Ueber das harmonische Verhältniß.

Bemerkung. Da die Lehre von der harmonischen Theilung der Linien, obwohl eine der interessantesten und fruchtbarsten in der ebenen Geometrie, in den meisten Lehrbüchern, z. B. denen von Koppe und Kambly, etwas stiefmütterlich bedacht ist, so will ich auf den folgenden Blättern etwas Ausführlicheres darüber mitzutheilen versuchen, ohne jedoch den Gegenstand erschöpfen oder durchaus Neues aufstellen zu wollen.

1. Die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ꝛc., bei welcher die Reihe der gewöhnlichen Zahlen die Nenner bildet, wird die harmonische genannt, weil bekanntermaßen, wenn 1 die Länge der Saite irgend eines Grundtones bezeichnet, $\frac{1}{2}$ die Saitenlänge der höheren Octave, $\frac{1}{3}$ die Länge für die Octave der Quinte, $\frac{1}{4}$ die Saitenlänge der zweiten höheren Octave u. s. w. andeutet.

In dieser Reihe haben je drei auf einander folgende Glieder die Eigenschaft, daß das erste derselben sich zum dritten verhält, wie ihre Unterschiede mit dem mittleren Gliede; z. B. $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} : \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{20} : \frac{1}{30}$.

Daher nennt man je drei Zahlen a, b, c, die in dem angedeuteten Verhältnisse $a : c = b - a : c - b$ stehen, — sie mögen dieser Reihe angehören oder nicht — drei harmonische Zahlen, die mittlere derselben das harmonische Mittel zwischen den beiden andern und jene Proportion eine harmonische. Solche harmonische Zahlen sind z. B. 3, 4, 6; 10, 12, 15; $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{11}$. Diese Zahlen haben aber noch andere merkwürdige Eigenschaften und bestimmte Beziehungen zu stetigen Zahlen, welche nun näher erörtert werden sollen.

2. Aus der Proportion $a : c = b - a : c - b$ (I) ergiebt sich $\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{b}$, oder wenn man auf beiden Seiten der Gleichung noch mit b dividirt und die Brüche reducirt,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \quad \text{(II)}.$$

Nennt man nun diejenige Zahl, welche, mit einer gegebenen multiplicirt, das Product der Einheit gleich macht, das Reciproke der gegebenen Zahl, so folgt aus der Gleichung (II) der Satz:

Sind a, b, c, drei harmonische Zahlen, so stehen die reciproken Werthe derselben in stetigem arithmetischen Verhältnisse, d. h. sie haben gleiche Unterschiede.

3. Auch die reciproken Werthe der größten dreier harmonischen Zahlen und ihrer Unterschiede mit der kleinsten und mittleren stehen in stetigem arithmetischen Verhältnisse.

Denn aus der Proportion (I) folgt durch correspondirende Addition und Subtraction

$$a + c : c = c - a : c - b,$$

ferner $2c : c - a = 2c - b : c - b$ oder $c : c - a = c - \frac{b}{2} : c - b$ (III),

folglich $\frac{2c}{c-a} = \frac{2c-b}{c-b}$, $\frac{2}{c-a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-b}$,

oder $\frac{1}{c-b} - \frac{1}{c-a} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c}$.

4. Aus (I) ergiebt sich der Werth von $b = \frac{2ac}{a+c} = \frac{ac}{\frac{a+c}{2}}$,

also $\frac{a+c}{2} : \sqrt{ac} = \sqrt{ac} : b$ (IV).

Da nun $\frac{a+c}{2}$ das arithmetische Mittel, $\sqrt{ac}$ das geometrische, b das harmonische Mittel zwischen a u. c ist, so ergiebt sich der Satz:

Die drei Mittel zwischen irgend zwei gegebenen Zahlen, nämlich das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel, stehen in einem stetigen geometrischen Verhältnisse. Von diesen ist das arithmetische Mittel das größte, das harmonische das kleinste.

5. Aus der Proportion (I) folgt wieder durch correspondirende Addition und Subtraction:

$$2a - b : b = b : 2c - b$$

oder $a - \frac{b}{2} : \frac{b}{2} = \frac{b}{2} : c - \frac{b}{2}$ (V).

