

Der Unterschied zwischen dem Richtungswinkel (Azimut) und Stundenwinkel eines Sterns in seiner Abhängigkeit von dem Stundenwinkel und der Deklination des Sterns und von der Polhöhe betrachtet.

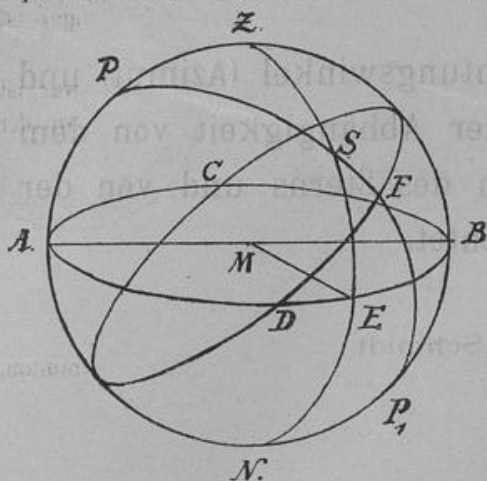
Von

Professor Dr. Carl Schmidt.

Es ist vielfach bekannt, dass man mit Hilfe der Uhr und der Sonne die Himmelsgegenden ziemlich genau bestimmen kann. Der Grundgedanke der Methode lässt sich in folgender Weise klar machen. Die Sonne macht in 24 Stunden einen vollen Umlauf am Himmel, der kleine Zeiger der Uhr dagegen in derselben Zeit zwei volle Umläufe. Folglich bewegt sich der kleine Zeiger gerade mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit wie die Sonne, er wird also in derselben Zeit einen doppelt so grossen Bogen zurücklegen als diese. Nun steht die Sonne genau im Süden, wenn sie ihren höchsten Stand am Himmel hat, d. i. um 12 Uhr wahre Sonnenzeit. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Uhr nicht die mitteleuropäische Zeit angibt, sondern die wahre Sonnenzeit des Orts, wie sie durch eine Sonnenuhr angezeigt wird. Nimmt man dann zu irgend einer Zeit, z. B. am Nachmittage, die Uhr in die Hand und hält sie wagrecht so vor sich, dass der kleine Zeiger nach der Sonne gerichtet ist, so sieht man auf der Uhr den Bogen, den der kleine Zeiger seit 12 Uhr mittags zurückgelegt hat. Genau den halben Bogen hat aber in derselben Zeit die Sonne am Himmel zurückgelegt. Demnach gibt die Mitte des Bogens die Richtung an, in welcher die Sonne um 12 Uhr gestanden hat, d. h. die Südrichtung. Die Richtung von Norden nach Süden erhält man also, wenn man den Mittelpunkt des Zifferblatts mit der Mitte des Bogens verbindet, während der kleine Zeiger nach der Sonne zu gerichtet ist. Genau dasselbe gilt von einer Beobachtung am Vormittag, nur dass es sich dann um denjenigen Bogen handelt, den der kleine Zeiger bis mittags 12 Uhr zurücklegen wird.

Man sieht unmittelbar ein, dass die Methode nicht genau sein kann, weil die Bewegung der Sonne in einer anderen Ebene erfolgt, als die Bewegung des Stundenzeigers. Die Sonne durchläuft während eines Tages am Himmel eine Kreisbahn, die gegen den Horizont geneigt ist und deren Ebene auf der sogenannten Weltachse, der Drehungsachse der Himmelskugel, senkrecht steht. Der Stundenzeiger dagegen bewegt sich, wenn die Stellung der Uhr nicht geändert wird, in einer horizontalen Ebene. Es ist daher von Interesse, die Genauigkeit der Methode zu untersuchen, d. h. zu bestimmen, welchen Fehler man an irgend einem Tage und im Verlaufe des ganzen Jahres im ungünstigsten Falle machen kann, und wie sich dieser Fehler mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes ändert.

In Figur 1 sei ABCD der Horizont und zwar A der Nordpunkt, B der Südpunkt, C der Ostpunkt und D der Westpunkt. Der geneigte durch C und D gehende Kreis stellt den Himmelsäquator, P und P₁ die beiden Himmelspole, Z den höchsten Punkt der Himmelskugel, das Zenith, und N seinen Gegenpunkt, den Nadir, dar. Ist nun S der Standpunkt der Sonne, so ist ME die Richtung auf der Horizontalebene, in welcher die Sonne gesehen wird, und Winkel BME = α der Winkel, den diese Richtung mit der Südrichtung bildet, das sogenannte Azimut der Sonne, das durch das Verfahren bestimmt werden soll. Dieser Winkel stimmt mit dem Bogen BE oder dem sphärischen Winkel BZE überein. Der sphärische Winkel ZPS = t ist der Stundenwinkel der Sonne. Er ergibt sich, indem man die wahre Sonnenzeit für den Augenblick der Beobachtung durch Multiplikation mit 15 in Grad, Minuten und Sekunden verwandelt, denn der Halbkreis PSP₁ beschreibt bei der Bewegung der Sonne S in 24 Stunden einen Winkel von 360°, also in jeder Stunde einen Winkel von 15°.



