Ueber den Unterricht

in den

mathematischen Wissenschaften.

Entbehrlichkeit der Schultafel.

Köln, 1857.
Gedruckt bei Joh. Georg Schmitz.

Als wir vor vierzig Jahren am hiesigen Gymnasium die Mathematik in den Lehrplan aufnahmen, da fragte Alt und Jung: „Mathematik, was ist das?" Wenngleich die Wissenschaft zu den sieben freien Künsten gehörte; so war es doch nur einzeln an Geist und Fleiß hervorragenden Männern gegeben, die Elemente derselben wissenschaftlich aufzufassen. Nur in dem seltenen Falle, daß einer der Lehrer besondere Vorliebe für die Mathematik hatte, wurden die Humanisten (jetzt Sekundaner) mit den Anfangsgründen der Geometrie und der allgemeinen Arithmetik bekannt gemacht und in der Auflösung algebraischer Aufgaben geübt, erreichten im Ganzen den jetzigen Standpunkt der Quartaner.

Die Rhetorica (jetziger Prima entsprechend) befaßte sich mit der Lehre vom binomischen Quadrate und von Ausziehung der Quadratwurzel mit Anwendung auf Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke, regulärer Figuren und Körper, des Kreises u. s. w.

So war denn im günstigern Falle der zur Hochschule übergehende Gymnasiast nicht über die Anfänge der Mathematik hinaus gekommen, hatte aber die zum damaligen Studium der Physik und für die bürgerlichen Geschäfte nöthigen Kenntnisse. So stand es bis 1815 am hiesigen Gymnasium und während an den Lyceen unter Leitung der französischen Inspektoren die Mathematik eifrig betrieben wurde, waren an hiesiger Stelle und anderswo die Studien dieser Wissenschaft auf das Minimum herabgesunken.

Anders hat es sich seit der Besitznahme der Rheinlande durch unsere jetzige Regierung und namentlich seit Eröffnung der Rhein-Universität gestaltet. Wie nämlich hierdurch unsern Gelehrtenschulen die Möglichkeit geboten ward, sich an den wissenschaftlichen Bestrebungen unseres Jahrhunderts zu betheiligen, und wie die Naturkunde und Mechanik mit Riesenschritten vorangingen, so durfte deren Trägerin, die Mathematik nicht zurückbleiben. Seitdem nun vollends durch die Anlage von höhern Bürger- und Gewerbeschulen diese Wissenschaft bis zum Künstler- und Handwerkerstande verbreitet worden, verstummt jene Frage über das Wesen der Mathematik. Indessen ist die andere Frage: „Wer kann Mathematik lernen?" noch nicht allgemein als gelöst beseitigt. Noch vor einigen Dezennien war wenigstens hier zu Lande die Meinung verbreitet, zu den mathematischen Studien werde ein besonderes Talent erfordert. Eine Meinung, die sattsam durch Männer vom Fache widerlegt worden, aber noch immer von solchen gehegt wird, welche das Wesen und die Methode der mathematischen Disziplinen nicht kennen. Anstatt zu erfragen, warum auch noch heutzutage manche Studirende in diesem Lehrfache wenig oder nichts vor sich bringen, während sie doch in andern Fächern das Erforderliche leisten, ist man mit dem Urtheile fertig: „Der hat kein mathematisches Talent."

Wer in der That kein mathematisches Talent besitzt, wem das Vermögen zu kombiniren, zu vergleichen und zu schließen abgeht, der eignet sich überhaupt nicht zur wissenschaftlichen Bildung. Wo sich bei einzeln Individuen die Sache anders herausstellt; wo sonst gute Schüler oder ganze Klassen in unserm Fache nicht das Erforderliche leisten, da ist die Schuld an den Lehrern oder an andern Umständen.

Die hindernden Umstände wage ich nicht zu erörtern; weil deren zu viele möglich sind. Einen aber dürfen wir nicht verschweigen, den nämlich, daß manche Schüler die Mittelklassen erreichen, sei es durch einseitigen Privatunterricht, sei es durch Nachsicht gewisser Lehrer, ohne sich um ein gründliches Eingehen auf die Objekte der Mathematik zu bemühen. Kommt noch dazu, daß solche im Alter vorgerückt sind, so ist es begreiflich, wenn sie kaum oder keineswegs in den obern Klassen das vorgestreckte Ziel erreichen.

Von Seiten der Lehrer kann vielfach der Uebelstand herrühren, daß manche sonst gute Schüler in den mathematischen Disziplinen zurückbleiben.