Diese Proportion läßt sich in folgenden Satz fassen:

Aus drei harmonischen Zahlen entstehen drei stetige Zahlen, wenn man jede derselben um das halbe harmonische Mittel verringert.

Aus den harmonischen Zahlen 21, 24, 28 z. B. erhält man die stetigen Zahlen 9, 12, 16, indem man von jeder 12 abzieht.

6. Da nun auf diese Art das halbe harmonische Mittel ein geometrisches wird, so folgt umgekehrt:

Aus drei stetigen Zahlen werden drei harmonische abgeleitet, wenn man zu jeder derselben das geometrische Mittel addirt.

Aus den stetigen Zahlen 2, 12, 72 z. B. ergeben sich die harmonischen 14, 24, 84; allgemein entstehen aus den stetigen Größen m, n, p die harmonischen $m + n$, $2n$, $p + n$.

7. Aus (I) folgt auch $2a - b : a = b : c = 2b - 2a : c - a$,

also $a - \frac{b}{2} : a = b - a : c - a$ (VI)

oder nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{b-a} - \frac{1}{a} = \frac{2}{c-a}.$$

Aehnliche Relationen, welche das harmonische Verhältniß ebensogut bestimmen, sind noch:

$$c - a : c - b = a : \frac{b}{2}$$

$$c - b : b - a = c - \frac{b}{2} : \frac{b}{2} \text{ (VII)}$$

$$c - b : b - a = \frac{b}{2} : a - \frac{b}{2}$$

oder $\frac{1}{b-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{2}{b}$.

8. Da nach §. 3. $c-b : c-a = c : c + a$ ist, so ist auch

$$2c-2b : c-a = 2c : c + a$$

oder $c + a - 2b : c-a = c-a : c + a$

folglich $(c-a)^2 = (c+a)^2 - 2b\,(c+a) = (c+a-b)^2 - b^2$ (VIII).

9. Diese Verhältnisse und Eigenschaften der harmonischen Zahlen gestalten sich zu neuen Sätzen, wenn a, b, c die Maßzahlen dreier Linien bedeuten, die auf eine Linie von demselben Punkte A aus nach derselben Seite aufgetragen sind, so daß $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ wird. (Siehe Fig. 1!)

Dann gestaltet sich die Grundeigenschaft der harmonischen Zahlen folgendermaßen:

$$AB : AD = AC - AB : AD - AC$$

oder $AB : BC = AD : DC$.

und man kann demnach die Erklärung aussprechen:

Eine Linie (AD) ist harmonisch getheilt, wenn der erste Theil sich zum zweiten verhält, wie die ganze Linie zum dritten Theile, von welchem Endpunkte man auch zählen mag.

Hierbei nennt man A und C, B und D zugeordnete harmonische Punkte und sagt auch wohl, AC sei in B und D oder BD in A und C harmonisch getheilt.

10. Der Satz über die drei Mittel im §. 4. läßt sich geometrisch, wie folgt, darstellen und leicht beweisen.

Trägt man auf eine Linie zwei gegebene von demselben Endpunkte nach derselben Richtung auf, beschreibt einen Halbkreis über dem Unterschiede beider Linien, einen zweiten über der kleinern, vermehrt um den halben Unterschied, zieht vom Anfangspunkte der Linien eine Tangente an den kleinen Kreis, welche gerade den Durchschnittspunkt beider Kreise trifft, und fällt von diesem ein Perpendikel auf den Durchmesser, so ist der Durchmesser des größern Halbkreises das arithmetische, die Tangente das geometrische und das größere Segment des Durchmessers das harmonische Mittel zwischen den beiden gegebenen Linien, und diese drei Mittel bilden eine stetige geometrische Proportion.

In Fig. 2 ist AD das arithmetische, AE das geometrische und AF das harmonische Mittel zwischen AC und AB.

11. Der Satz des §. 5. lautet dann: Halbiert man die Strecke zwischen zwei zugeordneten harmonischen Punkten (in M), so verhalten sich die Entfernungen des Mittelpunktes von den drei harmonischen Punkten, die nach derselben Seite liegen, stetig zu einander; nämlich $MB : MC = MC : MD$. (Fig. 1.)

