w_n^{n+x+1}\right)}{(1+q)^{x+1}}$. Setzt man successiv $x = 0, 1, 2, \ldots (t - n)$ und summirt die einzelnen Ausdrücke, so erhält man den baren Werth der lebenslänglichen Versicherung $= V \left(\frac{w_n^n}{1+q} + \frac{w_n^{n+1}}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{w_n^t}{(1+q)^{t-n+1}}\right)$

$$- V \left(\frac{w_n^{n+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2}}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{w_n^{t+1}}{(1+q)^{t-n+1}}\right) = \frac{V \,.\, w_n^m}{1+q} + \frac{V}{1+q}$$

$$\left(\frac{w_n^{n+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2}}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{w_n^t}{(1+q)^{t-n}}\right) - V\left(\frac{w_n^{n+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2}}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{w_n^t}{(1+q)^{t-n}}\right) - V \cdot \frac{w_n^{t+1}}{(1+q)^{t-n+1}}.$$ Nun ist $w_n^n = \frac{a_n}{a_n} = 1$, $w_n^{t+1} = \frac{a_{t+1}}{a_n} = \frac{0}{a_n} = 0$, mithin [Formel *60)* und *33)*, wenn $R = 1$]:

$$67)\quad V_n = \frac{V}{1+q} + \frac{V}{1+q} \cdot L_n = V \cdot L_n = \frac{qV}{1+q}\left(\frac{1}{q} - L_n\right) = \frac{V(P-L_n)}{1+P}.$$

„Das Einlagekapital für die lebenslängliche Versicherung eines njährigen wird gefunden, wenn man die Differenz zwischen einer perpetuirlichen Rente und einer lebenslänglichen Leibrente des njährigen mit der Versicherungssumme multiplicirt und durch den um 1 vermehrten Werth einer perpetuirlichen Rente dividirt."

Ein 20jähriger will sein Leben mit 100 Thlr. versichern; bei 3% beträgt die Mise $V_{20} = 100\ (33{,}3333 - 20{,}342) : 34{,}3333 = 37{,}838$ Thlr. — Für einen 40jährigen ist $V_{40} = 100\ (33{,}3333 - 15{,}439) : 34{,}3333 = 52{,}119$ Thlr.

Zusatz 1. Soll das Einlagekapital durch jährliche, vorschüssige Prämien B aufgebracht werden, so hat man dieselben so lange zu zahlen, als die Person lebt, also ist $V_n = B + B \cdot L_n$, mithin

$$68)\quad B = V_n : (1 + L_n) = \frac{V(P - L_n)}{1+P} : (1+L_n) = \frac{V}{1+L_n} - \frac{V}{1+P}.$$

„Der jährliche Beitrag eines njährigen für eine lebenslängliche Versicherung ist gleich der Differenz zweier Quotienten, welche man erhält, wenn man die Versicherungssumme einmal durch die um 1 vermehrte Einlage einer lebenslänglichen Leibrente des njährigen, ein zweites Mal durch die um 1 vermehrte Einlage einer perpetuirlichen Rente dividirt."

Ein 20jähriger versichert sein Leben mit 100 Thlr., der jährliche Beitrag ist bei 3%: $B = \frac{100}{1+20{,}342} - \frac{100}{1+33{,}3333} = 4{,}685 - 2{,}912 = 1{,}773$ Thlr. — Für einen 40jährigen ist die Prämie $B = \frac{100}{1+15{,}439} - \frac{100}{1+33{,}3333} = 6{,}083 - 2{,}912 = 3{,}171$ Thlr.

Anmerkung. Rechnet die Kasse wiederum die vorschüssigen Beiträge als nachschüssige, so ist $B' = B\ (1 + q)$.

Zusatz 2. Lautet die Versicherung auf m Jahre, d. h. soll die versicherte Summe nur dann gezahlt werden, wenn die versicherte Person im Laufe der nächsten m Jahre stirbt, so hat man in der obigen Reihe nur m Glieder zu summiren; hiernach ist

$$69)\ V_n^m = \frac{V}{1+q} + \frac{V}{1+q} \cdot L_n^m - V \cdot L_n^m - \frac{V}{1+q} \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}$$

$$= (61)\ \frac{V}{1+q}\left((1 - q\,L_n) - (1 - q\,L_{n+m}) \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}\right) = (68)\ V_n$$

$$- V_{n+m} \cdot \frac{a_{n+m}}{(1+q)^{n+m}} : \frac{a_n}{(1+q)^n}.$$

Ein 20jähriger versichert sein Leben auf 1 Jahr; diese Mise beträgt bei 3%: $V_{20}^1 = 37{,}838 - 38{,}532 \cdot 292{,}154 : 303{,}414 = 0{,}798$ Thlr. = 23 Sgr. 11 Pf.