Erstens gibt es wie in andern Lehrfächern so auch in dem fraglichen, Lehrer, die von vielem Lehren und Expliziren kein Ende wissen, und anstatt in sokratischer Weise die Schüler zur Selbstständigkeit anzuhalten, dieselben in der Ueberschwenglichkeit ihres Vortrages ermüden. Wenn irgend in einem Unterrichte desto weniger gelernt wird, je mehr der Lehrer das Wort führt; so ist dies in der Mathematik der Fall. Leicht wird da ein Ausdruck oder nur ein Zahlzeichen überhört oder misverstanden. Leicht wird ein oder der andere Schüler einen Augenblick von dem Vortrage abgelenkt. So fällt dann ein Glied der Gedankenreihe aus und es bleibt der Verlauf der Belehrung unverständlich, dann auch häufig aus Leichtsinn unbeachtet, wenn die Schüler wissen, daß sie nur oder fast nur Zuhörer sind.

Ein anderer Fehler der Lehrmethode besteht darin, daß man den fähigen Schülern erlaubt, sich vorzudrängen und der Klasse einen Anstrich von Wissen zu geben, welches der Mehrzahl nicht eigen ist. Wo dieses in der Mathematik geschieht, da verlieren die Langsamen und die Flüchtigen Muth und Möglichkeit dem Unterrichte zu folgen. Wo aber dies und dergleichen vorkommt, da ist zuletzt für Lehrer und Schüler ein guter Trost: „Die Zurückgebliebenen sind keine mathematischen Köpfe."

Wären beide Arten der Verstöße gegen die Lehrmethode die einzigen; so würden hierdurch die Idioten noch immerhin Exempel genug aufzuweisen haben, um behaupten zu können, es seien zum Erlernen der Mathematik eigene Talente erforderlich. Nun herrscht aber beim Unterrichte in dieser Wissenschaft, so weit meine Erfahrung reicht, allgemein ein Misbrauch, der vorzüglich die Schuld trägt, wenn in einer Schule viele oder sogar die Mehrzahl nicht über die Schwellen der Wissenschaft hinauskommen, nämlich: Der Gebrauch der Schultafel.

Wenn Manche es lächerlich finden sollten, daß es jemand unternimt, in einem Schulprogramme gegen ein Hülfsmittel des Unterrichts zu schreiben, welches zu allen Zeiten für die mathematischen Disziplinen eben so unentbehrlich war wie zum Rechnen das Ein mal eins; so kann dies dennoch mich nicht abhalten, meine Erfahrung und die daraus gewonnene Ueberzeugung zu veröffentlichen und zur Nachahmung zu empfehlen.

Vor vierzehn Jahren war ich längere Zeit hindurch in die Nothwendigkeit versetzt, meinen Unterricht in einem Lokale zu geben, wo das Aufstellen der Schultafel nicht thunlich war. Ich befahl darum jedem Schüler, entweder in einem Hefte oder auf freiem Blatte alles aufzuzeichnen, was verhandelt wurde, und ich that ruhig auf meinem Stuhle sitzend oder nach Umständen eine zur Ueberschau passende Stelle einnehmend desgleichen.

Nach einiger Zeit ergab sich die Nützlichkeit dieser Vorkehrung so augenfällig, daß ich fast staunen mögte, wie sich die Schultafel mit Schwamm und Kreide Jahrhunderte hindurch durchall von der Elementarschule bis zur Universität als unentbehrliches Werkzeug behaupten konnte.

In der Voraussetzung, daß der Lehrer entweder das Zeichnen versteht, oder doch soviel davon deutlich darzulegen weiß, wie für die Behandlung der Stereometrie erforderlich ist, können alle Zweige der reinen und der angewandten Mathematik ebenso mit dem Hefte und dem Bleistifte in der Hand behandelt werden wie jedes andere Lehrfach. Dabei der große Vortheil, daß alle Schüler fortwährend beachtet, und nach Belieben zur Fortsetzung der Demonstration aufgerufen werden können, keiner sich wegen Kurzsichtigkeit und dergleichen entschuldigen kann. Werden übrigens hierbei die oben erwähnten Fehler der Methode vermieden; so stellt sich die Ueberzeugung heraus, daß in den Grenzen, welche dieser Wissenschaft durch die weisen Anordnungen der höhern und höchsten Staatsbehörden gesteckt sind, jeder Jüngling die Mathematik erfassen kann, welcher überhaupt zu einer wissenschaftlichen Bildung hinreichende Anlagen hat.

Die Unannehmlichkeiten, welche sich beim Gebrauche der Schultafel darstellen, sind so bekannt, daß hierüber keine Worte zu verlieren sind. Indessen kann ich nicht unterlassen, anstatt vieler Ein Beispiel aufzuführen, welches allein genügen sollte, von dem Gebrauche eines Werkzeugs abzustehen, dessen Entbehrlichkeit ich sattsam bewiesen habe.