Den Satz des §. 6. kann man vielleicht am besten so aussprechen:

„Schneidet man eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem das Perpendikel aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gefällt ist, zu beiden Seiten ihres Endpunktes auf der Hypotenuse selbst und deren Verlängerung ab, so sind die Endpunkte der doppelten Kathete und die Endpunkte des getheilten Segments zugeordnete harmonische Punkte.“ In Fig. 3 sind A, E, D, F harmonische Punkte.

12. Die Proportionen (III) und (VI) geben, auf Fig. 1 angewandt, $DC : DB = DM : DA$ und $BM : BA = BC : BD$.

D. h.: Halbiert man die Strecke zwischen zwei zugeordneten harmonischen Punkten auf einer harmonisch getheilten Linie, so bilden die Entfernungen jedes der anderen zugeordneten Punkte von den übrigen vier Punkten der Reihe nach eine richtige geometrische Proportion.

13. Aus der Gleichung VII folgt: $CD : CB = MD : MA$.

D. h.: Die Strecke zwischen zwei zugeordneten harmonischen Punkten wird durch den dritten dazwischen liegenden harmonischen Punkt nach demselben Verhältnisse getheilt, als die ganze Linie durch den Mittelpunkt der halbierten Strecke zwischen den andern zugeordneten Punkten.

14. Die Gleichung VIII spricht den merkwürdigen Satz aus:

Die beiden Entfernungen je zweier zugeordneten harmonischen Punkte auf einer harmonisch getheilten Linie sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, zu dem die Summe der beiden äußeren Theile die Hypotenuse bildet.

15. Auch der folgende bekannte Satz Bernoullis führt auf die harmonische Theilung:

Zieht man durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks Transversalen nach den drei Ecken, bis sie die gegenüberliegenden Seiten oder deren Verlängerungen schneiden, so verhalten sich je zwei dadurch entstandene Abschnitte einer Seite wie die näheren Abschnitte der anderen anliegenden Seiten dividirt durch die entfernteren, z. B. $AD : DB = \frac{AF}{FC} : \frac{BC}{EC}$ (s. Fig. 4 u. 5!).

Nennt man, wenn die Transversale durch ein Dreieck die Verlängerung einer Seite trifft, die Entfernungen des Durchschnittspunktes von den Enden der Seite auch Abschnitte derselben, so gilt auch folgender Satz des Menelaos:

Zieht man eine Transversale durch ein Dreieck, welche die drei Seiten oder deren Verlängerungen schneidet, so verhalten sich je zwei Abschnitte auf einer Seite wie die näheren Abschnitte der anderen anliegenden Seiten, dividirt durch die entfernteren; z. B. $AG : BG = \frac{AF}{FC} : \frac{BE}{EC}$ (s. Fig. 6!). Verbindet man diese beiden Sätze mit einander, so ergiebt sich ein Satz über harmonische Theilung.

Zieht man durch einen Punkt in einem Dreieck Transversalen von den Ecken, bis sie die Seiten oder deren Verlängerungen schneiden, und legt auch eine Transversale durch je zwei dieser Durchschnittspunkte, so bestimmt diese noch einen zweiten Durchschnittspunkt auf der dritten Seite, und dann ist jede Seite des Dreiecks in den beiden Durchschnittspunkten harmonisch getheilt.

Beweis. (Fig. 7.) $AD : DB = \frac{AF}{FC} : \frac{BE}{EC}$

$$AG : BG = \frac{AF}{FC} : \frac{BE}{EC}$$

folglich $AD : DB = AG : BG$.

Nennt man, wie gewöhnlich, eine Figur, bei welcher jede von vier Linien die drei anderen durchschneidet, ein vollständiges Viereck und die drei Linien, welche je zwei der drei unverbundenen Durchschnittspunkte verbinden, die Diagonalen desselben, so bildet jedes Dreieck mit drei Transversalen, die von den Ecken durch einen Punkt gehen, und einer vierten, die durch zwei Durchschnittspunkte derselben bis zur dritten Seite gezogen wird, ein vollständiges Viereck mit seinen drei Diagonalen.