Figur 1.

einer Stunde ein Bogen von 30° (360°:12) entspricht, so stimmt t genau mit dem früher genannten halben Bogen auf der Uhr überein. Wir haben also $\alpha - t$, den Unterschied zwischen α und t , in seiner Abhängigkeit von dem Stundenwinkel t , von der Polhöhe $AP = g$, die bekanntlich mit der geographischen Breite des Beobachtungsorts übereinstimmt, und von der Deklination der Sonne $\delta = SF$, die bekanntlich im Verlaufe des Jahres sich in den Grenzen $\pm 23\frac{1}{2}^\circ$ bewegt, zu betrachten. Insbesondere ist der Verlauf von $\alpha - t$ bei bestimmten Werten von g und δ während eines Umlaufs der Sonne zu untersuchen, und es sind die grössten und kleinsten Werte davon zu bestimmen. Dabei genügt es, t von 0° bis 180° zu verändern, da die Bewegungen eines Himmelskörpers auf der östlichen und westlichen Halbkugel vollständig symmetrisch sind. Wir behandeln die Aufgabe ganz allgemein und beschränken uns weder in der geographischen Breite des Orts noch in der Deklination δ , ziehen also statt der Sonne irgend einen Fixstern in Betracht.

In dem sphärischen Dreieck PZS ist $PZ = 90^\circ - g$, $PS = 90^\circ - \delta$, $ZS = 90^\circ - h$, wo $h = SE$ die Höhe des Sterns bedeutet; ferner $\sphericalangle SPZ = t$ und $\sphericalangle PZS = 180^\circ - \alpha$. Nun ist in jedem sphärischen Dreieck

$$\cotg \beta = \frac{\sin c \cotg b - \cos c \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

also erhält man, wenn man diese Formel auf das Dreieck PZS anwendet,

$$(1) \cotg \alpha = \frac{\sin g \cos t - \cos g \tg \delta}{\sin t}$$

Für die spätere Untersuchung ist noch folgende Bemerkung wichtig. Die Gleichung (1) würde man auch aus dem Dreieck P₁NS erhalten, in welchem $P_1N = 90^\circ - g$, $P_1S = 90^\circ + \delta$, $NS = 90^\circ + h$, $\sphericalangle SP_1N = 180^\circ - t$ und $\sphericalangle P_1NS = \alpha$ ist. Die Stücke des einen Dreiecks unterscheiden sich von den entsprechenden Stücken des anderen dadurch, dass h und δ das Zeichen ändern, und dass statt t und α ihre Supplemente eintreten.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass $\delta = 0$ ist. Bei der Sonne tritt dies am 21. März und 23. September ein, wenn Tag und Nacht einander gleich sind. Dann ist

$$\cotg \alpha = \cotg t \sin g.$$

Daher ist

$$\cotg(\alpha - t) = \frac{\cotg^2 t \sin \varphi + 1}{\cotg t (1 - \sin \varphi)}$$

Bei der oberen Kulmination des Sterns ist $t = 0$, bei dem Untergange (bezw. Aufgange) ist $t = 90^\circ$, bei der unteren Kulmination ist $t = 180^\circ$.

Wenn t von 0° bis 180° wächst, so nimmt $\cotg t$ von $+\infty$ bis $-\infty$ ab, und zwar ist $\cotg t$ im ersten Quadranten positiv, im zweiten negativ. Sehen wir von dem Falle ab, wo der Beobachtungsort auf dem Aequator liegt ($\varphi = 0$), und α immer gleich 90° ist, so ist

$$\alpha = t, \text{ wenn } t = 0 \text{ ist,}$$

$$\alpha > t, \text{ wenn } t \text{ zwischen } 0^\circ \text{ und } 90^\circ \text{ liegt,}$$

$$\alpha = t, \text{ wenn } t = 90^\circ \text{ ist,}$$

$$\alpha < t, \text{ wenn } t \text{ zwischen } 90^\circ \text{ und } 180^\circ \text{ liegt,}$$

$$\alpha = t, \text{ wenn } t = 180^\circ \text{ ist.}$$

Bezeichnen wir für den Augenblick $\cotg t$ mit x , so wird $\alpha - t$ ein Maximum oder Minimum, wenn die Ableitung von

$$\frac{x^2 \sin \varphi + 1}{x} = x \sin \varphi + \frac{1}{x}$$

verschwindet, wenn also

$$\sin \varphi - \frac{1}{x^2} = 0,$$

also

$$t g t = + \sqrt{\sin \varphi}$$

ist. Dann ist

$$\cotg(\alpha - t) = \pm \frac{\sqrt{\sin \varphi}}{\sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}$$

Das Zeichen $+$ gibt das Maximum von $\alpha - t$, das Zeichen $-$ das Minimum.

In der Breite von Mainz ($\varphi = 50^\circ$) ergibt sich aus der angeführten Gleichung

$$t = 41^\circ 11' 38'' = 2^h 44^m 47^s$$

$$\alpha - t = 7^\circ 36' 45''$$

d. h. am 21. März und 23. September wird $2^{3/4}$ Stunden vor und nach dem wahren Mittage im mittleren Deutschland $\alpha - t$ seinen grössten Wert von etwa $7^{1/2}^\circ$ erreichen. An diesen Tagen ist also der grösste Fehler, den man bei der Bestimmung der Himmelsgegenden durch das anfangs angegebene Verfahren machen kann, gleich einem Winkel, dem auf der Uhr ein Bogen von etwa $1^{1/2}$ Minuten entspricht.

