Ueber die

Analysis auf der Kugel.

(Beschluß der in zwei frühern Programmen gelieferten Abhandlungen.)

Von

R. Gorgas,

Gymnasiallehrer.

Viertes Capitel.

Von den Kugelspiralen.

§. 1.

Vorbemerkungen.

In den zwei voraufgehenden Programmen des Domgymnasiums (für 1846/47 und 1847/48) habe ich die Anfangsgründe der Analysis auf der Kugeloberfläche entwickelt und zuletzt gezeigt, daß alle Kegelschnitte der Planimetrie hier nur ein einziges Analogon in der sogenannten Kugelellipse haben, deren verschiedene orthographische und perspectivische Projectionen auf die Centralebne bald als Ellipsen[1]), bald als Hyperbeln[2]), in besonderen Fällen auch als Parabeln[3]) erscheinen, je nach der Lage der Projectionsebne zur Kugelellipse; dadurch wird ein neues Licht auf den schon beim Kegeldurchschnitt sich ergebenden Zusammenhang zwischen den Curven zweiten Grades auf der Ebne unter einander geworfen; hauptsächlich aber wird aus dem Gange der sphärisch-analytischen Entwicklung das klar, daß die ebnen Kegelschnitte in zwei Hauptklassen, Ellipsen und Hy-

---

[1]) cf. Cap. III. §. 8—9 und 18. Programm für 1847/48.

[2]) Cap. III. §. 9—11, §. 18—20.

[3]) Cap. III. §. 22—23. Hierbei sind einige Berichtigungen nachzutragen: Es muß Cap. III. §. 23. (pag. 21.(Zeile 13—14 v. o. der kleine Satz: »diese Curve — Kugelellipse« gestrichen werden, desgleichen Zeile 8 v. u. ist das — der Formel (5.) in + umzuwandeln; ferner Zeile 2. v. u. die Worte: »der Kugelellipse« wegzulassen, Anmerk. 2. auf pag. 22. Zeile 3—7 v. o. zu streichen.

perbeln [allgemeine Fälle] zu trennen sind, während Parabeln und Kreise [besondere Fälle] den ersten nur subordinirt werden können. Das Folgende soll als vorläufiger Abschluß der Abhandlung die Resultate enthalten, die ich bei der Bestimmung der Gleichung, des Flächeninhalts und der Bogenlänge einer neuen Art von Kugelcurven erzielt habe, welche ich, der Analogie ebner Curven zufolge, Kugelspiralen nennen will.

§. 2.

Ueber das Wesen und die wichtigsten Classen der Kugelspiralen.

Denkt man sich einen Normalkreis um zwei, sich diametral entgegenstehende Puncte desselben gedreht, und von einem dieser Pole auf dem Normalkreise aus einen andern Punct bewegt, dessen Geschwindigkeit in einem bestimmten, sich gleichbleibenden Verhältnisse zur Drehungsgeschwindigkeit des ganzen Normalkreises steht, so ist der Weg dieses fortbewegten Punctes eine sogenannte Kugelspirale. Der Name ist der Classe von Curven in der Ebne entlehnt, bei denen eine um einen festen Punct bewegte Grade [bei stetem Verharren in derselben Drehungsebne] die Stelle unsres Kreises auf der Kugel vertritt, und von der z. B. die Spirale des Archimedes (nach andern des Conon) ein besonderer Fall ist.

Je nachdem nun das Verhältniß der Geschwindigkeiten des Puncts und des Kreises ein arithmetisches oder ein geometrisches ist, wollen wir von Spiralen I) des arithmetischen oder II) des geometrischen Verhältnisses sprechen, andre denkbare Fälle aber für jetzt übergehen.

An die Spitze der Sp. arithmetischer Proportion stelle ich der Einfachheit wegen diejenige, bei welcher Punct und Kreis gleiche Geschwindigkeit haben und nenne dieselben Sp. erster Ordnung; höherer Ordnung sind somit alle diejenigen derselben Classe, welche ein höheres Verhältniß der Geschwindigkeiten, als das 1 : 1, [allgemein n : 1], niederer Ordnung die, welche ein niedrigeres Verhältniß, [z. B. 1 : n] haben. Von jeder dieser Arten genügt ein Beispiel; dann folgt die allgemeinere Betrachtung über die bezügliche Ordnung.