Darum folgt aus dem Vorigen unmittelbar der Satz:

In einem vollständigen Viereck wird jede Diagonale in den Punkten, in welchen die beiden andern sie durchschneiden, harmonisch getheilt.

In Fig. 7 ist AFCEBH ein vollständiges Viereck, AB, CH und FE sind die Diagonalen, und AB ist in D und G, CH in K und D, FE in K und G harmonisch getheilt.

16. Dieser Satz giebt zugleich einen bequemen Weg an, wie man zu drei auf einer geraden Linie gegebenen harmonischen Punkten den vierten finden kann.

Soll zu einem äußern Punkte der innere zugeordnete gefunden werden, so verbinde man (s. Fig. 8) die zwei gegebenen zugeordneten Punkte A, C mit einem beliebigen Punkte K außerhalb, ziehe vom dritten gegebenen Punkte D eine beliebige Transversale durch das Dreieck KAC, verbinde die Durchschnittspunkte E und F mit A und C, und ziehe aus K durch den Durchschnittspunkt G der Linien AE und CF die Linie KB, so ist B der zu D zugeordnete harmonische Punkt.

Sind dagegen drei auf einander folgende A, B, C der vier harmonischen Punkte gegeben, und es soll der zu B zugeordnete äußere gefunden werden, so verbinde man A, B und C mit einem beliebigen Punkte K, ziehe von A und C durch einen beliebigen Punkt der Linie KB die Querlinien AE und CF, dann eine Linie durch E und F, bis sie AC scheidet, so ist dieser Durchschnittspunkt der gesuchte vierte harmonische Punkt.

17. Auf eine andere Art gelangt man zu harmonisch getheilten Linien durch den bekannten Satz von J. Steiner, der gewissermaßen nur ein specieller Fall des vorhin bewiesenen Satzes vom vollständigen Viereck ist:

Zieht man durch die Spitze eines Dreiecks eine sogenannte mittlere Transversale, d. h. nach der Mitte der Grundlinie, und auch eine Parallele zu der letzteren, so wird jede gerade Linie, welche die vier von der Spitze ausgehenden Linien schneidet, von diesen harmonisch getheilt.

Der Beweis wird am leichtesten für Linien geführt, welche durch die Mitte der Grundlinie gehen, läßt sich aber auf jede andere übertragen.

Ist in Figur 9 ABC das Dreieck, D die Mitte von AB, CE ∥ AB, so ist, wenn man durch D die Linie FH beliebig zieht, Dreieck FAD $\sim$ FCH, Dreieck DGB $\sim$ HGC; darum verhält sich:

$$FD : DA = FH : HC$$
$$DG : DB = GH : HC.$$

Aus beiden Proportionen folgt, da DA = DB ist,

$$FD : DG = FH : GH,$$

d. h. FG ist in D und H harmonisch getheilt.

Zusatz 1. Da nun jede vier Linien, die von einem Punkte ausgehen und eine sie durchschneidende harmonisch theilen, auch alle anderen nach diesem Verhältniß theilen, so nennt man solche vier Linien Harmonicalen oder harmonische Strahlen. Verlängert man sie über den Scheitel hinaus, so haben von den acht Linien, die von demselben Punkte ausgehen, je vier auf einander folgende die genannte Eigenschaft.

Zusatz 2. Ist das Dreieck ABC, aus dem die harmonischen Strahlen hervorgehen, gleichschenklig, so steht die mittlere Transversale auf der Grundlinie AB und auf der zu ihr parallelen CE senkrecht, und halbiert den Winkel ACB, ebenso EC den Nebenwinkel von ACB. Daraus ergiebt sich der Satz:

Wenn von vier harmonischen Strahlen der eine den Winkel halbiert, den die beiden andern zugeordneten bilden, so hat sein zugeordneter dieselbe Eigenschaft und steht auf ihm senkrecht.

Zusatz 3. Ist das Dreieck ABC dagegen rechtwinklig, so ist die mittlere Transversale gleich der halben Hypotenuse, CD = AD = DB, folglich $\angle x = y = B$, $\angle z = t = A$, und es gilt auch der umgekehrte Satz:

Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete auf einander senkrecht stehen, so halbiert jeder den Winkel, den die beiden andern zugeordneten mit einander bilden.

