Ueber die periodischen Decimalbrüche.

Ein Beitrag zur Zahlentheorie

von

Oberlehrer Sanio.

§. 1.

Bekanntlich lassen sich nur diejenigen gemeinen Brüche, deren Nenner 2 oder 5 in beliebiger Anzahl zu Factoren haben, in endliche Decimalbrüche verwandeln, da keine andern Zahlen in einer Potenz von 10 aufgehen. Alle anderen Brüche dagegen geben periodische Decimalbrüche, d. h. solche mit unendlich vielen Decimalstellen, deren Stellen aber nach einer bestimmten Anzahl derselben in derselben Grösse und Reihenfolge wiederkehren; z. B. $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$, $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$, $\frac{25}{111} = 0{,}225225\ldots$.

Die Periode muss stets nach $(p-1)$ Stellen eintreten, wenn der Nenner p des gemeinen Bruches eine Primzahl ist, da bei der Division des Nenners in die Zähler 1, 10, 10^2, 10^3 etc. nur die Reste 1, 2, 3… $(p-1)$, jedoch in beliebiger Ordnung, vorkommen können. Sind aber alle Reste schon vorgekommen, so muss einer derselben wiederkehren, und dann kehren auch die andern in derselben Reihenfolge wieder, da die Division durch Anhängung der Nullen ganz in derselben Weise fortgeht, als beim Beginn der Periode.

Heisst der Bruch nicht $\frac{1}{p}$, sondern $\frac{r}{p}$, so bleibt die Anzahl der periodischen Decimalstellen dieselbe, wiewohl die Reste in anderer Ordnung aufeinander folgen, oder sogar andere werden, wenn r nicht unter den Resten ist, die bei der Verwandlung von $\frac{1}{p}$ in einen Decimalbruch vorkommen.

Die Stellenzahl der Periode, die der Kürze halber **Periodenzahl** heissen mag, ist jedoch nicht immer $(p-1)$, sondern oft kleiner; daher ist es von Interesse, für jede Primzahl diese Periodenzahl zu wissen und sie ohne so grosse Mühe, als die vollständige Verwandlung des Bruches in einen Decimalbruch erfordert, wenn p eine grosse Zahl ist, berechnen zu können. Dies ist der nächste Zweck der folgenden Entwicklung; doch wird der Erfolg zeigen, dass dies nicht geschehen kann, ohne mit der Zahlentheorie in mannigfachen Verkehr zu treten.

§. 2.

Die Behauptung, dass die Periodenzahl eines Decimalbruchs, in welchen $\frac{1}{p}$ verwandelt ist, wobei p eine Primzahl bedeutet, höchstens $(p-1)$ sei, ist nur ein specieller Fall des bekannten Fermat'schen Lehrsatzes:

„Ist p eine Primzahl, und sind p und x relative Primzahlen zu einander, so lässt x^{p-1}, durch p dividirt, den Rest 1.“

Dafür möge die bekannte Bezeichnung dienen:

$$x^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod. p)}.$$

Jedoch ist (p—1) nicht der einzige Exponent, zu welchem eine Zahl x erhoben werden muss, um nach der Division durch p, den Rest 1 zu geben; jeder andere aber, der dieser Bedingung genügt, ist entweder ein Vielfaches oder ein Theiler von (p — 1).

Die erste Behauptung erhellet unmittelbar; denn ist

$$x^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod. p), so ist auch } (x^{p-1})^m \equiv 1^m \equiv 1 \text{ (mod. p)}$$

wenn m irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Sei ferner x^q die kleinste Potenz, welche in Bezug auf p den Rest 1 lässt; so ist auch:

$$x^{2q} \equiv 1,\ x^{3q} \equiv 1, \text{ allgemein } x^{mq} \equiv 1 \text{ (mod. p)}$$

denn es ist $x^{q+1} \equiv x$, $x^{q+2} \equiv x^2$ u. s. w.

Es kehren also alle Reste der Reihe x, x^2, x^3 .... x^q wieder, und da in dieser der Rest 1 erst am Ende bei x^q bleibt, so kann er auch nur bei x^{2q}, x^{3q},.. endlich bei x^{mq} bleiben, und (p — 1) muss unter den Vielfachen von q sein, wenn q nicht selbst = (p — 1) ist.

Schreibt man in der Potenzreihe von x das Glied $x^0 = 1$ voran, so müssen die Reste der Reihe

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3 \ldots\ldots x^{q-1}$$

in Bezug auf den Modul p alle verschieden sein, da z. B. der Rest x erst wiederkehren kann, wenn der Rest 1 sich bereits wiederholt hat.

Zu jedem q, das ein Factor von (p — 1) ist, gehören bestimmte Grundzahlen x. Ist z. B. p = 19, also $p - 1 = 2 . 3^2$, so gehört zu q = 2 x = 18; denn $18^2 \equiv 1$ (mod. 19). Zu q = 3 gehören 7 und 11; denn $7^3 \equiv 1$, $11^3 \equiv 1$ (mod. 19). Zu q = 6 gehört x = 8; zu q = 9 gehören 4, 5, 9, 16, 17; zu q = 18 gehören die übrigen Zahlen, die kleiner als p sind, nämlich 2, 3, 6, 10, 12, 13, 14, 15.

Für unsere specielle Aufgabe, die Periodenzahl eines Bruchs $\frac{1}{p}$ zu suchen, handelt es sich nur um ein bestimmtes x, nämlich 10, zu welchem umgekehrt das zugehörige q gesucht werden soll.

Es ist also die Frage zu beantworten:

„Welcher Factor q von (p — 1) ist es, der $10^q \equiv 1$ (mod. p) macht, wenn p eine Primzahl ist und $\frac{1}{p}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden soll?"

Hierbei ergiebt sich sogleich, dass $q \leqq \frac{p-1}{2}$ wird, wenn 10 quadratischer Rest der Primzahl p ist; denn dafür, dass $x^2 \equiv r$ (mod. p) werde, ist bekanntlich die Bedingung unerlässlich, dass $r^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mod. p) werde.

Ist nun $\frac{p-1}{2}$ eine Primzahl, so kann nur $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (mod. p) sein. 2027 z. B. hat eine Periode von 1013 Stellen, 2039 eine von 1019 Stellen.

Ist dagegen $\frac{p-1}{2}$ eine aus irgend welchen Factoren zusammengesetzte Zahl, so muss man 10 zu allen einfachen und zusammengesetzten Theilern von (p — 1) erheben, und die Reste in Bezug auf p suchen, um den rechten zu finden.

Ist aber 10 quadratischer Nichtrest von p, so ist $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$; jedoch darf man hieraus auf die Periodenzahl (p — 1) nur dann schliessen, wenn $\frac{p-1}{2}$ eine Primzahl oder ein Product einer Primzahl und irgend einer Potenz von 2 ist.

