Ueber

den ersten Unterricht in der Algebra.

Es ist eine alte Erfahrung, doch bleibt sie immer neu, dass es in den oberen Classen der Gymnasien viele Schüler gibt, die Mühe und Noth haben, den Anforderungen der Schule in der Mathematik zu entsprechen. Findet man nun unter diesen Schülern manche, die in den andern Disciplinen, in den Sprachen und in der Geschichte, mit Leichtigkeit das Erforderliche leisten, ja sogar sich darin auszeichnen, so liegt die Veranlassung zu der Annahme sehr nahe, es bedürfe derjenige einer ganz besonderen geistigen Begabung, welcher in der Mathematik über das Stümperhafte hinauskommen will.

Schon eine Reihe von Jahren Lehrer der Mathematik an verschiedenen Gymnasien sowohl in den untern und mittleren, als auch in den obern Classen, hat Schreiber dieses stets sein Augenmerk auf die Ungleichheit der Leistungen der Schüler der oberen Classen in den einzelnen Lehrfächern gerichtet und den Ursachen dieser scheinbar ungereimten Erscheinung nachgespürt. Vor Allem ist es eine irrige Meinung, dass der Schüler einer ganz besonderen geistigen Begabung bedarf, um den von der Schule gestellten Anforderungen in der Mathematik zu genügen. Wer das Gymnasium mit Erfolg absolviren will, bedarf einer gewissen geistigen Anlage; reicht dieselbe für die andern Lehrfächer aus, so genügt sie auch für den mathematischen Unterricht. Wer diese geistige Begabung nicht mitbringt, kann es zwar in den andern Fächern durch eisernen Fleiss dahin bringen, dass er sich mühsam von einer Classe zur andern schleppt, in der Mathematik jedoch wird er stets ein Stümper bleiben. Von solchen Schülern soll hier nicht die Rede sein. Wer aber die erforderliche geistige Anlage besitzt, der wird sowohl in den Sprachen, wie auch in der Mathematik bei gleichem Fleisse und gleicher Aufmerksamkeit auch gleiche Fortschritte machen. Wenn dieser Erfolg nun erfahrungsgemäss nicht erzielt wird, sondern die Leistungen in der Mathematik hinter denen in den andern Fächern bedeutend zurückbleiben, so ist der Grund hiervon weniger in der geistigen Anlage des Schülers, als vielmehr in der mangelhaften Art und Weise zu suchen, wie der mathematische Unterricht ertheilt worden ist. Dass der Schüler mit ausgezeichneten geistigen Anlagen auch bei mangelhaftem Unterrichte in der Mathematik durch angestrengte eigene Thätigkeit doch Vorzügliches zu leisten vermag, so wie dass der faule und unaufmerksame Schüler auch beim besten Unterrichte hinter den Anforderungen der Schule zurückbleibt, versteht sich von selbst; hier wird nur behauptet, dass auch der mässig begabte Schüler bei Fleiss und Aufmerksamkeit den Anforderungen in der Mathematik zu entsprechen im Stande ist, und dass, wenn dies nicht der Fall ist, die Schuld am Lehrer selbst liegt.

Da der mathematische Lehrstoff sich wie ein Gebäude aufführen lässt, das in seinem Fundamente seinen Stützpunkt hat, und an welchem jeder folgende Theil von dem vorangegangenen getragen wird, so ist es auch vor Allem nothwendig, dass der erste Unterricht in der Mathematik ein guter sei, damit das Fundament des aufzuführenden Gebäudes ein solides sei. Ist dieses von vornherein ein verfehltes, so hat man auf Sand gebaut, alle späteren Bemühungen sind vergebens, und das Gebäude kommt nicht zu Stande. Bei Aufführung des mathematischen Gebäudes sei der Lehrer der Baumeister, die Schüler seien die Bauleute; der Baumeister gibt die Anleitung, die Bauleute fügen dieser entsprechend Stein an Stein, Stockwerk an Stockwerk. So gebe auch der Lehrer nur die Anleitung und lasse die Schüler selbstständig arbeiten. Fange der Lehrer von vornherein an, seine Schüler an selbstständiges Arbeiten zu gewöhnen. Der Schüler muss sich zwar mehr anstrengen, jedoch nehmen seine geistigen Kräfte mit dem Fortgang der Arbeit zu, das Selbstvertrauen wächst, und gelingt es ihm, durch eigene Mühe auf dem Gebiete seiner geistigen Thätigkeit selbstständig weiter zu kommen und zu neuen Resultaten zu gelangen, so verbindet sich mit jedem Erfolge eine geistige Freude, die über jede andere Freude erhaben ist. Lust und Liebe zur Sache ergreift den Schüler und treibt ihn zu neuer Thätigkeit an. Wenn aber der Schüler zu dieser selbstständigen geistigen Thätigkeit nicht angehalten wird, wenn dem Schüler die mathematischen Lehrsätze und ihre Beweise fix und fertig gegeben werden, und seine ganze Thätigkeit nur darin besteht, sie seinem Gedächtnisse einzuprägen, um sie wiederholen zu können, da kann von einer Selbstständigkeit auf dem Gebiete der geistigen Thätigkeit so bald nicht die Rede sein, da bleiben die geistigen Freuden aus. Weiss aber der Lehrer den ersten mathematischen Unterricht nicht so einzurichten, dass der Schüler Lust und Liebe zur Sache gewinnt, so wird ihm die Mathematik nur Gedächtnisssache bleiben und stets zur geistigen Qual werden, und leicht erklärlich muss man dann das Urtheil finden, dass die Mathematik etwas sehr Trockenes sei. Die Hauptthätigkeiten des Geistes beim mathematischen Unterrichte sind Begreifen und Folgern. Man beginnt mit Definitionen, welche in Verbindung mit den im Menschen fertig liegenden Grundsätzen die Basis der sich anschliessenden Folgerungen bilden. Daher mache der Lehrer dem Schüler das Begreifen so leicht wie möglich, indem er die Definitionen recht verständlich und deutlich mache und gehe er vor Allem nicht eher zu neuem Stoff über, bis er die Ueberzeugung gewonnen hat, dass der Schüler das Vorgetragene begriffen hat, denn nur an richtiges Begreifen kann sich ein richtiges Folgern anschliessen.

Beim ersten Unterrichte in der Mathematik ist es nun aber hauptsächlich der algebraische Lehrstoff, welcher bei reiner Abstraktion dem Schüler grosse Schwierigkeit bietet, während demselben beim geometrischen Unterrichte das Verständniss durch bildliche Darstellung erleichtert wird. Wenn nun der erste Unterricht in der Algebra zum Gegenstand vorliegender Abhandlung gemacht worden ist, so ist es geschehen nicht aus dem Grunde, weil es in dieser Richtung an guten Lehrbüchern fehlte, sondern hauptsächlich, um diejenigen Theile des genannten Gebietes, welche für den folgenden Unterricht von der grössten Wichtigkeit sind und denselben wesentlich zu erleichtern vermögen, besonders hervorzuheben und etwas ausführlicher zu besprechen, als dies in dem engen Rahmen eines Lehrbuches geschehen kann. Das Folgende behandelt somit

1) Beurtheilung einer zusammengesetzten Zahl. Bedeutung und Gebrauch einer Klammer (Parenthese).

2) Systematische Anordnung der algebraischen Lehrsätze.

3) Methodisches Verfahren beim Beweisen und Uebersetzen einer algebraischen Formel im Allgemeinen und im Besondern.

1) Beurtheilung einer zusammengesetzten Zahl. Bedeutung und Gebrauch einer Klammer (Parenthese).

Das Zeichen für die Einheit ist 1. Eine Menge von Einheiten wird durch 2, 3, 4 . . . u. s. w. oder durch a, b, c . . . u. s. w. ausgedrückt und wird Zahl genannt. Während erstere Zeichen eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken und daher bestimmte Zahlen heissen, geben die Buchstaben eine unbestimmte Menge von Einheiten an. Jeder Buchstabe ist der Vertreter, Repräsentant, das Symbol einer jeden beliebigen Zahl. Solche Zahlen nennt man Buchstabenzahlen, unbestimmte oder symbolische Zahlen. Während aber die Anfangsbuchstaben des Alphabets jede beliebige Zahl in unabhängiger Weise bezeichnen, thun dies die Endbuchstaben x, y, z . . u. s. w. nur in abhängiger Weise. Hat man z. B. die Gleichung $a + b = c$, so kann man für a sowohl wie für b jede beliebige Zahl einsetzen, dagegen ist c von den eingesetzten Werthen abhängig, oder man kann für a und c beliebige Werthe einsetzen, so ist b davon abhängig, oder b und c nehmen beliebige Werthe an und es ist a die abhängige Zahl. Um nun anzudeuten, dass entweder a, b oder c die abhängige Zahl sein soll, schreibt man also $a + b = x$ oder $x + b = c$ oder $a + x = c$. Weil man aber nun für diese abhängigen Zahlen nicht sofort einen beliebigen Werth einsetzen darf, sondern derselbe sich aus der Abhängigkeit von den andern Zahlen erst ergeben muss, so nennt man diese Zahlen, x, y, z . . ., auch die Unbekannten, während a, b, c . . . die Bekannten heissen. Je zwei dieser Zahlen können nun mit einander zu einer neuen Zahl verbunden werden, welche im Gegensatze zu den einfachen Zahlen zusammengesetzte Zahl genannt wird. Dieses Verbinden zweier Zahlen zu einer neuen Zahl heisst r e c h n e n.