Zusatz 4. Wenn man in einem Dreieck einen Winkel halbiert und auch dessen Nebenwinkel, so theilen die Halbierungslinien die gegenüber liegende Seite harmonisch.

Dieser Satz, der sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergiebt, kann auch ganz unabhängig hiervon vermittelst zweier bekannten Sätze vom Dreiecke bewiesen werden.

18. Der im vorigen §. bewiesene Satz giebt ein Verfahren an die Hand, zu drei harmonischen Strahlen den vierten zu finden.

**

Ist zu dem Strahl AC (s. Fig. 10), der zwischen AB und AD liegt, der zugeordnete zu finden, so ziehe man aus einem beliebigen Punkte F des Strahls AC FG ∥ AB, FH ∥ AD, verbinde G mit H durch eine gerade Linie und ziehe aus A eine Parallele dazu; dann ist diese der vierte zu AC zugeordnete harmonische Strahl.

Wenn dagegen der zu AD (s. Fig. 11) zugeordnete Strahl gesucht werden soll, so ziehe man FG ∥ AD zwischen den Linien AB und AC, halbiere FG in H und ziehe AE durch H; dann ist diese Linie der vierte harmonische Strahl.

19. Wenn auf einer Linie vier harmonische Punkte gegeben sind, und man beschreibt um den Abstand zweier zugeordneten als Durchmesser einen Kreis, so haben die Abstände sämmtlicher Punkte des Kreises von den beiden andern zugeordneten Punkten dasselbe Verhältniß.

Beweis. Da in Figur 12 A, B, C, D vier harmonische Punkte sind, so sind EA, EB, EC, ED harmonische Strahlen. Da ferner EB und ED einen rechten Winkel bilden, so halbiert nach §. 17. Zusatz 3. EB den Winkel ABC; demnach verhält sich:

$$AE : EC = AB : BC$$

d. h. das Verhältniß AE : EC ist von der Lage des Punktes E auf dem Kreise unabhängig.

20. Zieht man durch einen Punkt in einem Kreise Sehnen oder durch einen Punkt außerhalb Secanten, und legt an je zwei Durchschnittspunkte derselben mit dem Kreise Tangenten, so liegen die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare auf einer geraden Linie, welche auf der Centrale, die durch den angenommenen Punkt geht, senkrecht steht. Das Rechteck aus den Abständen dieser Linie und des Punkts vom Mittelpunkte ist dem Quadrate des Radius gleich.

Beweis. Wenn durch den gegebenen Punkt C (s. Fig. 13) eine Sehne KH gezogen ist, und an H und K Tangenten gelegt sind, die sich in G schneiden, so fälle man aus G das Perpendikel GN auf die Verlängerung von MC; dann ist, wenn man MG und MH zieht, $ML.MG = MH^2$, weil MHG ein rechtwinkliges Dreieck und HL darin die Höhe ist. Da nun aber das Dreieck MLC $\sim$ MAG ist, so ist auch

$$ML.MG = MC.MA;\ \text{also}\ MC.MA = MH^2 = \text{dem Quadrat des Radius.}$$

Durch diese Gleichung ist die Lage der Linie GN bestimmt; darum müssen die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare, deren Berührungssehnen durch C gehen, auf dieser Linie liegen.

Zusatz 1. Für alle Sehnen, die durch C gezogen werden, liegen die Durchschnittspunkte der Tangentenpaare auf PN; ebenso werden für alle Secanten, die durch A gehen, die Durchschnittspunkte der Tangentenpaare auf der Verlängerung von EF liegen. Darum nennt man C den Pol von PN, PN die Polare des Punkts C, A den Pol zu EF, EF die Polare von A.

Zusatz 2. Die Pole aller Linien, die durch denselben Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises gehen, liegen auf der Polare des Punkts. Umgekehrt schneiden sich die Polaren aller Pole, die in gerader Linie liegen, in dem Pole dieser Linie. Der Pol einer Tangente am Kreise ist der Berührungspunkt.