Für 3593 z. B. ist 10 quadratischer Nichtrest; also die Periodenzahl 3592; denn 3592 $= 8 . 449$ und 449 eine Primzahl.

In allen andern Fällen muss man wieder 10 zu allen Potenzen erheben, deren Exponenten Factoren von $(p-1)$ sind, um diejenige herauszufinden, welche, durch p dividirt, den Rest 1 giebt; denn ein Gesetz, nach welchem sich die Periodenzahl des Bruches $\frac{1}{p}$ beurtheilen liesse, ist nicht erkennbar.

Das einfache Verfahren, nach welchem ich die Periodenzahl für alle Primzahlen bis 7001 gefunden habe, wird am besten aus folgenden Beispielen erhellen.

I. Für $p = 4583$ ist 10 quadratischer Nichtrest, also

$$10^{4582} \equiv 1,\quad 10^{2291} \equiv -1 \text{ (mod. p)}$$

Da $4582 = 2 . 29 . 79$ ist, so hat man die Reste von 10^{29}, 10^{79} und zur Probe von $10^{29.79}$ zu suchen.

Verwandelt man $\frac{1}{4583}$ in einen Decimalbruch, etwa auf 10 Stellen, so bleibt der Rest 3992 oder -591; denn es ist bequemer, mit den negativen Resten zu rechnen, wenn die wirklichen Reste mehr als die Hälfte des Nenners 4583 betragen.

Demnach ist $10^{10} \equiv -591$ (mod. 4583)

Daraus folgt $10^{20} \equiv (-591)^2 \equiv 973.$

$10^{30} \equiv 973 . (-591) \equiv -2168,\ 10^{29} \equiv -2050;$

$10^{60} \equiv 2649 \equiv -1934,\ 10^{80} \equiv (-1934) . 973 \equiv -2752;$

also: $10^{79} \equiv 1558.$

Findet man nun auf dieselbe Weise $(1558)^{29} \equiv -1$, so ist

$$10^{2291} \equiv -1 \text{ (mod. 4583)},\quad 10^{4582} \equiv 1;$$

4582 ist also die Periodenzahl des Bruches $\frac{1}{4583}$.

Beispiel II. Für die Primzahl 4021 ist 10 quadratischer Nichtrest, und $4020 = 3 . 4 . 5 . 67$; demnach darf man nur die Reste von

10^{12}, 10^{20}, 10^{60}, 10^{268}, 10^{804}, 10^{1340} aufsuchen, findet aber schon

$$10^{268} \equiv 1 \text{ (mod. 4021)}.$$

Beispiel III. Für 4591 ist 10 quadratischer Rest; darum ist

$$10^{2295} \equiv 1 \text{ (mod. 4591)}$$

$2295 = 5 . 3^3 . 17$; folglich hat man die Reste von

$$10^{17},\ 10^{51},\ 10^{85},\ 10^{153},\ 10^{255},\ 10^{765}$$

zu suchen und findet endlich richtig $10^{2295} \equiv 1$.

Beispiel IV. Für 4567 ist 10 quadratischer Nichtrest, also

$$10^{2283} \equiv -1 \text{ (mod. 4567)}$$

Da $2283 = 3 . 761$ ist, so sucht man nach und nach

$$\left.\begin{array}{lll} 10^{10} \equiv 893, & 10^{20} \equiv -1776, & 10^{40} \equiv -1621, \\ 10^{80} \equiv 1616, & 10^{120} \equiv 1922, & 10^{240} \equiv -619, \\ 10^{480} \equiv -467, & 10^{720} \equiv 1352 & \\ 10^{761} \equiv 1113, & 10^{2.761} \equiv 1112, & 10^{3.761} \equiv -1 \end{array}\right\} \text{(mod. 4567)}$$

Die Periodenzahl des Bruches $\frac{1}{4567}$ ist demnach 4566.

Beispiel V. Für die Primzahl 1399 ist 10 quadratischer Rest;

demnach $10^{699} \equiv 1$ (mod. 1399)

Da $699 \equiv 3 . 233$ ist, so hat man nur die Reste von

$$10^{233} \text{ und } 10^{699}$$

zu suchen. Durch Division findet man

$$\left.\begin{array}{lll} 10^{10} \equiv -237, & 10^{20} \equiv 209, & 10^{29} \equiv -223, \\ 10^{58} \equiv -635, & 10^{116} \equiv 313, & 10^{232} \equiv 39, \\ 10^{233} \equiv 390, & 10^{466} \equiv -391, & 10^{699} \equiv 1. \end{array}\right\} \pmod{1399}$$

Bei den beiden letzten Beispielen dienen die folgenden Sätze zur Abkürzung der Rechnung, sind aber auch für sich merkwürdig.

I. „Wenn der Rest der Potenz von x sich von dem ihres Quadrats um -1 oder $(p-1)$ unterscheidet, so lässt das Product beider den Rest -1 in Bezug auf den Modul p.“

In Zeichen ausgedrückt:

$$\text{Ist } \left.\begin{array}{l} x^m \equiv a \\ x^{2m} \equiv a-1 \end{array}\right\} \pmod{p}, \text{ so ist } x^{3m} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Beweis. Da in Folge der Annahme $x^{3m} \equiv a\,(a-1) \equiv a^2 - a$ ist,

$$\begin{array}{l} \text{aber } x^{2m} \equiv a^2 \equiv (a-1), \\ \hline \text{so ist } x^{3m} \equiv (a-1) - a \equiv -1. \end{array}$$

Anmerkung. Der Satz und sein Beweis gelten auch, wenn der Rest a negativ ist.

II. „Ergänzen sich die Reste irgend einer Potenz einer Zahl und ihres Quadrats in Bezug auf eine Primzahl p zur Summe $p-1$ oder zu -1, so lässt das Product beider den Rest 1.“

In Zeichen dargestellt lautet der Satz:

$$\text{Ist } \left.\begin{array}{l} x^m \equiv \pm a \\ x^{2m} \equiv \mp a - 1 \end{array}\right\} \pmod{p}, \text{ so ist } x^{3m} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Beweis. Da $x^{3m} \equiv -a^2 \mp a$ ist,

$$\begin{array}{l} \text{aber } x^{2m} \equiv a^2 \equiv \mp a - 1, \\ \hline \text{so ist: } x^{3m} \equiv \pm a + 1 \mp a \equiv 1. \end{array}$$

§. 3.

Die Reste, welche die auf einander folgenden Potenzen von 10 in Bezug auf irgend eine Primzahl p lassen, von 10^0 bis 10^{q-1}, haben manche bemerkenswerthe Eigenschaften:

„1. Ist die Periodenzahl q eine gerade Zahl, so ist

$$10^{\frac{q}{2}} \equiv -1 \pmod{p}“$$

Beweis. Sei $10^{\frac{q}{2}} \equiv m$, so muss

$$10^q \equiv m^2 \equiv 1 \pmod{p} \text{ sein.}$$

Unter allen Zahlen von 1 bis $p-1$ lassen aber nur diese beiden selbst, zum Quadrat erhoben, den Rest 1. Da nun aber m nicht 1 sein kann, weil nach der Annahme keine niedrigere Potenz als $10^q \equiv 1$ wird, so muss $m = p-1$ d. h. $m \equiv -1$ sein, damit $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv 1$ werde.