Wir betrachten von jetzt an den Fall, wo δ nicht Null ist, und können uns bei der Untersuchung auf positive Werte von δ beschränken. Betrachten wir nämlich zwei verschiedene Sterne S und S_1 , deren Deklination sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet, so werden infolge der Bemerkung auf Seite 4 die Dreiecke ZPS und NP_1S_1 in Gestalt und Grösse übereinstimmen, wenn die Stundenwinkel von S und S_1 sich zu 180° ergänzen. Dann werden sich auch die Azimute beider Sterne zu 180° ergänzen, und der eine wird ebensohoch über dem Horizont stehen, wie der andere unter ihm. Nun ist in dem ersten Dreieck die Summe der Winkel bei Z und P gleich $180^\circ + t - \alpha$, in dem zweiten die Summe der entsprechenden Winkel bei N und P_1 gleich $180^\circ + \alpha - t$; also ändert sich $\alpha - t$ bei negativem δ , wenn t von 0° bis 180° wächst, genau so, wie $t - \alpha$ bei positivem δ von gleichem Betrage, wenn t von 180° bis 0° abnimmt.

Wir wollen nun zunächst feststellen, wie gross α bei der oberen und unteren Kulmination des Sterns, also für $t = 0^\circ$ und $t = 180^\circ$ ist. Aus der Figur und aus Formel (1) ergibt sich, dass bei der oberen Kulmination $\alpha = 0$ ist, wenn $\delta < \varphi$ ist. Ist aber $\delta > \varphi$, so ist der Abstand des Sterns vom Nordpol kleiner als der Polabstand des Zeniths, und dann ist bei der oberen Kulmination $\alpha = 180^\circ$. Ist aber $\delta = \varphi$, so kulminiert der Stern im Zenith und α hat für $t = 0$ den Grenzwert 90° . Ebenso folgt, dass bei der unteren Kulmination α im allgemeinen gleich 180° ist. Nur wenn δ negativ und dem absoluten Betrage nach grösser als φ ist, ist α dann gleich 0° . Ist aber $\delta = -\varphi$, so steht der Stern bei der unteren Kulmination im Nadir, und α hat bei $t = 180^\circ$ den Grenzwert 90° .

Wir wollen jetzt ermitteln, bei welchem Stundenwinkel der Unterschied $\alpha - t$ gleich Null werden kann; dabei ist $t = 0^\circ$ und $t = 180^\circ$ ausgeschlossen, da im Vorhergehenden dieser Fall schon besprochen ist. Dann folgt aus (1)

$$\begin{aligned} \cos t &= \sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \\ \cos t \cdot (1 - \sin \varphi) &= -\cos \varphi \operatorname{tg} \delta \\ 2 \cos t \sin^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) &= -2 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \cos (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \operatorname{tg} \delta \end{aligned}$$

also

$$(2) \quad \cos t = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}$$

Wenn δ dem Betrage nach kleiner als $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ ist, so hat diese Gleichung eine Auflösung, die mit t_0 bezeichnet werden soll.

Aus den früheren Ergebnissen für den Fall $\delta = 0$ können wir jetzt schliessen, dass wenn t von 0° bis t_0 wächst, $\alpha > t$ ist, und wenn t von t_0 bis 180° wächst, $\alpha < t$ ist. Ist δ positiv und geht zunehmend in den Wert $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ über, so hat t_0 den Grenzwert 180° . Ist also δ gleich $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ oder grösser, so ist immer $\alpha > t$. Ist dagegen δ negativ und geht abnehmend in den Wert $-(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ über, so hat t_0 den Grenzwert 0° . Ist demnach δ gleich $-(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ oder kleiner, so ist immer $\alpha < t$.

Wir wollen jetzt noch betrachten, wie $\alpha - t$ verläuft, so lange der Stern sich über dem Horizont bewegt.

Ist t_1 der Stundenwinkel des Sterns beim Untergang, so ist bekanntlich

$$(3) \quad \cos t_1 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi)}$$

Bei positivem δ sind t_0 und t_1 stumpf, bei negativem δ spitz. Nun ist $90^\circ - \varphi > 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, also ist bei negativem δ t_1 grösser als t_0 , bei positivem δ dagegen t_0 grösser als t_1 .

Daraus folgt:

Ist die Deklination des Sterns positiv, so wird α während der Bewegung des Sterns über dem Horizont immer grösser als t sein. Bei der Sonne ist das im Sommerhalbjahr der Fall. Ist dagegen die Deklination des Sterns negativ und dem absoluten Werte nach kleiner als $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, so ist $\alpha - t$ positiv, so lange t zwischen 0° und t_0 liegt, aber negativ, wenn t zwischen t_0 und t_1 liegt. Wenn aber die Deklination negativ und dem absoluten Werte nach gleich $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ oder grösser ist, so ist während der Bewegung des Sterns über dem Horizont α immer kleiner als t . Das gilt bei der Sonne für das Winterhalbjahr. Man vergleiche die Werte in der Tabelle am Schlusse der Arbeit.

Nun soll bestimmt werden, wann bei gegebener Deklination $\alpha - t$ ein Maximum oder Minimum hat*).

$$\text{Da} \quad \cotg \alpha = \frac{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi} = f(t)$$

ist, so ist

$$\alpha = \operatorname{arc} \cotg f(t).$$

Daher ist

$$\frac{d(\alpha - t)}{dt} = -\frac{f'(t)}{1 + f(t)^2} - 1 = -\frac{1 + f(t)^2 + f'(t)}{1 + f(t)^2}$$

Im Falle des Maximums oder Minimums muss also $1 + f(t)^2 + f'(t) = 0$ sein.