Die Spirale erster Ordnung mit arithmetischem Verhältniß.

§. 3.

Gleichung und Gestalt. (Fig. 1.)

Die Puncte E und F seien die festen Pole der Bewegung des Normalkreises EAFC; Ausgangspunkt derselben sei A, die Bewegung sei von A nach B gerichtet; ist also z. B. der Quadrant EA in die Lage Ea gekommen, so muß von E aus der Punkt soweit herabgelaufen sein, daß sein

Bewegungsbogen = Aa, d. h. gleich der Bogengeschwindigkeit des Normalkreises ist; man mache also $\widehat{E\alpha} = \widehat{Aa}$, oder was dasselbe ist $\widehat{Ba} = \widehat{a\alpha}$, so ist, (wenn B Coordinatenanfangspunct, EBF die sphärische Y-Achse, BaA die zugehörige X-Achse):

$$\xi' = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Die Gleichung der Kugelspirale erster Ordnung mit arithmetischem Verhältniß. Diese Gleichung soll aber noch auf trigonometrische Form gebracht werden: es ist also [weil, wie später erhellen wird, η und ξ' sowohl + als — zu nehmen]:

$$\sin \xi' = \sin \eta \text{ oder } \frac{\operatorname{tang} \xi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \xi'}} = \operatorname{tang} \eta' \cos\delta,$$

also auch:

$$\operatorname{tang}^2 \eta' = \operatorname{tang}^2 \xi' (1 + \operatorname{tang}^2 \xi') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

als eine Gleichung für diese Kugelspirale in trigonometrischer Form. Ihre Untersuchung führt auf die weitern Eigenthümlichkeiten der Curve (Fig. I.)

1) Ein Normalkreis kann die Curve in 4 Puncten schneiden, denn ihre Gleichung ist 4ten Grads, die des Normalkreisbogens nur vom ersten Grade. Die Curve hat also 4 Arme.

2) Die Lösung der biquadratischen Gleichung für tang ξ' führt auf 4 Werthe dieser Tangente, die einander zum Theile (je zwei und zwei) bis auf das Vorzeichen gleich sind. Die Wurzeln lauten:

$$(1. \text{ u. } 2.) \operatorname{tang} \xi' = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \operatorname{tang}^2 \eta'}}$$

$$(3. \text{ u. } 4.) \operatorname{tang} \xi' = +\sqrt{-\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \operatorname{tang}^2 \eta'}}$$

Daraus folgt: a) Ist tang $\eta' = 0$, so ist (1. u. 2.) tang $\xi' = 0$

b) Ist tang² $\eta' > 0$, so ist (1. u. 2.) tang ξ' reell, bis ins ∞, was anzeigt, daß, wenn $\eta' = 90°$, auch $\xi' = 90°$ wird, abgesehn vom Vorzeichen.

c) Die Wurzeln (3. u. 4.) tang ξ' sind stets imaginär;

Für die Figur ergiebt sich daraus ad a): daß die beiden obern und untern Arme der Curve sich im Coordinatencentrum schneiden müssen, also erst von da ab in 4 Zweige auseinandergehen; ad b): daß die Arme zu beiden Seiten der Y-Achse symmetrisch verlaufen, und für $\eta' = 90°$ (also in beiden Polen der Normalkreisbewegung,) sich wieder mit einander vereinigen. ad c., daß weitere Ausläufer der Curve nicht vorhanden sind, welche mit obigen 4 Armen ein gleiches η' gemeinschaftlich haben.

Endlich 3.) da die Gleichung für tang² η' in (2.) in allen Gliedern von gerader Dimension ist, also die Vorzeichen von tang ξ' keinen Einfluß auf die Verschiedenheit der zwei $\pm$ Wurzeln der Gl. für tang η' haben können, so giebt es für jeden möglichen Punct der Curve über und unter der X = Achse der Kugeloberfläche und rechts und links von der Y = Achse derselben einen symmetrisch gelegnen, d. h. die Spirale ist auch in Bezug auf die Lage gegen die sphärische X-Achse vollkommen symmetrisch.