Zusatz. „Wenn die Periodenzahl q eine ungerade Zahl ist, so kommt $p-1$ oder -1 unter den Resten der Periode von $\frac{1}{p}$ garnicht vor. Denn da das Quadrat dieses Restes den Rest 1 giebt, so müsste die Periodenzahl gerade sein.

2. „Von dem Reste -1 ab wiederholen sich auch alle übrigen Reste der ersten Hälfte in derselben Reihefolge mit dem entgegengesetzten Zeichen, wenn man statt der Reste, die grösser als $\frac{p}{2}$ sind, die kleineren mit dem Minuszeichen nimmt.

Oder, was dasselbe ist:

„Die Reste der zweiten Hälfte ergänzen die Reste der ersten zur Primzahl p.“

Beweis. Da $10^0 \equiv 1$, $10^1 \equiv 10$, u. s. w., $10^{\frac{q}{2}} \equiv -1$ ist, so muss

$$10^{\frac{q}{2}+1} \equiv -1 \,.\, 10 \equiv -10,\; 10^{\frac{q}{2}+m} \equiv -1 \,.\, 10^m \equiv -10^m$$ sein, wenn m irgend einen Exponenten der ersten Hälfte bedeutet.

3. „Das Product je zweier Reste einer Periode, die zu Potenzen von 10 gehören, deren Exponenten sich gegenseitig zur Periodenzahl q ergänzen, giebt in Bezug auf die Primzahl p den Rest 1; das Product des ersten Restes 1 aber und des Restes von $10^{\frac{q}{2}}$, wenn q eine gerade Zahl ist, giebt den Rest -1.“

Beweis. Sei $10^m \equiv r$, $10^{q-m} \equiv r'$, so muss $r \,.\, r' \equiv 10^m \,.\, 10^{q-m} \equiv 10^q \equiv 1$ sein; aber $10^0 \,.\, 10^{\frac{q}{2}} \equiv 1 \,.\, -1 \equiv -1$.

Hieraus folgt sogleich der Satz, der für $q = p - 1$ mit dem Lehrsatze von Wilson übereinstimmt.

4. „Das Product sämmtlicher Reste der Periode von $\frac{1}{p}$ als Decimalbruch lässt, durch p dividirt, den Rest $+1$, wenn die Periodenzahl q ungerade, den Rest -1, wenn sie eine gerade Zahl ist.“

5. „Verwandelt man nicht $\frac{1}{p}$, sondern $\frac{m}{p}$ in einen Decimalbruch, wobei m eine beliebige ganze Zahl, kleiner als p, bedeutet, so ist das Product je zweier zusammengehörigen Reste der Periode $\equiv m^2$; das Product aller $\equiv \pm m^q$, je nachdem q eine ungerade oder gerade Zahl ist.“

Da nämlich der erste Rest m mal so gross ist bei $\frac{m}{p}$, als bei $\frac{1}{p}$, so werden auch alle Reste der Reihe nach m mal so gross, oder wenigstens m mal so grossen Zahlen nach dem Modul p congruent sein. Lässt nun bei $\frac{1}{p}$ das Product je zweier Reste der Potenzen, die sich zu 10^q ergänzen, den Rest 1, so muss es bei $\frac{m}{p}$ den Rest m^2 lassen.

6. „Die Summe aller Reste der Periode von $\frac{1}{p}$ ist ein Vielfaches von p.“

Beweis. Da für eine gerade Periodenzahl q die Reste der zweiten Hälfte denen der ersten gleich, aber entgegengesetzt sind, oder diese zu p ergänzen, so ist der Satz für diesen Fall von selbst klar.

Wenn aber q ungerade, so giebt die Congruenz

$$10^q \equiv 1 \text{ oder } 10^q - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

wenn man sie durch den Factor $10 - 1 = 9$ dividirt,

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{q-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

d. h. die Summe aller Reste der Periode von $\frac{1}{p}$ geht durch p ohne Rest auf.

7. „Wenn zwei Decimalbrüche $\frac{r}{p}$ und $\frac{s}{p}$ einen gleichen Rest in ihrer periodischen Restreihe haben, so sind auch alle Reste der einen Reihe gleich denen der andern, und haben auch, von zwei gleichen Resten ab gerechnet, dieselbe Folge.“

8. „Ergänzen sich zwei Reste der Decimalbrüche $\frac{r}{p}$ und $\frac{s}{p}$ zur Primzahl p, so ist das auch bei je zwei folgenden der Fall.“

Diese Eigenschaften erhellen schon unmittelbar aus der Art der Division, durch welche die Decimalbrüche gefunden werden.

§. 4.

Es bleibt noch zu untersuchen übrig, welche Periodenahl $\frac{1}{p}$, in einen Decimalbruch verwandelt, haben wird, wenn p keine Primzahl, sondern eine beliebige, aus Primfactoren oder deren Potenzen zusammengesetzte Zahl ist.

Hierüber giebt die folgende Verallgemeinerung des Fermat'schen Lehrsatzes den besten Aufschluss.

„Ist P irgend eine aus Factoren zusammengesetzte Zahl, x eine relative Primzahl zu P, und bezeichnet n die Anzahl der relativen Primzahlen zu P, die kleiner als P sind, so ist stets

$$x^n \equiv 1 \text{ (mod. P).“}$$

Beweis. Seien die sämmtlichen relativen Primzahlen zu P, die kleiner als P sind,

$$1, m', m'', m''' \ldots . P-1,$$

und sei x irgend eine solche Zahl, so liefern die Producte

$$1 . x, m'x, m''.x \ldots . . (P-1) x$$

in Bezug auf den Modul P lauter verschiedene Reste, welche gleichfalls relative Primzahlen zu P sind. Lieferten nämlich zwei Glieder der Reihe gleiche Reste, so müsste ihr Unterschied durch P aufgehen, und das ist nicht möglich, da alle Zahlen m kleiner als P sind. Ferner müssen relative Primzahlen zu P auch solche bleiben, wenn man nur Vielfache von P davon wegnimmt.