Zusatz 3. Da $MC.MA = MB^2$ und DB in M halbiert ist, so sind nach §. 11. D, C, B, A harmonische Punkte; d. h. der Durchmesser eines Kreises wird durch einen Pol in ihm und durch die zugehörige Polare harmonisch getheilt.

Zusatz 4. Auch jede Sehne oder Secante, die durch den Pol eines Kreises geht, wird durch den Pol und die zugehörige Polare harmonisch getheilt.

Beweis. (Fig. 14.) Um zu beweisen, daß GE in F und A harmonisch getheilt ist, ziehe man ML senkrecht auf GE, so ist Dreieck MLA $\sim$ ACF, folglich $AC.AM = AF.AL$,

oder wenn man $AC = MA - MC$ und $AF = LA - LF$ setzt,

$$AM^2 - MC.MA = AL^2 - LF.LA.$$

Zieht man diese Gleichung von $MA^2 - ML^2 = AL^2$ ab, so bleibt

$$MC.MA - ML^2 = LF.LA.$$

Da aber DB in C und A harmonisch getheilt ist, so muß

$$MC.MA = MB^2 = ME^2 \text{ sein, also auch}$$

$$ME^2 - ML^2 = LE^2 = LF.LA.$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß GE in F und A harmonisch getheilt ist, da L die Mitte von GE ist.

21. Der Satz des vorigen §. läßt sich auch umkehren und lautet dann:

Zieht man aus verschiedenen Punkten einer geraden Linie Tangentenpaare an einen Kreis, und verbindet die Berührungspunkte jedes Paares, so durchschneiden sich alle diese Berührungssehnen in demselben Punkte, welcher außerhalb des Kreises liegt, wenn die gegebene Linie den Kreis durchschneidet, aber innerhalb, wenn sie ihn nicht trifft. Das Rechteck aus den Abständen des Punkts und der Linie vom Mittelpunkte ist dem Quadrate des Radius gleich.

Beweis. Ist in Fig. 13 PN die gegebene Linie, so ziehe man die Linie DA durch den Mittelpunkt senkrecht auf PN, lege aus dem beliebigen Punkte G in derselben Tangenten an den Kreis, so wird die Verbindungslinie der Berührungspunkte KH auf der Centrale GM senkrecht stehen und in einem gewissen Punkte C die Linie DA durchschneiden.

Beschreibt man nun um MG als Durchmesser einen Kreis, so geht derselbe durch H, K, A; demnach ist, wenn man EF auf MA senkrecht zieht,

$$MC.CA = HC.CK = DC.CB = CE^2,$$

also auch MEA ein rechtwinkliges Dreieck und

$$MC.MA = ME^2 = MB^2.$$

Da nun durch diese Gleichung die Lage des Punkts C auf der Centralen DA für ein beliebiges Tangentenpaar bestimmt ist, so werden die Berührungssehnen aller Tangenten, die von einem Punkte in PN ausgehen, sich im Punkte C durchschneiden.

22. Zeichnet man in einen Kreis ein vollständiges Kreisviereck und verbindet die Durchschnittspunkte der Diagonalen und Seiten durch gerade Linien, so liegen die Vereinigungspunkte der Tangenten, die an irgend zwei Eckenpaare gelegt sind, auf derjenigen Verbindungslinie, welche die Durchschnittspunkte der von denselben Ecken ausgehenden andern Seitenpaare oder Diagonalen verbindet, und theilen dieselbe harmonisch.

Beweis. Da bei jedem vollständigen Viereck Seiten und Diagonalen harmonisch getheilt werden, so werden auch die Sehnen BE und DA, die zum vollständigen Viereck KBEAHD gehören, in K und L, in K und M harmonisch getheilt.

Da aber auch jede Sehne, die durch den Pol eines Kreises geht, durch diesen und die zugehörige Polare harmonisch getheilt wird, so liegen M und L auf der Polaren von K. Aus demselben Grunde ist DB in H und P, AE in H und N harmonisch getheilt, und PN ist die Polare des Punkts H. Da sich nun HL und KN im Punkte G schneiden, so ist G der Pol von HK.