§. 14.

Rente auf das kürzeste Leben (Verbindungsrente).

Aufgabe. Eine n und mjährige Person kaufen auf die Dauer des Zusammenlebens eine jährliche Rente R, welche so lange gezahlt wird, als beide Personen zusammenleben, mit dem Tode der einen Person aber erlischt. Wie gross ist der gegenwärtige Werth L_{nm} dieser Verbindungsrente?

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen am Ende des x. Jahres noch beisammen leben, ist (§. 11, 6) $= w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x}$; hiernach ist der gegenwärtige Werth der im xten Jahre zahlbaren Rente $= R \cdot \frac{w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x}}{(1+q)^x}$. Substituirt man für x die Zahlen 1, 2, 3, ... t — n (indem vorausgesetzt wird, dass die njährige Person die ältere sei), so gibt die Summe der erhaltenen Ausdrücke den baren Werth der lebenslänglichen Verbindungsrente; mithin ist

$$70)\ L_{nm} = R\left(\frac{w_n^{n+1} \cdot w_m^{m+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2} \cdot w_m^{m+2}}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{w_n^{t} \cdot w_m^{m+t-n}}{(1+q)^{t-n}}\right)$$

$$= R\left(\frac{a_{n+1} \cdot a_{m+1}}{1+q} + \frac{a_{n+2} \cdot a_{m+2}}{(1+q)^2} + \ldots\ldots\right) : a_n \cdot a_m.$$

Bei der numerischen Berechnung einer Verbindungsrente lassen sich Abkürzungen und Erleichterungen in der Ausführung der höchst mühseligen und weitläufigen Geschäfte anbringen. Es ist:

$$L_{n+s\,.\,m+s} = R\left(\frac{a_{n+s+1} \cdot a_{m+s+1}}{1+q} + \frac{a_{n+s+2} \cdot a_{m+s+2}}{(1+q)^2} + \ldots\ldots\right) : a_{n+s} \cdot a_{n+s} =$$

$$R\left(\frac{a_{n+s+1} \cdot a_{m+s+1}}{(1+q)^{s+1}} + \frac{a_{n+s+2} \cdot a_{m+s+2}}{(1+q)^{s+2}} + \ldots\ldots\right) : \frac{a_{n+s} \cdot a_{m+s}}{(1+q)^s}.$$

Man bringe nun die eingeklammerten Grössen auf ähnliche Weise in eine Tabelle, wie es bei der Berechnung der Leibrenten geschah, indem man

1) zunächst der Reihe nach die Producte der Lebenden für eine bestimmte Altersdifferenz bildet [Tabelle II, Kolumne 1 und 2 enthält diese Producte der Lebenden für 5 Jahre Altersunterschied: 20.15, 21.16 . . . . 93.88];

2) hierauf diese Producte der Lebenden der Reihe nach von oben herab auf s = 0, 1, 2, 3, 4, ... Jahre discontirt [Kolumne 3 enthält die sogenannten discontirten Producte der Lebenden für 3%].

3) Addirt man hierauf diese discontirten Zahlen der Verbindungspaare vom letzten aufwärts [die sogenannten Summen der discontirten Producte der Lebenden in Kolumne 4], so erhält man die eingeklammerte Grösse in dem Ausdrucke für die Verbindungsrente.

„Man findet den baren Werth einer Verbindungsrente, wenn man die Summe der discontirten Producte der Lebenden des um 1 Jahr älteren Verbindungspaares durch das discontirte Product der Lebenden des gegebenen Verbindungspaares dividirt und hierauf mit der jährlichen Rente multiplicirt.“

„Der Werth einer Verbindungsrente von 100 Thlr. einer 25 und 20jährigen Person bei 3% ist = 100 . 3929703 : 247227 = 1589,6 Thlr.

[Kolumne 5 enthält die Einlagen für eine Verbindungsrente von 1 Thlr. bei 3% und 5 Jahre Altersdifferenz.]

§. 15.

Renten auf ein bestimmtes längstes Leben.