Da nun die Anzahl dieser Reste gleich der Zahl der relativen Primzahlen zu P ist, so müssen sie die relativen Primzahlen

$$1, m', m'', m''' \ldots P-1$$

in irgend einer Ordnung selber sein. Daraus folgt die Congruenz

$$1 . m' . m'' . m''' \ldots (P-1) x^n \equiv 1 . m' . m'' . m''' \ldots . (P-1) . \{\text{mod. P}\}$$

und hieraus, da $1 . m' . m'' . m''' \ldots (P-1)$ nicht durch P aufgehen kann,

$$x^n \equiv 1 \text{ (mod. P)}$$

Ist $P = p^a$, wobei p eine Primzahl ausser 2 und 5 und a irgend eine ganze Zahl bezeichnen soll, so ist die Anzahl der relativen Primzahlen

$$n = p^{a-1} (p-1);$$

demnach ist die Periodenzahl des Decimalbruchs $\frac{1}{p^a}$ ein Theiler von $p^{a-1} (p-1)$, wenn sie nicht diese Zahl selbst ist, da stets

$$10^n \equiv 1 \text{ (mod. } p^a\text{)}.$$

„Bezeichnet nun q die Periodenzahl des Decimalbruches $\frac{1}{p}$, so dass also erst $10^q \equiv 1$ ist, so hat der Bruch $\frac{1}{p^a}$ die Periodenzahl $p^{a-1} . q$.“

Beweis I. Da keine niedrigere Potenz von 10, als die qte den Rest 1 in Bezug auf die Primzahl p lässt, so ist

$$10^q = 1 + y . p,$$

wobei y eine ganze Zahl bedeutet, die nicht durch p theilbar ist, folglich ist

$$\left(10^q\right)^p = 1 + yp^2 + \frac{p-1}{2} y^2p^3 + \ldots . + y^pp^p$$

$$10^{pq} - 1 = p^2 \left(y + \frac{p-1}{2} y^2p + \ldots + y^pp^{p-2}\right)$$

$$\text{d. h. } 10^{pq} \equiv 1 \text{ (mod. } p^2\text{)};$$

denn die Reihe in der Klammer enthält wegen des ersten Gliedes nicht den Factor p.

Da dieser Beweis, wenn man von $10^{pq} = 1 + yp^2$ ausgeht und zur pten Potenz erhebt, ebenso für die Moduln p^3, p^4 & geführt werden kann, so gilt der Satz allgemein für p^a.

Beweis II. Da $10^q = py + 1$, wobei y die periodischen Decimalstellen von $\frac{1}{p}$ als ganze Zahl bedeuten, so ist

$$\frac{1}{p} = \frac{y}{10^q} + \frac{1}{p.10^q}$$
$$= \frac{y}{10^q} + \frac{1}{10^q}\left(\frac{y}{10^q} + \frac{1}{p.10^q}\right)$$
$$= \frac{y}{10^q} + \frac{y}{10^{2q}} + \frac{1}{10^{2q}}\left(\frac{y}{10^q} + \frac{1}{p.10^q}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{y}{10^q} + \frac{y}{10^{2q}} + \frac{y}{10^{3q}} + \cdots\cdots + \frac{1}{10^{(m-1)q}} + \frac{1}{p.10^{mq}}$$
$$= \frac{y}{10^{mq}}\left\{10^{(m-1)q} + 10^{(m-2)q} + \ldots\ldots + 10^q + 1\right\} + \frac{1}{p.10^{mq}};$$

wobei m irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Soll hieraus der Bruch $\frac{1}{p^2}$ abgeleitet werden, indem man durch p nochmals auf beiden Seiten dividirt, so kann erst die Periode eintreten, wenn die Summe der Reste, welche die einzelnen Glieder der Reihe lassen, oder welche

$$y\left\{10^{(m-1)q} + 10^{(m-2)q} + \ldots\ldots + 10^q + 1\right\}$$

lässt, durch p theilbar ist, so dass nur das Restglied

$$\frac{1}{p.10^{mq}}$$

bleibt, mit dem eine neue Periode beginnt, wenn man durch p dividirt.

Da 10^q, 10^{2q}, ... $10^{(m-1)q}$ den Rest 1 lassen, wenn sie durch p dividirt werden, so wird, wenn y den Rest r lässt, der durchaus nicht 0 sein kann,

$$y\left\{10^{(m-1)q} + 10^{(m-2)q} + \ldots\ldots + 10^q + 1\right\}$$

den Rest mr lassen. Dieser geht durch p ohne Rest auf, wenn $m = p$ ist, d. h. nachdem p Perioden des Bruchs $\frac{1}{p}$ durch p dividirt sind; dann beginnt die zweite Periode des Bruchs $\frac{1}{p^2}$ mit

$$\frac{1}{p_2 . 10^{pq}}$$

und die Periodenzahl des Bruches $\frac{1}{p^2}$ ist pq.

Eine Ausnahme von dieser Regel macht, ausser den schon genannten Primzahlen 2 und 5, die endliche Decimalbrüche geben, nur die Primzahl 3.

Da $10^m = 1 + 3^2y$, so hat $\frac{1}{3}$ sowohl als $\frac{1}{9}$ die Periodenzahl 1, $\frac{1}{27}$ die Periodenzahl 3, also $\frac{1}{3^m}$ die Periodenzahl 3^{m-2}.

„Ist der Nenner P des periodischen Decimalbruchs $\frac{1}{P}$ das Product zweier Primzahlen $= ps$, so ist die Periodenzahl höchstens das Product der Periodenzahlen von $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{s}$, kann aber auch ein Theiler dieses Products sein.“

Beweis. Ist q die Periodenzahl des Bruchs $\frac{1}{p}$, so ist nach dem Vorigen

$$\frac{1}{p} = \frac{y}{10^{mq}} \left\{ 10^{(m-1)q} + 10^{(m-2)q} + \ldots . + 10^q + 1 \right\} + \frac{1}{p \cdot 10^{mq}}$$
$$= \frac{y}{10^{mq}} \cdot \frac{10^{mq}-1}{10^q-1} + \frac{1}{p \cdot 10^{mq}}$$

wobei m wieder, wie vorher und nachher, eine ganze Zahl bedeutet.

Dividirt man auf beiden Seiten durch s, so ist

$$\frac{1}{ps} = \frac{y\,(10^{mq}-1)}{10^{mq}\,(10^q-1)\,s} + \frac{1}{ps \cdot 10^{mq}}.$$

Damit die Periode das Bruches mit dem Restgliede $\frac{1}{ps \cdot 10^{mq}}$ eintrete, muss $y\,(10^{mq}-1)$ durch s ohne Rest aufgehen.

Ist nun q' die Periodenzahl von $\frac{1}{s}$, also $10^{q'}-1$ durch s theilbar, so ist offenbar, dass, wenn nicht etwa y durch s aufgeht, was in manchen Fällen, z. B. für $q' = q$ stattfindet, $10^{qq'}-1$ sowohl durch 10^q-1 als auch durch $10^{q'}-1$ ohne Rest theilbar ist, also auch durch s. Demnach ist im Allgemeinen qq' die Periodenzahl von $\frac{1}{ps}$, wenn sie nicht ein Theiler dieser Zahl ist.

„Ein Theiler der Zahl qq' ist sie aber dann jedesmal, wenn q und q' einen Factor gemein haben."