Der Herr Professor D., dieser wackere für gründlichen Vortrag beseelte Mann, dessen Menschenfreundlichkeit und Rechtlichkeit unvergeßlich bleiben für jeden seiner Zuhörer, unternahm öfters die Demonstration eines Lehrsatzes oder die Lösung einer Aufgabe, wozu die Tafel bei weitem nicht ausreichte. War nun dieses fatale Brett einmal mit Zeichnungen und Gleichungen bedeckt; so erhob sich die Noth um Raum zum fernern Operiren. Es mußte mancher noch nöthige Passus gelöscht, und die Fortsetzung auf die nassen Stellen geschrieben, dann mit der feuchten Kreide laborirt werden. Dicke Schweißtropfen rannen endlich über Stirn und Wange des edeln Mannes und trotz dem Schutzärmel mußte eine Portion Kreide an Händen und Kleidern sich ansetzen, bevor es hieß: Q. e. d.

Die Studiosen hatten indessen behaglich in den Bänken sitzend zum Theil in ihr Heft mit- oder nachgeschrieben, zum Theil zugesehen oder Männchen auf Papier und Bänke gezeichnet.

Ist die Behandlung unseres Lehrsaches der Mathematik ohne Tafel, Schwamm und Kreide bisher so selten, wie ich dafür halte; so dürfte es für solche, die damit beginnen wollen, nicht ganz ohne Interesse sein, zu vernehmen, wie hier dabei verfahren wird.

Was erstens die Arithmetik betrifft, so kann selbst bei Kindern, die nur einigermaßen Ziffern und Buchstaben lesen und zeichnen können, damit begonnen werden, daß jeder Schüler sein Heft oder seine Tafel zurecht liegen hat und die Grenzen derselben durch die bekannten Ausdrücke: links, rechts, oben, unten, aufmerksam unterscheidet. Hier ist dann vor allem nicht blos das regelmäßige Aufzeichnen der Ziffern und Buchstaben links- rechts, sondern auch das pünktliche Untereinanderschreiben zu üben. Zu dem Zwecke kann die Blattseite mittels Vertikal- und Horizontal-Linien in Quadrate oder Rechtecke getheilt werden, die auch bei den Anfängen der geometrischen Anschauungslehre dienen und erst dann wegfallen, wenn die Begriffe: Vertikal, Horizontal, links-rechts Aufwärts, links-rechts Abwärts verstanden und eingeübt sind. Wer ein sicheres und freudiges Fortschreiten in der Geometrie erzielen will, der muß eher nicht an eine streng wissentschaftliche Behandlung von Lehrsätzen und Aufgaben gehen, als bis den Schülern die Begriffe der geometrischen und stereometrischen Objekte und deren leichtere Kombinationen geläufig sind. Darum müssen wir auch das jüngste Schulgesetz willkommen heißen, nach welchem die Quartaner nicht oder nur wenig über die Anschauungslehre hinausgehen sollen.

Wo diese Vorschrift beachtet, aber auch nur solchen Lehrern die Behandlung der Anschauungslehre anvertraut wird, die deren Wesen begriffen haben, und sich in die Denkweise der lieben Jugend hineinzuversetzen wissen, da bedarf es nur des Entschlusses und es gelingt das Studium der Mathematik, ja aller mathematischen Disziplinen ohne Tafel und Kreide. Denn sind einmal die Schüler von unten auf dazu angeleitet, die Zeichnungen und Bezeichnungen nach dem Wortlaute aufs Papier zu bringen und umgekehrt das vorliegende Schema wörtlich darzustellen; so gibt es in der Folge nur selten Fälle, bei welchen man mit Anwendung der Tafel rascher fertig sein könnte. Was aber ohne deren Gebrauch an Zeit verloren geht, das wird in unserer Weise bei beharrlichem Durchführen der Methode durch Tiefe der Einsicht und durch Angewöhnung einer pünktlichen Darstellung reichlich ersetzt.

Da, wo ausführliche Schulbücher beim Unterrichte in Mathematik und Physik gebraucht werden, ist die Schultafel viel leichter zu entbehren, als wo man diese Fächer nach einem Leitfaden behandelt. Aber auch im letztern Falle wird jedem der Versuch gelingen, wofern die didaktische Befähigung des Lehrers den guten Willen unterstützt.

Schließlich einige Worte über die Frage, ob und wie weit die Kegelschnitte am Gymnasium zu behandeln seien. Daß die vollständige Lehre über diese Linien der höhern Mathematik angehören, also dem akademischen Studium anheimfallen, das ist unbezweifelt: eine gänzliche Ausschließung derselben vom Gymnasium ist aber wegen der Physik, soweit diese für die Gymnasialbildung durchgeführt werden muß, unzulässig. Nun bewegt sich aber die stereometrische wie die analytische Behandlung jener Linien schon in ihren ersten Grundzügen auf einem Gebiete, welches unsere Primaner bei den in vielen andern Lehrfächern aufgegebenen Leistungen keineswegs betreten dürfen.