Aufgabe. Eine mjährige Person (Ehefrau) hat eine (Wittwen-) Pension R zu erwarten, d. h. sie erhält von dem Jahre ab, in welchem eine mit ihr verbundene njährige Person (Ehemann) gestorben ist, am Ende jedes Jahres, das sie erlebt, den Betrag R. Wie gross ist der Werth $L_{m\,(n)}$ dieser Pension?

Gesetzt, die mjährige geniesse eine Leibrente R, welche am Ende jedes Jahres ausgezahlt wird, deren Werth L_m ist; diese Rente fällt aber für alle Jahre fort, welche beide Personen zusammen durchleben und deren Werth L_{nm} ist; demnach ist

$$71)\quad L_{m\,(n)} = R\,(L_m - L_{nm}).$$

„Die Mise für eine jährliche Pension einer mjährigen Person wird gefunden, wenn man die Differenz der Einlage für eine Leibrente der mjährigen und einer Verbindungsrente der m und njährigen mit der jährlichen Pension multiplicirt."

Für $n = 30$, $m = 25$, $p = 3\%$, $R = 100$, ist $L_{25\,(30)} = 100\,(19{,}283 - 14{,}853)$ $= 443$ Thlr.

Zusatz. Soll der jetzige Werth aller zu leistenden Zahlungen durch jährliche Vorschuss-Prämien B des versicherten njährigen Mannes, welche bis zum Tode des Versorgers fortdauern, aufgebracht werden, so ist $L_{m(n)} = B + B\,.\,L_n$; mithin

$$72)\ B = R\,(L_m - L_{nm}) : (1 + L_n).$$

„Der jährliche Vorschuss-Beitrag eines njährigen Mannes zu einer jährlichen Pension für die mjährige Frau wird bestimmt, wenn man die Differenz der Werthe einer Leibrente der mjährigen und einer Verbindungsrente beider durch den um 1 vermehrten Werth einer Leibrente des njährigen dividirt und den Quotienten mit der Pension multiplicirt."

$n = 30$, $m = 25$, $R = 100$, $p = 3\%$; $B = 100\,(19{,}283 - 14{,}853) : (1 + 18{,}192)$ $= 23{,}082$ Thlr.

$n = 25$, $m = 30$, $R = 100$, $p = 3\%$; $B = 100\,(18{,}192 - 14{,}853) : (1 + 29{,}283)$ $= 16{,}462$ Thlr.

§. 16.

Renten auf das längste Leben überhaupt.

Aufgabe 1. Eine n und mjährige Person geniessen eine Rente auf das längste Leben, d. h. so, dass am Ende jedes Jahres, welches von beiden oder von einer von ihnen erreicht wird, die Summe R gezahlt wird. Man soll den Werth $L\binom{n}{m}$ dieser Längst-Lebensrente bestimmen.

Stirbt die ältere njährige Person zuerst ab, so erhalten beide Personen zusammen, so lange die Verbindung dauert, eine Rente R, deren Werth L_n ist; die überlebende mjährige Person erhält dann eine Pension R, deren Werth $R\,(L_m - L_{nm})$ ist; demnach ist

$$73)\ L\binom{n}{m} = R\,(L_n + L_m - L_{nm}).$$

$n = 30$, $m = 25$, $R = 100$, $p = 3\%$, $L\binom{30}{25} = 100\,(19{,}283 + 18{,}192 - 14{,}853)$ $= 2262{,}2$ Thlr.

Aufgabe 2. Eine n und mjährige Person versichern ihr Leben dergestalt, dass die überlebende ein Jahr nach dem Tode der andern die Summe V erhält; wie gross ist der bare Werth $V\binom{n}{m}$ dieser Ueberlebungsactie?

Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 Personen n und m, die Eine im Laufe des x. und x + 1ten Jahres stirbt, ist (§. 11, 7) $= w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x} - w_n^{n+x+1} \cdot w_m^{m+x+1}$; mithin der gegenwärtige Werth der am Ende des Todesjahres der einen zahlbaren Summe $V = V\left(w_n^{n+x} \cdot w_m^{m+x} - w_n^{n+x+1} \cdot w_m^{m+x+1}\right) : (1+q)^{x+1}$. Substituirt man für x die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . . und summirt die erhaltenen Ausdrücke, so ist

$$V\binom{n}{m} = \frac{V}{1+q} + \frac{V}{1+q}\left(\frac{w_n^{n+1} \cdot w_m^{m+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2} \cdot w_m^{m+2}}{(1+q)^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$- V\left(\frac{w_n^{n+1} \cdot w_m^{m+1}}{1+q} + \frac{w_n^{n+2} + w_m^{m+2}}{(1+q)^2} + \ldots\ldots\right) = \text{(Formel 70)} \frac{V}{1+q} +$$