Wie zwei einfache Zahlen, so können nun auch wieder eine einfache und eine zusammengesetzte Zahl oder zwei zusammengesetzte Zahlen mit einander zu einer neuen Zahl verbunden werden. Die Verbindungsart ist eine siebenfache. Die vier ersten Rechenoperationen, die sogenannten vier Species, bilden den Hauptheil des ersten algebraischen Unterrichtes und sollen somit zunächst besprochen werden; sie heissen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Wie bereits gesagt, entsteht durch Anhäufung von Einheiten eine Menge derselben oder eine Zahl; geschieht dieses Anhäufen jedesmal durch Hinzufügen nur einer Einheit, so entstehen aus der Einheit 1 nach einander die Zahlen 2, 3, 4 . . . u. s. w. Diese

Operation nennt man Zählen oder Numeriren. Will man nun eine Zahl haben, welche so viele Einheiten ausdrückt, als zwei gegebene Zahlen a und b zusammen haben, so findet man diese Zahl, indem man zu der Menge von Einheiten, welche a ausdrückt, die Einheiten, welche b bezeichnet, hinzuzählt. Diese Operation, eine Zahl suchen, welche so viele Einheiten hat, als zwei Zahlen zusammen haben, heisst Addition. Aus dem Numeriren geht also das Addiren hervor. Die zu addirenden Zahlen werden Summanden, die neue Zahl wird Summe genannt; sie wird dargestellt, indem man die gegebenen Zahlen durch das Additionszeichen verbindet. Dasselbe ist ein stehendes Kreuz und heisst plus. Es entsteht somit aus a und b die neue Zahl $a + b$, Summe genannt.

Von diesen drei zusammengehörigen Zahlen können aber auch die Summe und einer der Summanden gegeben sein, dann findet man durch eine neue Rechenoperation, Subtraktion genannt, den andern Summand. Das Rechenzeichen ist hier ein horizontaler Strich und heisst minus. Ist a eine Summe und b ein Summand derselben, dann ist $a - b$ der andere Summand, die gegebene Summe a wird Minuend, der gegebene Summand b Subtrahend und der gesuchte Summand $a - b$ Differenz genannt.

Aus der Addition geht aber wieder eine neue Rechenoperation hervor, wenn ein und derselbe Summand sich wiederholt. Eine Zahl mit einer andern multipliciren heisst die eine Zahl so oft als Summand setzen, als die andere Einheiten hat. Das Rechenzeichen ist hier ein liegendes Kreuz oder ein Punkt, oder man setzt die beiden gegebenen Zahlen in gleicher Höhe nebeneinander ohne sonstiges Verbindungszeichen. Soll b amal als Summand gesetzt werden, so sagt man b wird mit a multiplicirt, und man erhält die neue Zahl $a \times b$ oder $a.b$ oder ab, Produkt genannt, während b Multiplikand und a Multiplikator genannt werden. Es wird hier auf eine fehlerhafte Definition der Multiplikation aufmerksam gemacht, weil man sie sehr häufig zu hören bekommt, und sie sich auch in manchem sonst guten Lehrbuche findet. Sie lautet: eine Zahl mit einer andern multipliciren heisst die eine Zahl zu sich selbst so oft addiren, als die andere Einheiten hat. Es finden sich in dieser Definition zwei Fehler. Wird b mit a multiplicirt, so wird b nicht immer zu sich selbst addirt, sondern es geschieht dieses nur einmal, alsdann aber wird b immer zu der neu entstandenen Summe addirt; auch wird nicht a mal, sondern $a - 1$ mal addirt. Z. B. 3×4 heisst $4 + 4 + 4$, hier wird offenbar nicht 3 mal, sondern nur 2 mal addirt. Da, wie später gezeigt wird, Multiplikand und Multiplikator sich mit einander vertauschen lassen, so bekommen beide denselben Namen Faktor.

Von den drei Zahlen, den beiden Faktoren und dem Produkte, können aber auch zwei andere gegeben sein, z. B. das Produkt und ein Faktor desselben, alsdann findet man durch eine neue Operation, Division genannt, den andern Faktor. Das Rechenzeichen ist hier ein Doppelpunkt oder ein horizontaler Strich und heisst dividirt durch. Ist a ein Produkt und b ein Faktor desselben, so ist $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ der andere Faktor. Das gegebene Produkt a wird Dividend, der gegebene Faktor b Divisor und der gesuchte Faktor $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ Quotient genannt.

Wir haben es also zunächst mit vier neuen Zahlen, Summe, Differenz, Produkt und Quotient zu thun, welche nun wieder mit einer einfachen oder zusammengesetzten Zahl eine Verbindung eingehen können. Die neu entstandene Verbindung kann nun aber wieder mit einer einfachen oder auch zusammengesetzten Zahl verbunden werden und so weiter fort. Auf diese Weise kann ein Ausdruck für eine Zahl entstehen, in welchem mehrere einfache und zusammengesetzte Zahlen durch Rechenzeichen mit einander verbunden sind. Es fragt sich, welchen Charakter hat diese Zahl: ist es eine Summe, Differenz, ein Produkt oder Quotient? Es muss diese Frage richtig gelöst werden, weil davon beim Rechnen die Operation abhängt, die mit einem solchen grösseren Zahlenausdrucke vorzunehmen ist. Hat man z. B. einen grösseren Ausdruck mit einer Zahl zu multipliciren, so muss man wissen, ob der Ausdruck eine Summe, Differenz, ein Produkt oder Quotient ist, um darnach weiter operiren zu können. Da sich aber hier beim Schüler die erste Schwierigkeit einstellt, so unterlasse es der Lehrer nicht, seine Schüler recht fleissig in der Beurtheilung von zusammengesetzten Zahlen zu üben und ihnen darin volle Sicherheit beizubringen. Zu diesem Behufe belehre er sie recht gründlich über die Bedeutung und Anwendung der Parenthesen oder Klammern, welche in einer zusammengesetzten Zahl vorkommen können.

Eine allgemeine Regel ist es, dass man beim Lesen eines algebraischen Ausdruckes die einzelnen Zeichen, sowohl Zahl- als Rechenzeichen, wie in den meisten Sprachen die Buchstaben, von der Linken zur Rechten an einanderreiht. Während man nun in der Sprache die Zeichen, welche ein Wort bilden, durch einen Zwischenraum von den Zeichen trennt, welche das folgende Wort bilden, geschieht die Absonderung der zusammengesetzten Zahlen nicht durch Zwischenräume, sondern durch Umklammerung. Als allgemeine Regel ist wiederum festzuhalten, dass jede zusammengesetzte Zahl, welche in Rechnung tritt, mit einer Klammer umgeben werden muss. Diese Umklammerung ist jedoch da überflüssig, wo die einzelnen Zeichen von der Linken zur Rechten in ihrer natürlichen Reihenfolge genommen werden sollen. Z. B. in $[(a+b)-c]:d$ können die Klammern als überflüssig weggelassen werden, denn wenn man $a+b-c:d$ nach der allgemeinen Regel liest, so gelangt man zu demselben Zahlenausdrucke. Weicht man dagegen von der Reihenfolge, in welcher die Zeichen nach einander stehen, ab, so hat man dies durch eine Klammer anzudeuten. Z. B. $a+b-c$ heisst, zu a wird addirt b und von der entstandenen Summe $a+b$ wird c subtrahirt. Will man aber zu a nicht b, sondern die Differenz $b-c$ addiren, so muss dies durch Umklammerung von $b-c$ ausgedrückt werden und man erhält $a+(b-c)$. Eine Klammer bewirkt also einen Stillstand im regelrechten Gange der Rechnung und macht, ehe man wieder weiter gehen kann, die Ausrechnung des umklammerten Ausdruckes nothwendig. Bald liegt es im Interesse der Ausrechnung, dass die einfachen Zahlen nach einander in Rechnung kommen, in welchem Falle also die vorhandenen Klammern wegzuschaffen sind, bald ist es gerathen, einzelne einfache Zahlen, die nach einander folgen, mit einander zu verbinden, in welchem Falle also eine Klammer einzuführen ist.