Darum halte ich es nicht für überflüssig, auf die planimetrische Behandlung der Kurven zweiter Ordnung hinzuweisen, die ich zuerst in unserm Herbstprogramme 1826, dann erweitert in dem Programme von 1833 und in dem von 1840 veröffentlicht habe. Die Fassung in welcher diese Linien endlich in unserm Schulbuche den Büchern des Euklid angereihet sind, bietet keinerlei Schwierigkeit dar; hat noch den Vortheil, daß sie zu planimetrischen und zu trigometrischen Aufgaben vielfach benutzt werden kann.

Folgen einige Aufgaben mit den Grundzügen unserer Lehrmethode, also absichtlich ohne Beifügung der Figuren.

§. 1. Aufgabe. In einen Quadranten zwei einander änliche gleichschenkelige Dreiecke zu beschreiben, so, daß deren Grundlinie den Hauptradius einnehmen, die Gipfelpunkte in der Peripherie liegen.

Expos. Sei die Horizontale ab der Hauptradius, bc der Nebenradius; so sollen über der ab 2c.

Anal. Seien avx, vbz die verlangten Dreiecke; so ziehe man noch bx.

Nun ist $ab = bx$, als Radien,

$\angle a = zvb$, weil $\triangle avx \sim vbz$ ist.

Demnach ist $\triangle abx \cong vbz$

und $ax = vb$

Es ist aber $av : ax = vb : vz$, (Elem. VI. 4).

Also auch $av : vb = vb : ab$.

Somit die Aufgabe auf Elem. II. 11. zurückgeführt.

Zusatz 1. Anstatt der Schlußproportion setze man $av : vb = ax : bx$; so erkennt man, daß $\angle axv = vxb$ ist, (Elem. VI. 3).

Hiermit ist also auch die Aufgabe Elem. IV. 10. gelöst; somit die Grundlage für Darstellung und Berechnung des regulären Fünfecks, Zehnecks, Fünfzehnecks gegeben.

Zusatz 2. Verwandt mit dieser Aufgabe und auf den ersten Anblick scheinbar leicht zu lösen stellt sich die folgende dar:

„In einen Quadranten zwei einander ähnliche rechtwinkelige Dreiecke zu beschreiben so, daß deren kleinere Katheten den Hauptradius einnehmen, die Gipfelpunkte in der Peripherie liegen."

Weil die kleinern Katheten den Hauptradius decken, die andere Kathete des größern Dreiecks den Nebenradius einnimt; so ergeben sich leicht solche Verhältnisse zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken, daß man an eine einfache Analysis zu denken verleitet wird. Die Berechnung aber führt auf eine gemischte kubische oder biquadratische Gleichung. Verbindet man den Gipfelpunkt des kleinern Dreiecks mit dem Endpunkte des zweiten Quadranten; so ergibt sich durch Winkelvergleichung, daß die Lösung unmöglich ist.

§. 2. Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ein Dreieck zu beschreiben, änlich einem der Art nach gegebenen so, daß des einzutragenden Grundlinie mit jener des gegebenen einen bestimmten Winkel einschließe.

Exposition. Sei das gegebene $\triangle$ abc, das der Art nach gegebene pqr, der gegebene Winkel w; man soll 2c.

Anal. Sei xvz $\sim$ pqr also xvz das verlangte $\triangle$ und zwar x auf ab, v auf bc, z auf ac und $\angle$axz = w; so ziehe av und es ist diese der Lage nach bekannt. Nimt man nun auf av einen beliebigen Punkt i an und zieht zur Grundlinie die id =|= xv, zur ac die ie =|= zv, dann ed; so ist $\triangle$ die $\sim$ xvz (Elem. VI. 4.). Aber auch ist $\angle$ade = w, somit das Hülfsdreieck konstruirbar und hierdurch die Lage der av bekannt.

Zus. In ähnlicher Weise können auch andere Figuren in einander eingetragen werden.

§. 3. Lehrsatz. Alle Kreise, die durch Einen Punkt gehen, während sie eine in derselben Ebene nebenhin gezogene Gerade berühren, haben ihren Mittelpunkt auf der Parabel, wovon jener Punkt der Brennpunkt, die Gerade die Direktrix ist.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der gewöhnlichen Erklärung der Parabel.

§. 4. Lehrsatz. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis und dessen Tangente in derselben Ebene berühren, liegen auf der Parabel, die von dem gegebenen Kreise und seiner Tangente gleiche Abstände hat.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Erklärung der Parabel nach unserm Lehrbuche.