Aus alledem geht klar hervor, daß der Weg des Punktes nach obiger Bedingung eine in Form einer 8 geschlungene Curve sei, die sich über die eine Halbkugel ausbreitet, deren Pol das Coordinatencentrum der Oberfläche ist [1]) und die von jeder sphärischen Coordinaten-Achse im Kreuzungspunkte halbirt wird.

§. 4.

Projectionen auf die Ebne.

1) In Raumcoordinaten erhalten wir die Gleichung unsrer Spirale, wenn wir $\frac{x}{z} = \text{tang}\ \xi'$ und $\frac{y}{z} = \text{tang}\ \eta'$ setzen; [cf. Cap. I. §. 1. (3.)]: alsdann ist die Form derselben:

$$y^2 z^2 = x^2 (x^2 + z^2) \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

oder, da $x^2 + z^2 = r^2 - y^2$, wo r der Radius der Kugel,

$$r^2 x^2 = y^2 (x^2 + z^2) \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

daraus: $\frac{y^4}{x^4} = \frac{r^2}{z^2}$ oder $\pm \frac{r}{z} = \frac{y^2}{x^2}$ . . (3.), oder $\pm rz = x^2 + z^5$ . . (4.)

2) Daraus folgt [nach (4.)], daß die senkrechte Projection der Curve auf die XZ-Ebne ein Kreis sei. Denn (cf. Fig. II.) da BM die Z-Achse, MD die X-Achse der Raumcoordinaten repräsentirt, so ist für den Punct p in der XZ-Ebne (als Project von P auf der Kugel)

$$r.z = BM.qM$$

und: $x^2 + z^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qM}^2 = \overline{pM}^2$, also ist $\pm$ BM.qM $= pM^2$ . . . . . (5.)

d. h. Die Gleichung eines Kreises, der über dem Halbmesser der Kugel also mit $\frac{r}{2} = \varrho$ als Radius beschrieben ist. Die Kugelspirale erster Ordnung mit arithmetischem Verhältnisse ist also die Durchschnittscurve zwischen der Kugeloberfläche und der Oberfläche eines senkrecht auf jenem Kreise (5.) errichteten Cylinders.

3) Die senkrechte Projection auf die XY-Ebne giebt, durch Elimination von z^2 aus (2.), die Curvengleichung:

$$y^4 - y^2 r^2 + x^2 r^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6.)$$

---

[1]) Ein Schiff würde z. B. im Falle das Meer die [völlig kugelrunde] Erde überall bedeckte, vom Nordpol östlich durch den Aequator westlich zum Südpol, von da wieder östlich zurück durch denselben Punct des Aequators auf der westlichen Seite des Meridians zum Nordpol gelangen und diese Curve beschreiben müssen, wenn es stets unter gleicher Länge und Breite fortsteuerte.

d. h. **vierten Grades** und also von einer Graden möglicherweise in 4 Puncten zu schneiden; auch diese Curve geht durch den Anfang der Coordinaten im Kugelcentrum, da für $y = o$ auch $x = o$ ist. Die Wurzeln sind:

$$(1.\ u.\ 2.)\quad y = \pm \sqrt{\frac{r^2}{2} + \sqrt{\frac{r^4}{4} - x^2 r^2}}$$

$$(3.\ u.\ 4.)\quad y = \pm \sqrt{\frac{r^2}{2} - \sqrt{\frac{r^4}{4} - x^2 r^2}}$$

wobei zu bemerken, daß, y''' und y'''' **reell** zu machen, $\sqrt{\frac{r^4}{4} - x^2 r^2}$ **reell** und $\leqq \frac{r^2}{2}$ sein muß, und daß für y (1. u. 2.) $= \pm r$ noch einmal $x = o$ sein muß, d. h. daß die Y-Achse der YX-Ebne diese ebne Curve zweimal außer in dem Coordinatencentrum schneidet. Ferner wird für $x^2 > \frac{r^2}{4}$, also für $x > \pm \frac{r}{2}$ die ganze Wurzelreihe für y **imaginär**, d. h. die Curve erstreckt sich höchstens auf eine Entfernung $= \pm \frac{r}{2}$ von der Y-Achse. Dann ist $\left(\text{nämlich für } x = \pm \frac{r}{2}\right)$ $y' = + \sqrt{\frac{r^2}{2}}$ und $y'' = - \sqrt{\frac{r^2}{2}}$ (desgleichen y''' und y'''' dem y' und y'' an Werthe gleich:).