Von der allgemeinen Regel in der Anwendung der Klammer macht man eine Ausnahme, wenn ein Produkt, welches ohne das Zeichen $\times$ oder . geschrieben wird, oder ein Quotient, welcher mit Hülfe des Divisionsstriches ausgedrückt wird, in Rechnung treten. In beiden Fällen lässt man die Klammern weg. Z. B. für $a+(b\times c)$ und $a+(b:c)$ schreibt man also $a+bc$ und $a+\frac{b}{c}$. Soll aber in dem Ausdrucke $a+bc$ mit der Zahl a die Zahl b durch Addition und die entstandene Summe $a+b$ mit c durch Multiplikation verbunden werden, so hat man um $a+b$ eine Klammer zu setzen, welche eigentlich nach der allgemeinen Regel des Ablesens nicht nöthig ist, und man schreibt somit $(a+b)c$. Somit bedingt die eine Ausnahme von der allgemeinen Regel in $a+bc$ eine zweite Ausnahme in $(a+b)c$. Es sei noch bemerkt, dass man um $a+b$ auch die Klammer beibehält, wenn zwischen $a+b$ und c das Multiplikationszeichen gesetzt wird, also $(a+b)\times c$ oder $(a+b).c$. Gewöhne man also den Schüler daran festzuhalten, dass in den genannten zwei Fällen nothwendige Klammern in Wegfall gekommen sind, damit er nicht vergisst, sie sofort wieder eintreten zu lassen, sobald das nicht umklammerte Produkt oder der nicht umklammerte Quotient sich durch Rechnung in andere zusammengesetzte Zahlen verwandeln. Z. B. $a-(b+c)d$ steht für $a-[(b+c)d]$, und ich erhalte durch Ausrechnung $a-[(bd)+(cd)]$ oder $a-[bd+cd]$; ferner steht $a-\frac{b+c}{d}$ für $a-\left(\frac{b+c}{d}\right)$, man erhält somit durch Ausrechnung $a-\left(\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)$.

Was nun die Beurtheilung einer zusammengesetzten Zahl betrifft, so befolge man die Regel, dass das letzte freie, d. h. nicht in einer Klammer stehende Zeichen dem ganzen Ausdruck seinen Charakter verleiht. Z. B. in $a-b+(e-f+g)$ gibt das Pluszeichen, welches vor der Klammer steht, dem ganzen Ausdruck seinen Charakter, es ist somit eine Summe. Hierbei hat man aber zu berücksichtigen, dass, wiewohl ein Produkt und ein Quotient, der mit Hülfe des Divisionsstriches geschrieben wird, nicht mit einer Klammer versehen sind, doch die darin vorkommenden Rechenzeichen nicht als freie betrachtet werden dürfen. Z. B. in $a-(b+c)\times(c-d)$ darf das Malzeichen nicht als ein freies Zeichen betrachtet werden, sondern das vor dem Produkte stehende Minuszeichen; somit ist der ganze Ausdruck eine Differenz.

2) Systematische Anordnung der algebraischen Lehrsätze.

Wie bereits gezeigt worden ist, entsteht durch successives Verbinden von Zahlen ein der Form nach immer grösser werdender Ausdruck für eine Zahl. Mag nun diese Zahl als Endresultat angegeben werden oder weiterhin wiederum mit andern Zahlen in eine neue Verbindung treten, in beiden Fällen ist es geboten, sie auf die einfachste Form ohne Aenderung ihres Werthes zu bringen. Diese Vereinfachung einer zusammengesetzten Zahl hinsichtlich ihrer Form erzielt man aber nicht immer, wenn man die Operationen in der Weise vornimmt, wie sie in der Zahl angedeutet sind, sondern es muss noch ein anderer Weg der Ausrechnung ermöglicht werden. Z. B. liest man die Zahl $a+b-(c+b)$ nach der allgemeinen Regel, so soll von der Summe $a+b$ die Summe $c+b$ subtrahirt werden. Nimmt man also in dieser Weise die Operationen vor, so ist an eine Vereinfachung der Form nicht zu denken. Nun kann man aber, wie später gezeigt wird, anstatt c und b zu addiren und dann ihre Summe zu subtrahiren, auch beide Summanden c und b nach einander in beliebiger Ordnung subtrahiren, und so erhält man $a+b-b-c$, und daraus ergibt sich wieder $a-c$, welches die einfachste Form obengenannter Zahl ist. Es werden nun in den algebraischen Lehrsätzen die mannichfaltigsten Operationen angegeben, die man mit zusammengesetzten Zahlen vornehmen kann. Diese in algebraischen Zeichen ausgedrückten Lehrsätze heissen Formeln.

Um eine Uebersicht über die Formeln zu gewinnen, in welchen sämmtliche möglichen Fälle der Ausrechnung zur Sprache kommen, lege man sich eine Tabelle an, indem man in jeder aus zwei einfachen Zahlen zusammengesetzten Zahl für jede einfache Zahl wieder diejenigen zusammengesetzten Zahlen einsetzt, welche man bis dahin kennen gelernt hat. Z. B. man beginnt mit einer Summe und setzt für jeden Summand eine Summe ein, dann geht man zur Differenz über und setzt für den Minuend und hierauf für den Subtrahend eine Summe und dann eine Differenz ein u. s. w. Auf diese Weise ergibt sich folgende Tabelle:

I. $A+B$	II. $A-B$	III. $A\times B$	IV. $A:B$
1) $(a+b)+c$	1) $(a+b)-c$	1) $a(b+c)$	1) $a+b:c$
2) $a+(b+c)$	2) $(a-b)-c$	2) $a(b-c)$	2) $a-b:c$
	3) $a-(b+c)$	3) $a(bc)$	3) $ab:c$
	4) $a-(b-c)$		4) $a:b:c$
			5) $a:(b\times c)$
			6) $a:(b:c)$

Anmerkung. In vorstehender Tabelle sind zwischen IV, 4 und IV, 5 die beiden Fälle $a:(b+c)$ und $a:(b-c)$ ausgefallen, weil kein anderer Gang der Ausrechnung möglich ist, als der in beiden Zahlen vorgezeichnete.

Nach obiger Tabelle sollen die Hauptformeln der Algebra aufgestellt, dazwischen aber diejenigen Formeln eingeschaltet werden, welche theils sich als Zusätze durch leichte Folgerungen aus den vorangegangenen Definitionen oder Hauptsätzen ergeben, theils Hülfssätze sind zum Behufe eines leichteren Beweises eines folgenden Satzes.

I. Addition.

1) $a+b=b+a$

2) $a+b+c=a+c+b=a+(b+c)$ (vgl. Tab. I, 1) und 2))

II. Subtraction.

1) $a-b+b=a$

2) $a+b-b=a$

3) $a-(a-b)=b$

4) $a-a=0$

5) $a+b-c=a-c+b=a+(b-c)$ (vgl. Tab. II, 1))

6) $a-b-c=a-c-b$ (vgl. Tab. II, 2))
7) $a-(b+c)=a-b-c$ (vgl. Tab. II, 3))
8) $a-(b-c)=a-b+c$ (vgl. Tab. II, 4))
9) $a-b=(a\pm m)-(b\pm m)$
10) $+(+a)=+a$
11) $+(-a)=-a$
12) $-(+a)=-a$
13) $-(-a)=+a$

III. Multiplikation.

1) $ab=ba$
2) $a(b+c)=ab+ac$ (vgl. Tab. III, 1))
3) $a(b-c)=ab-ac$ (vgl. Tab. III, 2))
4) $a(bc)=c(ab)=b(ac)$ (vgl. Tab. III, 3))
5) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
6) $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$
7) $(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$
8) $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$
9) $(+a).(+b)=+ab$
10) $(+a)(-b)=-ab$
11) $(-a)(+b)=-ab$
12) $(-a)(-b)=+ab$

IV. Division.

1) $(a:b)\times b=a$
2) $a\times b:b=a$
3) $a:(a:b)=b$
4) $a:a=1$
5) $a:b=ac:bc$
6) $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ (vgl. Tab. IV, 1))
7) $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$ (vgl. Tab. IV, 2))
8) $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c}$ (vgl. Tab. IV, 3))
9) $\frac{a:b}{c}=\frac{a:c}{b}$ (vgl. Tab. IV, 4))
10) $\frac{a}{bc}=a:b:c$ (vgl. Tab. IV, 5))
11) $a:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}c=\frac{ac}{b}=a.\frac{c}{b}$ (vgl. Tab. IV, 6))
12) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
13) $\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}$
14) $\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$
15) $\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$
16) $\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$

3) Methodisches Verfahren beim Beweisen und Uebersetzen einer algebraischen Formel im Allgemeinen und im Besondern.

Hinsichtlich der Beweisführung hat der Lehrer hauptsächlich darauf zu achten, dass der Schüler dabei methodisch zu Werke gehe. Die algebraischen Sätze sind meistens analytische Gleichungen, worin somit die eine Seite durch eine Rechenoperation aus der andern hervorgegangen ist. Somit hat man es in einer algebraischen Formel nur mit drei Zahlen zu thun, wovon zwei auf der einen Seite durch eine Rechenoperation verbunden sind, während die ganze andere Seite, das Ergebniss dieser Operation, die dritte Zahl ist. Die eine Seite der Gleichung nennt man das formelle, dagegen die andere Seite das wirkliche Resultat der Rechnung. Z. B. werden a und b addirt, und ist $a+b=c$, so nennt man $a+b$ die formelle, dagegen c die wirkliche Summe der Zahlen a und b. Während das formelle Resultat einer Operation stets richtig ist, hat man die Richtigkeit eines wirklichen Resultates noch nachzuweisen. Soll somit eine algebraische Formel bewiesen werden, so hat man zunächst festzustellen, durch welche Rechenoperation sie entstanden ist, und dann erst zu zeigen, dass das Ergebniss dieser Operation richtig ist. Da man meistens von der linken zur rechten Seite der Gleichung übergeht, so gibt das letzte freie, d. h. nicht in einer Klammer stehende Rechenzeichen auf der linken Seite die Operation an, durch welche die Gleichung entstanden ist. Z. B. die Formel $a+b-c=a-c+b$ ist durch Subtraction entstanden, weil $-$ das letzte freie Rechenzeichen auf der linken Seite der Formel ist, und somit ist $a+b$ Minuend, c Subtrahend und $a-c+b$ die Differenz. Ferner in der Formel $a:bc=a:b:c$ ist das letzte Rechenzeichen auf der linken Seite das Multiplikationszeichen, welches jedoch kein freies ist, weil bc eigentlich nach der allgemeinen Regel eine Klammer haben müsste. Da somit : das letzte freie Zeichen ist, so ist die Formel durch Division entstanden; a ist Dividend, bc Divisor und $a:b:c$ Quotient. Hat man nun aber festgestellt, dass die Formel ein Resultat für eine in derselben angedeutete Rechenoperation gibt, so wird also der Beweis für die Richtigkeit der Formel geliefert, indem man zeigt, dass das gegebene Resultat wirklich die Zahl ist, welche man nach dem Begriffe der genannten Operation sucht.