Legt man daher an A und B, D und E Tangentenpaare, so müssen sich je zwei auf der Polaren des Punkts G, d. i. auf HK, vereinigen. Ebenso werden sich die Tangentenpaare an B und E, D und A auf GL, der Polaren des Punkts K, schneiden; die Tangentenpaare an B und D, A und E auf GN, der Polaren des Punkts H, in welchem BD und AE zusammentreffen.

Verlängert man die Tangenten CB und EF, so schneiden sie sich in einem Punkt der Linie GL. Da nun B, K, E, L vier harmonische Punkte sind, so sind RL, RE, RK, RC harmonische Strahlen und theilen auch die Linie KH in C und F harmonisch.

23. Sucht man zu zwei Kreisen die Aehnlichkeitspunkte, so theilen diese die Centrale harmonisch.

Bekanntlich schneiden die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise die Centrale in den Aehnlichkeitspunkten. Zieht man daher in Fig. 16 die innere Tangente BC und die äußere DK, so sind A und K die Aehnlichkeitspunkte. Verbindet man noch die Berührungspunkte D und B mit dem Mittelpunkte M, E und C mit N, so ist Dreieck MBA $\sim$ ACN, Dreieck MDK $\sim$ NEK; demnach verhält sich:

$$\begin{aligned} MA : AN &= MB : NC \\ MK : NK &= MD : NE \\ \hline \text{folglich } MA : AN &= MK : NK; \end{aligned}$$

d. h. M, A, N, K sind vier harmonische Punkte.

24. Beschreibt man in und um einen Kreis zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl, und auch zwei von doppelter Seitenzahl, so ist die Fläche des innern Doppelecks das geometrische Mittel zwischen dem innern und äußern Vieleck von einfacher Seitenzahl, das umschriebene Doppeleck aber das harmonische Mittel zwischen dem innern Doppeleck und dem umschriebenen Vieleck von einfacher Seitenzahl.

Beweis. Ist in Fig. 17 AB die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks v, so wird, wenn man ME darauf senkrecht zieht, und an E eine Tangente legt, bis sie von den verlängerten Radien MA und MB begrenzt wird, CD die Seite des umschriebenen Vielecks u, die Sehne AE die Seite des eingeschriebenen Vielecks mit doppelter Seitenzahl V, und wenn man noch die Tangente AG = GE zieht, GE die halbe Seite des umschriebenen Vielecks U von doppelter Seitenzahl.

Demnach ist das Dreieck $AFM = \frac{1}{2n}$ v, $AME = \frac{1}{2n}$ V, $MCE = \frac{1}{2n}$ u, $MGE = \frac{1}{4n}$ U.

Nun verhält sich, da die Dreiecke MAF und MAE, MAE und MCE gleiche Höhen haben,

$$\begin{aligned} MAF : MAE &= MF : ME = MA : MC \\ MAE : MCE &= MA : MC \\ \hline \text{folglich } MAF : MAE &= MAE : MCE, \end{aligned}$$

oder wenn man mit der Seitenzahl 2n multiplicirt, und die obigen Werthe für die Dreiecke setzt,

$$v : V = V : u.$$

Hiedurch ist die erste Behauptung des Satzes erwiesen.

