Die Zeitgleichung.

Von

Professor Dr. Carl Schmidt.

In jedem Lehrbuch der mathematischen Geographie wird begründet, dass die einzelnen Sonnentage des Jahres, d. h. die Zwischenzeiten zwischen je zwei aufeinander folgenden Mittagen nicht genau dieselbe Länge haben, und dass infolgedessen Uhren, welche die wahre Sonnenzeit angeben, wie die Sonnenuhren, nicht gleichmässig gehen und zur exakten Zeitmessung untauglich sind. Eine gleichförmig gehende Uhr muss demnach im allgemeinen einen anderen Stand anzeigen, als eine Sonnenuhr, und der Unterschied zwischen den Zeitangaben beider heisst die Zeitgleichung.

Der allgemeine Verlauf der Zeitgleichung während eines Jahres ist in jedem Lehrbuch und Kalender angegeben und besteht aus kleineren Schwankungen im Sommer und ziemlich erheblichen im Winter.

Wenn man aus der durch Messung bestimmten Sonnenhöhe und -richtung die mittlere Ortszeit oder die geographische Länge des Beobachtungsorts ermitteln will, so muss man den genauen Wert der Zeitgleichung für den Augenblick der Beobachtung in Rechnung ziehen. Man entnimmt ihn den Tabellen eines astronomischen oder nautischen Jahrbuchs.

Den Lehrer der Mathematik, der solche Rechnungen und Aufgaben auch in seinem Unterricht erklärt und bearbeiten lässt, interessieren nun vor allem zwei Fragen, erstens wie die ungleichmässigen Schwankungen der Zeitgleichung zustande kommen und welchen Einfluss darauf die beiden Faktoren haben, welche die Ursache der Zeitgleichung bilden, und zweitens wie überhaupt die Werte der Zeitgleichung berechnet werden.

Über beide Fragen findet man auch in den Lehrbüchern der Astronomie nicht unmittelbar die gewünschte Auskunft. Da nämlich die Berechnung der Zeitgleichung ein besonderer Fall der allgemeinen Theorie der Planetenbewegung ist und zur theoretischen Astronomie gehört, so enthalten die Lehrbücher der sphärischen Astronomie ausser der allgemeinen Begründung nur die Ergebnisse, während die Lehrbücher der theoretischen Astronomie den besonderen Fall der Zeitgleichung entweder gar nicht betrachten oder im Hinblick auf die vorhergehende allgemeine Theorie nur kurz und ohne Rechnungsbeispiele behandeln.

Da ich mich aus Anlass meines Unterrichts mit der Beantwortung dieser Fragen schon vor mehreren Jahren beschäftigt habe, so will ich versuchen, in der vorliegenden Arbeit näher darauf einzugehen und die Theorie der Zeitgleichung möglichst klar und elementar zu entwickeln und durch Beispiele zu erläutern. Insbesondere mache ich auf eine graphische Darstellung der Zeitgleichung und der beiden sie verursachenden Einflüsse aufmerksam, die ohne Ableitung von Formeln erklärt werden kann und von mir schon seit mehreren Jahren beim Unterricht benutzt wird. Sie bringt sehr deutlich den ganz regelmässigen Verlauf der beiden ursächlichen Faktoren während eines Jahres und die daraus resultierenden ungleichmässigen Schwankungen der Zeitgleichung zur Anschauung und lässt erkennen, welchen Einfluss jeder derselben auf den Wert der Zeitgleichung an irgend einem Tage hat.

Verzeichnis der von mir berücksichtigten Literatur.

Bohnenberger, Astronomie, Tübingen 1811.
Littrow, J. J., Theoretische und praktische Astronomie, 3 Bände, Wien 1821—27.
Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie.
Israel-Holtzwart, Dr. Karl, Elemente der Astronomie, Wiesbaden.
Wolf, Dr. Rudolf, Handbuch der Astronomie, 2 Bände.
Klinkerfuess, Theoretische Astronomie.
Dziobek, Dr. Otto, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen, Leipzig 1888.
Berliner Astronomisches Jahrbuch 1903.

Inhaltsübersicht.

§ 1. Entwickelung der Grundbegriffe.

Die Zeit, in welcher die Erde eine volle Umdrehung um ihre Achse macht und das Himmelsgewölbe sich scheinbar einmal um die Weltachse dreht, heisst ein Sterntag. Aus den Beobachtungen gewisser Himmelserscheinungen, die bis in die ältesten Zeiten zurückreichen, und aus dem Trägheitsgesetz geht hervor, dass der Sterntag eine konstante Grösse und die Drehung des Himmels vollkommen gleichförmig ist. Deshalb wird der Sterntag als Mass der Zeit benutzt und in 24 Stunden Sternzeit, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden eingeteilt.

Infolge der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne muss letztere von der Erde aus gesehen ihre Stellung gegen die Fixsterne beständig verändern; sie scheint im Verlaufe eines Jahres an der Himmelskugel einen grössten Kreis zu durchlaufen, der als Sonnenbahn oder Ekliptik bezeichnet wird. Da aber die Erdachse mit der Ebene der Erdbahn einen Winkel von etwa $66\,^1/_2{}^0$ bildet und ihrer ursprünglichen Lage nahezu parallel bleibt, so fällt die Ekliptik nicht mit dem Himmelsäquator zusammen, sondern durchschneidet ihn in zwei gegenüberliegenden Punkten (2 grösste Kugelkreise halbieren einander) und ist gegen ihn etwa $23\,^1/_2{}^0$ geneigt (Schiefe der Ekliptik).

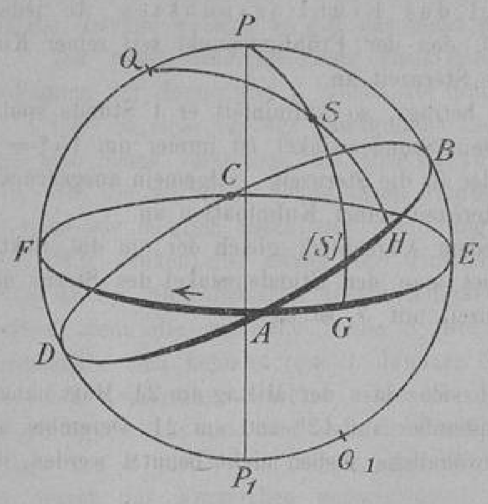

Fig. 1.

Figur 1 stellt die Himmelskugel ohne Beziehung zum Horizont dar. PP₁ ist die Drehungs- oder Weltachse, P der Nordpol, P₁ der Südpol. Der Kreis A E C F bezeichnet den Himmelsäquator, der an demselben angebrachte Pfeil deutet an, in welchem Sinne die tägliche Drehung der Himmelskugel um die Weltachse stattfindet. A B C D ist die Sonnenbahn oder Ekliptik, auf der sich die Sonne im Verlaufe eines Jahres in dem durch die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben bestimmten Sinne durch die bekannten 12 Sternbilder des Tierkreises zu bewegen scheint.

Der Sinn dieser Bewegung ist also dem der täglichen Drehung der Himmelskugel gerade entgegengesetzt, so dass die Sonne innerhalb eines Jahres einen Umlauf weniger um die Weltachse macht, als die Himmelskugel. Die Sonne steht am 21. März bei Frühlingsanfang im Punkte A, der deshalb auch Frühlingspunkt genannt wird, am 21. Juni in B, am 23. September in C und am 21. Dezember in D.

Bekanntlich wird die Lage eines Orts auf der Erde durch seine geographische Breite und Länge bestimmt. Die geographische Breite eines Orts ist sein Bogenabstand vom Äquator, die geographische Länge der Winkel zwischen dem Meridian des Orts und dem Meridian von Greenwich oder auch die Gradzahl des Bogens auf dem Äquator zwischen beiden Meridianen.

Ebenso wird die Lage eines Sternes S an der Himmelskugel gegen den Himmelsäquator oder gegen die Ekliptik bestimmt. Im ersten Falle denkt man sich durch den Pol P und den Stern S den sogenannten Deklinations- oder Stundenkreis des Sterns P S G gezogen, dann ist G S der Bogenabstand des Sterns vom Äquator oder seine Deklination δ, während A G, der Äquatorbogen zwischen dem Frühlingspunkt und dem Fusspunkt des Stundenkreises, die Rektascension r des Sterns genannt wird.

Soll die Lage des Sterns S gegen die Ekliptik angegeben werden, so denkt man sich durch ihn und die Pole der Ekliptik Q und Q₁ (d. h. diejenigen Punkte, die von ihr die Entfernung 90° haben) den Kreis Q S H gezogen, dann ist H S der Bogenabstand des Sterns von der Ekliptik oder seine Breite b und der Bogen A H auf der Ekliptik seine Länge l.

Rektascension und Länge werden also beide von demselben Nullpunkte, dem Frühlingspunkt aus gerechnet und zwar positiv in dem Sinne der jährlichen Bewegung der Sonne. Demnach ist die Länge der Sonne am 21. März gleich 0°, am 21. Juni 90° u. s. w. und dasselbe gilt von ihrer Rektascension.

Wenn der Frühlingspunkt A bei der Drehung des Himmels durch den Meridian des Beobachtungsortes geht oder kulminiert, so beginnt ein neuer Sterntag und es ist 0^h Sternzeit. Hat sich der Himmel um den 24. Teil von 360°, also um 15° weitergedreht, so ist es 1^h Sternzeit u. s. w. Nun versteht man unter dem Stundenwinkel eines Sterns in irgend einem Zeitpunkt den Winkel, um den sich der Himmel seit der Kulmination des Sterns gedreht hat, also den Winkel, den der Stundenkreis des Sterns am Himmelspole P mit dem Meridian des Beobachters bildet. Da man die Stundenwinkel gewöhnlich nicht im Winkelmass, sondern im Zeitmass ausdrückt, indem man den vollen Kreis statt in 360° in 24^h einteilt ($15° = 1^h$), so kann man sagen: Die Sternzeit ist der Stundenwinkel des Frühlingspunktes. In jedem Augenblick gibt also derjenige Bogen des Äquators, den der Frühlingspunkt seit seiner Kulmination beschrieben hat, in Zeitmass ausgedrückt die Sternzeit an.