Ehe wir nun zu den Beweisen selbst uns wenden, wollen wir noch kurz das Verfahren angeben, wie man eine algebraische Formel übersetzt d. h. sämmtliche Sätze aus derselben abliest, welche in derselben enthalten sind. Dieselben werden Regeln genannt, weil sie zur Richtschnur für die Rechenoperationen werden. Bei diesem Ablesen einer Formel geht man von der linken zur rechten, oder von der rechten zur linken Seite über, ersteres nennt man Vorwärtslesen, letzteres Rückwärtslesen einer Formel. Eine Regel erhält man nun aber, wenn man angibt, was für eine Rechnung auf der einen Seite der Formel angedeutet ist, dann zur andern Seite übergeht und angibt, wie die angedeutete Rechnung daselbst ausgeführt worden ist; z. B. $a+b-c=a-c+b$. Auf der linken Seite ist die Rechnung, von der Summe $a+b$ die Zahl c zu subtrahiren, angedeutet, und auf der rechten Seite findet man, dass die Zahl c von dem Summand a subtrahirt worden, dagegen der andere Summand unverändert geblieben ist. Dies gibt die Regel: von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, indem man die Zahl vom ersten Summand subtrahirt. Oder liest man die Formel rückwärts, so geht man von der rechten Seite aus, wo zu einer Differenz $a-c$ die Zahl b addirt werden soll. Geht man nun zur linken Seite über, so findet man, dass die Zahl b zum Minuend a addirt worden ist. Dies gibt die Regel: zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man sie zum Minuend addirt. Besteht aber die Formel aus 3 gleichen Ausdrücken (vgl. II, 5)), so erhält man 6 Regeln, indem man vom 1. zum 2., vom 1. zum 3., vom 2. zum 1., vom 2. zum 3., vom 3. zum 1. und vom 3. zum 2. Ausdrucke übergeht. Hat der Schüler in dem Uebersetzen der Formeln einige Uebung erlangt, so wird er, wenn er nur die Formeln seinem Gedächtnisse eingeprägt hat, die beim Rechnen in Anwendung kommenden Regeln schnell aus denselben herausgezogen haben. Um zu zeigen, wie die allgemein angegebenen Methoden in Betreff des Beweises und Uebersetzens einer algebraischen Formel in den besondern Fällen zur Anwendung kommen, sollen in Folgendem die einzelnen algebraischen Sätze in der Reihenfolge, wie sie früher angegeben worden sind, vorgenommen werden.

I. Addition.

1) $$a+b = b+a$$

Beweis. Die Formel sagt: wenn man a und b addirt, so erhält man b+a. Nach dem Begriffe der Addition muss somit b+a so viele Einheiten enthalten, als die zu addirenden Zahlen a und b zusammen haben. Die Zahl b+a ist aber selbst eine Summe und zeigt somit so viele Einheiten an, als die Summanden b und a zusammen haben. Die Zahl aber, welche so viele Einheiten anzeigt, als b und a zusammen haben, ist der Zahl gleich, die so viele Einheiten hat, wie a und b zusammen haben, mithin ist die Formel richtig.

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): In einer Summe können die Summanden mit einander vertauscht werden.

Anm. Durch Rückwärtslesen der Formel erhält man dieselbe Regel.

2) $$a+b+c = a+c+b = a+(b+c)$$

Beweis. Hier werden a+b und c addirt; man sucht somit eine Zahl, die so viele Einheiten, als a+b und c oder da a+b so viele Einheiten hat, als a und b zusammen haben, als a, b und c zusammen haben. Soll somit die Formel richtig sein, so ist zu zeigen, dass a+c+b und a+(b+c) eine solche Zahl sind. Dies ist aber der Fall, denn einerseits hat a+c+b so viele Einheiten, als a+c und b oder als a, c und b zusammen haben, und andrerseits hat a+(b+c) so viele Einheiten, als a und b+c oder als a, b und c zusammen haben. Beim Uebersetzen der Formel geht man nun vom 1. Ausdrucke aus, wo zu der Summe a+b die Zahl c addirt wird und geht alsdann zum 2. Ausdrucke über, wo man findet, dass die Zahl c zum ersten Summand a addirt worden ist; wendet man sich aber vom 1. zum 3. Ausdrucke, so findet man, dass die Zahl c zum zweiten Summand b addirt worden ist. Dies gibt:

Regel 1 (durch Uebergang vom 1. zum 2. und 3. Ausdrucke): Zu einer Summe wird eine Zahl addirt, indem man sie zu einem der Summanden addirt; oder

Regel 2 (eine andere Uebersetzung durch Uebergang vom 1. zum 2. Ausdrucke): Zwei Zahlen werden nach einander in beliebiger Ordnung addirt.

Regel 3 (durch Uebergang vom 1. zum 3. Ausdrucke): Wird nach einem + Zeichen eine Klammer eingeführt, so wird ein Glied mit dem Vorzeichen + unverändert hineingebracht. Beim Uebergange vom 2. zum 1. und 3. Ausdrucke erhält man dieselben Regeln.

Regel 4 (Uebergang vom 3. zum 1. und 2. Ausdrucke): Eine Summe wird addirt, indem man die Summanden nach einander in beliebiger Ordnung addirt.

Regel 5 (Uebergang vom 3. zum 1. Ausdrucke): Wird eine Klammer mit dem Vorzeichen + weggelassen, so bleibt ein Glied in derselben mit dem Vorzeichen + unverändert.

II. Subtraktion.

1) $$a-b+b=a$$

Bew. Nach dieser Formel sollen $a-b$ und b die Summanden und a soll die Summe sein. Dies hat aber seine Richtigkeit, weil nach dem Begriffe der Subtraktion die Differenz $a-b$ der gesuchte Summand ist, während b der gegebene Summand und a die Summe sind.

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): Wenn man zu einer Differenz den Subtrahend addirt, so erhält man den Minuend; oder: Zwei gleiche Zahlen, welche mit den Vorzeichen + und − auf einander folgen, fallen gegeneinander weg.

Regel 2 (durch Rückwärtslesen): Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man von ihr eine andere subtrahirt und zur Differenz wieder dieselbe addirt.

2) $$a+b-b=a$$

Bew. Diese Formel ist durch Subtraktion entstanden; es ist $a+b$ Minuend, b Subtrahend und a Differenz. Die Formel ist richtig, weil

$$\overbrace{a}^{\text{Differenz}} + \overbrace{b}^{\text{Subtrahend}} = \overbrace{a+b}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): Wenn man von einer Summe den einen Summand subtrahirt, so erhält man den andern oder: Zwei gleiche Zahlen, welche mit den Vorzeichen + und − auf einander folgen, fallen gegeneinander weg.

Regel 2 (durch Rückwärtslesen): Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man zu ihr eine andere addirt und von der Summe wieder dieselbe Zahl subtrahirt.

3) $$a-(a-b)=b$$

Bew. $$\overbrace{a-b}^{\text{Subtrahend}} + \overbrace{b}^{\text{Differenz}} = \overbrace{a}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1: Wenn man eine Differenz vom Minuend subtrahirt, so erhält man den Subtrahend.

Regel 2: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie von einer andern subtrahirt und die Differenz wieder von derselben Zahl subtrahirt.

4) $$a-a=o$$

Bew. $$\overbrace{a}^{\text{Subtrahend}} + \overbrace{o}^{\text{Differenz}} = \overbrace{a}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1: Wenn man eine Zahl von sich selbst subtrahirt, so erhält man 0.

Regel 2: 0 kann dargestellt werden als eine Differenz, worin Minuend und Subtrahend gleich sind.

5) $$a+b-c=a-c+b=a+(b-c)$$

Bew. In dieser Formel ist $a+b$ Minuend, c Subtrahend und $a-c+b$ die eine Differenz und $a+(b-c)$ die zweite. Die Formel ist richtig, weil

$$\overbrace{a-c+b}^{\text{Differenz}} + \overbrace{c}^{\text{Subtrahend}} = a-c+c+b = \overbrace{a+b}^{\text{Minuend}}$$

und $$\overbrace{a+(b-c)}^{\text{Differenz}} + \overbrace{c}^{\text{Subtrahend}} = a+(b-c+c) = \overbrace{a+b}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1 (Uebergang vom 1. zum 2. und 3. Ausdr.): Von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, indem man sie von einem der Summanden subtrahirt.