Nun ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-\sin \varphi \sin^2 t - \sin \varphi \cos^2 t + \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t}{\sin^2 t} \\ &= \frac{-\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t}{\sin^2 t} \end{aligned}$$

Daher muss

$$\sin^2 t + \sin^2 \varphi \cos^2 t - 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - \sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \delta \cos t = 0$$

sein. Setzt man hier $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, ändert die Zeichen und ordnet, so ergibt sich

$$\cos^2 t \cos^2 \varphi + \cos t \cos \varphi \operatorname{tg} \delta (2 \sin \varphi - 1) + \sin \varphi - \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 1 = 0.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \cos t \cos \varphi &= -\frac{1}{2}(2 \sin \varphi - 1) \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{2} \sqrt{4 \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta - 4 \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \delta - 4 \sin \varphi + 4 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta + 4} \\ &= \frac{-(2 \sin \varphi - 1) \sin \delta + \sqrt{5 \sin^2 \delta - 4 \sin \varphi + 4 \cos^2 \delta}}{2 \cos \delta}, \end{aligned}$$

also

$$(4) \quad \cos t = \frac{-(2 \sin \varphi - 1) \sin \delta + \sqrt{4(1 - \sin \varphi) + \sin^2 \delta}}{2 \cos \varphi \cos \delta}$$

Das Vorzeichen dieses Ausdrucks stimmt mit dem Vorzeichen der Wurzel überein, weil im Zähler der absolute Wert des 2. Glieds überwiegt. Es ist nämlich $4 \sin \varphi (\sin \varphi - 1) \sin^2 \delta$ negativ, $4(1 - \sin \varphi)$ positiv, folglich, wenn man auf beiden Seiten $\sin^2 \delta$ addiert,

$$(4 \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi + 1) \sin^2 \delta < 4(1 - \sin \varphi) + \sin^2 \delta$$

Daher ist der absolute Wert von $(2 \sin \varphi - 1) \sin \delta$ kleiner als $\sqrt{4(1 - \sin \varphi) + \sin^2 \delta}$.

Zieht man nun den früher geschilderten Verlauf von $\alpha - t$ mit wachsendem t in Betracht, so ergibt sich Folgendes:

Gibt man in (4) der Wurzel das positive Vorzeichen, so erhält man denjenigen Stundenwinkel \mathcal{S}_1 , der das Maximum von $\alpha - t$ liefert; gibt man dagegen der Wurzel das negative Vorzeichen, so erhält man denjenigen Stundenwinkel \mathcal{S}_2 , für den das Minimum von $\alpha - t$ eintritt.

\mathcal{S}_1 ist ein spitzer, \mathcal{S}_2 ein stumpfer Winkel.

*) Vgl. die Aufgabe 1838 im Aufgaben-Repertorium der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 32, Jahrg. 1901, Seite 193 und meinen Nachtrag dazu in demselben Bande, Seite 370.

Für die weitere Betrachtung sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- I. $\varphi > 30^\circ$, dann ist $\sin \varphi > \frac{1}{2}$, $2 \sin \varphi - 1 > 0$; ferner ist dann $\varphi > 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.
- II. $\varphi < 30^\circ$, dann ist $\sin \varphi < \frac{1}{2}$, $2 \sin \varphi - 1 < 0$; ferner ist dann $\varphi < 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

I. $\varphi > 30^\circ$. Wir beschränken uns wegen der auf Seite 5 gemachten Bemerkung auf positive Werte von δ . Fassen wir zunächst den zweiten Wert $\cos \mathcal{J}_2$ ins Auge, der sich aus (4) ergibt, wenn die Wurzel das negative Vorzeichen erhält. Beide Glieder des Zählers sind dann negativ. Wenn δ wächst, so nimmt der absolute Wert des Zählers zu, während der positive Nenner abnimmt, daher nimmt der absolute Wert von $\cos \mathcal{J}_2$ zu, und \mathcal{J}_2 nähert sich dem Grenzwert 180° , der für $\delta = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ erreicht werden muss, wie wir schon aus dem früher geschilderten Verlaufe von $\alpha - t$ schliessen können. In der Tat wird dann die rechte Seite von (4) gleich

$$\begin{aligned} & \frac{-(2 \sin \varphi - 1) \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) - 3 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{4 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \cos^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)} \\ &= \frac{-2 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) (1 + \sin \varphi)}{4 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \cos^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)} = \\ &= \frac{-4 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \cdot \cos^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{4 \sin (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \cos^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)} = -1 \end{aligned}$$

Wird $\delta \geq 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, so gibt es kein Minimum mehr.