$\frac{V}{1+q} \cdot L_{nm} - V \cdot L_{nm}$; folglich

$$74)\quad V\binom{n}{m} = V\left(\frac{P - L_{nm}}{1+P}\right).$$

$n = 30$, $m = 25$, $V = 100$, $p = 3\%$, $V\binom{30}{25} = 100 \cdot \frac{(33{,}333 - 14{,}853)}{1 + 33{,}333} =$ 53,826 Thlr. (Vgl. Formel *67*).

Zusatz. Geschieht die Einzahlung durch jährliche Vorschussprämien B, so können sie nur so lange gezahlt werden, als die Verbindung dauert; mithin ist $V\binom{n}{m} = B + B \cdot L_{nm}$; demnach

$$75)\quad B = V\frac{(P - L_{nm})}{1+P} : (1 + L_{nm}) = \frac{V}{1+L_{nm}} - \frac{V}{1+P}.$$

$n = 30$, $m = 25$, $V = 100$, $p = 3\%$, $B = \frac{100}{1 + 14{,}853} - \frac{100}{1 + 33{,}333} =$ 3,395 Thlr. (Vgl. Formel *68*).

Tabelle I.

A	B	C	D	E	F	G	H		
Alter n	Gestorbene $a_n - a_{n+1}$	Lebende a_n	Discontirte Zahl der Lebenden für 3%	Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für 3%	Werth eines Leibrententhalers bei 3%	Jährliche Prämie für 100 ℛ︎ Versicherung bei 3%	Jährliche Prämie zu einer Versicherung, zahlbar mit Vollendung des 18., 21., 24. Jahres bei 3% 18.	21.	24.
0	214	1000	1000		15,301	3,221	3,563	2,887	2,375
1	69	786	763,106	15301,057	19,051	2,074	3,998	3,353	2,614
2	34	717	675,841	14537,951	20,525	1,733	4,403	3,392	2,827
3	38	683	615,890	13862,110	21,506	1,533	4,849	3 803	3,055
4	20	645	573,074	13246,220	22,114	1,413	5,335	4,134	3,292
5	12	625	539,136	12673,146	22,506	1,340	5,890	4,498	3,614
6	9	613	513,378	12134,010	22,635	1,320	6,523	4,909	3,830
7	10	604	491,107	11620,632	22,662	1,313	7,266	5,367	4,142
8	5	594	468,909	11129,525	22,732	1,301	8,157	5,900	4,731
9	5	589	451,420	10660,616	22,615	1,321	9,236	6,485	5,159
10	3	584	434,551	10209,196	22,493	1,324	10,585	8,202	5,649
11	3	581	419,727	9774,645	22,288	1,381			
12	3	578	405,398	9354,918	22,075	1,426			
13	2	575	391,547	8949,520	21,857	1,463			
14	2	573	378,821	8557,973	21,590	1,514			
15	3	571	366,543	8179,152	21,314	1,569			
16	5	568	353,959	7812,609	21,071	1,618			
17	6	563	340,624	7458,650	20,897	1,654			
18	4	557	327,179	7118,026	20,756	1,683			
19	5	553	315,368	6790,847	20,533	1,731			
20	4	548	303,414	6475,479	20,342	1,773			
21	4	544	292,454	6172,065	20,104	1,826			
22	6	540	281,822	5879,611	19,862	1,882			
23	4	534	270,574	5597,789	19,688	1,921			
24	7	530	260,725	5327,215	19,432	1,981			
25	7	523	249,788	5066,490	19,283	2,017			
26	4	516	239,267	4816,702	19,131	2,055			
27	7	512	230,497	4577,435	18,859	2,123			
28	5	505	222,724	4346,938	18,694	2,165			