Es sei z. B. $q = cz$, $q' = dz$, so wird schon q sowohl als q' in cdz aufgehen. Da nun 10^q-1 und $10^{q'}-1$ in $10^{mq}-1$ aufgehen, wenn mq irgend ein Vielfaches von q und q' ist, so darf in diesem Falle nur $mq = cdz$ sein, damit beide Bedingungen erfüllt werden, mit Ausnahme des Factors $10-1$, der in $10^{mq}-1$ auch nur einmal vorhanden ist.

„Ist $q = q'$, so ist die Periodenzahl für $\frac{1}{ps}$ nur q."

Beispiele. $\frac{1}{7.13}$ hat eine Periode von 6 Stellen, weil $q = q' = 6$.

$\frac{1}{53.79}$ „ „ „ „ 13 „ „ $q = q' = 13$.

$\frac{1}{13.41}$ „ „ „ „ 30 „ „ $q = 6$, $q' = 5$.

$\frac{1}{73.41}$ „ „ „ „ 40 „ „ $q = 8$, $q' = 10$.

$\frac{1}{73.13}$ „ „ „ „ 24 „ „ $q = 8$, $q' = 6$.

Fasst man die Resultate der vorhergehenden Untersuchungen zusammen, so lassen sie sich in folgendem Satze aussprechen.

„Ist $P = m^a \cdot n^b \cdot p^c \ldots .$ und q die Periodenzahl von $\frac{1}{m}$, q' die von $\frac{1}{n}$, q'' die von $\frac{1}{p}$ etc., so wird die Periodenzahl des Decimalbruchs $\frac{1}{P}$ im Allgemeinen

$$m^{a-1} \cdot n^{b-1} \cdot p^{c-1} \ldots . \; q \cdot q' \cdot q'' \ldots .$$

sein, wenn q, q', q'' .... keinen Factor gemein haben."

Es bleibt nur noch zu untersuchen übrig, wie die Periode sich ändert, wenn P noch Factoren 2 oder 5 in beliebiger Anzahl enthält.

Da $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1}{2^m} = \frac{5^m}{10^m}$, $\frac{1}{5^m} = \frac{2^m}{10^m}$ ist,

so wird, wenn man einen periodischen Decimalbruch durch 10^m dividirt, das Decimalkomma um m Stellen links gerückt, folglich aus der vollständigen Periode des Bruchs, die sogleich nach dem Komma beginnt, eine unvollständige, die erst mit der $(m+1)$ten Decimalstelle nach dem Komma anfängt. Die Multiplication mit 2^m oder 5^m macht in der Periodenzahl keine Aenderung.

§. 5.

Hat der Decimalbruch $\frac{1}{p}$ die Periodenzahl n, so lässt 10^n, durch p dividirt, nach dem Vorigen den Rest 1, also ist $10^n - 1$ durch p ohne Rest theilbar.

Nun ist $10^n - 1$ eine Zahl, die mit n Neunen geschrieben wird, $\frac{10^n-1}{9}$ eine Zahl, die aus n Einsen besteht; daher wird diese Zahl mit der Primzahl p in einem bestimmten Zusammenhange stehen, der im Folgenden näher untersucht werden soll.

Der Kürze wegen soll die Zahl

$$\frac{10^n-1}{9} = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 \ldots + 10^{n-1}$$

durch $(\overline{1\ldots.1}^{\,n})$ bezeichnet werden.

Da $10^n - 1$ durch p ohne Rest theilbar ist, so ergiebt sich unmittelbar der Satz:

„Jede Primzahl p über 5 mit der Periodenzahl n geht in $(\overline{1\ldots.1}^{\,n})$ auf."

Die Primzahlen 2 und 5 sind hiervon ausgenommen, weil sie keine periodischen Decimalbrüche geben, und die Primzahl 3, weil jede Potenz von 10, durch 3 dividirt, den Rest 1 lässt. Demnach gilt für 3 der Satz:

„Die Primzahl 3 geht in der Zahl $(\overline{1\ldots.1}^{\,3m})$ auf, wobei m eine beliebige ganze Zahl bedeutet."

Wenn eine Primzahl p die Periodenzahl $p-1$ hat, also erst in $(\overline{1\ldots.1}^{\,p-1})$ aufgeht, so lässt die Zahl $(\overline{1\ldots.1}^{\,p})$, durch p dividirt, den Rest 1; d. h.

„Die Zahl, die mit p Einsen geschrieben wird, hat die Form $pm+1$. Dieselbe Form haben auch die Primzahlen, die in dieser Zahl $(\overline{1\ldots.1}^{\,p})$ als Factoren enthalten sind."

17 z. B. hat die Periodenzahl 16; daher geht 17 in 16 Einsen auf und die Zahl sowohl, die mit 17 Einsen geschrieben wird, als auch deren Factoren 2071723 und 5363222357 haben die Form $17m+1$.

Hat eine Primzahl p die Periodenzahl n, so ist nach dem Vorigen n ein aliquoter Theil von $(p-1)$, also etwa

$$n = \frac{p-1}{m};$$

demnach muss $p = m \cdot n + 1$ sein. In Worten lautet dieser Satz:

„Alle Primzahlen, welche in $(\overline{1\ldots.1}^{\,n})$ und nicht in weniger Einsen schon aufgehen, haben die Form $mn+1$."

Die Zahl $(\overline{1\ldots.1}^{\,13})$ z. B. besteht aus den Factoren 53, 79, 265371653, welche alle die Form $13m+1$ haben.

In Bezug auf die Zahlen $\overline{(1\ldots.1)}^{n}$ ist man zu der Behauptung geneigt, dass keine derselben, mit Ausnahme von 11, eine Primzahl sei; doch hält es schwer, dafür einen allgemeinen Beweis zu führen.

Die Möglichkeit, dass z. B. $\overline{(1\ldots.1)}^{19}$ in Factoren zerlegt werden könne, erhellt auf folgende Weise.