Wie verhält sich nun der erste Wert $\cos \mathcal{J}_1$, der den Stundenwinkel für das Maximum von $\alpha - t$ liefert, bei zunehmendem δ ? Um diese Frage zu entscheiden, setzen wir zur Abkürzung $2 \sin \varphi - 1 = a$ und $4(1 - \sin \varphi) = b$. Da wir den konstanten positiven Faktor $2 \cos \varphi$ im Nenner unbeachtet lassen können, so handelt es sich um den Verlauf folgenden Ausdrucks:

$$\begin{aligned} & \frac{-a \sin \delta + \sqrt{b + \sin^2 \delta}}{\cos \delta} = -a \operatorname{tg} \delta + \sqrt{\frac{b}{\cos^2 \delta} + \operatorname{tg}^2 \delta} \\ &= -a \operatorname{tg} \delta + \sqrt{b + (b+1) \operatorname{tg}^2 \delta} \end{aligned}$$

bei wachsendem δ . Hierin betrachten wir $\operatorname{tg} \delta = x$ als unabhängige Variable, die von 0 bis $+\infty$ zunimmt, wenn δ von 0° bis 90° wächst. Die Ableitung dieses Ausdrucks nach x

$$-a + \frac{(b+1)x}{\sqrt{b+(b+1)x^2}}$$

ist für $x = 0$ negativ. Demnach nimmt $\cos \mathcal{J}_1$ zunächst mit wachsendem δ ab, \mathcal{J}_1 zu. Nun wird aber für $\delta = \varphi$, wie man sich leicht überzeugt, $\cos \mathcal{J}_1 = 1$, also $\mathcal{J}_1 = 0$. Demnach muss \mathcal{J}_1 bei wachsendem δ einen grössten Wert bekommen und dann wieder abnehmen. Um diesen Wert zu erhalten, setzen wir die Ableitung gleich Null und finden

$$\begin{aligned} a^2 b + a^2 (b+1) x^2 &= (b+1)^2 x^2 \\ a^2 b &= (b+1) x^2 (b+1 - a^2) \end{aligned}$$

Nun ist $b + 1 - a^2 = 4 \cos^2 \varphi$, folglich wird

$$x = \operatorname{tg} \delta = \frac{a}{2 \cos \varphi} \sqrt{\frac{b}{b+1}} = \frac{2 \sin \varphi - 1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{5 - 4 \sin \varphi}}$$

oder

$$(5) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2 \sin \varphi - 1}{\sqrt{(5 - 4 \sin \varphi)(1 + \sin \varphi)}}$$

Diese Gleichung liefert die Deklination δ_0 . So lange δ von 0 bis δ_0 wächst, nimmt \mathcal{I}_1 zu, bei δ_0 erhält \mathcal{I}_1 seinen grössten Wert, dann nimmt \mathcal{I}_1 mit wachsendem δ wieder ab. Wird $\delta = \varphi$, so wird $\cos \mathcal{I}_1 = 1$, also $\mathcal{I}_1 = 0$. Wenn $\delta \geq \varphi$ ist, so hat $\alpha - t$ kein Maximum mehr. Dann hat $\alpha - t$, wie schon früher angegeben ist, für $t = 0$ den Anfangswert 180° (bz. 90°) und nimmt mit wachsendem t stetig ab.

Ist $\varphi = 50^\circ$, so erhält man aus (5) $\delta_0 = 16^\circ 3' 15''$, und aus (4) $\mathcal{I}_1 = 45^\circ 56' 55'' = 3^h 3^m 48^s$. Die Sonne erreicht diese Deklination am 5. Mai und am 9. August, so dass an diesen Tagen der Augenblick, in dem $\alpha - t$ seinen grössten Wert in unserer Breite erreicht, vormittags am frühesten und nachmittags am spätesten eintritt, nämlich 3 Stunden 3 Min. 3 Sek. vor bzw. nach dem wahren Mittag.

Wir wollen nun für die verschiedenen Werte von δ den Verlauf von $\alpha - t$, während t von 0° bis 180° wächst, zusammenstellen.

Ist der absolute Wert von δ kleiner als $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, so hat $\alpha - t$ den Anfangswert 0, wird dann positiv, erreicht bei \mathcal{I}_1 das Maximum, wird bei t_0 gleich Null, dann negativ, erreicht bei \mathcal{I}_2 das Minimum und wird schliesslich bei 180° wieder gleich Null.

Liegt δ zwischen $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ und φ , so hat $\alpha - t$ den Anfangswert Null, wird dann positiv, erreicht bei \mathcal{I}_1 das Maximum und wird schliesslich bei 180° gleich Null.

Liegt δ zwischen $-(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ und $-\varphi$, so wird $\alpha - t$ von Null ausgehend negativ, erreicht bei \mathcal{I}_2 das Minimum und wird bei 180° wieder gleich Null.

Ist $\delta = \varphi$, so nimmt $\alpha - t$ stetig von 90° bis 0° ab.

Ist $\delta = -\varphi$, so nimmt $\alpha - t$ stetig von 0° bis -90° ab.

Ist $\delta > \varphi$, so nimmt $\alpha - t$ stetig von 180° bis 0° ab.

Ist $\delta < -\varphi$, so nimmt $\alpha - t$ stetig von 0° bis -180° ab.

II. $\varphi < 30^\circ$. Dann ist $2 \sin \varphi - 1$ negativ und $\varphi < 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Die Gleichung (4), aus welcher die Stundenwinkel \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 für das Maximum und Minimum von $\alpha - t$ berechnet werden, schreiben wir jetzt so:

$$\cos t = \frac{(1 - 2 \sin \varphi) \sin \delta + \sqrt{4(1 - \sin \varphi) + \sin^2 \delta}}{2 \cos \varphi \cos \delta}$$

Das erste Glied des Zählers ist jetzt bei positivem δ positiv. Wenn δ wächst, so nimmt $\cos \mathcal{I}_1$ beständig zu, \mathcal{I}_1 nimmt also stetig ab und erreicht für $\delta = \varphi$ den Wert 0. Ist δ gleich φ oder grösser, so hat $\alpha - t$ kein Maximum mehr.