Regel 2 (Ueberg. vom 1. zum 2. Ausdr.): Zahlen werden in beliebiger Ordnung nach einander addirt und subtrahirt.

Regel 3 (Ueberg. vom 1. zum 3. Ausdr.): Führt man nach einem + Zeichen eine Klammer ein, so bringt man ein Glied mit dem Vorzeichen − unverändert in dieselbe.

Regel 4 (Ueberg. vom 2. zum 1. Ausdr.): Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man sie zum Minuend addirt.

Regel 5 (Ueberg. vom 2. zum 3. Ausdr.): Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man von ihr den Subtrahend subtrahirt und die Differenz zum Minuend addirt.

Regel 6 (Ueberg. vom 3. zum 1. und 2. Ausdr.): Eine Differenz wird addirt, indem man den Minuend addirt und den Subtrahend subtrahirt und zwar in beliebiger Ordnung.

Regel 7: Wird eine Klammer mit dem Vorzeichen + weggelassen, so bleibt ein Glied in derselben mit dem Vorzeichen − unverändert.

6) $$a-b-c=a-c-b$$

Bew. Die Formel ist durch Subtraktion entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{a-c-b}^{\text{Differenz}}+\overbrace{c}^{\text{Subtrahend}}=a-c+c-b=\overbrace{a-b}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, indem man sie vom Minuend subtrahirt oder: Zwei Zahlen werden in beliebiger Ordnung nach einander subtrahirt.

Anm. Durch Rückwärtslesen der Formel erhält man dieselbe Regel.

7) $$a-(b+c)=a-b-c$$

Bew. Die Formel ist durch Subtraktion entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{a-b-c}^{\text{Differenz}}+\overbrace{(b+c)}^{\text{Subtrahend}}=a-b-c+c+b=a-b+b=\overbrace{a}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): Eine Summe wird subtrahirt, indem man die Summanden nach einander subtrahirt, oder

Regel 2: Wenn man eine Klammer mit dem Vorzeichen − weglässt, so ist ein Rechenzeichen +, welches darin frei, d. h. nicht wieder umklammert, vorkommt, in − zu verwandeln.

Regel 3 (durch Rückwärtslesen): Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, indem man sie zum Subtrahend addirt, oder

Regel 4: Zahlen werden nach einander subtrahirt, indem man ihre Summe subtrahirt, oder

Regel 5: Führt man nach dem Rechenzeichen − eine Klammer ein, so bringt man ein Glied, welches das Vorzeichen − hat, mit dem Vorzeichen + in dieselbe hinein.

8) $$a-(b-c)=a-b+c$$

Bew. Die Formel ist durch Subtraktion entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{a-b+c}^{\text{Differenz}}+\overbrace{(b-c)}^{\text{Subtrahend}}=a-b+c+b-c=a-b+b+c-c=\overbrace{a}^{\text{Minuend}}$$

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): Eine Differenz wird subtrahirt, indem man den Minuend subtrahirt und den Subtrahend addirt, oder

Regel 2: Wenn man eine Klammer mit dem Vorzeichen $-$ weglässt, so ist ein Rechenzeichen $-$, welches darin frei vorkommt, in $+$ zu verwandeln.

Regel 3 (durch Rückwärtslesen): Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man die Zahl vom Subtrahend subtrahirt, oder

Regel 4: Führt man nach dem Rechenzeichen $-$ eine Klammer ein, so bringt man ein Glied, welches das Vorzeichen $+$ hat, mit dem Vorzeichen $-$ in dieselbe hinein.

9) $$a-b=(a\pm m)-(b\pm m)$$

Bew. Die Formel ergibt sich durch successive Anwendung der vorangegangenen Regeln. Es ist

$$a-b=a-b+m-m=\begin{cases}(a+m)-b-m=(a+m)-(b+m)\\ a-(b-m)-m=(a-m)-(b-m)\end{cases}$$

Regel 1: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man zum Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl addirt oder vom Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl subtrahirt.

Wendet man nun letztere Regel auf eine Differenz an, deren Minuend kleiner ist, als der Subtrahend, indem man den Minuend selbst von Minuend und Subtrahend subtrahirt, so erhält man eine Differenz, deren Minuend zu 0 wird. Z. B.

$$a-b=(a-a)-(b-a)=o-(b-a)=-(b-a);\ 5-7=(5-5)-(7-5)=0-(7-5)=-2.$$

Solche Zahlen, welche das Vorzeichen $-$ haben, werden negative Zahlen genannt, während man die Zahlen, mit denen man es bisher zu thun hatte, und die das Vorzeichen $+$ haben, positive Zahlen nennt. Die negative Zahl ist somit aus einer Differenz entstanden, deren Minuend kleiner ist, als der Subtrahend, und kann dargestellt werden als eine Differenz mit dem Minuend 0.

Es ergibt sich somit

$$+(+a)=+(o+a)=+o+a=+a;\qquad -(+a)=-(o+a)=-o-a=-a;$$
$$+(-a)=+(o-a)=+o-a=-a;\qquad -(-a)=-(o-a)=-o+a=+a.$$

Wir erhalten daraus die Formeln

10) $+(+a)=+a$ 12) $-(+a)=-a$

11) $+(-a)=-a$ 13) $-(-a)=+a$

Regel 1: Zwei gleiche Zeichen, die vor einer Zahl auf einander folgen, geben $+$, zwei ungleiche Zeichen geben $-$.

Regel 2: Ein $+$Zeichen vor einer Zahl kann man durch zwei gleiche auf einander folgende Vorzeichen, dagegen ein $-$ Zeichen durch zwei ungleiche auf einander folgende Vorzeichen ersetzen.

Da man nun $a-b=a+(-b)$ setzen darf, so kann man jeden Ausdruck, worin die Glieder mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ auf einander folgen, als eine Summe betrachten, worin die Summanden positiv oder negativ sind. Eine solche Summe wird algebraische Summe genannt.

III. Multiplikation.

1) $$a \,.\, b = b \,.\, a$$

Beweis:

$a \,.\, b = b + b + b + b + \ldots a\,\text{mal}$

$$= \left(\overset{1.}{1} + \overset{2.}{1} + \overset{3.}{1} + \ldots [b\,\text{mal}]\right) + \left(\overset{1.}{1} + \overset{2.}{1} + \overset{3.}{1} + \ldots [b\,\text{mal}]\right) + \left(\overset{1.}{1} + \overset{2.}{1} + \overset{3.}{1} + \ldots [b\,\text{mal}]\right) + \ldots a\,\text{mal}$$

$$= \left(\overset{1.}{1} + \overset{1.}{1} + \overset{1.}{1} + \ldots [a\,\text{mal}]\right) + \left(\overset{2.}{1} + \overset{2.}{1} + \overset{2.}{1} + \ldots [a\,\text{mal}]\right) + \left(\overset{3.}{1} + \overset{3.}{1} + \overset{3.}{1} + \ldots [a\,\text{mal}]\right) + \ldots b\,\text{mal}$$

$= a + a + a + \ldots b\,\text{mal} = b \,.\, a.$

Regel. In einem Produkte lassen Multiplikand und Multiplikator sich mit einander vertauschen.

2) $$a(b + c) = ab + ac.$$

Bew.: $a(b+c) = (b+c)+(b+c)+(b+c)+ \ldots a\,\text{mal} = b+c+b+c+b+c+ \ldots$

$= b+b+b+ \ldots a\,\text{mal} + (c+c+c+ \ldots a\,\text{mal}) = ab+ac.$

Regel 1: Eine Summe wird multiplicirt, indem man jeden Summand multiplicirt und die Produkte addirt.

Regel 2: Produkte mit einem gleichen Faktor werden addirt, indem man mit dem gleichen Faktor die Summe der andern multiplicirt.

3) $$a(b - c) = ab - ac$$

Bew. $a(b-c) = (b-c)+(b-c)+(b-c)+ \ldots a\,\text{mal} = b-c+b-c+b-c+ \ldots$

$= b+b+b+ \ldots a\,\text{mal} - c-c-c- \ldots a\,\text{mal} = ab-(c+c+c+ \ldots a\,\text{mal}) = ab-ac$

Regel 1: Eine Differenz wird multiplicirt, indem man Minuend und Subtrahend multiplicirt und die Produkte von einander subtrahirt.

Regel 2: Produkte mit einem gleichen Faktor werden von einander subtrahirt, indem man mit dem gleichen Faktor die Differenz der andern multiplicirt.

4) $$a(bc) = b(ac) = c(ab)$$

Bew. $$a(bc) = bc+bc+bc+ \ldots a\,\text{mal} = \begin{cases} b(c+c+c+ \ldots a\,\text{mal}) = b(ac) \\ c(b+b+b+ \ldots a\,\text{mal}) = c(ab) \end{cases}$$

Regel 1: Ein Produkt wird multiplicirt, indem man blos einen Faktor multiplicirt, oder

Regel 2: Mit einem Produkt wird multiplicirt, indem man mit den Faktoren nach einander in beliebiger Ordnung multiplicirt.