§. 5. Lehrsatz. Wenn zwei beliebige Punkte einer Kreistangente mit dem Endpunkte des Berührungsdurchmessers verbunden sind und man verbindet die Schneidepunkte miteinander; so ist das Sekantendreieck ähnlich dem bezüglichen Sehnendreiecke.

Expos. Sei über der Horizontalen ab ein Halbkreis beschrieben, dessen Mittelpunkt c, Tangente af heiße. Nehme auch af näher bei a einen Punkt d, höher einen Punkt o an und ziehe db, ob, welche den Halbkreis in e, r schneiden. Zieht man noch er, so ist $\triangle$ dbo $\sim$ rbe.

Beweis. Zieht man noch ar, so ist $\triangle$arb $\sim$ oab; also $\angle$rab = aob. Es ist aber $\angle$rab = reb (Elem. III. 21.). 2c.

Zus. Wenn zwischen einem gegebenen Kreis, dessen Durchmesser ab ist, und dessen Tangente af Berührungskreise beschrieben sind, und von b aus an diese Kreise Tangenten gezogen werden; so sind diese einander gleich. Es liegen also die Berührungspunkte dieser Tangenten auf der Peripherie des Kreises, der mit ab um b beschrieben wird.

§. 6. Aufgabe. Zwischen einen gegebenen Kreis und dessen Tangente zwei Berührungskreise zu beschreiben, die sich einander berühren.

Exposition. Gegeben sei der Durchmesser ab des Kreises, dessen Mittelpunkt c, Tangente af sei. Man soll 2c.

Anal. Sei näher bei a auf der af, der Berührungspunkt des einen Zwischenkreises, dessen Mittelpunkt i; so ziehe ic, welche den c Kreis in e schneide. Dann ist ie = id (Elem. III. 12.). Zieht man nun eb; so ist $\triangle$ dei $\sim$ cbe (Elem. VI. 7.); demnach de, eb in Einer Richtung.

Zieht man ferner die Tangente bs, deren Verlängerung auf af in n ankomme; so ist bs ebenfalls Tangente des zweiten Zwischenkreises (§. 5. Zus.) Dieser berühre die af in o, den c Kreis in r; dann ist nd = ns = no (Aus Elem. III. 17.). Also mittels ou $\perp$ af und is bis zum Treffen verlängert der Mittelpunkt u bekannt. 2c.

§. 7. Lehrsatz. Wenn ein gegebener Kreis und eine außerhalb gehende Gerade von einem Kreise berührt werden; so liegt dessen Mittelpunkt auf jener Parabel, deren Punkte einzel von jenem Kreise und der Geraden gleiche Abstände haben.

Expos. Sei der Kreis um c, dessen Durchmesser ab, die Gerade pf, und werde diese in d, jener in e von dem Kreise, dessen Mittelpunkt i sei berührt, so liegt i auf der Parabel ꝛc.

Der Beweis ergibt sich aus der Erklärung der Parabel: Die Linie, deren Punkte einzel von einem Kreise und von einer Außenlinie in derselben Ebene gleiche Abstände haben. Hierüber haben sich die Abhandlungen zu unsern Programmen von 1826, 33, 40 vollständig verbreitet.

§. 8. Lehrsatz. Wenn auf der Verlängerung eines Kreisdurchmessers ein Loth errichtet ist und vom entlegenen Endpunkte des Durchmessers zwei Sekanten an das Loth gehen, deren Schneidepunkte im Kreise mit einander verbunden werden; so schließen die Sekanten mit dem Lothabschnitte ein Dreieck ein, änlich dem zwischen den Sekantentheilen und deren Verbindungssehne im Kreise.

Expos. Gegeben sei der Durchmesser ab des Kreises um c und auf der Verlängerung von ab über a hinaus das Loth pf, auf diesem näher bei p der Punkt d, dessen Verbindung mit b den Kreis in e schneide, ferner auf pf näher bei f der Punkt o, dessen Verbindung mit b den Kreis in r schneide. Zieht man nun er; so ist Δ dbo $\sim$ rbe.

Bew. wie bei §. 5.

Zus. 1. Analog dem Zus. des § 5.

Zus. 2. Analog wie §. 6 erhält man einen zweiten Berührungskreis der den erstern ebenfalls berührt.

Zus. 3. Auf änliche Weise ist zu verfahren, wenn ein Kreis und eine Sekante gegeben sind. Gleichwie es in diesem Fall zwei Parabeln gibt, die einander gleich oder verschieden sind, je nachdem die Sekante durch den Kreismittelpunkt geht oder nicht; so stellt sich auch die Behandlung dieses Falles einfach oder zweifach dar.