Wenn die Rektascension eines Sterns $15^\circ = 1^h$ beträgt, so kulminiert er 1 Stunde später als der Frühlingspunkt, also um 1^h Sternzeit, und sein Stundenwinkel ist immer um $15^\circ = 1^h$ kleiner als der Stundenwinkel des Frühlingspunktes oder als die Sternzeit. Allgemein ausgedrückt:

1. Die Rektascension eines Sterns gibt die Sternzeit seiner Kulmination an.
2. Der Stundenwinkel eines Sterns ist in jedem Augenblick gleich der um die Rektascension verminderten Sternzeit. Bezeichnet man den Stundenwinkel des Sterns mit t, seine Rektascension mit r und die Sternzeit mit ϑ, so ist
$$t = \vartheta - r.$$

Wenden wir Satz 1) auf die Sonne an, so ergibt sich, dass der Mittag am 21. März nahezu auf 0^h Sternzeit, am 21. Juni auf 6^h, am 23. September auf 12^h und am 21. Dezember auf 18^h Sternzeit fällt. Deshalb kann die Sternzeit im gewöhnlichen Leben nicht benutzt werden, die Zeitbestimmung muss sich nach der Sonne richten.

§ 2. Wahre und mittlere Sonnenzeit. Zeitgleichung.

Wenn man statt des Frühlingspunktes die Sonne zur Zeitbestimmung benutzt, so erhält man die wahre Sonnenzeit. Es ist demnach 0^h wahre Sonnenzeit, wenn die Sonne kulminiert, 1^h, wenn der Stundenwinkel der Sonne $15^\circ = 1^h$ beträgt u. s. w. Kurz, die wahre Sonnenzeit ist der Stundenwinkel der Sonne.

Nun ist aber nach Satz 2) am Schlusse des § 1 der Stundenwinkel der Sonne gleich der Sternzeit vermindert um die Rektascension der Sonne, er würde also nur dann gleichmässig mit der Zeit zunehmen und zur Zeitmessung tauglich sein, wenn auch die Rektascension der Sonne in gleichen Zeiten um gleiche Beträge zunähme. Würde z. B. die Rektascension der Sonne täglich um $1^\circ = 4^m$ wachsen, so wäre jeder Sonnentag (d. h. die Zwischenzeit zwischen 2 aufeinander folgenden Mittagen) um 4^m länger als der Sterntag und könnte dann ebensogut als Mass der Zeit benutzt werden wie dieser. Die allgemeine Bedingung ist aber, wie sogleich gezeigt werden soll, nicht erfüllt, und deshalb hat eine Uhr, die wahre Sonnenzeit angibt, einen ungleichmässigen Gang.

Das scheinbare Fortschreiten der Sonne auf der Ekliptik ist durch die wirkliche Bewegung der Erde um die Sonne bedingt. Nach den Keplerschen Gesetzen beschreibt die Erde eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, und hat ihre grösste Geschwindigkeit in Sonnennähe (gegenwärtig am 2. Januar) und ihre kleinste in Sonnenferne (am 3. oder 4. Juli). Deshalb schreitet auch die Sonne in der Ekliptik mit wechselnder Geschwindigkeit voran. Wenn aber die Länge der Sonne ungleichmässig mit der Zeit zunimmt, so muss sich dies auch auf die Rektascension übertragen.

Noch grösser ist der Einfluss eines zweiten Umstands, nämlich der Schiefe der Ekliptik. Wenn nämlich auch die Sonne ([S] in Figur 1) ganz gleichförmig auf der Ekliptik weiterginge, so würde doch der Schnittpunkt ihres Deklinationskreises mit dem Äquator G mit wechselnder Geschwindigkeit den Äquator durchlaufen und ihre Rektascension nicht gleichmässig mit der Zeit wachsen. In der Tat besteht zwischen der Rektascension der Sonne r, ihrer Länge l und der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ\ 27'$ die Gleichung
$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \,.\, \cos \varepsilon,$$

die sich unmittelbar aus dem rechtwinkeligen Kugeldreieck A [S] G ergibt, und wenn hier l um gleiche Beträge wächst, so gilt das nicht mehr von r.

Der ungleichmässige Gang einer Sonnenuhr ist also 1. durch die ungleichförmige jährliche Bewegung der Sonne und 2. durch die Schiefe der Sonnenbahn bedingt.

Um zu einer für das gewöhnliche Leben brauchbaren Zeitmessung zu gelangen, müssen wir uns eine Sonne vorstellen, die sich gleichförmig auf dem Äquator bewegt, in derselben Zeit wie die wirkliche Sonne ihren Jahresumlauf vollendet und sich dieser in der Rektascension so nahe wie möglich anschliesst. Auf folgende Weise kommen wir an das gewünschte Ziel.

Wir denken uns ausser der wirklichen Sonne S zunächst eine andere S_1, die sich auf der Ekliptik mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegt. S und S_1 sollen jedesmal dann zusammentreffen, wenn die wirkliche Sonne S ihre grösste Geschwindigkeit hat, wenn also die Erde in Sonnennähe sich befindet (am 2. Januar). Dann folgt unmittelbar aus der Symmetrie der Ellipse und den Keplerschen Gesetzen, dass S und S_1 auch zusammentreffen, wenn S die kleinste Geschwindigkeit hat und die Erde in Sonnenferne ist (am 3. oder 4. Juli). Bezeichnet man die Länge von S mit l und die Länge von S_1 mit l_1, so ist klar, dass die Werte von $l - l_1$ sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, wenn die Erde in symmetrischen Punkten ihrer Bahn steht. Daher ist die Summe aller dieser Differenzen, bezogen auf sämtliche Tage oder andere Zeitintervalle eines Jahres, gleich Null.

Wir denken uns nun weiter eine Sonne S_2, die gleichförmig auf dem Äquator läuft und zwar so, dass ihre Rektascension r_2 immer gleich der Länge von S_1, also gleich l_1 ist. Demnach müssen S_1 und S_2 jedesmal im Frühlings- und Herbstpunkte A und C zusammentreffen.

Die Sonne S_2 erfüllt nun die oben angegebenen Bedingungen und wird deshalb zur Zeitmessung benutzt. Sie heisst die mittlere Sonne, ihr Stundenwinkel die mittlere Sonnenzeit.

Der Unterschied zwischen der mittleren und wahren Sonnenzeit heisst die Zeitgleichung. Sie ist diejenige Zeitdifferenz, die man zur Ausgleichung der wahren Sonnenzeit oder der Zeitangabe einer Sonnenuhr zufügen muss, um die mittlere Sonnenzeit zu erhalten oder um einen gleichmässigen Gang der Uhr zu erzielen.

Bezeichnet man mit t den Stundenwinkel der wirklichen Sonne S, mit t_2 den Stundenwinkel der mittleren Sonne S_2 und mit ϑ die Sternzeit in demselben Augenblicke, so ist die

$$\text{Zeitgleichung} = t_2 - t$$

Nun ist aber

$$t_2 = \vartheta - r_2$$
$$t = \vartheta - r,$$

folglich ist die

$$\text{Zeitgleichung} = r - r_2.$$

In diesen Gleichungen sind t, t_2, ϑ, r und r_2 statt in Bogenmass in Zeitmass auszudrücken. Zerlegt man $r - r_2$ in die Summanden $(l - r_2) + (r - l)$ und beachtet, dass $r_2 = l_1$ ist, so ist die

$$\text{Zeitgleichung} = (l - l_1) + (r - l),$$

wobei jetzt auch l und l_1 durch Division mit 15 in Zeitmass auszudrücken sind.

Der erste Summand $l - l_1$ heisst auch die Mittelpunktsgleichung, der zweite $r - l$ die Reduktion auf den Äquator.

Um noch zu zeigen, dass sich die Rektascension der mittleren Sonne r_2 der Rektascension der wirklichen Sonne r so nahe wie möglich anschmiegt, muss nachgewiesen werden, dass die

Summe der Differenzen $r - r_2$ bezogen auf sämtliche Tage oder noch kleinere Zeitintervalle eines Jahres gleich Null ist. Da dies von $l - l_1$ schon gezeigt war, so bleibt es nur noch für $r - l$ nachzuweisen.

Betrachtet man zwei Werte von l, die sich zu 180^0 ergänzen, so gilt dies auch von den zugehörigen Werten von r, die sich aus der Gleichung $\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \cos \varepsilon$ ergeben. Die beiden Differenzen $r - l$ und $(180^0 - r) - (180^0 - l)$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen; folglich ist die Summe aller Differenzen $r - l$ bezogen auf alle beliebig kleinen Zeitintervalle eines Jahres gleich Null.

§ 3. Verlauf der Zeitgleichung und ihrer beiden Summanden während eines Jahres. Graphische Darstellung.

Man kann sich ohne weitere Rechnung von dem Verlaufe der beiden Summanden der Zeitgleichung eine klare Vorstellung bilden.