4) Die senkrechte Projection auf die YZ-Ebene ergiebt sich aus der Gleichung (6. und 3.) durch:

$$y^2 = r^2 \pm rz = r(r \pm z) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7.),$$

wobei zu bemerken, daß für $y = 0 : z = \pm r$, für $z = 0$ desgleichen $y = \pm r$ wird. Da aber kein $y > r$ sein darf, so gilt in (7.) nur das Zeichen — von beiden, ebenso auch bei z; die Curve ist also nur auf **einer** Seite der Y-Achse, aber auf **zwei** Seiten der Z-Achse (symmetrisch) gelegen.

5) Die Gleichung für die perspectivische Projection auf eine Tangentenebene, die durch den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten auf der Kugeloberfläche gelegt ist, wird durch die Gleichungen $\frac{x'}{r} = \operatorname{tang} \xi'$ und $\frac{y'}{r} = \operatorname{tang} \eta'$ hergeleitet [cf. Cap. II. §. 10. (3.) und (4.)] also ist sie:

$$\frac{y'^2}{r^2} = \frac{x'^2\,(r^2 + x'^2)}{r^4}$$

$$\text{oder } y'^2 r^2 = x'^2 r^2 + x'^4 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8.)$$

eine Gleichung, welche mit (6.) viele Aehnlichkeit hat; sie gehört zu einer vierästigen Curve, die durch das Coordinaten-Centrum (Berührungspunct der Tangentenebene) geht, da für $x = 0$, $y = 0$ wird. Da die vier Werthe von x' unter der Wurzel kein — enthalten, so ist für beide Coordinaten **keine Werthgränze** gesetzt, d. h. **die 4 Arme der Curve sind** ∞.

6) Endlich die Gleichung für die sphärische Curve von einem ihrer Scheitel (z. B. E in Fig. I.) aus gerechnet, wird dadurch gefunden, daß man (ihrer Entstehungsart zufolge) $\operatorname{tang} \delta =$

$\tan \varphi$ schreibt, wobei φ den Winkel $\widehat{AE\alpha}$ ($\widehat{EAF}$ als X-Achse gerechnet) und $E\alpha$ das δ bedeutet; vorausgesetzt, daß die Richtung der Y-Achse (nämlich $\widehat{EBF}$) bleibt.

Da aber $\tan^2\delta = \tan^2\xi'' + \tan^2\eta''$ (neue Coordinaten)

$$\tan^2\varphi = \frac{\tan^2\eta''}{\tan^2\xi''} \text{ (cf. Cap. I. §. 4 und §. 1.)}$$

so ist $(\tan^2\xi'' + \tan^2\eta'')\tan^2\xi'' = \tan^2\eta''$ . . . . . . (9.)

Die neue Gleichung unserer Spirale auf der Kugel; legt man nun eine Tangenten-Ebne an das neue Coordinatencentrum E, und projicirt darauf die Kugelcurve perspectivisch, so ist die Gleichung der Projectionscurve:

$$(10.) \; . \; . \; . \; . \; . \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x''^2 + y''^2}{r^2} = \dfrac{y''^2}{x''^2} \text{ oder } x''^4 + y''^2 x''^2 = y''^2 r^2, \\ \text{oder} \pm \dfrac{\triangle}{r} = \dfrac{y''}{x''} \text{ wenn } \triangle^2 = x''^2 + y''^2. \end{array}\right.$$

welche der vorigen in vielen Stücken so ähnlich ist, daß man die Entwicklung ihrer Eigenschaften ganz in gleicher Weise vornehmen kann.

§. 5.

Quadratur der vorliegenden Kugelspirale auf elementarem Wege.