$\cos \mathcal{I}_2$ ist negativ, sein absoluter Wert beträgt

$$-\frac{(1 - 2 \sin \varphi) \sin \delta + \sqrt{4(1 - \sin \varphi) + \sin^2 \delta}}{2 \cos \varphi \cos \delta}$$

Für diesen Ausdruck können wir genau dieselben Betrachtungen anstellen, wie für $\cos \mathcal{I}_1$ im Falle I. Nur tritt jetzt $1 - 2 \sin \varphi$ an die Stelle von $2 \sin \varphi - 1$. Der absolute Wert von

$\cos \vartheta_2$ wird also mit wachsendem δ zuerst abnehmen, dann bei einem gewissen Werte δ_0 seinen kleinsten Wert erreichen und schliesslich wieder zunehmen. Dabei ist [vgl. (5)]

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{1 - 2 \sin \varphi}{V(5 - 4 \sin \varphi)(1 + \sin \varphi)}$$

ϑ_2 wird also zunächst abnehmen, bei δ_0 seinen kleinsten Wert erreichen und dann wieder zunehmen. Wird $\delta = 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, so wird $\vartheta_2 = 180^\circ$. Wird δ noch grösser, so gibt es auch kein Minimum von $\alpha - t$ mehr.

Wir wollen nun auch im Falle II für die verschiedenen Werte von δ den Verlauf von $\alpha - t$, während t von 0° bis 180° wächst, zusammenstellen.

Ist der absolute Wert von δ kleiner als φ , so hat $\alpha - t$ den Anfangswert 0° , wird dann positiv, erreicht bei ϑ_1 das Maximum, wird bei t_0 gleich 0° , dann negativ, erreicht bei ϑ_2 das Minimum und wird schliesslich bei 180° wieder gleich 0° .

Liegt δ zwischen φ und $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, so hat $\alpha - t$ den Anfangswert 180° , nimmt dann ab, wird bei t_0 gleich 0° , dann negativ, erreicht bei ϑ_2 das Minimum und wird schliesslich bei 180° gleich 0° . Ist $\delta = \varphi$, so ist der Verlauf derselbe, nur beträgt der Anfangswert 90° .

Liegt δ zwischen $-\varphi$ und $-(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$, so hat $\alpha - t$ den Anfangswert 0° , wird dann positiv, erreicht bei ϑ_1 das Maximum, wird bei t_0 gleich 0° und fällt nun beständig bis auf -180° .

Ist $\delta = -\varphi$, so ist der Verlauf derselbe, nur beträgt der Endwert -90° .

Ist δ gleich $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi$ oder grösser, so fällt $\alpha - t$ beständig von 180° bis 0° .

Ist δ gleich $-(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ oder kleiner, so fällt $\alpha - t$ stetig von 0° bis -180° .

Es soll jetzt noch untersucht werden, wie sich das Maximum oder Minimum von $\alpha - t$ in einer bestimmten geographischen Breite mit der Deklination δ ändert, ferner bei einer bestimmten Deklination mit der geographischen Breite.

Aus der Gleichung (1)

$$\operatorname{cotg} \alpha \sin t - \sin \varphi \cos t + \cos \varphi \operatorname{tg} \delta = 0$$

folgt zunächst bei konstantem δ und φ die Differentialgleichung

$$\frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} d\alpha = (\operatorname{cotg} \alpha \cos t + \sin \varphi \sin t) dt$$

Da nun für das Maximum oder Minimum $d\alpha = dt$ sein muss, so ergibt sich

$$(6) \quad \frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha \cos t + \sin \varphi \sin t$$

Durch die Gleichungen (1) und (6) werden für das Maximum und Minimum von $\alpha - t$ α und t als Funktionen von δ und φ bestimmt. Um nun die erste Frage zu beantworten, betrachten wir in (1) α , t und δ als variabel, φ als konstant und erhalten durch Differenzieren

$$-\frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} d\alpha + (\operatorname{cotg} \alpha \cos t + \sin \varphi \sin t) dt + \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \delta} d\delta = 0$$

oder infolge von (6)

$$\frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} d(\alpha - t) = \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \delta} d\delta$$

Demnach ist $\frac{d(\alpha - t)}{d\delta}$ immer positiv, d. h. Maximum und Minimum von $\alpha - t$ wachsen stetig mit zunehmendem δ ; da aber das Minimum negativ ist, so bedeutet das, dass der absolute Wert des Minimums mit wachsendem δ abnimmt.

In einer bestimmten geographischen Breite erreicht also das Maximum von $\alpha - t$ für die Sonne seinen grössten Wert am längsten Tage, wenn $\delta = 23^{\circ}27'$ ist. Das Verfahren zur Bestimmung der Himmelsgegenden ist also im Hochsommer, insbesondere am längsten Tage am ungenäuesten.