Da ferner MG den Winkel CME halbiert, so verhält sich

$$CG : GE = MC : ME = MC : MA,$$

$$\text{folglich } CGA : GEA = MCE : MAE$$

$$\text{oder } CME - MAGE : MAGE - MAE = MCE : MAE.$$

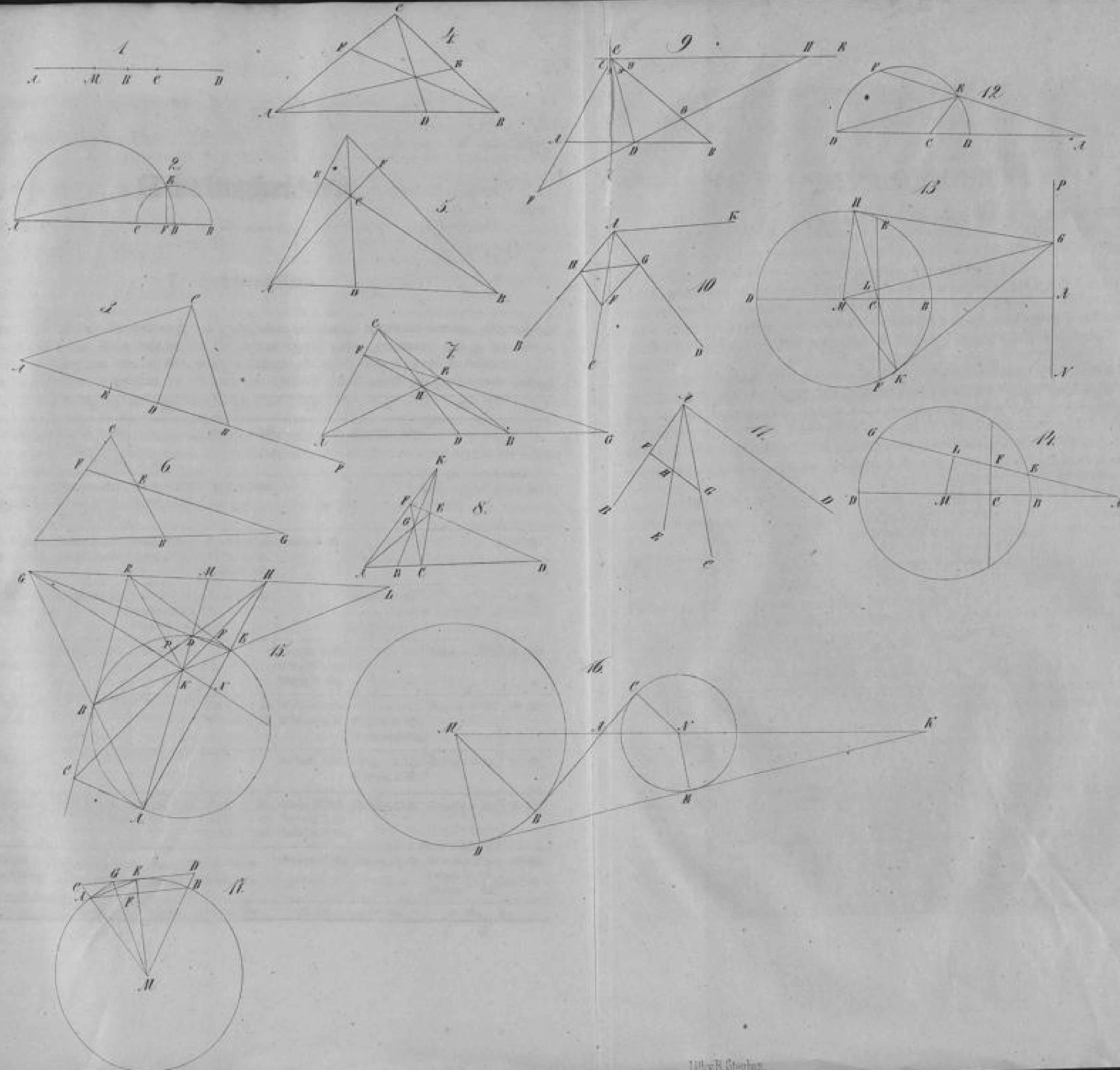
Setzt man statt der Dreiecke die obigen Werthe, durch die Vielecke ausgedrückt, und multiplicirt zugleich die ganze Proportion mit 2n, so erhält man, da MAGE = 2MGE ist:

$$u - U : U - V = u : V.$$

Diese Proportion beweist, daß u, U, V harmonische Größen sind.

Es ließen sich die vorhergehenden Betrachtungen über harmonische Theilung leicht noch viel weiter ausdehnen; allein für die Zwecke der Realschulen und in Rücksicht auf die Zeit, welche dem rein geometrischen Unterrichte gewidmet werden darf, möchte das Gegebene genügen. Mit gereifteren Schülern, als diese Deductionen voraussetzen, kann man, wofern die Zeit es erlaubt, das harmonische Verhältniß noch trigonometrisch behandeln und wird zu neuen fruchtbaren Sätzen gelangen.

Sanio.



Lith. v. B. Stephan.