Betrachten wir zunächst den ersten Summand $l - l_1$. Er ist am 2. Januar gleich Null, wenn die Erde in Sonnennähe steht. Da jetzt die wirkliche Sonne S ihre grösste Geschwindigkeit hat, während S_1 mit der mittleren Geschwindigkeit weitergeht, so muss S voraneilen und $l - l_1$ positiv werden. $l - l_1$ wird so lange zunehmen, bis S auch die mittlere Geschwindigkeit erreicht hat, was etwa nach 90 Tagen, am 2. April, der Fall ist. Das Maximum von $l - l_1$ beträgt dann, wie die Rechnung in § 7 ergibt, $1^0 55' 11''$ oder in Zeit verwandelt $7^m 41^s$. Von jetzt an wird die Geschwindigkeit von S kleiner als die von S_1 und $l - l_1$ nimmt wieder ab. Am 3. oder 4. Juli treffen S und S_1 in dem Augenblicke, wo die Erde in Sonnenferne ist, wieder zusammen, und $l - l_1$ wird Null. Da S jetzt die kleinste Geschwindigkeit hat, so bleibt S hinter S_1 zurück und $l - l_1$ wird negativ. Von jetzt an hat $l - l_1$ genau den umgekehrten Verlauf wie vorher, indem t Sekunden vor und nach dem Durchlaufen des Wertes Null genau dieselben Werte von $l - l_1$ nur mit entgegengesetzten Vorzeichen erreicht werden (vgl. § 2). Ungefähr am 4. Oktober erhält $l - l_1$ seinen kleinsten Wert $-7^m 41^s$, um schliesslich bis zum 2. Januar wieder auf Null anzuwachsen.

Auf der beigefügten Tafel ist der Verlauf von $l - l_1$ graphisch dargestellt. Auf der horizontalen, mit 0 bezeichneten Linie (Abscissenachse) werden die seit dem Mittag des 1. Januar verflossenen Zeiten (in Tagen ausgedrückt) als proportionale Strecken oder Abscissen abgetragen, die zugehörigen Werte von $l - l_1$ als Ordinaten, d. h. als senkrecht zur Abscissenachse stehende Strecken, positiv nach oben, negativ nach unten. Die Endpunkte der Ordinaten bilden eine stetige Curve, die uns ein anschauliches Bild von dem Verlaufe des ersten Summanden gibt. Dadurch, dass zur Abscissenachse in den Abständen 2, 4, 6 u. s. w. oben und unten Parallelen gezogen sind, kann man die Höhe der Curve über jedem Punkte der Abscissenachse und somit die Grösse von $l - l_1$ ausgedrückt in Minuten für jeden Tag des Jahres leicht ablesen.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Summanden der Zeitgleichung $r - l$ zu und betrachten ihn zunächst in seiner Abhängigkeit von l.

Es ist leicht einzusehen, dass er viermal im Jahre gleich Null wird, nämlich bei $l = 0^0$, 90^0, 180^0 und 270^0.

Ist $l = 0^0$, so steht die Sonne im Frühlingspunkte A, dann ist auch $r = 0^0$ und $r - l = 0$.

Ist $l = 90^0$, so steht die Sonne im Sommersonnenwendepunkte B, dann ist auch $r = 90^0$ und $r - l = 0$. Entsprechendes gilt für die Punkte C und D, wenn $l = 180^0$ bezw. 270^0 ist.

Die Länge, die Rektascension und Deklination der Sonne bilden ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck (in der Figur A[S]G), in dem l die Hypotenuse und r die eine Kathete ist. Wenn l und

r sehr klein sind, so geht das sphärische Dreieck in ein ebenes über und l ist grösser als r. Daraus erkennt man, dass, wenn l von 0^0 an wächst, die Zunahme von l zunächst grösser ist als die entsprechende Zunahme von r. $r-l$ wird also zunächst negativ. Nun ist aber für $l = 90^0$ auch $r = 90^0$. Daraus folgt, dass wenn l sich dem Werte 90^0 nähert, die Zunahme von l kleiner sein muss als die entsprechende Zunahme von r, da r den Vorsprung, den l allmählich erlangt hat, wieder einholen muss. Bei einem bestimmten Werte von l, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt, muss $r-l$ sein Minimum erreichen, nämlich dann, wenn für einen Augenblick die Zunahme von r ebenso gross ist wie die entsprechende Zunahme von l. Hat l den so bestimmten Wert überschritten, so wird $r-l$ wieder zunehmen und schliesslich bei $l=90^0$ den Wert Null erreichen.

Es soll nun zunächst der Wert von l, für den $r-l$ sein Minimum erhält, und der Betrag des Minimums selbst bestimmt werden. Am einfachsten geschieht dies durch Differentialrechnung.

Wenn man die Gleichung

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \cos \varepsilon$$

logarithmiert und differenziert, so erhält man

$$\frac{dr}{\sin 2r} = \frac{dl}{\sin 2l}$$

Nun muss aber für den gesuchten Wert $dr = dl$ sein, also auch

$$\sin 2r = \sin 2l$$

folglich

$$2r + 2l = 180^0 \text{ oder } r + l = 90^0.$$

Daher ist

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{cotg} l = \frac{1}{\operatorname{tg} l}$$

und

$$1 = \cos \varepsilon \operatorname{tg}^2 l,$$

folglich

$$\operatorname{tg} l = \frac{1}{\sqrt{\cos \varepsilon}}$$

und

$$r = 90^0 - l.$$

Diese Entwickelung lässt sich auch ganz elementar in folgender Weise darstellen.

Ist l die gesuchte Länge, so muss, wie schon angegeben worden ist, eine unendlich kleine Zunahme von l (sie möge x heissen) dieselbe Zunahme von r bewirken. Es müssen demnach folgende Gleichungen bestehen:

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \cos \varepsilon$$
$$\operatorname{tg}(r + x) = \operatorname{tg}(l + x) \cos \varepsilon.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen und subtrahiert, so ergibt sich

$$\log \operatorname{tg}(r + x) - \log \operatorname{tg} r = \log \operatorname{tg}(l + x) - \log \operatorname{tg} l.$$

Das heisst: Die gesuchten Werte von l und r haben die Eigenschaft, dass, wenn sie denselben unendlich kleinen Zuwachs erhalten, auch $\log \operatorname{tg} l$ und $\log \operatorname{tg} r$ um gleiche Grössen zunehmen. Nun ersieht man aber aus der Logarithmentafel, dass die Zunahmen, die $\log \operatorname{tg} \alpha$ erfährt, wenn α um einen bestimmten kleinen Betrag (in der Tafel 1′) wächst, nicht konstant sind, sondern von $\alpha = 0^0$ bis $\alpha = 45^0$ beständig abnehmen und von $\alpha = 45^0$ bis $\alpha = 90^0$ wieder zunehmen und nur für zwei Komplementwinkel einander gleich sind*). Folglich müssen r und l Komplementwinkel sein und demnach ist

$$\operatorname{tg} l = \frac{1}{\sqrt{\cos \varepsilon}}$$

Da $\varepsilon = 23^0\ 27'$ ist, so ergibt die Rechnung

$$\begin{aligned} l &= 46^0\ 14'\ \ 5'' \\ r &= 43^0\ 45'\ 55'' \\ \hline l - r &= 2^0\ 28'\ 10'' = 9^m\ 53^s \end{aligned}$$

Wenn demnach $l = 46^0\ 14'\ 5''$ wird, so erhält $r - l$ seinen kleinsten Wert $-\ 9^m\ 53^s$.

Man kann übrigens noch verschiedene andere elementare Betrachtungen anstellen, um die gesuchten Werte von r und l zu bestimmen. Ich will jedoch hier nicht weiter darauf eingehen, sondern nur noch bemerken, dass ich von beanlagten Primanern schon mehrfach Auflösungen dieser Aufgabe erhalten habe.

Wir haben bis jetzt den Verlauf von $r - l$ nur im ersten Quadranten verfolgt, wenn l von 0^0 bis 90^0 wächst. Da die Gleichung $\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \cos \varepsilon$ für alle Quadranten gilt und $\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ ist, so haben entsprechende Werte von $r - l$ im ersten und zweiten Quadranten entgegengesetzte Vorzeichen, wenn die Werte von l sich gleich viel von 90^0 unterscheiden. Wenn demnach l grösser als 90^0 wird, so wird $r - l$ positiv und wächst allmählich bis auf $+\ 9^m\ 53_s$. Dieser Wert wird für $l = 133^0\ 45'\ 55''$ erreicht. Dann nimmt $r - l$ wieder ab und wird für $l = 180^0$ wieder gleich Null.

Da $\operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ ist, so ist der Verlauf von $r - l$ in den beiden letzten Quadranten genau derselbe, wie in den beiden ersten.

Stellt man die Änderungen von $r - l$ wieder graphisch durch eine Kurve dar, indem man die Längen der Sonne l als Abscisssen und die zugehörigen Werte von $r - l$ als Ordinaten abträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet, so erhält man, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen ersichtlich ist, eine Kurve, die aus zwei kongruenten Wellen besteht, wobei Wellenberg und Wellental genau symmetrisch sind. Wenn man jedoch wieder die seit dem Mittag des 1. Januar vorflossenen Zeiten als Abscissen benutzt, so erleidet die Gestalt der Kurve nur ganz kleine, fast unmerkliche Aenderungen, weil die Länge der Sonne nicht ganz gleichmässig mit der Zeit zunimmt, und ausserdem verschiebt sich die Kurve, indem ihre Schnittpunkte mit der Nulllinie oder Abscissenachse auf die dem 21. März, 21. Juni, 23. September und 22. Dezember entsprechenden Punkte fallen.