Nach der Analogie von $\overline{(1\ldots.1)}^{17}$ sei der eine Factor dieser Zahl

$2.10^8 + a.10^7 + b.10^6 + c.10^5 + \ldots. + g.10 + h$, der andere

$5.10^9 + k.10^8 + m.10^7 + n.10^6 + p.10^5 + \ldots. + t.10 + u$

so wird das Product beider eine Zahl mit 19 Ziffern geben, wobei die willkürlichen Coefficienten a, b, c und k, m, n etc. durch folgende Gleichungen bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
&hu = 1 + 10z_1 \\
&ht + gu + z_1 = 1 + 10z_2 \\
&hs + gt + fu + z_2 = 1 + 10z_3 \\
&hr + gs + ft + eu + z_3 = 1 + 10z_4 \\
&hq + gr + fs + et + du + z_4 = 1 + 10z_5 \\
&hp + gq + fr + es + dt + cu + z_5 = 1 + 10z_6 \\
&hn + gp + fq + er + ds + ct + bu + z_6 = 1 + 10z_7 \\
&hm + gn + fp + eq + dr + cs + bt + au + z_7 = 1 + 10z_8 \\
&hk + gm + fn + ep + dq + cr + bs + at + 2u + z_8 = 1 + 10z_9 \\
&5h + gk + fm + en + dp + cq + br + as + 2t + z_9 = 1 + 10z_{10} \\
&5g + fk + em + dn + cp + bq + ar + 2s + z_{10} = 1 + 10z_{11} \\
&5f + ek + dm + cn + bp + cq + aq + 2r + z_{11} = 1 + 10z_{12} \\
&5e + dk + cm + bn + ap + 2q + z_{12} = 1 + 10z_{13} \\
&5d + ck + bm + an + 2p + z_{13} = 1 + 10z_{14} \\
&5c + bk + am + 2n + z_{14} = 1 + 10_{15} \\
&5b + ak + 2m + z_{15} = 1 + z_{16} \\
&5a + 2k + z_{16} = 11.
\end{aligned}
$$

Da hier 17 Gleichungen oder eigentlich Congruenzen zur Bestimmung der 17 Coefficienten vorhanden sind, und jede eine Lösung in ganzen Zahlen zulässt, so ist die Möglichkeit nachgewiesen, dass $\overline{(1\ldots.1)}^{19}$ wenigstens 2 Factoren habe. Die wirkliche Auffindung derselben ist wegen der vielen Fälle, die dabei vorkommen können, nicht gut ausführbar. Z. B. $hu = 1$, $hu = 3.7$, $hu = 9.9$ giebt allein 5 Fälle. Dazu kommt der Uebelstand, dass man nicht durch allgemeine Elimination zum Ziele gelangen, sondern die Unbekannten nur successive aus den einzelnen Gleichungen von der ersten bis zur letzten bestimmen kann, da sich die Grössen z_1 z_2 etc. nur nach und nach finden lassen.

Ist in $\overline{(1\ldots.1)}^{n} = 1 + 10 + 10^2 + \ldots. + 10^{n-1}$ n eine zusammengesetzte Zahl, etwa $= m.r$, so ist sowohl $\overline{(1\ldots.1)}^{m}$ als $\overline{(1\ldots.1)}^{r}$ in jener Zahl $\overline{(1\ldots.1)}^{n}$ enthalten; denn es gilt allgemein:

$$
\begin{aligned}
&\{x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} \ldots + x + 1\} \{x^{m(r-1)} + x^{m(r-2)} + x^{m(r-3)} + \ldots + x^m + 1\} \\
&= x^{mr-1} + x^{mr-2} + x^{mr-3} \ldots. + x + 1,
\end{aligned}
$$

wobei m und r beliebige ganze Zahlen sind.

In $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{51}$ z. B. ist sowohl $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{3}$ als auch $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{17}$ als Factor enthalten.

Ist $n = 2m$, so besteht $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{2m}$ aus den Factoren

$$\overline{(1\ldots\ldots1)}^{m} \text{ und } (10^m + 1);$$

denn es ergiebt sich durch Multiplication

$$(x^m + 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots\ldots + x + 1) = x^{2m-1} + x^{2m-2} + x^{2m-3} \ldots\ldots + x + 1.$$

Daher muss man, um die Factoren von $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{2m}$ alle zu erhalten, auch die Factoren der Zahlen untersuchen, die um 1 grösser sind, als eine Potenz zon 10.

Hierbei lässt sich die Behauptung in den meisten Fällen rechtfertigen:

„Keine Zahl, die eine Potenz von 10 um eins übertrifft, ist eine Primzahl mit Ausnahme von 11 und 101."

Denn da $(x + 1)$ ein Factor von $x^{2n-1} + 1$, $x^m + 1$ ein Factor von $x^{m(2n-1)} + 1$ ist, so geht 11 in allen Zahlen auf, die um 1 grösser sind, als eine ungerade Potenz von 10.

$$10^2 + 1 \text{ geht in } 10^6 + 1, \text{ überhaupt in } 10^{2(2n-1)} + 1 \text{ auf;}$$
$$10^3 + 1 \text{ geht in } 10^9 + 1, \text{ überhaupt in } 10^{3(2n-1)} + 1 \text{ auf.}$$

Doch dafür, dass alle Zahlen von der Form $10^{2^m} + 1$, wobei m grösser als 1 ist, sich in Factoren zerlegen lassen, giebt es keinen allgemeinen Beweis. Die Möglichkeit kann in jedem einzelnen Falle durch ähnliche Gleichungen dargethan werden, als für $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{19}$ aufgestellt sind.

Als Beispiele folgen hier 1) die Factoren der Zahlen zon der Form $10^n + 1$ bis $n = 18$.

$10^3 + 1 = 7 . 11 . 13.$
$10^4 + 1 = 73 . 137.$
$10^5 + 1 = 11 . 9091.$
$10^6 + 1 = 101 . 9901.$
$10^7 + 1 = 11 . 909091.$
$10^8 + 1 = 17 . 5882353.$
$10^9 + 1 = 7 . 11 . 13 . 19 . 52579.$
$10^{10} + 1 = 101 . 3541 . 27961.$
$10^{11} + 1 = 11 . 11 . 23. 4093 . 8779,$
$10^{12} + 1 = 73 . 137 . 99990001.$
$10^{13} + 1 = 11 . 859 . 1058313049.$
$10^{14} + 1 = 29 . 101 . 281 . 121499449.$
$10^{15} + 1 = 7 . 11 . 13 . 9091 . 211 . 241 . 2161.$
$10^{16} + 1 = 353 . 449 . 641 . 1409 . 69857.$
$10^{17} + 1 = 11 . 103 . 4013 . 21993833369.$
$10^{18} + 1 = 101 . 9901 . 999999000001.$

2) Factoren der Zahlen von der Form $\overline{(1\ldots\ldots1)}^{n}$.