A	B	C	D	E	F	G
Alter	Gestorbene	Lebende	Discontirte Zahl der Lebenden für 3%	Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für 3%	Werth eines Leibrententhalers bei 3%	Jährliche Prämie für 100 Rℓ. Versicherung bei 3%
n	$a_n - a_{n+1}$	a_n				
29	5	500	212,173	4126,214	18,447	2,230
30	6	495	203,934	3914,041	18,192	2,298
31	3	489	195,594	3710,107	17,968	2,424
32	5	486	188,732	3514,513	17,620	2,458
33	9	481	181,350	3325,781	17,338	2,541
34	6	472	172,773	3144,431	17,199	2,583
35	6	466	165,609	2971,658	16,942	2,661
36	6	460	159,070	2806,049	16,640	2,818
37	5	454	152,769	2646,979	16,326	2,860
38	5	449	146,352	2494,210	16,042	2,955
39	7	444	140,511	2347,858	15,709	3,072
40	10	437	134,272	2207,347	15,439	3,170
41	5	427	127,3[illegible]5	2073,075	15,274	3,375
42	5	422	122,233	1945,690	14,917	3,370
43	6	417	117,267	1823,457	14,550	3,518
44	6	411	111,453	1706,190	14,308	3,621
45	9	405	107,098	1594,737	13,890	3,803
46	5	396	101,668	1487,639	13,632	4,070
47	9	391	97,461	1385,971	13,220	4,121
48	8	382	92,657	1288,510	12,906	4,278
49	8	374	87,872	1195,853	12,609	4,354
50	6	366	83,487	1107,981	12,271	4,622
51	7	360	79,717	1024,494	11,851	4,869
52	14	353	75,900	944,777	11,447	5,123
53	5	339	70,767	868,877	11,278	5,232
54	11	334	67,692	798,110	10,790	5,569
55	14	323	63,556	730,418	10,492	5,788
56	12	309	59,030	666,862	10,297	5,949
57	7	297	55,085	607,832	10,034	6,150
58	13	290	52,220	552,747	9,584	6,535
59	12	277	48,427	500,527	9,335	6,763
60	11	265	44,979	452,100	9,051	7,036
61	10	254	41,856	407,121	8,726	7,369
62	15	244	39,038	365,265	8,356	7,775
63	14	229	35,571	326,227	8,171	7,991
64	8	215	32,423	290,656	7,933	8,281

A	B	C	D	E	F	G
Alter n	Gestorbene $a_{n} - a_{n+1}$	Lebende a_{n}	Discontirte Zahl der Lebenden für 3%	Summe der discontirten Zahlen der Lebenden für 3%	Werth eines Leibrententhalers bei 3%	Jährliche Prämie für 100 ℛ︎ℳ︎ Versicherung bei 3%
65	12	207	30,308	258,233	7,520	8,824
66	15	195	27,719	227,925	7,222	9,250
67	12	180	24,842	200,206	7,059	9,496
68	13	168	22,265	175,364	6,876	9,783
69	11	155	20,163	153,099	6,593	10,257
70	9	144	18,183	132,936	6,311	10,765
71	6	135	16,554	114,753	5,932	12,470
72	15	129	15,357	98,199	5,394	12,727
73	8	114	13,176	82,842	5,287	12,993
74	10	106	11,895	69,666	4,863	14,143
75	10	96	10,459	57,771	4,523	15,193
76	12	86	9,096	47,312	4,201	16,296
77	11	74	7,907	38,216	3,833	17,737
78	11	63	6,281	30,309	3,825	17,812
79	7	52	5,033	24,028	3,773	18,038
80	8	45	4,229	18,995	3,491	19,353
81	6	37	3,376	14,766	3,344	20,108
82	7	31	2,746	11,390	3,147	21,202
83	2	24	2,112	8,644	3,092	21,525
84	7	22	1,836	6,532	2,557	25,201
85	4	15	1,216	4,696	2,861	22,988
86	1	11	0,866	3,480	3,018	21,976
87	1	10	0,764	2,614	2.421	26,319
88	3	9	0,668	1,850	1.769	33,200
89	1	6	0,432	1,182	1,736	33,636
90	2	5	0,350	0,750	1,143	43,750
91	1	3	0,204	0,400	0,960	48,102
92	1	2	0,132	0,196	0,484	64,473
93	1	1	0,064	0,064	0	

Tabelle II.