Da nun die

$$\text{Zeitgleichung} = (l - h) + (r - l)$$

ist, so erhält man ihre graphische Darstellung aus den beiden vorher beschriebenen Kurven, indem man überall die Höhen (Ordinaten) der beiden Kurven über der Nulllinie algebraisch, d. h. mit Berücksichtigung der Vorzeichen addiert. Bedient man sich der in der Wellenlehre üblichen Bezeichnungen, so kann man sagen: die Welle, welche die Zeitgleichung graphisch darstellt, entsteht

---

*) Das ist auch leicht zu begründen.

Aus $\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = 1$

folgt $\log \operatorname{tg} \alpha + \log \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = 0.$

Ebenso $\log \operatorname{tg}(\alpha + x) + \log \operatorname{tg}(90^0 - \alpha - x) = 0.$

Die Zunahme des ersten Summanden ist also gleich der Abnahme des zweiten, oder $\log \operatorname{tg} \alpha$ und $\log \operatorname{tg}(90^0 - \alpha)$ erfahren dieselbe Zunahme, wenn der Winkel um dieselbe unendlich kleine Grösse wächst.

durch Interferenz aus den beiden ersten Wellen. Man sieht jetzt leicht ein, dass die neue Kurve eine unregelmässige Form erhalten muss, da zwei Wellen zur Interferenz kommen, die einen Phasenunterschied haben, und von denen die eine doppelt so lang ist als die andere.

§ 4. Berechnung der Länge der Sonne.

Um die Zeitgleichung für einen gegebenen Zeitpunkt zu berechnen, muss man vor allem die Länge der Sonne, d. h. ihren Ort in der Ekliptik bestimmen.

Nun erscheint die Sonne von der Erde aus gesehen gerade in der entgegengesetzten Richtung wie die Erde von der Sonne aus, d. h. die geozentrische Länge der Sonne unterscheidet sich von der heliozentrischen Länge der Erde um 180°. Wir müssen also für jeden Augenblick den Ort der Erde in ihrer Bahn oder deutlicher ausgedrückt die von der Sonne aus gemessene Länge der Erde berechnen können.

Nach den Keplerschen Gesetzen bewegt sich die Erde wie jeder Planet in einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, und die von dem Radius Vektor oder Fahrstrahl (Verbindungslinie zwischen Sonne und Erde) beschriebenen Flächen verhalten sich zueinander wie die dazu erforderlichen Zeiten. Dadurch ist der Ort des Planeten in seiner Bahn für jeden Zeitpunkt bestimmt.

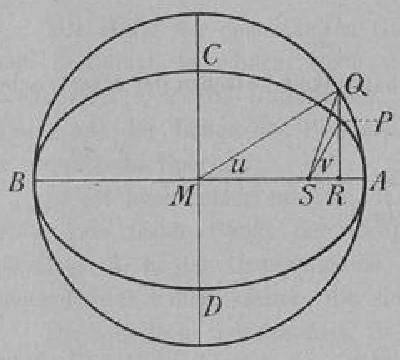

Fig. 2.

In Fig. 2 sei ACBD die von der Erde P beschriebene Ellipse, S der eine Brennpunkt, in welchem die Sonne steht, und M der Mittelpunkt. Die halbe grosse Achse MA stellt die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne dar und wird im folgenden als Längeneinheit benutzt, so dass $MA = 1$ ist. Die halbe kleine Achse werde mit b und die Exzentrizität MS mit e bezeichnet, dann ist bekanntlich

$$b^2 + e^2 = 1.$$

Zieht man noch den der Ellipse umbeschriebenen Kreis, d. h. denjenigen Kreis, der die grosse Achse als Durchmesser hat, so entsteht bekanntlich die Ellipse aus dem Kreis, indem alle zu AB senkrechten Kreissehnen in demselben Verhältnis verkürzt werden. Jede Ellipsenordinate verhält sich also zur entsprechenden Kreisordinate z. B. RP zu RQ wie $b:1$.

Die Erde befindet sich im Punkte A in Sonnennähe oder im Perihel (gegenwärtig am 2. Januar) in einem bestimmten Augenblick. Von diesem Momente an sollen die in Betracht kommenden Zeiten gemessen werden. Ebenso werde die Richtung des Fahrstrahls SP von SA als Anfangslage aus bestimmt.

Hat die Erde in der Zeit t (ausgedrückt in mittleren Sonnentagen) den Bogen AP zurückgelegt, so ist der Winkel $ASP = v$ zu bestimmen, den der Fahrstrahl in dieser Zeit beschrieben hat. Man nennt den Winkel $ASP = v$ die wahre Anomalie.

Ist nun T die Umlaufszeit der Erde, so verhält sich nach dem zweiten Keplerschen Gesetze der Ellipsensektor ASP zur ganzen Ellipse $b\pi$ wie t zu T.

Um den Ellipsensektor ASP zu berechnen, verlängern wir die Ordinate RP bis zum Schnittpunkte Q mit dem umbeschriebenen Kreise. Dann ist

$$ASP = b\,ASQ$$

weil jede Ordinate der ersten Fläche zur entsprechenden Ordinate der zweiten Fläche das Verhältnis $b:1$ hat. A S Q ist aber gleich dem Kreissektor A M Q vermindert um das Dreieck M S Q. Bezeichnet man deshalb den Winkel A M Q, der auch die exzentrische Anomalie heisst, mit u (ausgedrückt im analytischen Bogenmasse), so ist

$$\mathrm{ASQ} = \frac{u}{2} - \frac{e \sin u}{2}$$

Daher ist der Ellipsensektor

$$\mathrm{ASP} = \frac{b}{2}(u - e \sin u)$$

und folglich

$$\frac{u - e \sin u}{2\pi} = \frac{t}{T}$$

oder

$$u - e \sin u = \frac{2\pi t}{T}$$

Nun ist $\frac{2\pi t}{T}$ der Winkel, den der Fahrstrahl in der Zeit t beschreiben würde, wenn der Planet in kreisförmiger Bahn ganz gleichförmig um die Sonne liefe. Er heisst die mittlere Anomalie und wird mit m bezeichnet. Daher ist

$$u - e \sin u = m. \tag{1}$$

Es bleibt zur Lösung unserer Aufgabe nur noch übrig, die Abhängigkeit zwischen der exzentrischen Anomalie u und der wahren v zu entwickeln.

Es ist

$$\mathrm{MR} = \cos u, \quad \mathrm{RQ} = \sin u$$

also

$$\mathrm{RS} = \cos u - e, \quad \mathrm{RP} = b \sin u$$

also ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{b \sin u}{\cos u - e}$$

Setzt man deshalb

$$\lambda \sin v = b \sin u$$
$$\lambda \cos v = \cos u - e$$

so ist

$$\lambda^2 = (1 - e^2) \sin^2 u + \cos^2 u + e^2 - 2e \cos u = 1 + e^2 \cos^2 u - 2e \cos u$$

daher

$$\lambda = 1 - e \cos u$$

Folglich ist

$$\sin v = \frac{b \sin u}{1 - e \cos u}$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$$

Aus der letzten Gleichung kann auch umgekehrt $\cos u$ durch $\cos v$ ausgedrückt werden, doch lässt sich die Abhängigkeit zwischen u und v noch einfacher darstellen. Denn es ist

$$2 \cos^2 (\tfrac{1}{2} v) = 1 + \cos v = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u} = \frac{(1 - e)\, 2 \cos^2 (\tfrac{1}{2} u)}{1 - e \cos u}$$

$$2 \sin^2 (\frac{1}{2} v) = 1 - \cos v = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1 - e \cos u} = \frac{(1+e)\, 2 \sin^2 (\frac{1}{2} u)}{1 - e \cos u}$$

folglich

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$$

Es ist üblich und für die Rechnung zweckmässig, die Exzentrizität e, die ja kleiner als 1 ist, gleich dem Sinus eines bestimmten Winkels φ zu setzen. Dann ist

$$1 + e = 2 \cos^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$$

$$1 - e = 2 \sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$$

folglich

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \operatorname{cotg} (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$$

Dann ist also

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} u. \tag{2}$$

Mit Hülfe der entwickelten Gleichungen kann man die heliozentrische Länge der Erde für jeden Zeitpunkt berechnen, wenn man noch die Elemente der Erdbahn kennt, nämlich 1) ihre Exzentrizität e, 2) die Umlaufszeit, 3) die Länge des Perihels und 4) die mittlere Länge (d. i. die Summe aus der Länge des Perihels und der mittleren Anomalie) für einen bestimmten Zeitpunkt, die sogenannte Epoche.

Es ist noch bemerkenswert, dass der Anfangspunkt für die Zählung der Länge, der Frühlingspunkt, kein fester Punkt der Ekliptik ist, sondern infolge der Präcession jährlich um 50,26″ rückwärts (d. h. der Bewegung der Erde entgegen) geht. Man unterscheidet deshalb bei einem Planeten zwei Umlaufszeiten, die siderische und die tropische.

Die siderische ist die Zeit, in welcher der Planet einen vollen Umlauf macht, bezogen auf die Fixsterne oder irgend einen festen Punkt der Ekliptik; die tropische ist die Zeit eines Umlaufs in Bezug auf den Frühlingspunkt oder die Zeit, in welcher die Länge um 360° zunimmt.

Bei der Erde beträgt die siderische Umlaufszeit 365,25636 mittlere Sonnentage, die tropische 365,24220 Sonnentage. Demnach beträgt die tägliche Zunahme der mittleren Länge oder die mittlere tägliche tropische Bewegung $\frac{360 \,.\, 60 \,.\, 60}{365{,}24220}$ Bogensekunden $= 3548{,}3304''$.

Die Berechnung der heliozentrischen Länge der Erde für irgend einen Zeitpunkt findet nun in folgender Weise statt (vgl. die Beispiele in § 6).