§. 9. Lehrsatz. Alle Kreise, welche durch Einen Punkt (nicht Mittelpunkt) innerhalb eines Kreises gehen, während sie diesen Kreis berühren, haben ihren Mittelpunkt auf einer Ellipse.

Exposition. Gegeben sei der Kreis um c, dessen Durchmesser ab und auf ac der Punkt d. Jeder Kreis nun, der den gegebenen berührt und durch d geht, hat seinen Mittelpunkt auf der Ellipse, deren Brennpunkte d, c sind.

Bew. Sei n der Mittelpunkt eines Kreises, der durch d gehe und den c Kreis in k berühre; so ziehe kn, die verlängert durch c geht, dann nd; so ist gemäß der Annahme kn = nd; also n der Ellipsenpunkt. Denn allemal ist dn + nc = kc, d. i. die Summe der Zuglinien beständig.

§. 10. Lehrsatz. Wenn ein Kreis von einem zweiten innerhalb berührt wird; so liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche berührend zwischen die beiden beschrieben werden, auf einer Ellipse.

Expos. Wenn der Kreis um c, dessen Durchmesser ab ist, in a von einem Kreise, dessen Radius ad. (für jetzt) $< \frac{1}{2}$ ac sei, berührt wird, und ein dritter, dessen Mittelpunkt n sei (liege über dem d Kreise), berührt den c Kreis in k, den d Kreis in w; so liegt n auf der Ellipse, deren Brennpunkte d, c sind.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Erklärung der Ellipse nach unserm Lehrbuche.

§. 11. Lehrsatz. Wenn ein Kreis von einem zweiten innerhalb berührt wird und es werden zwei Berührungskreise zwischen beide beschrieben; ferner im dritten Kreise die Berührungssehne vom ersten zum zweiten, ebenso im vierten Kreise die Berührungssehne vom ersten zum zweiten Kreise gezogen wird; so begegnen sich die beiden Sehnen oder deren Verlängerungen auf der Zentrallinie des ersten und zweiten Kreises.

Expos. Seien wie im vorigen §. die drei Berührungskreise und ein vierter, dessen Mittelpunkt p heiße, berühre den c Kreis in l, den d Kreis in x, den n Kreis in v; so ziehe kw, lx; dann begegnen diese oder deren Verlängerungen sich in dc.

Bew. Gehe kw verlängert durch den d Kreis bei g zum c Kreise in q; ziehe noch kl, wx. Schneidet nun kq die ab in i; so ist △ dig ∾ kic; weil △ knw ∾ wdg, also kc =|= dg ist.

Demnach ist di : ic = dg : kc; also der Durchgangspunkt der kq unveränderlich; somit auch für die lx oder deren Verlängerung.

Zus. 1. Wird lx bis zum ersten Kreise in u verlängert und uc gezogen, welche der dg oder deren Verlängerung in z begegne; so ist dp =|= uc gleichwie dg =|= kc.

Demnach hat man < klu = ½ kcu
= ½ xdg
= xwg;

somit ist kli ∾ xwi und il : ik = iw : ix, oder il . ix = ik . iw.

Zus. 2. Aus der letzten Gleichung ersieht man, daß Tangenten von i an beide Kreise einander gleich sind, also iv gemeinschaftliche Berührungstangente ist, angenommen, daß die Zentrallinie np die Kreise in v schneide.

Zus. 3. Rückt Punkt k in a; so fällt w mit v auch in a; also ist iv = ia. d. h. Alle Berührungspunkte der innern Berührungskreise unter sich liegen auf einem Kreise, dessen Radius gleich ai ist.

Zus. 4. Von zwei exzentrisch ineinander beschriebenen Kreisen läßt sich das in §§. 10. und 11. aufgestellte beinahe wörtlich wiedergeben.

§. 12. Lehrsatz. Alle Kreise, welche durch Einen Außenpunkt gehen, während sie einen Kreis in derselben Ebene berühren, haben ihren Mittelpunkt auf einer Hyperbel.

Expos. Wenn der Kreis um c, dessen Durchmesser ab über a hinaus bis zu einem beliebigen Punkte d verlängert ist, von einem Kreise berührt wird, der durch den Punkt d geht; so kann der Berührungskreis den c Kreis entweder ausschließen oder einschließen.

Erster Fall. Der Berührungskreis, dessen Mittelpunkt n sei, berühre den c Kreis von außen, unweit a in k. Zieht man nun ck, so geht diese verlängert nach n, und wenn man nd zieht, so ist nd = nk und n ein Hyperbelpunkt.

Bew. Wo auch der Punkt k auf dem Bogen von a aus genommen wird, wofern auf der Verlängerung von ck ein Punkt n anzugeben ist, so, daß nk = nd wird; ist allemal

nc — nd = kc, oder die Differenz der Zuglinien beständig, also n auf einem Hyperbelzweige, dessen Brennpunkte d, c sind.