Um den Flächenraum zu berechnen, den ein Viertel der in Rede stehenden Spirale (im ersten Kugelquartier gelegen) einschließt, ohne dabei die Integralrechnung nöthig zu haben, zerlegt man sich diesen von E aus durch viele auf der X-Achse senkrecht stehende Normalkreisbogen in stufenartige Streifen, deren Basis je aus kleinen Bögen paralleler Kreise, von der Curve aus bis zum nächsten Normalkreisbogen rechts und links, gebildet wird. Um dies ersichtlicher zu machen sind deren in der Figur III. nur drei im Innern des Flächenraums (nämlich Eam, Ecn, Ecp) und vier äußere Streifen (Epf, End, Emb und EBG) construirt worden. Jedenfalls ist nun $F \left\{\begin{array}{l} > \text{ als die Summe der innern} \\ < \text{ als die Summe der äußern} \end{array}\right\}$ Streifen, und kann daher bei wachsender Anzahl derselben die Gränze des Flächenwerthes F annähernd gewiß bis zu jeder beliebigen Genauigkeit berechnet werden; denn F wird durch zwei unendliche convergirende Reihen zu bestimmen sein, die durch Annahme unendlich vieler solcher Streifchen in ihm entstehen und zwischen die der wahre Werth von F fällt. Nun findet man aber leicht durch Berechnung, daß, wenn der Quadrant der X-Achse in n gleiche Bögen zertheilt wird, deren jeder $= a$ ist, die Fläche des Streifens EBG $= \frac{r^2\pi}{2n}$ die des Streifens Emb $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos(n-1)a)$ des folgenden $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos(n-2)a)$

u. s. f. bis zum letzten und kleinsten $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos a)$, wobei zu bemerken, daß der erste Streifen EBG auch $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos na)$ zu schreiben ist, da $\cos na = \cos 90^0 = 0$ ist. Nennen wir nun Σ (a) die Summe aller der äußern Streifen, und der Spirale EpnmB Fläche **F**, während Σ (i) die Summe der innern Streifchen ist, so war $\Sigma(a) > \mathbf{F}$, dagegen $\Sigma(i) < \mathbf{F}$. Aber

$$\Sigma(a) = \frac{r^2\pi}{2n}(n\,[\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos (n-1)\,a]); \quad (1.)$$

$$\Sigma(i) = \frac{r^2\pi}{2n}(n - 1 - [\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos (n-1)\,a]); \quad (2.)$$

oder es ist
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{F} > \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{n} - \left[\frac{\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos (n-1)\,a}{n}\right]\right\} \\ \quad < \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \left[\frac{\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos (n-1)\,a}{n}\right]\right\} \end{array}\right\} \quad (3.)$$

wobei leicht ersichtlich, wie der ganze Unterschied sich um den Bruch $\frac{1}{n}$ handelt, der für $n = \infty$ eine verschwindende Größe wird.

Jetzt kommt es darauf an, die in der Klammer stehende durch n getheilte Cosinusreihe zu summiren, wobei wir gleich darauf aufmerksam machen, daß

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos (n-1)\,a = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin (n-1)\,a \quad \ldots (4.)$$

wenn $na = 90^0$ ist, weil $\sin(90 - a) = \cos a$ ist. Nennen wir jede dieser Reihen $= \mathbf{S}$ so ist also F zwischen die Gränzen $\frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{1 + \mathbf{S}}{n}\right]$ und $\frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{\mathbf{S}}{n}\right]$ eingeschlossen.

Nach einer bekannten Reihenentwickelung ist:

$$(5.) \ldots\ldots \sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \frac{a^9}{9!} - \text{etc.}$$

$$\text{folglich } \sin 2a = 2a - 2^3\frac{a^3}{3!} + \frac{2^5a^5}{5!} - \frac{2^7a^7}{7!} + \frac{2^9a^9}{9!} - \text{etc.}$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also } \mathbf{S} = a\,[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] \\ \quad - \frac{a^3}{3!}[1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3] \\ \quad + \frac{a^5}{5!}[1^5 + 2^5 + 3^5 \ldots + (n-1)^5] \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (6.)$$