Man bestimmt zuerst die mittlere Länge, indem man zur mittleren Länge in der Epoche die Änderung der mittleren Länge in der Zwischenzeit hinzufügt, dann die mittlere Anomalie, indem man von der mittleren Länge die Länge des Perihels abzählt. Da aber diese infolge der Störungen durch die übrigen Planeten einer langsamen Änderung unterworfen ist, so findet man den richtigen Wert, indem man zur Länge des Perihels in der Epoche die Änderung in der Zwischenzeit zuzählt. Die Gleichung (1) liefert dann, wie im nächsten Paragraph näher dargelegt wird, die exzentrische, die Gleichung (2) die wahre Anomalie. Zählt man zu dieser die Länge des Perihels, so hat man die heliozentrische Länge der Erde gefunden.

Der so berechnete Wert unterscheidet sich aber von dem wahren noch um etliche Sekunden. Denn der Ort der Erde wird noch etwas durch die Anziehung, die sie von dem Monde und den übrigen Planeten erfährt, verändert. In der Astronomie werden diese Einwirkungen als Störungen bezeichnet und aus dem Newtonschen Attraktionsgesetz berechnet. Endlich erleidet auch die Lage des Frühlingspunktes und damit die Länge jedes Himmelskörpers infolge der periodischen Schwankung der Erdachse, die man als Nutation bezeichnet, kleine Verschiebungen um einige Sekunden. Alle diese Korrektionen werden im Folgenden nicht in Betracht gezogen.

§ 5. Auflösung der Gleichung $u - e \sin u = m$.

Um die vorhin angedeutete Rechnung auszuführen, muss man die sogenannte Keplersche Gleichung

$$u - e \sin u = m$$

nach u auflösen. Dies geschieht durch das Verfahren der Funktionswiederholung, das hier rasch konvergiert.

Man berechnet der Reihe nach

$$u_1 = m + e \sin m$$
$$u_2 = m + e \sin u_1$$
$$u_3 = m + e \sin u_2$$
u. s. w.

Um zu beweisen, dass die Zahlen u_1, u_2, u_3 . . . einem Grenzwert zustreben, hat man zu zeigen, dass der absolute Wert von $u_{\lambda+\mu} - u_\lambda$ (er soll durch $|u_{\lambda+\mu} - u_\lambda|$ bezeichnet werden) beliebig klein wird, wenn λ nur hinreichend gross und μ ganz beliebig gewählt wird.

Nun ist

$$u_{\lambda+1} - u_\lambda = e(\sin u_\lambda - \sin u_{\lambda-1}) = 2\, e \cos \frac{1}{2}(u_\lambda + u_{\lambda-1}) \sin \frac{1}{2}(u_\lambda - u_{\lambda-1})$$

also ist

$$|u_{\lambda+1} - u_\lambda| < e\, |u_\lambda - u_{\lambda-1}|$$

und demnach schliesslich

$$|u_{\lambda+1} - u_\lambda| < e^{\lambda+1}$$

daher ist

$$|u_{\lambda+\mu} - u_\lambda| < e^{\lambda+1} + e^{\lambda+2} + \ldots$$

Da nun die Exzentrizität e der Ellipse kleiner als 1 ist, so ist die Reihe rechts konvergent und gleich $\frac{e^{\lambda+1}}{1-e}$, demnach kann man λ so gross wählen, dass $|u_{\lambda+\mu} - u_\lambda|$ für jedes μ kleiner als jede noch so kleine gegebene Zahl wird. Folglich hat die Reihe der u_λ einen endlichen Grenzwert, der mit u bezeichnet werden soll.

Da nun

$$u_{\lambda+1} = m + e \sin u_\lambda$$

ist und bei hinreichend grossem λ sich $u_{\lambda+1}$ und $m + e \sin u_\lambda$ der Reihe nach beliebig wenig von u und $u + e \sin u$ unterscheiden, so ist die Differenz

$$u - (m + e \sin u)$$

kleiner als jede beliebig kleine Zahl, also Null, und der Grenzwert u genügt der Gleichung

$$u - e \sin u = m.$$

Zum Schluss noch folgende Bemerkung: Es war vorausgesetzt, dass in dieser Gleichung u und m als Bogen mit dem Radius als Einheit gemessen werden. Da sie aber in der Rechnung als Winkel in Sekunden ausgedrückt werden, so ist auch e durch Multiplikation mit

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = \frac{648000}{\pi}$$

in Sekunden zu verwandeln.

§ 6. Beispiele für die Berechnung der Länge.

Elemente der Erdbahn.

(Nach dem astron. Kalender der Sternwarte von Wien mitgeteilt in den Elementen der theoretischen Astronomie von Dr. Israel Holtzwart).

Epoche: 1850. 1. Januar, mittl. Pariser Mittag.
Mittlere Länge in der Epoche: 100° 46′ 43,5″.
Länge des Perihels in der Epoche: 100° 21′ 21,5″.
Exzentrizität in der Epoche: 0,0167703.
Tropische Umlaufszeit: 365,24220 Tage.
Tägliche Änderung der mittleren Länge: 3548,3304″.
Jährliche Änderung der Exzentrizität: — 4,244 Einheiten der 7. Dezimale.
Jährliche Änderung der Länge des Perihels: + 61,700″.

I. Berechnung der Länge der Sonne und der Zeitgleichung für den mittleren Berliner Mittag des 1. Januar 1903.

A. Berechnung der mittleren Anomalie m.

Vom 1. Januar 1850 bis 1. Januar 1903 sind 53 Jahre verflossen, unter denen 12 Schaltjahre waren, also $365 \cdot 53 + 12 = 19357$ Tage.

Nun sind 53 tropische Jahre = 19357,8366 Tage; ferner beträgt der Zeitunterschied Berlin—Paris: $0^h\ 44^m\ 13{,}9^s = 0{,}0307$ Tage.

Also beträgt die Zwischenzeit: 53 tropische Jahre minus 0,8673 Tage.

Da in einem tropischen Jahre die mittlere Länge um 360° zunimmt, so beträgt die Änderung der mittleren Länge im ganzen $-3548{,}33'' \cdot 0{,}8673 = -3077{,}46'' = -51'\ 17{,}5''$.

Mittlere Länge in der Epoche	=	100° 46′ 43,5″
Änderung in der Zwischenzeit	=	— 51′ 17,5″
Mittlere Länge	=	99° 55′ 26,0″

Die Länge des Perihels hat in 53 Jahren um $61{,}700'' \cdot 53 = 3270{,}1'' = 54'\ 30''$ zugenommen.

Länge des Perihels in der Epoche	=	100° 21′ 21,5″
Zunahme	=	54′ 30″
Länge des Perihels (1. Jan. 1903)	=	101° 15′ 51,5″

Mittlere Länge	=	99° 55′ 26,0″
Länge des Perihels	=	101° 15′ 51,5″
Mittlere Anomalie m	=	— 1° 20′ 25,5″

B. Berechnung von u aus der Keplerschen Gleichung $u - e \sin u = m$.

Wert der Exzentrizität e für 1903 : 0,0167478.

$\frac{e \, . \, 648000}{\pi}$ soll mit (e) bezeichnet werden, dann ist

$$\log (e) = 3{,}53838$$

$u_1 = m + (e) \sin m$

$$\begin{array}{r} \log (e) = 3{,}53838 \\ \log \sin 1^0 \, 20' = 8{,}36678 \\ \hline \log (e) \, \sin m = 1{,}90516 \text{ (angenähert)} \end{array}$$

$$(e) \sin m = 80{,}4'' = 1' \, 20{,}4''$$

$u_1 = 1^0 \, 21' \, 45''$

$u_2 = m + (e) \sin u_1$

$$\begin{array}{r} \log (e) = 3{,}53838 \\ \log \sin u_1 = 8{,}37617 \\ \hline \log (e) \sin u_1 = 1{,}91455 \end{array}$$

$$(e) \sin u_1 = 82{,}14'' = 1' \, 22{,}1''$$

$u_2 = 1^0 \, 21' \, 47{,}6''$

$$\log \sin u_2 = 8{,}37640$$
$$(e) \sin u_2 = 82{,}18''.$$

Daher ist

$$u = -\, 1^0 \, 21' \, 47{,}7''.$$

C. Berechnung von v aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{tg} \frac{u}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \text{ wobei } e = \sin \varphi \text{ ist.}$$

$$\log \sin \varphi = 8{,}22395$$
$$\varphi = 57' \, 34{,}6''$$
$$\frac{\varphi}{2} = 28' \, 47{,}3''$$
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 45^0 \, 28' \, 47{,}3''$$

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}00727 \\ \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} = 8{,}07545 \\ \hline \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 8{,}08272 \end{array}$$

$$\frac{v}{2} = 41' \, 35{,}3''$$
$$v = -\, 1^0 \, 23' \, 10{,}6''$$

Demnach beträgt der erste Summand der Zeitgleichung

$$l - l_1 \text{ oder } v - m = -\, 2' \, 45{,}1'' = -\, 11^s.$$

D. Berechnung der Länge der Sonne.

Wahre Anomalie	$= -1^0\,23'\,10{,}6''$
Länge des Perihels	$= 101^0\,15'\,51{,}5''$
Länge der Erde	$= 99^0\,52'\,41''$
Länge der Sonne	$= 279^0\,52'\,41''$

Nach dem Berliner Astronomischen Jahrbuche 1903 beträgt die Länge der Sonne zur angegebenen Zeit mit Berücksichtigung der Störungen und der Nutation: $279^0\,52'\,54{,}36''$.