Determination. Zieht man dk, so ergibt sich, daß die Möglichkeit des Berührungskreises sowol über als unter db da aufhört, wo dk Tangente am c Kreise wird; weil alsdann < dkn = r, also kein gleichschenkliges △ dkn mehr möglich ist.

Zweiter Fall. Der Berührungskreis, dessen Mittelpunkt n sei, schließe den c Kreis ein.

Es sei der Berührungspunkt k unten im c Kreise.

Ziehe von k durch c eine unbegränzte Gerade, und setze an dk in d einen Winkel = dkc. Vollende hiernach über dk das gleichschenkelige △ dkn; so ist n der Mittelpunkt des Berührungskreises und liegt n auf dem zweiten Zweige der vorher bestimmten Hyperbel.

Beweis und Determination wie vorher.

§. 13. Lehrsatz. Wenn ein Kreis von einem ungleichen Kreise von außen berührt wird; so liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche berührend an oder um die beiden beschrieben werden, auf den Zweigen einer Hyperbel.

Exposition. Der Kreis um c, dessen Durchmesser ab sei, werde von einem kleinern, dessen Mittelpunkt d sei, in a berührt und zwar von außen; so kann der dritte Kreis beide entweder anstoßend oder umfassend berühren. Im ersten Falle liegt des dritten Kreises Mittelpunkt, der n heiße, auf dem einen Zweige einer Hyperbel, im zweiten auf dem andern;

Beweis des ersten Falles. Werde der d Kreis in w, der c Kreis in k berührt; so ziehe wk, welche beiderseits verlängert dem c Kreise in q, dem d Kreise in g, der verlängerten db in i begegne. Ziehe ferner dw, ck, welche verlängert nach n gehen. Nun ist $cn - dn = ck - dw$ beständig. D. h.: Die Differenz der Zuglinien für alle so beschriebene Berührungskreise dieselbe. Also liegen deren Mittelpunkte auf dem Hyperbelzweige, dessen Brennpunkte d, c sind.

Für den zweiten Fall verlängere qc über c, gd über d hin bis zum Treffen in n 2c.

Dann sind g, q die Berührungspunkte für den Kreis, dessen Mittelpunkt n auf dem andern Hyperbelzweige liegt.

Determination. In beiden Fällen wird der Berührungskreis desto größer, je mehr die Sekante iq sich von d, c entfernt. Geht die Sekante in eine Tangente über; so hat die Berührung ihr Ende erreicht.

§. 14. Lehrsatz. Wenn zwei ungleiche Kreise sich außerhalb berühren und es werden an oder um dieselben zwei Berührungskreise beschrieben, ferner in diesen Kreisen bezüglich die Berührungssehnen zu den beiden ersten Kreisen gezogen; so begegnen sich die Verlängerungen dieser Sehnen auf der Verlängerung der Zentrallinie des ersten und zweiten Kreises.

Expos. Seien 2c. wie §. 11, bezüglich auf §. 13. ersten Fall. Für den zweiten Fall seien g, q die Berührungspunkte des einen umfassenden Kreises. Ferner schneide ix den d Kreis noch in h, endige durch den c Kreis hin verlängert in u.

Begegnen sich nun die gd, qc verlängert in o, die hq, uc verlängert in s; so sind h, s die Mittelpunkte der Berührungskreise 2c.

Zusatz. 1. Zieht man xw, kl; so ist $dp \mathrel{=\!\!|\!\!=} uc$, gleichwie $dg \mathrel{=\!\!|\!\!=} kc$.

Demnach hat man $\angle klu + \frac{1}{2} kcu = 2r$,

auch $\angle klu + ilk = 2r$.

Folglich $ilk = \frac{1}{2} kcu$,

$= \frac{1}{2} kcq - \frac{1}{2} ucq$,

$= \frac{1}{2} gdw - \frac{1}{2} xdw$,

$= \frac{1}{2} gdx$

$= gwx$ (Elem. III. 20.).

Hiernach ist $\triangle kli \sim xwi$ und $il : ik = iw . ix$, oder $il . ix = ik . iw$.

Zusatz 2. wie Zus. 2. von §. 11.

Zus. 3. wie Zus. 3. von §. 11.

Zus. 4. Wenn d Kreis und c Kreis sich nicht berühren; so läßt sich alles in §§. 13 und 14 Gesagte analog darstellen.

§. 15. Wenn zwei gleiche Kreise einander schneiden; so liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche deren Außen- oder Innenseite berühren, in der gemeinschaftlichen Sekante; Kreise aber, welche des einen Außen-, des andern Innenseite berühren, haben ihren Mittelpunkt auf der Ellipse, deren Brennpunkte die Mittelpunkte jener Schneidekreise sind.