Nach den Grundsätzen über die arithmetischen Reihen höherer Ordnung lassen sich aber die in Parenthesen stehenden Ausdrücke so summiren:

$$(7.) \ldots\ldots 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n - 1) = \frac{n\ (n-1)}{1.\ \ 2}$$

$$(8.) \ldots\ldots 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3 = n - 1 + \frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}$$

$$+ \frac{12\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3} + \frac{6\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$$

$$(9.) \ldots\ldots 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots\ldots + (n-1)^5 = n - 1 + 31.\ \frac{(n-1)\,(n-2)}{1.\ \ 2}$$

$$+ 180.\ \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3} + 390\ \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$$

$$+ 360\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5} + 120.\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}$$

$$\text{2c.} \qquad\qquad \text{2c.} \qquad\qquad \text{2c.}$$

Also $\mathfrak{S} = a$ [Reihe in (7.)] $- \frac{a^3}{3!}$ [Reihe in (8.)] $+ \frac{a^5}{5!}$ [Reihe in (9.)] 2c. — Für a kann man aber setzen: $\frac{r\pi}{2n}$, denn der Normalquadrant ist $= \frac{r\pi}{2}$, dessen nter Theil $= a$ ist,

$$(10.) \ldots\ldots \text{Folglich ist } \mathfrak{S} = \frac{r\pi}{2}\left[\frac{\text{Reihe in (7.)}}{n}\right] - \frac{r^3\pi^3}{2.3!}\left[\frac{\text{Reihe in (8.)}}{n^3}\right]$$

$$+ \frac{r^5\pi^5}{2.5!}\left[\frac{\text{Reihe in (9.)}}{n^5}\right] \text{2c. 2c.}$$

Setzt man nun $n = \infty$, so ist

$$\frac{\mathfrak{S}}{n} = \frac{r\pi}{2}\left[\frac{1}{2!}\ \frac{\infty.\infty}{\infty.\infty}\right] - \frac{r^3\pi^3}{2.3!}\left[0 + 0 + 0 + \frac{6.}{4!}\ \frac{\infty.\infty.\infty.\infty}{\infty.\infty.\infty.\infty}\right] + \text{2c.} \quad (11.)$$

d. h. $= \frac{r\pi}{2.2!} - 6.\ \frac{r^3\pi^3}{2.3!\,4!} + 120.\ \frac{r^5\pi^5}{2.5!\,6!}$ — etc. weil von den Reihengliedern in (7.) (8.) und (9.) 2c. nur die letzten von gleicher Potenz mit dem ∞ großen Nenner sind, die man (der gleichen Natur und Abstammung wegen), ohne einen endlichen Fehler zu begehen, gegen die Zähler heben kann. Die Coefficienten 1, 6, 120, 5040 2c. der letzten Glieder in dem Summenwerthe der Reihen oben sind aber auch so

$$\text{zu schreiben} \left\{\begin{matrix} 1 = 1! \\ 6 = 3! \\ 120 = 5! \\ 5040 = 7! \\ \text{2c.} \quad \text{2c.} \end{matrix}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12.)$$

folglich, dies in (11.) eingesetzt giebt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathbf{S}}{n} &= \frac{r\pi}{2.2!} - \frac{r^3\pi^3}{2.4!} + \frac{r^5\pi^5}{2.6!} - \frac{r^7\pi^7}{2.8!} + \text{etc.} \\ &= \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{r^0\pi^0}{2!} - \frac{r^2\pi^2}{4!} + \frac{r^4\pi^4}{6!} - \frac{r^6\pi^6}{8!} + \text{etc.}\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13.)$$

Der Werth von $\frac{1}{n}$ ist aber, für $n = \infty$, kleiner als jede angebbare Größe geworden, folglich wird aus (3.) in diesem Falle:

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{r^0\pi^0}{2!} - \frac{r^2\pi^2}{4!} + \frac{r^4\pi^4}{6!} - \frac{r^6\pi^6}{8!} + \text{etc.}\right\}\right) \quad \ldots \quad (14.)$$

eine schwankende Reihe, die sich durch rasches Convergiren (schon bei dem 9. Gliede) dem Gränzwerthe bald nähert. Man findet (15.) $\frac{\mathbf{S}}{n} = 0{,}63661977 \ldots = \frac{2}{\pi}$ [cf. später §. 7. (7.)] . also

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\, 0{,}36338022 \quad \ldots,$$ d. h.

gleich dem so vielten Theile der Kugeloctantenfläche, in welcher der Theil unsrer Spirale liegt. (Weiteres über die Quadratur siehe §. 7.)

§. 6.

Rectification der vorliegenden Kugelspirale auf elementarem Wege. (Fig. III.)