E. Berechnung der Rektascension der Sonne.

Ich benutze hier den genauen Wert des Astron. Jahrbuchs. Infolge der Aberration des Lichts wird die Länge der Sonne noch vermindert um $20{,}82''$, daher ist die scheinbare Länge $= 279^0\,52'\,33{,}54''$. Die mittlere Schiefe der Ekliptik beträgt am 1. Jan. 1903: $23^0\,27'\,6{,}85''$. Die wahre (d. i. die durch die Nutation beeinflusste) Schiefe $\varepsilon = 23^0\,26'\,57{,}67''$.

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \cos \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} l &= 0{,}7592112 \\ \log \cos \varepsilon &= 9{,}9625645 \\ \hline \log \operatorname{tg} r &= 0{,}7217757 \end{aligned}$$

$$r = 280^0\,44'\,42{,}61'' = 18^h\,42^m\,58{,}84^s,$$

was mit der Angabe des Astron. Jahrbuchs genau übereinstimmt.

Rechnet man dagegen mit dem Wert $l = 279^0\,52'\,41''$ und mit fünfstelligen Logarithmen, so erhält man

$$r = 280^0\,44'\,51''.$$

Dann wird der zweite Summand der Zeitgleichung

$$r - l = 0^0\,52'\,10'' = 3^m\,29^s.$$

Erster Summand $v - m$	$= -11^s$
Zweiter Summand $r - l$	$= +3^m\,29^s$
Zeitgleichung	$= +3^m\,18^s$

(nach dem Astron. Jahrb. $+ 3^m\,16{,}69^s$.)

II. Berechnung der Länge der Sonne für den mittleren Berliner Mittag des 1. Mai 1903.

Mittlere Länge der Erde am 1. Januar	$= 99^0\,55'\,26{,}0''$
Zunahme in 120 Tagen	$= 118^0\,16'\,39{,}6''$
Mittlere Länge am 1. Mai	$= 218^0\,12'\,5{,}6''$
Länge des Perihels am 1. Mai	$= 101^0\,16'\,12{,}0''$
Mittlere Anomalie m	$= 116^0\,55'\,53{,}6''$

Daraus ergibt sich

$$u = 117^0\,46'\,50''$$
$$v = 118^0\,37'\,35''$$

Länge des Perihels	$= 101^0\,16'\,12''$
Länge der Erde	$= 219^0\,53'\,47''$
Länge der Sonne	$= 39^0\,53'\,47''$

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \,.\, \cos \varepsilon$$

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} l = 9{,}92222 \\ \log \cos \varepsilon = 9{,}96256 \\ \hline \log \operatorname{tg} r = 9{,}88478 \end{array}$$

Rektascension der Sonne $= 37^0\,29'\,14''$

$$\begin{array}{lll} \text{Erster Summand } v - m = & + 1^0\,41'\,41{,}4'' & = + 6^m\,47^s \\ \text{Zweiter Summand } r - l = & - 2^0\,24'\,33'' & = - 9^m\,38^s \\ \hline \text{Zeitgleichung} & & = - 2^m\,51^s \end{array}$$

(nach dem Astron. Jahrbuch $- 2^m\,50{,}84^s$).

§ 7. Das Maximum und Minimum der Mittelpunktsgleichung $v - m$ und die zugehörigen Zeitpunkte im Jahre 1903.

Differenziert man die Gleichung

$$m = u - e \sin u,$$

so erhält man

$$d\,m = d\,u\,(1 - e \cos u).$$

Logarithmiert man die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\, v = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, u$$

und differenziert, so ergibt sich

$$\frac{d\,v}{\sin v} = \frac{d\,u}{\sin u}$$

Folglich entsteht durch Elimination von $d\,u$ die Gleichung

$$d\,m = \frac{\sin u\,(1 - e \cos u)}{\sin v}\, d\,v$$

Für das gesuchte Maximum oder Minimum ist $d\,m = d\,v$, also

$$\sin v = \sin u\,(1 - e \cos u).$$

Nun ist nach § 4

$$\sin v = \frac{b \sin u}{1 - e \cos u}$$

demnach

$$b = (1 - e \cos u)^2$$

oder

$$\cos u = \frac{1 - \sqrt{b}}{e}$$

Setzt man wieder $e = \sin \varphi$, also $b = \cos \varphi$, so ist

$$\cos u = \frac{1 - \sqrt{\cos \varphi}}{\sin \varphi} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi\,(1 + \sqrt{\cos \varphi})} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\, \varphi}{1 + \sqrt{\cos \varphi}}$$

Hat man hieraus u bestimmt, so findet man v aus der Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\, v = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, u$ und damit auch $v - u$. Ferner ist $u - m = e \sin u$. Durch Addition der beiden Werte $v - u$ und $u - m$ erhält man das Maximum der Mittelpunktsgleichung.

Ausführung der Rechnung:

$$\varphi = 57' \, 34{,}6''$$

$$\frac{\varphi}{2} = 28' \, 47{,}3''$$

Daraus ergibt sich

$$90^0 - u = 14' \, 23{,}7''$$

$$u = 89^0 \, 45' \, 36{,}3''$$

$$\frac{u}{2} = 44^0 \, 52' \, 48{,}2''$$

$$\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}00728$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad = 9{,}99818$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{v}{2} \quad = 0{,}00546$$

$$\frac{v}{2} = 45^0 \, 21' \, 36''$$

$$v = 90^0 \, 43' \, 12''$$

$$u = 89^0 \, 45' \, 36''$$

$$v - u = \;\; 0^0 \, 57' \, 36''$$

$$u - m = (e) \sin u = 3454{,}6'' \, . \, \sin u.$$

Nun ist $\sin u$ innerhalb der Rechnungsgrenzen gleich 1, also

$$u - m = 3454{,}6'' = 0^0 \, 57' \, 34{,}6''.$$

Demnach ist das gesuchte Maximum $= 1^0 \, 55' \, 11'' = 7^m \, 41^s$.

Berechnung des Zeitpunkts für 1903, in welchem dieses Maximum der Mittelpunktsgleichung eintritt.

$$u = 89^0 \, 45' \, 36''$$

$$u - m = \;\; 0^0 \, 57' \, 36''$$

$$m = 88^0 \, 48' \;\; 0''$$

Länge des Perihels am 1. Januar	=	$101^0 \, 15' \, 51{,}5''$
Zunahme für $m = 88^0$	=	$15{,}4''$
Länge des Perihels	=	$101^0 \, 16' \;\; 7''$
Mittlere Anomalie	=	$88^0 \, 48' \;\; 0''$
Mittlere Länge	=	$190^0 \;\; 4' \;\; 7''$
Mittlere Länge am 1. Januar	=	$99^0 \, 55' \, 26''$
Zunahme der mittleren Länge	=	$90^0 \;\; 8' \, 41'' = 324521''$.

Die Zwischenzeit beträgt demnach $324521 : 3548{,}33$ Tage $= 91{,}458$ Tage $= 91$ Tage $10^h \, 59^m$.

Die Mittelpunktsgleichung oder der erste Summand der Zeitgleichung erhält also am 2. April um $10^h \, 59^m$ nachmittags seinen grössten Wert.

Berechnung des Zeitpunkts für das Minimum. Dann ist

$$m = 360^0 - 88^0 \, 48' \, 0'' = 271^0 \, 12' \, 0''.$$

Länge des Perihels am 1. Januar	=	101° 15′ 51,5″
Zunahme für $m = 273°$	=	46,8″
Länge des Perihels	=	101° 16′ 38″
Mittlere Anomalie	=	271° 12′ 0″
Mittlere Länge	=	372° 28′ 38″
Mittlere Länge am 1. Januar	=	99° 55′ 26″
Zunahme der mittleren Länge	=	272° 33′ 12″ = 981192″

Zwischenzeit (981192 : 3548,33) = 276,522 Tage = 276 Tage $12^h\ 32^m$.

Der erste Summand der Zeitgleichung erhält also am 5. Oktober $0^h\ 32^m$ vormittags seinen kleinsten Wert — $7^m\ 41^s$.

§ 8. Berechnung der Zeitpunkte für 1903, in welchen die Summanden der Zeitgleichung gleich Null werden.

Der erste Summand $l - l_1$ oder $v - m$ wird Null, wenn die Erde in Sonnennähe oder in Sonnenferne steht, oder wenn $m = 0°$ oder $180°$ ist.

1. $m = 0°$.

Mittlere Anomalie am 1. Januar	=	— 1° 20′ 25,5″
Mittlere Anomalie im ges. Zeitp.	=	0°
Zunahme der mittleren Länge	=	1° 20′ 25,5″ = 4825,5″.

Zwischenzeit = 4825,5 : 3548,3 Tage = 1,35994 Tage = 1 Tag $8^h\ 38^m$.

Also war die Erde in Sonnennähe im Jahre 1903 am 2. Januar $8^h\ 38^m$ nachmittags.

2. $m = 180°$.

Länge des Perihels am 1. Januar	=	101° 15′ 51,5″
Zunahme für $m = 180°$	=	30,9″
Länge des Perihels	=	101° 16′ 22,4″
Mittlere Anomalie	=	180°
Mittlere Länge	=	281° 16′ 22,4″
Mittlere Länge am 1. Januar	=	99° 55′ 26,0″
Zunahme der mittleren Länge	=	181° 20′ 56,4″ = 652 856,4″.

Zwischenzeit = 652 856,4 : 3548,330 Tage = 183,990 Tage = 183 Tage $23^h\ 45^m$.

Also Erde in Sonnenferne 1903 am 4. Juli $11^h\ 45^m$ vormittags.

Der zweite Summand der Zeitgleichung wird Null, wenn die wahre Länge der Sonne 0°, 90°, 180° oder 270° ist, oder, anders ausgedrückt, wenn die Sonne den Frühlingspunkt, Sommersonnenwendepunkt, Herbstpunkt oder Wintersonnenwendepunkt erreicht.