Satz und Zusätze ergeben sich durch Analogie aus den vorhergehenden §§.

§. 16. Lehrsatz. Wenn zwei ungleiche Kreise einander schneiden; so liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche deren Außen- oder Innenseiten berühren, auf den Zweigen einer Hyperbel; Kreise aber, welche des einen Außen-, des andern Innenseite berühren, haben ihren Mittelpunkt auf einer Ellipse.

In beiden Fällen sind die Mittelpunkte jener Kreise die Brennpunkte.

Exposition des ersten Theils. Kreis um c dessen Durchmesser links-rechts a b sei, schneide einen kleinern Kreis, dessen Mittelpunkt d (für jetzt) unweit a auf der Verlängerung von a c liege, in e, und es schneide der d Kreis die a c in g. Beschreibt man nun mit einem Radius, der um ein Gewisses größer ist als d g um d einen Kreis und mit einem Radius der um eben soviel die a c übertrifft um c einen Kreis; so geben die Schneidepunkte beider zuletzt beschriebenen Kreise oberhalb und unterhalb den Mittelpunkt eines die Außenseiten berührenden Kreises an. Dieser Punkt sei oben n; so ziehe n d, n c, welche in w, k durch die Berührungspunkte gehen. Ferner beschreibe man mit einem Radius der etwas kleiner ist als d g um d, und mit dem um eben soviel verkleinerten Radius a c um c einen Kreis. Beide Kreise mögen sich zwischen den Bogen a e, g e in p schneiden; so ziehe d p, die verlängert im Berührungspunkte auf e g in x ankomme, ebenso c p, die verlängert auf a e den Berührungspunkt l erreiche.

Nun ist zu beweisen, daß n, p Punkte des linken Hyperbelzweiges für die Brennpunkte d, c sind.

Auf dem rechten Zweige derselben Hyperbel liegen die Mittelpunkte der umfassenden Berührungskreise. Einen solchen erhält man an der vorigen Zeichnung mittels Verlängerung der Berührungssehne w k bis zum d Kreise in o, zum c Kreise in q. Zieht man von o durch d, von q durch c die Geraden, welche sich in s begegnen; so ist dieser der Mittelpunkt des in o, q berührenden Umschließungskreises und s ein Punkt des rechten Hyperbelzweiges.

Beweis, Determination, Zusätze und Folgesätze ergeben sich nach Analogie der vorhergehenden §§. Ebenso für die andere Art der Berührungen.

Schlußbemerkung. Die hier aufgestellten Sätze von §. 3. an bilden für sich ein Ganzes hervorgegangen aus den erwähnten Abhandlungen über die Kurven zweiter Ordnung. Dieses Ganze umfaßt aber nur einen Theil jener Sätze, welche über die Verbindung des Kreises mit Kreisen und andern Figuren aufgestellt werden können.

Münstereifel im Juli 1857.

Katzfey.

Exposition des er[illegible] messer links-rechts a b sei, schneide einen
kleinern Kreis, dessen Mitte[illegible] längerung von a c liege, in e, und es
schneide der d Kreis die a c [illegible] adius, der um ein Gewisses größer ist
als d g um d einen Kreis [illegible] el die a c übertrifft um c einen Kreis;
so geben die Schneidepunkte [illegible] b und unterhalb den Mittelpunkt eines
die Außenseiten berührenden [illegible] ziehe n d, n c, welche in w, k durch
die Berührungspunkte gehen [illegible] s der etwas kleiner ist als d g um d,
und mit dem um eben sovie[illegible] reis. Beide Kreise mögen sich zwischen
den Bogen a e, g e in p sch[illegible] rührungspunkte auf e g in x ankomme,
ebenso c p, die verlängert au[illegible]

Nun ist zu beweisen, d[illegible] es für die Brennpunkte d, c sind.

Auf dem rechten Zweig[illegible] nkte der umfassenden Berührungskreise.
Einen solchen erhält man an[illegible] ung der Berührungssehne w k bis zum
d Kreise in o, zum c Kreise [illegible] durch c die Geraden, welche sich in s
begegnen; so ist dieser der [illegible] schließungskreises und s ein Punkt des
rechten Hyperbelzweiges.

Beweis, Determin[illegible] en sich nach Analogie der vorhergehen-
den §§. Ebenso für die an[illegible]

Schlußbemerkung. Die[illegible] en für sich ein Ganzes hervorgegangen
aus den erwähnten Abhandl[illegible] Dieses Ganze umfaßt aber nur einen
Theil jener Sätze, welche i[illegible] reisen und andern Figuren aufgestellt
werden können.

Münstereifel im Jul[illegible]

Katzfey.