Anm. Die Fälle $(a+b)c$, $(a-b)c$ und $(ab)c$ lassen sich auf die vorhergehenden zurückführen, wenn man in den Produkten die Faktoren mit einander vertauscht.

4) $$(a+b)\,(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Bew. $(a+b)\,(c+d) = a(c+d)+b(c+d) = ac+ad+(bc+bd) = ac+ad+bc+bd$

5) $$(a+b)\,(c-d) = ac-ad+bc-bd$$

Bew. $(a+b)\,(c-d) = a(c-d)+b(c-d) = ac-ad+(bc-bd) = ac-ad+bc-bd$

6) $$(a-b)\,(c+d) = ac+ad-bc-bd$$

Bew. $(a-b)\,(c+d) = a(c+d)-b(c+d) = ac+ad-(bc+bd) = ac+ad-bc-bd$

7) $$(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$$

Bew. $(a-b)(c-d) = a(c-d)-b(c-d) = ac-ad-(bc-bd) = ac-ad-bc+bd$

In 4) wird $+b$ mit $+d$ multiplicirt und man erhält $+bd$, in 5) gibt $(+b).(-d)$ das Produkt $-bd$, in 6) $(-b).(+d) = -bd$ und in 7) gibt $(-b).(-d)$ das Produkt $+bd$

Man erhält somit die Zusätze:

9) $(+a).(+b) = +ab$ 11) $(-a).(+b) = -ab$

10) $(+a).(-b) = -ab$ 12) $(-a)(-b) = +ab$

Hauptregel zu 4), 5), 6) und 7): Eine algebraische Summe wird mit einer andern multiplicirt, indem man jeden Summand der einen Summe mit jedem Summand der andern Summe multiplicirt, wobei das Vorzeichen jedes entstandenen Produktes sich nach den Vorzeichen der Summanden richtet, welche mit einander multiplicirt werden so, dass, wenn die beiden Vorzeichen gleich sind, das Produkt das Vorzeichen +, und wenn die Vorzeichen ungleich sind, das Produkt das Vorzeichen − erhält.

Hauptregeln zu den Zusätzen 9), 10), 11) und 12): 1. Faktoren mit gleichen Vorzeichen machen das Produkt positiv, dagegen Faktoren mit ungleichen Zeichen machen dasselbe negativ.

2. Ist ein Produkt positiv, so kann man beide Faktoren positiv oder negativ nehmen; hat aber das Produkt das Vorzeichen −, so kann man dasselbe vor einen Faktor setzen.

IV. Division.

1) $$(a:b) \times b = a$$

Bew. $a:b$ ist nach dem Begriffe der Division der eine Faktor, während b der andere Faktor und a das Produkt sind, mithin ist die Formel, die dasselbe ausdrückt, richtig.

Regel 1: Wenn man einen Quotient mit dem Divisor multiplicirt, so erhält man den Dividend.

Regel 2: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie durch eine andere dividirt und den Quotient wieder mit derselben multiplicirt.

3) $$ab:b = a$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{a}^{\text{Quotient}} \times \overbrace{b}^{\text{Divisor}} = \overbrace{ab}^{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Wenn man ein Produkt durch den einen Faktor dividirt, so erhält man den andern.

Regel 2: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer andern multiplicirt und das Produkt wieder durch dieselbe dividirt.

3) $$a:(a:b) = b$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{(a:b)}^{\text{Divisor}} \times \overbrace{b}^{\text{Quotient}} = \overbrace{a}^{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Wenn man einen Quotient in den Dividend dividirt, so erhält man den Divisor.

Regel 2: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie in eine andere und den Quotient wieder in dieselbe dividirt.

4) $$a : a = 1$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{1}^{\text{Quotient}} \times \overbrace{a}^{\text{Divisor}} = \overbrace{a}^{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Wenn man eine Zahl durch sich selbst dividirt, so erhält man 1.

Regel 2: 1 kann dargestellt werden als ein Quotient, dessen Dividend und Divisor einander gleich sind.

5) $$a : b = ac : bc$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{(ac : bc)}^{\text{Quotient}} \times \overbrace{b}^{\text{Divisor}} = [(ac : bc) \times b \times c] : c = [(ac : bc) \times bc] : c = ac : c = \overbrace{a}^{\text{Dividend}}$$

Regel 1 (durch Vorwärtslesen): Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt.

Regel 2 (durch Rückwärtslesen): Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor durch dieselbe Zahl dividirt, oder: In Produkten, welche durch einander dividirt werden, fallen gleiche Faktoren gegeneinander weg.

6) $$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$

Bew.: Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{[(a : c) + (b : c)]}^{\text{Quotient}} \times \overbrace{c}^{\text{Divisor}} = (a : c) \times c + (b : c)\, c = \overbrace{a + b}^{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Eine Summe wird dividirt, indem man jeden Summand dividirt.

Regel 2: Quotienten mit gleichem Divisor werden addirt, indem man die Summe der Dividenden durch den gleichen Divisor dividirt.

Zusatz: $$a : b = \frac{a}{b}$$

Bew. $$a : b = (1 + 1 + 1 + \ldots a \text{ mal}) : b = (1 : b) + (1 : b) + (1 : b) + \ldots a \text{ mal}$$
$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots a \text{ mal} = \frac{a}{b}$$

7) $$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right)}^{\text{Quotient}} \times \overbrace{c}^{\text{Divisor}} = \frac{a}{c}c - \frac{b}{c}c = \overbrace{a - b}^{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Eine Differenz wird dividirt, indem man Minuend und Subtrahend dividirt.

Regel 2: Quotienten mit gleichem Divisor werden von einander subtrahirt, indem man die Differenz der Dividenden durch den gleichen Divisor dividirt.

8) $$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}b = a\frac{b}{c}$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\underbrace{\left(\frac{a}{c}\cdot b\right)}_{\text{Quotient}} \times \underbrace{c}_{\text{Divisor}} = \left(\frac{a}{c}\cdot c\right) b = \underbrace{ab}_{\text{Dividend}} \text{ und } \underbrace{\left(a\cdot\frac{b}{c}\right)}_{\text{Quotient}} \times \underbrace{c}_{\text{Divisor}} = a\cdot\left(\frac{b}{c}c\right) = \underbrace{ab}_{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Ein Produkt wird dividirt, indem man nur einen Faktor dividirt.

Regel 2: Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Dividend mit der Zahl multiplicirt.

Regel 3: Mit einem Quotient wird multiplicirt, indem man mit dem Dividend multiplicirt und durch den Divisor dividirt, oder durch den Divisor dividirt und dann mit dem Dividend multiplicirt.

9) $$\frac{a:b}{c} = \frac{a:c}{b}$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\underbrace{\frac{a:c}{b}}_{\text{Quotient}} \times \underbrace{c}_{\text{Divisor}} = \frac{(a:c)c}{b} = \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Dividend}}$$

Regel (durch Vorwärts- und Rückwärtslesen): Ein Quotient wird dividirt, indem man den Dividend dividirt oder: durch zwei Zahlen wird nach einander in beliebiger Ordnung dividirt.

10) $$\frac{a}{bc} = a:b:c$$

Bew. Die Formel ist durch Division entstanden und richtig, weil

$$\underbrace{(a:b:c)}_{\text{Quotient}} \times \underbrace{bc}_{\text{Divisor}} = (a:b:c) \times c \times b = (a:b)\,b = \underbrace{a}_{\text{Dividend}}$$

Regel 1: Durch ein Produkt wird dividirt, indem man durch die Faktoren nach einander dividirt.

Regel 2: Ein Quotient wird dividirt, indem man den Divisor multiplicirt, oder: durch zwei Zahlen wird nach einander dividirt, indem man durch ihr Produkt dividirt.

11) $$a:\frac{b}{c} = \frac{a}{b}c = \frac{ac}{b} = a\cdot\frac{c}{b}$$

Bew. Es ist hier nur zu beweisen, dass der erste Ausdruck gleich dem zweiten ist, denn der dritte ergibt sich aus dem zweiten durch Anwendung von IV 8, Regel 2 und der vierte aus dem dritten durch Anwendung von IV 8, Regel 1. Die Formel ist wieder durch Division entstanden und richtig, weil

$$\underbrace{\frac{a}{b}c}_{\text{Quotient}} \cdot \underbrace{\frac{b}{c}}_{\text{Divisor}} = \frac{a}{b}\left(c \cdot \frac{b}{c}\right) = \frac{a}{b}b = \underbrace{a}_{\text{Dividend}}$$

Regel 1 (durch Uebergang vom 1. zum 2. und 3. Ausdr.): Durch einen Quotient wird dividirt, indem man durch den Dividend dividirt und mit dem Divisor multiplicirt in beliebiger Ordnung, oder

Regel 2 (durch Uebergang vom 1. zum 3. Ausdr.): Durch einen Quotient wird dividirt, indem man mit dem umgekehrten Quotient multiplicirt.

Die Regeln, welche man durch Rückwärtslesen der Formel erhält, sind entweder schon früher angegeben oder nicht gebräuchlich mit Ausnahme von

Regel 3 (durch Uebergang vom 4. zum 1. Ausdrucke): Mit einem Quotient wird multiplicirt, indem man durch den umgekehrten Quotient dividirt.

12) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Bew. Diese Formel ergibt sich durch Anwendung der angegebenen Regeln, denn

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}c}{d} = \frac{\frac{ac}{b}}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Regel 1. Quotienten werden mit einander multiplicirt, indem man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividirt.

Regel 2. Produkte werden durch einander dividirt, indem man die Faktoren des einen Produktes durch die Faktoren des andern dividirt und die Quotienten mit einander multiplicirt.

Anm. Der Fall $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ wird auf den vorhergehenden zurückgeführt, wenn man nach einer früheren Regel anstatt durch $\frac{c}{d}$ zu dividiren, mit $\frac{d}{c}$ multiplicirt. Da nach dem Begriffe der Division der Dividend ein Produkt ist, während der Divisor und Quotient die Faktoren sind, so müssen also nach III 9), 10), 11) und 12) Divisor und Quotient, wenn der Dividend positiv ist, gleiche Vorzeichen, dagegen wenn der Dividend negativ ist, ungleiche Vorzeichen haben. Man erhält somit

13) $$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$$

14) $$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

15) $$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

16) $$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

Regel 1: Haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so wird der Quotient positiv, haben sie aber ungleiche Vorzeichen, so wird der Quotient negativ.

Regel 2: Hat der Quotient das Vorzeichen +, so lässt sich dasselbe als + oder als

— vor Dividend und Divisor bringen, hat dagegen der Quotient das Vorzeichen —, so lässt sich dasselbe entweder vor den Dividend oder vor den Divisor bringen.

Anhang.

Zwar gehört die Lehre vom Potenziren, Radiciren und Logarithmiren nicht in den Bereich des ersten algebraischen Unterrichtes, da jedoch die Methode bei Behandlung der einschlägigen Formeln dieselbe ist, wie bei denen der vier Species, so sollen dieselben hier als Anhang folgen.

V. Potenzirung.

Eine Zahl mit einer andern potenziren heisst die eine Zahl als Faktor setzen so oft, als die andere Einheiten hat. Soll a b mal als Faktor gesetzt werden, so drückt man dies dadurch aus, dass man die Zahl rechts neben a etwas erhöht setzt, also a^b, gelesen a hoch b oder a zur bten Potenz, oder die bte Potenz von a. a heisst Basis, b Exponent und die neue Zahl a^b Potenz. Das Resultat des Potenzirens findet man somit durch Multiplikation. Es ist also

$$a^b = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots b\,\text{mal} = c$$

a^b heisst formelle, c wirkliche Potenz.

1) $$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

Bew. $a^m \,.\, a^n = (a.a.a \ldots m\,\text{mal}) \times (a.a.a \ldots n\,\text{mal}) = a.a.a.a \ldots (m+n)\,\text{mal} = a^{m+n}$

Regel 1. Potenzen mit gleicher Basis werden multiplicirt, indem man die gleiche Basis mit der Summe der Exponenten potenzirt.

Regel 2. Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, indem man die Zahl mit jedem Summand potenzirt und die Potenzen multiplicirt.

2) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Bew. $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a\,.\,a\,.\,a \ldots m\,\text{mal}}{a\,.\,a\,.\,a \ldots n\,\text{mal}} = \begin{cases} a\,.\,a\,.\,a \ldots (m-n)\,\text{mal} = a^{m-n}, & \text{wenn } m > n \\ \dfrac{1}{a\,.\,a\,.\,a \ldots (n-m)\,\text{mal}} = \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{wenn } n > m \end{cases}$$

Regel 1: Potenzen mit gleicher Basis werden dividirt, indem man die gleiche Basis mit der Differenz der Exponenten potenzirt.

Regel 2: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, indem man die Zahl mit dem Minuend und Subtrahend potenzirt und die Potenzen durch einander dividirt.

3) $$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

Bew. $a^m \cdot b^m = (a \cdot a \cdot a \ldots m \text{ mal}) \times (b \cdot b \cdot b \ldots m \text{ mal}) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots m \text{ mal} = (ab)^m$

Regel 1: Potenzen mit gleichem Exponent werden multiplicirt, indem man das Produkt der Basen mit dem gleichen Exponent potenzirt.

Regel 2: Ein Produkt wird potenzirt, indem man jeden Faktor potenzirt.

4) $$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Bew. $$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots m \text{ mal}}{b \cdot b \cdot b \ldots m \text{ mal}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots m \text{ mal} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Regel 1: Potenzen mit gleichem Exponent werden durch einander dividirt, indem man den Quotient der Basen mit dem gleichen Exponent potenzirt.

Regel 2: Ein Quotient wird potenzirt, indem man Dividend und Divisor potenzirt.

5) $$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$

Bew. $$(a^x)^y = a^x \cdot a^x \cdot a^x \ldots y \text{ mal} = \begin{cases} a^{x+x+x+\cdots y \text{ mal}} = a^{xy} \\ (a \cdot a \cdot a \ldots y \text{ mal})^x = (a^y)^x \end{cases}$$

Regel 1: Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, indem man den Exponent mit der Zahl multiplicirt, oder die Basis mit der Zahl potenzirt oder: Mit zwei Zahlen wird nach einander potenzirt, indem man mit ihrem Produkte potenzirt oder indem man mit den beiden Zahlen in beliebiger Ordnung nach einander potenzirt.

Regel 2: Mit einem Produkte wird potenzirt, indem man mit den Faktoren nach einander potenzirt.

Zusatz 1: $$a^0 = 1$$

Bew. $$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Regel 1: Eine Potenz mit dem Exponent o ist gleich 1.

Regel 2: 1 kann dargestellt werden als eine Potenz mit dem Exponent o

Zusatz 2: $$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Bew. $$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

Regel 1: Eine Potenz mit negativem Exponent ist gleich dem reciproken Werthe der Potenz mit positivem Exponent.

Anmerkung. Sämmtliche Sätze über Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten. Die Beweise sind leicht zu führen, indem man für eine Potenz mit negativem Exponent den reciproken Werth der Potenz mit positivem Exponent einsetzt und die Regeln in Anwendung bringt, die man aus den 5 Formeln der Potenzirung kennen gelernt hat.

VI. Radicirung.

Radiciren heisst mit Hülfe einer Potenz und ihres Exponenten die Basis finden. Ist c eine Potenz und b ihr Exponent, so verbindet man beide Zahlen durch das Rechenzeichen $\sqrt{\ }$, Wurzelzeichen genannt und es entsteht die Basis $\sqrt[b]{c}$, gelesen: die bte Wurzel aus c oder c radicirt mit b. Die gegebene Potenz c wird Radicand, der Potenzexponent b Wurzelexponent und die gesuchte Basis $\sqrt[b]{c}$ Wurzel genannt. Ist $\sqrt[b]{c} = a$, so wird $\sqrt[b]{c}$ formelle und a wirkliche Wurzel genannt. Diese Gleichung ist aber richtig, wenn $a^b = c$.

1) $$\left(\sqrt[x]{a}\right)^x = a$$

Bew. Nach dem Begriffe des Radicirens ist $\sqrt[x]{a}$ eine Basis, während x Exponent und a Potenz ist. Die Formel ist somit richtig, weil sie dasselbe ausdrückt.

Regel 1: Wenn eine Wurzel mit ihrem Exponenten potenzirt wird, so erhält man den Radikand.

Regel 2: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer andern radicirt und die Wurzel wieder mit derselben Zahl potenzirt.

2) $$\sqrt[x]{a^x} = a$$

Bew. Die Formel ist durch Radiciren entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{a}^{\text{Wurzel}}\ \overbrace{{}^{x}}^{\text{Exponent}} = \overbrace{a^x}^{\text{Radikand}}$$

Regel 1: Wenn man eine Potenz mit ihrem Exponent radicirt, so erhält man die Basis.

Regel 2: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer andern potenzirt und die Potenz mit derselben Zahl radicirt.

3) $$\sqrt[x]{ab} = \sqrt[x]{a} \,.\, \sqrt[x]{b}$$

Bew. Die Formel ist durch Radiciren entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{\left(\sqrt[x]{a} \,.\, \sqrt[x]{b}\right)}^{\text{Wurzel}}{}^{\overbrace{x}^{\text{Exponent}}} = \left(\sqrt[x]{a}\right)^x . \left(\sqrt[x]{b}\right)^x = \overbrace{ab}^{\text{Radikand}}$$

Regel 1: Ein Produkt wird radicirt, indem man jeden Faktor radicirt.

Regel 2: Wurzeln mit gleichen Exponenten werden mit einander multiplicirt, indem man das Produkt der Radikanden mit dem gleichen Exponent radicirt.

4) $$\sqrt[x]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}$$

Bew. Die Formel ist durch Radiciren entstanden und richtig, weil

$$\left(\underbrace{\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}}_{\text{Wurzel}}\right)^{\overbrace{x}^{\text{Exponent}}} = \frac{\left(\sqrt[x]{a}\right)^x}{\left(\sqrt[x]{b}\right)^x} = \overbrace{\frac{a}{b}}^{\text{Radikand}}$$

Regel 1: Ein Quotient wird radicirt, indem man Dividend und Divisor radicirt.