1 Alter des Paares n . m	2 Producte der Lebenden $a_n \cdot a_m$	3 Discontirte Producte der Lebenden für 3%	4 Summe der discontirten Producte der Lebenden	5 Werth einer Verbindungs-rente von 1 ℳ bei 3%
20 . 15	312908	312908		16,925
21 . 16	308992	299992	5296095	16,654
22 . 17	304020	286568	4996103	16,434
23 . 18	297438	272198	4709535	16,302
24 . 19	293090	260406	4437337	16,040
25 . 20	286604	247227	4176931	15,896
26 . 21	280704	235085	3929704	15,716
27 . 22	276480	224806	3694619	15,434
28 . 23	269670	212880	3469813	15,299
29 . 24	265000	203100	3256933	15,036
30 . 25	258885	192635	3053833	14,853
31 . 26	252324	182284	2861198	14,695
32 . 27	248832	174526	2678914	14,349
33 . 28	242905	165407	2504388	14,140
34 . 29	236000	156024	2338981	13,991
35 . 30	230670	148058	2182957	13,744
36 . 31	224940	140175	2034899	13,516
37 . 32	220644	133493	1894724	13,193
38 . 33	215969	126859	1761231	12,883
39 . 34	209568	119514	1634372	12,675
40 . 35	203642	112757	1514858	12,436
41 . 36	196420	105585	1402101	12,279
42 . 37	191588	99885	1296516	11,980
43 . 38	187233	94869	1196631	11,613
44 . 39	182488	89772	1101762	11,275
45 . 40	176985	84534	1011990	10,971
46 . 41	169092	78407	927456	10,828
47 . 42	165002	74281	849049	10,430
48 . 43	159294	69624	774768	10,128

1 Alter des Paares n . m	2 Producte der Lebenden $a_n \cdot a_{am}$	3 Discontirte Producte der Lebenden für 3%	4 Summe der discontirten Producte der Lebenden	5 Werth einer Verbindungs-rente von 1 Rℓ. bei 3%
49 . 44	153714	65228	705144	9,810
50 . 45	148230	61069	639916	9,478
51 . 46	142560	57022	578847	9,151
52 . 47	138023	53599	521825	8,735
53 . 48	129498	48835	468226	8,587
54 . 49	124916	45735	419391	8,170
55 . 50	118218	42012	373656	7,894
56 . 51	111240	38390	331644	7,638
57 . 52	104841	35128	293254	7,348
58 . 53	98310	31980	258126	7,071
59 . 54	92518	29219	226146	6,739
60 . 55	85595	26239	196927	6,505
61 . 56	78486	23355	170688	6,308
62 . 57	72468	20945	147333	6,034
63 . 58	66410	18635	126388	5,782
64 . 59	59550	16224	107753	5,642
65 . 60	54855	14505	91529	5,310
66 . 61	49530	12719	77024	5,055
67 . 62	43920	10950	64305	4,872
68 . 63	38472	9312	53355	4,729
69 . 64	33325	7832	44043	4,623
70 . 65	29808	6799	36211	4,326
71 . 66	26325	5830	29412	4,044
72 . 67	23220	4993	23582	3,723
73 . 68	19152	3998	18589	3,649
74 . 69	16430	3330	14591	3,381
75 . 70	13824	2720	11261	3,140
76 . 71	11610	2218	8541	2,850
77 . 72	9546	1771	6323	2,570
78 . 73	7182	1293	4552	2,520
79 . 74	5512	964	3259	2,380
80 . 75	4320	733	2295	2,130
81 . 76	3182	524	1562	1,980
82 . 77	2294	367	1038	1,828
83 . 78	1512	235	671	1,855
84 . 79	1144	173	436	1,520

1 Alter des Paares n . m	2 Producte der Lebenden $a_n \cdot a_m$	3 Discontirte Producte der Lebenden für 3%	4 Summe der discontirten Producte der Lebenden	5 Werth einer Verbindungs-rente von 1 Rthl. bei 3%
85 . 80	675	99	263	1,656
86 . 81	407	58	164	1,827
87 . 82	310	43	106	1,465
88 . 83	216	29	63	1,176
89 . 84	132	17,17	34,11	0,986
90 . 85	75	9,47	16,94	0,788
91 . 86	33	4,05	7,47	0,844
92 . 87	20	2,38	3,42	0,437
93 . 88	9	1,04	1,04	

1	2
Alter des Paares	Producte der Lebenden
$n \cdot m$	$a_n \cdot a_m$
85 . 80	675
86 . 81	407
87 . 82	310
88 . 83	216
89 . 84	132
90 . 85	75
91 . 86	33
92 . 87	20
93 . 88	9