1. Berechnung von Frühlingsanfang 1903.

Dann ist die wahre Länge der Erde = 180°.

Länge des Perihels am 1. Januar	=	101° 15′ 51,5″
Zunahme für etwa $m = 78°$	=	13,5″
Länge des Perihels	=	101° 16′ 5″
Wahre Länge	=	180°
Wahre Anomalie v	=	78° 43′ 55″
$\frac{v}{2}$	=	39° 21′ 57,5″

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v : \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = 9{,}91403$$

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}00727$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = 9{,}90676$$

$$\frac{u}{2} = 38^0\,53'\,46{,}5''$$

$$u = 77^0\,47'\,33''$$

$$m = u - (e)\sin u$$

$$\log(e) = 3{,}53838$$

$$\log\sin u = 9{,}99007$$

$$\log(e)\sin u = 3{,}52845$$

$$(e)\sin u = 3376{,}4'' = 56'\,16{,}4''$$

Mittlere Anomalie m	=	$76^0\,51'\,17''$
Länge des Perihels	=	$101^0\,16'\,\;5''$
Mittlere Länge	=	$178^0\,\;7'\,22''$
Mittlere Länge am 1. Januar	=	$99^0\,55'\,26''$
Zunahme der mittleren Länge	=	$78^0\,11'\,56'' = 281\,516''$

Zwischenzeit = 281 516 : 3548,3 Tage = 79,338 Tage = 79 Tage $8^h\ 7^m$.

Demnach trat die Sonne in das Zeichen des Widders (Frühlingsanfang) im Jahre 1903 am 21. März $8^h\ 7^m$ nachmittags (mittlere Berliner Zeit).

(Die mitteleuropäische Zeit unterscheidet sich von der mittleren Berliner Zeit um $+\ 6^{1/2\,m}$.)

2. Berechnung von Wintersanfang 1903.

Dann ist die wahre Länge der Erde 450^0.

Länge des Perihels am 1. Januar	=	$101^0\,15'\,51{,}5''$
Zunahme für etwa $m = 349^0$	=	$1'\,\;0''$
Länge des Perihels	=	$101^0\,16'\,51{,}5''$
Wahre Länge	=	450^0
Wahre Anomalie v	=	$348^0\,43'\,\;8{,}5''$

oder $v = -\ 11^0{,}16'\,51{,}5''$

$$\frac{v}{2} = -\ 5^0\,38'\,25{,}8''$$

Aus $\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v : \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ ergibt sich

$$\frac{u}{2} = -\ 5^0\,32'\,51''$$

$$u = -\,11^0\,\;5'\,42''$$

Aus $m = u - (e) \sin u$ folgt

$$m = -10^0 54' 37'' = 349^0 5' 23''$$

Mittlere Anomalie	$= 349^0\ 5' 23''$
Länge des Perihels	$= 101^0 16' 51{,}5''$
Mittlere Länge	$= 450^0 22' 14{,}5''$
Mittlere Länge am 1. Januar	$= 99^0 55' 26{,}0''$
Zunahme der mittleren Länge	$= 350^0 26' 48{,}5'' = 1\,261\,608{,}5''$

Zwischenzeit = 1 261 608,5 : 3548,3304 Tage = 355,550 Tage = 355 Tage $13^h\ 12^m$.

Demnach Wintersanfang 1903 am 23. Dezember $1^h\ 12^m$ vormittags (mittlere Berliner Zeit).

Ebenso findet man, dass im Jahre 1903 die Sonne die Länge 90^0 erreichte am 22. Juni $3^h\ 58^m$ nachmittags und die Länge 180^0 am 24. September $6^h\ 38^m$ vormittags.

Auf dieselbe Weise kann man berechnen, wann die zweite Kurve $(r - l)$ ihre Maxima und Minima erreicht, oder wann die wahre Länge der Sonne die Werte

$$313^0\ 45'\ 55''$$
$$46^0\ 14'\ 5''$$
$$133^0\ 45'\ 55''$$
$$226^0\ 14'\ 5''$$

erhält (vergl. § 3). Man findet dafür im Jahre 1903 die Tage

3. Februar nachmittags
8. Mai vormittags
7. August nachmittags
9. November nachmittags.

§ 9. Reihenentwickelungen.

Um die Mittelpunktsgleichung $v - m$ in eine Potenzreihe von e zu entwickeln, werden wir der Reihe nach $u - m$ und $v - u$ als solche Potenzreihen darstellen und dann beide addieren.

Es war

$$u - e \sin u = m.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liess sich als Grenzwert der unendlichen Reihe

$$u = m + (u_1 - m) + (u_2 - u_1) + \ldots$$

auffassen, wobei

$$u_1 = m + e \sin m$$
$$u_2 = m + e \sin u_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

war. Ist e positiv und kleiner als 1 und m eine reale Zahl, so konvergiert die Reihe, wie wir in § 5 gesehen haben, und

$$u_\lambda = m + (u_1 - m) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_\lambda - u_{\lambda-1})$$

unterscheidet sich von dem Grenzwert u um weniger als $e^{\lambda+1} : (1 - e)$.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass alle u_λ als beständig konvergente Potenzreihen von e dargestellt werden können, und dass in der Entwickelung von $u_\lambda - u_{\lambda-1}$ als niedrigste Potenz e^λ auftritt.

Angenommen, die Behauptung sei schon für $u_1, u_2 \ldots u_{\lambda-1}$ bewiesen, so gilt sie auch für u_λ. Denn

$$u_\lambda - u_{\lambda-1} = e(\sin u_{\lambda-1} - \sin u_{\lambda-2}) = 2\,e \cos\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} + u_{\lambda-2}) \sin\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} - u_{\lambda-2})$$

Nun sind $\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} + u_{\lambda-2})$ und $\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} - u_{\lambda-2})$ beständig konvergente Potenzreihen von e, also auch $\cos\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} + u_{\lambda-2})$ und $\sin\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} - u_{\lambda-2})$ und das Produkt von beiden.

Da ferner $u_{\lambda-1} - u_{\lambda-2}$ mit der Potenz $e^{\lambda-1}$ beginnt, so gilt dies auch von $\sin\frac{1}{2}(u_{\lambda-1} - u_{\lambda-2})$. Daher ist $u_\lambda - u_{\lambda-1}$ eine beständig konvergente Potenzreihe, die e^λ als niedrigste Potenz hat. Nun gilt aber unsere Behauptung für u_1 und $u_1 - m$, also ist sie auch allgemein bewiesen.

Jetzt lässt sich

$$u = m + (u_1 - m) + (u_2 - u_1) + \ldots$$

formal in eine Potenzreihe von e entwickeln, aber damit ist ihre Konvergenz noch nicht nachgewiesen. Über den Konvergenzbereich dieser Reihe, die gewöhnlich aus einer von Lagrange entwickelten Reihenformel abgeleitet wird, sind erst in neuerer Zeit Untersuchungen angestellt worden. Dr. O. Dziobek teilt in seinem Buche: „Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen" auf Seite 21 folgendes Ergebnis mit:

Ist $e < 0{,}66195$, so konvergiert die Reihe bedingungslos; ist $1 > e > 0{,}66195$, so konvergiert sie nur für einen Teil der Bahn; ist $e > 1$, so divergiert die Reihe.

Schon bevor diese Konvergenzuntersuchungen angestellt worden waren, erwies sich die Reihe als sehr brauchbar für die praktische Rechnung.

Im folgenden sollen nur diejenigen Glieder entwickelt werden, in welchen der Exponent von e kleiner als 5 ist. Dann braucht man von den Reihen für $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ und $u_4 - u_3$ bzw. nur 3, 2, 1 Glieder zu bestimmen.

Man benutzt die Formeln:

$$\sin(m + x) = \sin m + x\cos m - \frac{1}{2}x^2 \sin m - \frac{1}{6}x^3 \cos m \ldots$$

$$\cos(m + x) = \cos m - x \sin m - \frac{1}{2}x^2 \cos m + \frac{1}{6}x^3 \sin m \ldots$$

Nun ist

$$u_1 - m = e \sin m$$

also

$$u_2 - u_1 = e[\sin(m + e\sin m) - \sin m]$$

$$= e^2 \sin m \cos m - \frac{1}{2}e^3 \sin^3 m - \frac{1}{6}e^4 \sin^3 m \cos m \ldots$$

Ebenso

$$u_3 - u_2 = e[\sin(u_1 + u_2 - u_1) - \sin u_1] = e(u_2 - u_1)\cos u_1 \ldots$$

$$= e(u_2 - u_1)\cos(m + e\sin m) \ldots$$

$$= (e^3 \sin m \cos m - \frac{1}{2}e^4 \sin^3 m - \ldots)(\cos m - e\sin^2 m - \ldots)$$

$$= e^3 \sin m \cos^2 m - \frac{3}{2}e^4 \sin^3 m \cos m - \ldots$$

$$u_4 - u_3 = e[\sin(u_2 + u_3 - u_2) - \sin u_2] = e(u_3 - u_2)\cos u_2 + \ldots$$

$$= e^4 \sin m \cos^3 m + \ldots$$

Daher ist

$$u = m \quad e \sin m + e^2 \sin m \cos m + e^3 \sin m \,(1 - \frac{3}{2} \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m \,(1 - \frac{8}{3} \sin^2 m) + ..$$

Z itens ist jetzt $v - u$ in eine Reihe zu entwickeln, wobei

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$$

ist.