Um die zweite oben gestellte Frage zu beantworten, betrachten wir jetzt in (1) α , t und φ als variabel, δ als konstant und differenzieren. Dann folgt

$$-\frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} d\alpha + (\cot \alpha \cos t + \sin \varphi \sin t) dt - (\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \operatorname{tg} \delta) d\varphi = 0$$

oder infolge von (6)

$$\frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} d(\alpha - t) = -(\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \operatorname{tg} \delta) d\varphi$$

Nun ist aber infolge von (4)

$$\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \delta + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + \sin^2 \delta}{2 \cos \delta}$$

Demnach wird

$$\frac{\sin t}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{d(\alpha - t)}{d\varphi} = -\frac{\sin \delta + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + \sin^2 \delta}{2 \cos \delta}$$

Der Zähler der rechten Seite hat aber dasselbe Vorzeichen wie die Wurzel, also wird $\frac{d(\alpha - t)}{d\varphi}$ für das Maximum negativ und für das Minimum positiv; das bedeutet:

Mit wachsender geographischer Breite nehmen die absoluten Werte des Maximums und Minimums beständig ab, das Verfahren wird also genauer.

Die folgenden Entwicklungen sollen dazu dienen, für den Augenblick, wo $\alpha - t$ seinen grössten oder kleinsten Wert erreicht, die Höhe, das Azimut und den Stundenwinkel des Sterns möglichst einfach zu berechnen.

Durch die Gleichungen (1) und (6) werden die gesuchten Werte von α und t bestimmt. Nun ist aber in jedem sphärischen Dreieck

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

also ist, wenn der sogenannte parallaktische Winkel des Sterns PSZ in Fig. 1 mit γ bezeichnet wird,

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos t + \sin \alpha \sin t \sin \varphi$$

oder infolge von (6)

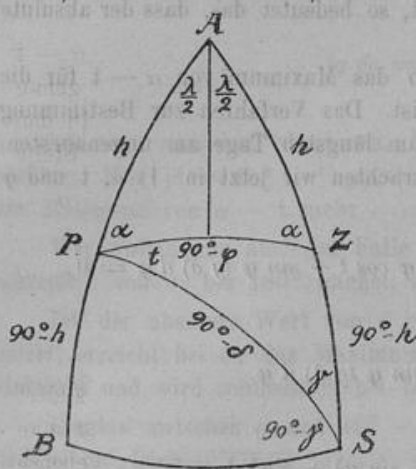
$$\cos \gamma = \frac{\sin t}{\sin \alpha}$$

oder wegen des Sinussatzes im Dreieck PSZ

$$\cos \gamma = \frac{\cos h}{\cos \delta}$$

Daraus folgt, dass γ ein spitzer Winkel ist und dass h dem absoluten Werte nach grösser als δ ist. Es sei nun zunächst $h > 0$, also $ZS < 90^{\circ}$. Verlängern wir (Fig. 2) SZ über Z hinaus

und machen ZA gleich h, so dass SA gleich 90° wird, ziehen wir ferner durch S den Hauptkreis, der A zum Pol hat, und den Hauptkreisbogen APB, so ist



Figur 2.

$$\sphericalangle ASB = 90^\circ, \text{ also } \sphericalangle PSB = 90^\circ - \gamma$$

$$\sphericalangle ABS = 90^\circ \text{ und}$$

$$AB = 90^\circ$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck PSB ergibt sich

$$\sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma = \frac{\sin PB}{\sin SP} = \frac{\sin PB}{\cos \delta}$$

Daher ist $PB = 90^\circ - h$ und $AP = h$. Folglich ist das Dreieck AZP gleichschenkelig. Nennt man darin den Winkel $ZAP = \lambda$ und denkt sich die Höhe gezo-gen, so ist

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tg} h} = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \operatorname{cotg} h$$

und

$$(8) \quad \sin \frac{\lambda}{2} = \frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\sin h}$$

Ferner ergibt sich aus dem Dreieck SAP, in welchem $SPA = t + \alpha$ ist, durch den Cosinussatz

$$(9) \quad \sin \delta = \sin h \cos \lambda$$

und

$$0 = \sin \delta \cos h + \cos \delta \sin h \cos(t + \alpha)$$

oder

$$(10) \quad \cos(t + \alpha) = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} h$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) lässt sich der Hülfs-winkel λ sofort eliminieren, da $\cos \lambda = 1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}$ ist, daher ist

$$\sin \delta = \sin h \left(1 - \frac{2 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\sin^2 h}\right)$$

oder

$$\sin^2 h - \sin \delta \sin h - 2 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = 0$$

folglich

$$\sin h = \frac{\sin \delta + \sqrt{\sin^2 \delta + 8 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}}{2}$$

Da nach Voraussetzung h grösser als 0 ist, so bekommt die Wurzel das positive Vorzeichen, daher ist

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\sin^2 \delta}}\right)$$

Führt man nun den Hülfs-winkel μ ein durch die Gleichung

$$(11) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\sqrt{8 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}}{\sin \delta}$$

so wird die Wurzel gleich $\frac{1}{\cos \mu}$, also

$$(12) \quad \sin h = \frac{\sin \delta (\cos \mu + 1)}{2 \cos \mu} = \frac{\sin \delta \cos^2(\frac{1}{2}\mu)}{\cos \mu}$$

Man findet demnach für das Maximum von $\alpha - t$ zunächst aus (11) den Hüllswinkel μ , dann aus (12) die Höhe h , dann aus (7) das Azimut α und schliesslich aus (10) die Summe $t + \alpha$ und demnach auch t .