Durch die im vorigen §. construirten Kugelstreifen auf der gleichen Basis $BG = GH$ etc., deren Seitenbogen EB, EG etc., auf der X-Achse AB senkrecht stehende Normalkreisquadranten sind, wird die Spirallienie in eben so viele Abschnitte Bm, mn, np etc., zerlegt, deren Länge von einer Graden, zwischen denselben Endpuncten um so weniger abweicht, je größer die Eintheilungszahl n ist. Ist also $n = \infty$, so kann man ohne merklichen Fehler sowohl die Dreiecke BGm, mnb, etc., als die: Bam, mcn etc. als geradlinige rechtwinklige Dreiecke ansehen, also ist, wenn die Länge Bmn .... pE $= \mathbf{L}$,

$$(1.) \ldots\ldots \mathbf{L} = \sqrt{BG^2 + Gm^2} + \sqrt{mb^2 + nb^2} + \ldots + \sqrt{pf^2 + Ef^2};$$

nun ist $\widehat{BG} = \frac{r\pi}{2n}$ oder $= \frac{r\pi}{2n} \sin na$, da $na = 90^0$, eben so $\widehat{mb} = \frac{r\pi}{2n} \sin (n-1)\, a$, $\widehat{nd} = \frac{r\pi}{2n} \sin (n-2)\, a, \ldots . \widehat{pf} = \frac{r\pi}{2n} \sin a$, während $\widehat{mG} = \widehat{nb} = \ldots\ldots = \widehat{Ef} = a = \frac{r\pi}{2n}$ (nach der Curvennatur,) also ist (umgekehrt geschrieben):

$$(2.) \ldots \left\{\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{r\pi}{2n}\left\{\sqrt{1+\sin^2 a} + \sqrt{1+\sin^2 2a} + \sqrt{1+\sin^2 3a} + \ldots + \sqrt{1+\sin^2 na}\right\} \\ &= \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{\sqrt{1+\sin^2 a}}{n} + \frac{\sqrt{1+\sin^2 2a}}{n} + \text{etc.} \ldots + \frac{\sqrt{1+\sin^2 na}}{n}\right\}\end{aligned}\right.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze für gebrochene Potenzen entwickelt man aber:

$$(1+\sin^2 a)^{1/2} = 1 + {}^1/_2 \sin^2 a - {}^1/_8 \sin^4 a + {}^1/_{16} \sin^6 a - {}^5/_{128} \sin^8 a + \text{etc.}$$

$$(1+\sin^2 2a)^{1/2} = 1 + {}^1/_2 \sin^2 2a - {}^1/_8 \sin^4 2a + {}^1/_{16} \sin^6 2a - {}^5/_{128} \sin^8 2a + \text{etc.}$$

$$(1+\sin^2 na)^{1/2} = 1 + {}^1/_2 \sin^2 na - {}^1/_8 \sin^4 na + {}^1/_{16} \sin^6 na - {}^5/_{128} \sin^8 na + \text{etc.}$$

(3.) . . . . . folglich $\mathbf{L} = \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{n}{n} + \frac{1}{2n}\underset{(2)}{\mathbf{S}} - \frac{1}{8n}\underset{(4)}{\mathbf{S}} + \frac{1}{16n}\underset{(6)}{\mathbf{S}} - \frac{5}{128n}\underset{(8)}{\mathbf{S}} + \text{etc.}\right\}$

wobei zu bemerken, daß:

$$\underset{(2)}{\mathbf{S}} = \sin^2 a + \sin^2 2a + \sin^2 3a + \sin^2 4a + \ldots + \sin^2 na;$$

$$\underset{(4)}{\mathbf{S}} = \sin^4 a + \sin^4 2a + \sin^4 3a + \sin^4 4a + \ldots + \sin^4 na;$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. sei;

auf die Summation dieser Reihen kommt es jetzt hauptsächlich an; eine jede besteht aus den Sinussen der Vielfachen von a bis zu 90°; am leichtesten wird ihre Berechnung nach einer Formel, die als ein Ergebniß der Moivre'schen im Lefebure de Fourcy's Analyt. Geometrie in der Ebene ꝛc. (übersetzt von Gruner 1848. pag. 82) cf. Lacroix Calc. diff. pag. 71 aufgeführt wird, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} {}^1/_2 (2\sqrt{-1})^{2m} \sin^{2m} \varphi = \cos 2m\varphi - \frac{2m}{1} \cos 2(m-1)\varphi + \frac{2m(2m-1)}{1.\ 2} \\ \cos 2(m-2)\varphi - \ldots\ldots \pm {}^1/_2 \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ m} \end{array}\right\} \ldots (4.)$$