Die Gleichung $\operatorname{tg} y = n \operatorname{tg} x$ lässt sich auch schreiben in der Form

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}} = \frac{n e^{ix} - n e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

oder

$$\frac{e^{2iy} - 1}{e^{2iy} + 1} = \frac{n e^{2ix} - n}{e^{2ix} + 1}$$

Durch korrespondierende Addition und Subtraktion folgt

$$e^{2iy} = \frac{(n+1) e^{2ix} - (n-1)}{(n+1) - (n-1) e^{2ix}}$$

Setzt man $\frac{n-1}{n+1} = k$, so ist

$$e^{2iy} = \frac{e^{2ix} - k}{1 - k e^{2ix}} = e^{2ix} \frac{1 - k e^{-2ix}}{1 - k e^{2ix}}$$

Logarithmiert man auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$2iy = 2ix + \log (1 - k e^{-2ix}) - \log (1 - k e^{2ix})$$

Nun ist bekanntlich

$$\log (1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

wenn $|x| < 1$ ist. Wenn also $|k| < 1$ ist, so ist

$$2iy = 2ix + k (e^{2ix} - e^{-2ix}) + \frac{k^2}{2} (e^{4ix} - e^{-4ix}) + \ldots$$

oder

$$y = x + k \sin 2x + \frac{k^2}{2} \sin 4x + \frac{k^3}{3} \sin 6x + \ldots$$

Dies lässt sich jetzt auf die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$$

anwenden. Hier ist

$$n = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$k = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi.$$

Demnach ist

$$v - u = 2 (k \sin u + \frac{1}{2} k^2 \sin 2u + \frac{1}{3} k^3 \sin 3u + \ldots)$$

Wenn $e = \sin\varphi$ von 0 bis 1 wächst, so wächst φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und $k = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ von 0 bis 1. Daher ist die Reihe für reelle Werte von e konvergent, sobald $e < 1$ ist. Bricht man sie nach dem μ. Gliede ab, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{\mu+1}\;\frac{k^{\mu+1}}{1-k}$.

Alle Glieder der rechten Seite lassen sich als Potenzreihen von e darstellen, die sicher konvergieren, wenn $|e| < 0{,}66195$ ist. Demnach lässt sich auch die rechte Seite formal in eine solche Potenzreihe entwickeln. Man kann aber nicht ohne weiteres, wie dies von Dziobek a. a. O. geschieht, behaupten, dass der Konvergenzbereich dieser Reihe mit dem der Potenzreihe für u übereinstimmt. Dies wäre nur dann möglich, wenn die Konvergenz der Reihe

$$v - u = 2\left(k\sin u + \frac{1}{2}k^2\sin 2u + \frac{1}{3}k^3\sin 3u + \ldots\right)$$

für alle komplexen Werte von e innerhalb des Konvergenzkreises und die daraus resultierenden komplexen Werte von u bewiesen wäre. Die Untersuchung über den Konvergenzbereich der gesuchten Potenzreihe scheint also noch nicht abgeschlossen zu sein.

Jetzt sollen diejenigen Glieder der Reihe, deren Grad kleiner als 5 ist, entwickelt werden. Es war

$$k = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$$

Nun ist

$$(1-e^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2.4}e^4 - \frac{1.3}{2.4.6}e^6 - \ldots$$

Daher

$$k = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \ldots$$

$$k^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \ldots$$

$$k^3 = \frac{1}{8}e^3 + \ldots$$

$$k^4 = \frac{1}{16}e^4 + \ldots$$

Ferner ist

$$\sin u = \frac{u-m}{e} = \sin m + e\sin m\cos m + e^2\sin m\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 m\right) + e^3\sin m\cos m\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2 m\right) + \ldots$$

Da

$$\sin(\lambda m + x) = \sin\lambda m + x\cos\lambda m - \frac{1}{2}x^2\sin\lambda m - \ldots$$

ist, so ist

$$\sin\lambda u = \sin(\lambda m + e\lambda\sin m + e^2\lambda\sin m\cos m + \ldots)$$
$$= \sin\lambda m + e\lambda\sin m\cos\lambda m + e^2\lambda\sin m\cos m\cos\lambda m + \ldots$$
$$- \frac{1}{2}e^2\lambda^2\sin^2 m\sin\lambda m - \ldots$$

Daher ist

$$\sin 2u = 2\sin m\cos m + e\sin m(2 - 4\sin^2 m) + e^2\sin m\cos m(2 - 8\sin^2 m) + \ldots$$
$$\sin 3u = \sin 3m + 3e\sin m\cos 3m + \ldots = \sin m(3 - 4\sin^2 m) + e\sin m\cos m(3 - 12\sin^2 m) + \ldots$$
$$\sin 4u = \sin 4m + \ldots = \sin m\cos m(4 - 8\sin^2 m) + \ldots$$

Folglich ist

$$2k \sin u = e \sin m + e^2 \sin m \cos m + e^3 \sin m (1 - \frac{3}{2} \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m (1 - \frac{8}{3} \sin^2 m) + \dots$$

$$+ e^3 \sin m \,.\, \frac{1}{4} \qquad + e^4 \sin m \cos m \,.\, \frac{1}{4} \qquad + \dots$$

$$k^2 \sin 2u = \frac{1}{2} e^2 \sin m \cos m + e^3 \sin m (\frac{1}{2} - \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m (\frac{1}{2} - 2 \sin^2 m) + \dots$$

$$+ e^4 \sin m \cos m \,.\, \frac{1}{4} \qquad + \dots$$

$$\frac{2}{3} k^3 \sin 3u = \qquad e^3 \sin m (\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m (\frac{1}{4} - \sin^2 m) + \dots$$

$$\frac{1}{2} k^4 \sin 4u = \qquad e^4 \sin m \cos m (\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \sin^2 m) + \dots$$

Daher

$$v - u = e \sin m + \frac{3}{2} e^2 \sin m \cos m + e^3 \sin m (2 - \frac{17}{6} \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m (\frac{19}{8} - \frac{71}{12} \sin^2 m) + \dots$$

Nun war aber

$$u - m - e \sin m \quad + e^2 \sin m \cos m + e^3 \sin m (1 - \frac{3}{2} \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m (1 - \frac{8}{3} \sin^2 m) + \dots$$

Also ist

$$v - m = 2e \sin m + \frac{5}{2} e^2 \sin m \cos m + e^3 \sin m (3 - \frac{13}{3} \sin^2 m) + e^4 \sin m \cos m (\frac{27}{8} - \frac{103}{12} \sin^2 m) + \dots$$

oder auch

$$v - m = 2e \sin m + \frac{5}{4} e^2 \sin 2m + e^3 (\frac{13}{12} \sin 3m - \frac{1}{4} \sin m) + e^4 (\frac{103}{96} \sin 4m - \frac{11}{24} \sin 2m) + \dots$$

§ 10. Anwendung der entwickelten Reihe auf die im § 6 berechneten Beispiele.

Bei der kleinen Exzentrizität der Erdbahn kann man sich auf die drei ersten Glieder der Reihe beschränken. Soll $v - m$ in Winkelsekunden ausgedrückt werden, so ist demnach

$$v - m = \frac{648000}{\pi} \sin m (2e + 3e^3 + \frac{5}{2} e^2 \cos m - \frac{13}{3} e^3 \sin^2 m).$$

Für das Jahr 1903 ist

$$e = 0{,}0167478, \quad 2e + 3e^3 = 0{,}0335097, \quad \log \frac{5}{2} e^2 = 0{,}84584 - 4, \quad \log \frac{13}{3} e^3 = 0{,}30867 - 5$$

Ferner ist

$$\log \frac{648000}{\pi} = 5{,}31443$$

1) Berechnung von $v - m$ für den 1. Januar 1903.

Dann ist $m = -1^0\, 20'\, 25{,}5''$

$$\log \sin m = 8{,}36909\, n$$

Das Glied $\frac{13}{3} e^3 \sin^2 m$ hat hier keinen Einfluss mehr.

$$\log \frac{5}{2} e^2 = 0{,}84584 - 4$$
$$\log \cos m = 9{,}99988$$
$$\log \text{ Prod.} = 0{,}84572 - 4$$
$$\frac{5}{2} e^2 \cos m = 0{,}0007010$$
$$\text{Klammerwert} = 0{,}0342107$$

$$\log \frac{648000}{\pi} = 5{,}31443$$
$$\log \sin m = 8{,}36909\, n$$
$$\log \text{Kl.} = 8{,}53416$$
$$\log (v - m) = 2{,}21768\, n$$

$v - m = -165{,}1'' = -2'\,45{,}1''$ (genau wie in § 6.)

2) Berechnung von $v - m$ für den 1. Mai 1903.

$$m = 116^\circ\, 55'\, 53{,}6''$$

$$\log \frac{5}{2} e^2 = 0{,}84584 - 4$$
$$\log \cos m = 9{,}65602\, n$$
$$\log \text{Prod.} = 0{,}50186 - 4\, n$$
$$\frac{5}{2} e^2 \sin m = -0{,}0003176$$

$$\log \frac{13}{3} e^3 = 0{,}30867 - 5$$
$$\log \sin^2 m = 9{,}90030$$
$$\log \text{Prod.} = 0{,}20897 - 5$$
$$-\frac{13}{3} e^3 \sin^2 m = -0{,}0000162$$

$$\text{Klammerwert} = +0{,}0331759$$

$$\log \frac{648000}{\pi} = 5{,}31443$$
$$\log \sin m = 9{,}95015$$
$$\log \text{Kl.} = 8{,}52083$$
$$\log (v - m) = 3{,}78541$$
$$v - m = 6101{,}1'' = 1^\circ\, 41'\, 41{,}1''$$
(im § 6 : $1^\circ\, 41'\, 41{,}4''$)

Die Zeitgleichung.