$111 = 3 . 37.$
$\overline{(1\ldots\ldots1)}^{4} = 11 . 101.$
$\overline{(1\ldots\ldots1)}^{5} = 41 . 271.$
$\overline{(1\ldots\ldots1)}^{6} = 3 . 37 . (10^3 + 1).$
$\overline{(1\ldots\ldots1)}^{7} = 239 . 4649.$
$\overline{(1\ldots\ldots1)}^{8} = 11 . 101 . (10^4 + 1).$

4

$\overset{9}{(1\ldots 1)} = 3 \,.\, 3 \,.\, 37 \,.\, 333667.$

$\overset{10}{(1\ldots 1)} = 41 \,.\, 271 \,.\, (10^5 + 1).$

$\overset{11}{(1\ldots 1)} = 21649 \,.\, 513239.$

$\overset{12}{(1\ldots 1)} = 3 \,.\, 37 \,.\, (10^3 + 1).\, (10^6 + 1).$

$\overset{13}{(1\ldots 1)} = 53 \,.\, 79 \,.\, 265371653.$

$\overset{14}{(1\ldots 1)} = 239 \,.\, 4649 \,.\, (10^7 + 1).$

$\overset{15}{(1\ldots 1)} = 3 \,.\, 37 \,.\, 41 \,.\, 271 \,.\, 31 \,.\, 2906161.$

$\overset{16}{(1\ldots 1)} = 11 \,.\, 101 \,.\, (10^4 + 1).\, (10^8 + 1).$

$\overset{17}{(1\ldots 1)} = 2071723 \,.\, 5363222357.$

$\overset{18}{(1\ldots 1)} = \overset{9}{(1\ldots 1)}.\, (10^9 + 1).$

Schlussbemerkung. Lange nachdem diese Abhandlung in den Hauptsachen niedergeschrieben war, kam mir in dem Programm der Realschule zu Neisse vom Jahr 1863 die Abhandlung des Herrn B[illegible]lka über dasselbe Thema zu Gesicht. Da nun diese mit der meinigen nur in einigen Hauptresultaten übereinstimmt, die Berechnung der Periodenzahlen aber gänzlich fehlt, so halte ich die Veröffentlichung meiner Arbeit nicht für überflüssig.

Sanio.

Tabelle

für die Stellenzahl der Periode aller Decimalbrüche, die aus gewöhnlichen Brüchen entstanden sind, deren Nenner eine Primzahl ausser 2 und 5 bis 7001.

Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.
3	1	233	232	523	261	853	213	1187	593	1543	1542	1907	953	2287	762	2677	223
7	6	239	7	541	540	857	856	1193	1192	1549	1548	1913	1912	2293	1146	2683	447
11	2	241	30	547	91	859	26	1201	200	1553	1552	1931	386	2297	2296	2689	42
13	6	251	50	557	278	863	862	1213	202	1559	779	1933	21	2309	2308	2693	1346
17	16	257	256	563	281	877	438	1217	1216	1567	1566	1949	1948	2311	231	2699	2698
19	18	263	262	569	284	881	440	1223	1222	1571	1570	1951	195	2333	1166	2707	1353
23	22	269	268	571	570	883	441	1229	1228	1579	1578	1973	986	2339	2338	2711	1355
29	28	271	5	577	576	887	886	1231	41	1583	1582	1979	1978	2341	2340	2713	2712
31	15	277	69	587	293	907	151	1237	206	1597	133	1987	331	2347	1173	2719	1359
37	3	281	28	593	592	911	455	1249	208	1601	200	1993	664	2351	1175	2729	341
41	5	283	141	599	299	919	459	1259	1258	1607	1606	1997	998	2357	1178	2731	2730
43	21	293	146	601	300	929	58	1277	638	1609	201	1999	999	2371	2370	2741	2740
47	46	307	153	607	202	937	936	1279	639	1613	403	2003	1001	2377	264	2749	916
53	13	311	155	613	51	941	940	1283	641	1619	1618	2011	670	2381	476	2753	2752
59	58	313	312	617	88	947	473	1289	92	1621	1620	2017	2016	2383	2382	2767	2766
61	60	317	79	619	618	953	952	1291	1290	1627	271	2027	1013	2389	2388	2777	2776
67	33	331	330	631	315	967	322	1297	1296	1637	409	2029	2028	2393	2392	2789	2788
71	35	337	336	641	32	971	970	1301	1300	1657	552	2039	1019	2399	1399	2791	31
73	8	347	173	643	107	977	976	1303	1302	1663	1662	2053	684	2411	2410	2797	1398
79	13	349	116	647	646	983	982	1307	653	1667	833	2063	2062	2417	2416	2801	1400
83	41	353	32	653	326	991	495	1319	659	1669	556	2069	2068	2423	2422	2803	1401
89	44	359	179	659	658	997	146	1321	55	1693	423	2081	1040	2437	609	2819	2818
97	96	367	366	661	660	1009	252	1327	1326	1697	1696	2083	1041	2441	305	2833	2832
101	4	373	186	673	224	1013	253	1361	608	1699	566	2087	298	2447	2446	2837	709
103	34	379	378	677	338	1019	1018	1367	1366	1709	1708	2089	1044	2459	2458	2843	1421
107	53	383	382	683	341	1021	1020	1373	686	1721	430	2099	2098	2467	137	2851	2850
109	108	389	388	691	230	1031	103	1381	1380	1723	287	2111	1055	2473	2472	2857	408
113	112	397	198	701	700	1033	1032	1399	699	1733	866	2113	2112	2477	619	2861	2860
127	42	401	200	709	708	1039	519	1409	32	1741	1740	2129	532	2503	278	2879	1439
131	65	409	204	719	359	1049	524	1423	158	1747	291	2131	710	2521	630	2887	2886
137	8	419	418	727	726	1051	1050	1427	713	1753	584	2137	2136	2531	46	2897	2896
139	46	421	420	733	61	1061	212	1429	1428	1759	879	2141	2140	2539	2538	2903	2902
149	148	431	215	739	246	1063	1062	1433	1432	1777	1776	2143	2142	2543	2542	2909	2908
151	75	433	432	743	742	1069	1068	1439	719	1783	1782	2153	2152	2549	2548	2917	1458
157	78	439	219	751	125	1087	1086	1447	1446	1789	1788	2161	30	2551	425	2927	2926
163	81	443	221	757	27	1091	1090	1451	290	1801	900	2179	2178	2557	639	2939	2938
167	166	449	32	761	380	1093	273	1453	726	1811	1810	2203	1101	2579	2578	2953	984
173	43	457	152	769	192	1097	1096	1459	162	1823	1822	2207	2206	2591	259	2957	1478
179	178	461	460	773	386	1103	1102	1471	735	1831	305	2213	1106	2593	2592	2963	1481
181	180	463	154	787	393	1109	1108	1481	740	1847	1846	2221	2220	2609	1304	2969	371
191	95	467	233	797	398	1117	558	1483	741	1861	1860	2237	1118	2617	2616	2971	2970
193	192	479	239	809	202	1123	561	1487	1486	1867	933	2239	1119	2621	2620	2999	1499
197	98	487	486	811	810	1129	564	1489	744	1871	935	2243	1121	2633	2632	3001	1500
199	99	491	490	821	820	1151	575	1493	373	1873	1872	2251	2250	2647	882	3011	3010
211	30	499	498	823	822	1153	1152	1499	214	1877	938	2267	1133	2657	2656	3019	3018
223	222	503	502	827	413	1163	581	1511	755	1879	313	2269	2268	2659	886	3023	3022
227	113	509	508	829	276	1171	1170	1523	761	1889	118	2273	2272	2663	2662	3037	506
229	228	521	52	839	419	1181	1180	1531	1530	1901	380	2281	228	2671	1335	3041	380

Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.	Primzahl.	Perioden-zahl.
3049	508	3499	318	3911	1955	4339	4338	4793	4792	5237	1309	5689	316	6143	6142	6599	3299
3061	204	3511	1755	3917	1958	4349	4348	4799	2399	5261	1052	5693	1423	6151	1025	6607	2202
3067	1533	3517	879	3919	653	4357	242	4801	800	5273	5272	5701	5700	6163	79	6619	6618
3079	1539	3527	3526	3923	1961	4363	2181	4813	802	5279	2639	5711	571	6173	3086	6637	474
3083	1541	3529	1764	3929	491	4373	1093	4817	4816	5281	2640	5717	1429	6197	3098	6653	3326
3089	1544	3533	1766	3931	1310	4391	2195	4831	805	5297	5296	5737	5736	6199	3099	6659	6658
3109	148	3539	3538	3943	3942	4397	314	4861	972	5303	5302	5741	5740	6203	443	6661	6660
3119	1559	3541	20	3947	1973	4409	551	4871	2435	5309	5308	5743	5742	6211	6210	6673	6672
3121	156	3547	1773	3967	3966	4421	4420	4877	2438	5323	5322	5749	5748	6217	6216	6679	3339
3137	3136	3557	254	3989	3988	4423	4422	4889	2444	5333	2666	5779	5778	6221	6220	6689	1672
3163	1581	3559	1779	4001	500	4441	2220	4903	1634	5347	2673	5783	5782	6229	2076	6691	6690
3167	3166	3571	3570	4003	87	4447	4446	4909	1636	5351	2675	5791	965	6247	6246	6701	6700
3169	792	3581	3580	4007	4006	4451	4450	4919	2459	5381	5380	5801	1450	6257	6256	6703	6702
3181	636	3583	1194	4013	34	4457	4456	4931	4930	5387	2693	5807	5806	6263	6262	6709	6708
3187	177	3593	3592	4019	4018	4463	4462	4933	2466	5393	5392	5813	2906	6269	6268	6719	3359
3191	29	3607	3606	4021	268	4481	2240	4937	4936	5399	2699	5821	5820	6271	1045	6733	1683
3203	1601	3613	602	4027	2013	4483	249	4943	4942	5407	1802	5827	2913	6277	1569	6737	6736
3209	1604	3617	3616	4049	2024	4493	1123	4951	2475	5413	2706	5839	2919	6287	6286	6761	3380
3217	1072	3623	3622	4051	4050	4507	751	4957	413	5417	5416	5843	2921	6299	94	6763	161
3221	3220	3631	1815	4057	4056	4513	1504	4967	4966	5419	5418	5849	1462	6301	6300	6779	6778
3229	1076	3637	1818	4073	4072	4517	2258	4969	828	5431	2715	5851	1950	6311	3155	6781	6780
3251	3250	3643	1821	4079	2039	4519	753	4973	226	5437	2718	5857	5856	6317	3158	6791	679
3253	271	3659	3658	4091	4090	4523	2261	4987	2493	5441	2720	5861	5860	6323	3161	6793	6792
3257	3256	3671	367	4093	22	4547	2273	4993	1664	5443	907	5867	2933	6329	3164	6803	3401
3259	3258	3673	3672	4099	4098	4549	1516	4999	357	5449	2724	5869	5868	6337	6336	6823	6822
3271	1635	3677	919	4111	2055	4561	2280	5003	2501	5471	547	5879	5878	6343	6342	6827	3413
3299	3298	3691	1230	4127	4126	4567	4566	5009	626	5477	2738	5881	2940	6353	6352	6829	6828
3301	3300	3697	1232	4129	2064	4583	4582	5011	1670	5479	2739	5897	5896	6359	3179	6833	6832
3307	1653	3701	3700	4133	1033	4591	2295	5021	5020	5483	2741	5903	5902	6361	1590	6841	855
3313	3312	3709	3708	4139	4138	4597	2298	5023	1674	5501	5500	5923	2961	6367	6366	6857	6856
3319	553	3719	1859	4153	4152	4603	2301	5039	2519	5503	5502	5927	5926	6373	531	6863	6862
3323	1661	3727	3726	4157	2078	4621	924	5051	50	5507	2753	5939	5938	6379	1063	6869	6868
3329	832	3733	933	4159	693	4637	61	5059	5058	5519	2759	5953	1984	6389	6388	6871	3435
3331	3330	3739	1246	4177	4176	4639	2319	5077	1269	5521	2760	5981	5980	6397	78	6883	3441
3343	3342	3761	1880	4201	75	4643	2321	5081	1270	5527	5526	5987	2993	6421	2140	6899	6898
3347	1673	3767	3766	4211	4210	4649	7	5087	5086	5531	5530	6007	858	6427	1071	6907	1151
3359	1679	3769	1884	4217	4216	4651	4650	5099	5098	5557	926	6011	6010	6449	1612	6911	3455
3361	1680	3779	3778	4219	4218	4657	1552	5101	1700	5563	2781	6029	6028	6451	2150	6917	3458
3371	3370	3793	632	4229	4228	4663	222	5107	2553	5569	1392	6037	3018	6469	924	6947	3473
3373	843	3797	1898	4231	2115	4673	4672	5113	1704	5573	2786	6043	3021	6473	6472	6949	6948
3389	3388	3803	1901	4241	1060	4679	2339	5119	853	5581	5580	6047	6046	6481	135	6959	3479
3391	1695	3821	3820	4243	2121	4691	4690	5147	2573	5591	2795	6053	3026	6491	1298	6961	3480
3407	3406	3823	1274	4253	1063	4703	4702	5153	5152	5623	5622	6067	3033	6521	815	6967	6966
3413	853	3833	3832	4259	4258	4721	2360	5167	5166	5639	2819	6073	6072	6529	1088	6971	6970
3443	1721	3847	3846	4261	4260	4723	2361	5171	5170	5641	1410	6079	1013	6547	1091	6977	6976
3449	431	3851	770	4271	2135	4729	1182	5179	5178	5647	5646	6089	761	6551	3275	6983	6982
3457	384	3853	963	4273	1424	4733	1183	5189	5188	5651	5650	6091	2030	6553	6552	6991	3495
3461	3460	3863	3862	4283	2141	4751	2375	5197	433	5653	2826	6101	1220	6563	3281	6997	1749
3463	3462	3877	969	4289	2144	4759	2379	5209	372	5657	5656	6113	6112	6569	3284	7001	1750
3467	1733	3881	1940	4297	1432	4783	4782	5227	2613	5659	5658	6121	3060	6571	6570		
3469	3468	3889	1944	4327	4326	4787	2393	5231	2615	5669	5668	6131	6130	6577	2192		
3491	698	3907	1953	4337	4336	4789	228	5233	5232	5683	2841	6133	1533	6581	1316		