Soll auch die Lage des Sterns unter dem Horizont bestimmt werden, für welche $\alpha - t$ seinen kleinsten Wert erreicht, so betrachten wir das Dreieck NP_1S , für welches jetzt genau dieselben Betrachtungen gelten, die soeben für das Dreieck ZPS angestellt worden sind. In den entwickelten Formeln sind demnach die Vorzeichen von h und δ zu ändern, während an die Stelle von t und α ihre Supplemente treten. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin h &= \frac{\sin \delta - \sqrt{\sin^2 \delta + 8 \sin^2 (45^\circ - 1/2\varphi)}}{2} \\ &= - \frac{\sin \delta (-\cos \mu + 1)}{2 \cos \mu} = - \frac{\sin \delta \sin^2 (1/2\mu)}{\cos \mu} \end{aligned}$$

wobei μ derselbe Hüllswinkel ist, wie oben. Die Formeln (7) und (10) bleiben unverändert bestehen. Hat man auf diese Weise für δ das Minimum von $\alpha - t$ bestimmt, so hat man damit auch für $-\delta$ das Maximum von $\alpha - t$ berechnet, man braucht bloss die oben angegebenen Änderungen vorzunehmen.

Die folgende Tabelle gilt für die geographische Breite von Mainz ($\varphi = 50^\circ$). Die erste Spalte enthält die Deklination der Sonne, die zweite das Datum, an welchem die Deklination eintritt; die Spalten 3—6 enthalten den Stundenwinkel (in Zeit und Grad ausgedrückt), das Azimut und den Wert von $\alpha - t$ für den Augenblick, in welchem $\alpha - t$ seinen grössten Wert erreicht, die Spalte 7 enthält den Wert von $\alpha - t$ bei Sonnenuntergang.

δ	Datum	Maximum von $\alpha - t$				$\alpha - t$ bei Sonnen- untergang
		t in Zeit	t in Grad	α	$\alpha - t$	
23° 27'	21. Juni	2h 59m 55s	44° 58' 38"	69° 35' 9"	24° 36' 31"	7° 7' 20"
20°	21. Mai	3h 2m 42s	45° 40' 30"	67° 9' 43"	21° 29' 13"	6° 26' 23"
	24. Juli					
16° 3' 15"	5. Mai	3h 3m 48s	45° 56' 55"	64° 11' 13"	18° 14' 18"	5° 25' 32"
	9. Aug.					
15°	1. Mai	3h 3m 43s	45° 55' 51"	63° 21' 4"	17° 25' 13"	5° 7' 20"
	13. Aug.					
10°	16. April	3h 1m 14s	45° 18' 23"	59° 6' 8"	13° 47' 45"	3° 32' 33"
	28. Aug.					
5°	3. April	2h 55m 3s	43° 45' 45"	54° 18' 0"	10° 32' 15"	1° 48' 29"
	11. Sept.					
0°	21. März	2h 44m 47s	41° 11' 38"	48° 48' 23"	7° 36' 45"	0°
	23. Sept.					
-5°	9. März	2h 29m 31s	37° 22' 42"	42° 23' 38"	5° 0' 56"	-1° 48' 29"
	6. Okt.					
-10°	23. Febr.	2h 7m 28s	31° 52' 0"	34° 38' 53"	2° 46' 53"	-3° 32' 33"
	20. Okt.					
-15°	9. Febr.	1h 33m 50s	23° 27' 36"	24° 27' 56"	1° 0' 20"	-5° 7' 20"
	3. Nov.					
-20°	21. Jan.	0h	0°	0°	0°	-6° 26' 23"
	22. Nov.					
-23° 27'	21. Dez.	—	—	—	—	-7° 7' 20"

Aus dieser Tabelle ersieht man z. B., dass am 21. Juni $\alpha - t$ vom Mittag an in 2 Stunden 59 Min. 55 Sek. von 0° auf seinen grössten Wert $24^\circ 36' 31''$ anwächst und dann allmählich bis zum Sonnenuntergang auf $7^\circ 7' 20''$ abnimmt, oder dass am 20. Oktober und 23. Februar $\alpha - t$ vom Mittag an in 2 Stunden 7 Min. 28 Sek. von 0° auf seinen grössten Wert $2^\circ 46' 53''$ anwächst, dann abnimmt, negativ wird und bei Sonnenuntergang den Wert $-3^\circ 32' 33''$ erreicht.

Wie aus der Tabelle hervorgeht, wird beim Untergange $\alpha - t$ mit zunehmendem δ grösser. Das muss jedoch eine Grenze haben. Wird nämlich δ gleich $90^\circ - \varphi$, so erreicht der Stern den Horizont bei der unteren Kulmination im Nordpunkt, dann wird $\alpha = 180^\circ$, $t = 180^\circ$ also $\alpha - t = 0^\circ$. Folglich muss $\alpha - t$ beim Untergange für einen bestimmten Wert von δ ein Maximum erreichen.

Nun ist beim Untergange

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

Durch Differenzieren dieser Gleichungen ergibt sich

$$\sin t \, dt = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \delta} d\delta$$

$$\sin \alpha \, d\alpha = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} d\delta$$

Nun ist aber auch

$$\sin \alpha = \sin t \cdot \cos \delta$$

Also

$$\sin t (d\alpha - dt) = \frac{d\delta}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \delta}\right)$$

Wenn $\alpha - t$ seinen grössten Wert erreichen soll, so muss $d\alpha - dt = 0$ werden, also

$$\cos \delta = \sqrt{\sin \varphi}$$

sein. Ist $\varphi = 50^\circ$, so wird $\delta = 28^\circ 55' 53''$, was für die Sonne nicht in Betracht kommt.