Regel 2: Wurzeln mit gleichen Exponenten werden durch einander dividirt, indem man den Quotient der Radikanden mit dem gleichen Exponent radicirt.

Zusatz:
$$\sqrt[x]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[x]{b}}$$

Bew.
$$\sqrt[x]{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt[x]{1}}{\sqrt[x]{b}} = \frac{1}{\sqrt[x]{b}}$$

Regel: Eine Wurzel aus dem reciproken Werthe einer Zahl ist gleich dem reciproken Werthe der Wurzel der Zahl.

5)
$$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xn]{a^{yn}}$$

Bew. Die Formel ist durch Radiciren entstanden und richtig, weil

$$\left(\underbrace{\sqrt[xn]{a^{yn}}}_{\text{Wurzel}}\right)^{\overbrace{x}^{\text{Exponent}}} = \sqrt[n]{\left[\left(\sqrt[xn]{a^{yn}}\right)^x\right]^n} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[xn]{a^{yn}}\right)^{xn}} = \sqrt[n]{a^{yn}} = \sqrt[n]{(a^y)^n} = \overbrace{a^y}^{\text{Radikand}}$$

Regel (durch Vorwärts- und Rückwärtslesen): Hat man eine Wurzel aus einer Potenz, so kann man Wurzel- und Potenzexponent mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren.

6)
$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} = \sqrt[x:y]{a}$$

Bew. Die Formel ergibt sich, wenn man in $\sqrt[x]{a^y}$ nach dem vorhergehenden Satze beide Exponenten bald durch x und bald durch y dividirt.

Regel 1: Eine Potenz wird mit einer Zahl radicirt, indem man den Exponent durch die Zahl dividirt, oder die Zahl durch den Exponent dividirt und die Basis mit dem Quotient radicirt.

Regel 2: Mit einem Quotient wird potenzirt, indem man mit dem Dividend potenzirt und die Potenz mit dem Divisor radicirt, oder indem man mit dem umgekehrten Quotient radicirt.

Regel 3: Mit einem Quotient wird radicirt, indem man mit dem Dividend potenzirt und die Potenz mit dem Divisor radicirt, oder indem man mit dem umgekehrten Quotient potenzirt.

Anmerkung. Durch diese Formel lernt man eine Potenz mit gebrochenem Exponent kennen, sie entsteht somit aus einer Potenz mit ganzem Exponent, welche mit einer Zahl radicirt worden ist. Sämmtliche Sätze über Potenzen mit ganzen Exponenten gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Die Beweise sind leicht zu führen, wenn man nur die Potenz mit gebrochenem Exponent verwandelt in eine Wurzel aus einer Potenz mit ganzem Exponent und dann die vorangegangenen Regeln über Potenzen und Wurzeln anwendet.

7) $$\sqrt[x]{a^y} = \left(\sqrt[x]{a}\right)^y$$

Bew. Die Formel ist durch Radiciren entstanden und richtig, weil

$$\Big[\overbrace{\left(\sqrt[x]{a}\right)^y}^{\text{Wurzel}}\Big]^{\overbrace{x}^{\text{Exponent}}} = \Big[\left(\sqrt[x]{a}\right)^x\Big]^y = \overbrace{a^y}^{\text{Radikand}}$$

Regel 1: Eine Potenz wird mit einer Zahl radicirt, indem man die Basis mit der Zahl radicirt, oder: Hat man nach einander zu potenziren und zu radiciren, so ist die Ordnung, in welcher dies geschieht, beliebig.

Regel 2: Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenzirt, indem man den Radikand mit der Zahl potenzirt.

8) $$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a} = \sqrt[y]{\sqrt[x]{a}}$$

Bew. Die Formel ist durch Radiciren entstanden und daher richtig, weil

$$\overbrace{\left(\sqrt[xy]{a}\right)}^{\text{Wurzel}}{}^{\overbrace{x}^{\text{Exponent}}} = \left(\sqrt[\frac{xy}{x}]{a}\right)^{\frac{x}{x}} = \overbrace{\sqrt[y]{a}}^{\text{Radikand}} \quad \text{und} \quad \overbrace{\left(\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}}\right)}^{\text{Wurzel}}{}^{\overbrace{x}^{\text{Exponent}}} = \sqrt[y]{\left(\sqrt[x]{a}\right)^x} = \overbrace{\sqrt[y]{a}}^{\text{Radikand}}$$

Regel 1: Eine Wurzel wird mit einer Zahl radicirt, indem man den Exponent mit der Zahl multiplicirt oder den Radikand mit der Zahl radicirt, oder: Mit zwei Zahlen wird nach einander radicirt, indem man mit ihrem Produkte radicirt oder mit den Zahlen in beliebiger Ordnung nach einander radicirt.

Regel 2: Mit einem Produkte wird radicirt, indem man mit den Faktoren nach einander radicirt.

VII. Logarithmirung.

Logarithmiren heisst mit Hülfe einer Potenz und ihrer Basis den Exponent finden. Ist c eine Potenz und a ihre Basis, so verbindet man beide Zahlen durch das Zeichen log und es entsteht der Exponent ${}^{a}\log c$, gelesen: der a Logarithmus von c. Die gegebene Potenz c wird Logarithmand, die gegebene Basis a Basis des Logarithmensystems und der Exponent ${}^{a}\log c$ Logarithmus genannt. Ist aber ${}^{a}\log c = b$, so wird ${}^{a}\log c$ formeller, b wirklicher Logarithmus genannt. Diese Gleichung ist aber richtig, wenn $a^b = c$.

1) $$b^{{}^{b}\log n} = n$$

Bew. Nach dem Begriffe der Logarithmirung ist ${}^{b}\log n$ ein Exponent, während b die Basis und n die Potenz ist. Die Formel ist daher richtig, weil sie dasselbe ausdrückt.

Regel: Wenn man die Basis des Logarithmensystems mit dem Logarithmus potenzirt, so erhält man den Logarithmand.

2) $${}^{a}\log a^x = x$$

Bew. Die Formel ist durch Logarithmirung entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{a}^{\text{Systembasis}}{}^{\overbrace{x}^{\text{Logarithmus}}} = \overbrace{a^x}^{\text{Logarithmand}}$$

Regel: Wenn man eine Potenz nach ihrer Basis logarithmirt, so erhält man ihren Exponent.

3) $${}^{x}\log x = 1$$

Bew. Die Formel ist durch Logarithmirung entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{x}^{\text{Systembasis}}{}^{\overbrace{1}^{\text{Logarithmus}}} = \overbrace{x}^{\text{Logarithmand}}$$

Regel: Wenn man eine Zahl nach sich selbst logarithmirt, so erhält man 1.

4) $${}^{c}\log (ab) = {}^{c}\log a + {}^{c}\log b$$

Bew. Die Formel ist durch Logarithmiren entstanden und richtig, weil

$$\overbrace{c}^{\text{Systembasis}}{}^{\overbrace{{}^{c}\log a + {}^{c}\log b}^{\text{Logarithmus}}} = c^{{}^{c}\log a} \,.\, c^{{}^{c}\log b} = \overbrace{a \,.\, b}^{\text{Logarithmand}}$$

Regel 1: Ein Produkt wird logarithmirt, indem man die Logarithmen der Faktoren addirt.

Regel 2: Logarithmen nach derselben Basis werden addirt, indem man das Produkt der Logarithmanden nach derselben Basis logarithmirt.

5) $${}^{c}\log \frac{a}{b} = {}^{c}\log a - {}^{c}\log b$$

Bew. $$\overbrace{c}^{\text{Systembasis}}{}^{\overbrace{{}^{c}\log a - {}^{c}\log b}^{\text{Logarithmus}}} = c^{{}^{c}\log a} : c^{{}^{c}\log b} = \overbrace{a : b}^{\text{Logarithmand}}$$

Regel 1: Ein Quotient wird logarithmirt, indem man die Logarithmen des Dividend und Divisors von einander subtrahirt.

Regel 2: Logarithmen nach derselben Basis werden von einander subtrahirt, indem man den Quotient der Logarithmanden nach derselben Basis logarithmirt.

6) $${}^{c}\log a^n = n \,.\, {}^{c}\log a$$

$$\text{Bew.}\qquad \overbrace{c}^{\text{Systembasis}}{}^{\overbrace{n\,\cdot\,{}^{c}\log a}^{\text{Logarithmus}}} = \left(c^{\,{}^{c}\log a}\right)^{n} = \overbrace{a^{n}}^{\text{Logarithmand}}$$

Regel 1: Eine Potenz wird logarithmirt, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponent multiplicirt.

Regel 2: Ein Logarithmus wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Logarithmand mit der Zahl potenzirt.

7) $${}^{c}\log \sqrt[n]{a} = \frac{{}^{c}\log a}{n}$$

$$\text{Bew.}\qquad \overbrace{c}^{\text{Systembasis}}{}^{\overbrace{\frac{{}^{c}\log a}{n}}^{\text{Logarithmus}}} = \sqrt[n]{c^{\,{}^{c}\log a}} = \overbrace{\sqrt[n]{a}}^{\text{Logarithmand}}$$

Regel 1: Eine Wurzel wird logarithmirt, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Exponent dividirt.

Regel 2: Ein Logarithmus wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Logarithmand mit der Zahl radicirt.