Hiernach wird $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$;

$$\sin^4 a = \frac{\cos 4a - 4\cos 2a + 3}{8};$$

$$\sin^6 a = -\frac{\cos 6a - 6\cos 4a + 15\cos 2a - 10}{32};$$

$$\sin^8 a = \frac{\cos 8a - 8\cos 6a + 28\cos 4a - 56\cos 2a + 35}{128};$$

ꝛc. ꝛc.

also: $\underset{(2)}{\mathbf{S}} = \frac{n - [\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots + \cos 2na]}{2}$;

$\underset{(4)}{\mathbf{S}} = \frac{3n - 4[\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots + \cos 2na] + [\cos 4a + \cos 8a + \ldots + \cos 4na]}{8}$;

und wenn $\Sigma^2 = [\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 2na]$, $\Sigma^4 = [\cos 4a + \cos 8a + \ldots + \cos 4na]$, etc.

so wird ferner:

$$\mathfrak{S}_{(6)} = \frac{10n - 15\Sigma^2 + 6\Sigma^4 - \Sigma^6}{32};$$

$$\mathfrak{S}_{(8)} = \frac{35n - 56\Sigma^2 + 28\Sigma^4 - 8\Sigma^6 + \Sigma^8}{128};$$

Nun ist aber, wie leicht zu erweisen:

$\sin^2 a + \sin^2 2a + \ldots + \sin^2 na = \frac{n+1}{2}$, folglich, dies in (5.) eingesetzt, giebt:

$$\Sigma^2 = -1; \ldots\ldots (6.)$$

Ebenso leicht ergiebt sich: $\Sigma^4 = 0$, $\Sigma^6 = -1$, $\Sigma^8 = 0$, etc.

überhaupt: $\Sigma^{4p} = 0$, $\Sigma^{4p \pm 2} = -1 \ldots\ldots (7.)$

Hiernach wird: $\mathfrak{S}_{(2)} = \frac{n+1}{2}$, $\mathfrak{S}_{(4)} = \frac{3n+4}{8}$, $\mathfrak{S}_{(6)} = \frac{10n+15}{32}$, $\mathfrak{S}_{(8)} = \frac{35n+64}{128}$, überhaupt

$$\mathfrak{S}_{(2p)} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2p}{1} \cdot \frac{(2p-1)}{2} \cdot \frac{(2p-2)}{3} \ldots \frac{(p+1)}{p}\, n}{2^{2p-1}} + \tfrac{1}{2}; \ldots (8.)$$

Darnach wird, wenn man $n = \infty$ setzt:

$$(9.) \ldots\ldots \mathbf{L} = \frac{r\pi}{2}\left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{10}{32} - \tfrac{5}{128} \cdot \tfrac{35}{128} + \text{etc.}\right]$$

Die Form des allgemeinen Glieds ist, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen:

$$(10.) \ldots\ldots = \frac{\tfrac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(\tfrac{1}{2}-1)}{2} \cdot \frac{(\tfrac{1}{2}-2)}{3} \ldots \frac{(\tfrac{1}{2}-m)}{(m+1)} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{\frac{2p}{1} \cdot \frac{(2p-1)}{2} \cdot \frac{(2p-2)}{3} \ldots \frac{(p+1)}{p}}{2^{2p-1}};$$

wenn $p = (m-1)$ ist. Ist m eine $\left\{\begin{matrix}\text{grade}\\ \text{ungrade}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so ist das Vorzeichen $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$; jedoch ergiebt sich dasselbe ohne weiteres aus dem Producte: $\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1) \ldots (\tfrac{1}{2}-m)$.

Durch Berechnung findet man: $\mathbf{L} = 1{,}2158 \ldots\ldots \frac{\pi}{2}$.

§. 7.

Quadratur und Rectification der Spirale mit Hülfe der Integralrechnung. (Fig. III.)

1) Quadratur:

Man denke sich durch Drehung des Normalquadranten EH nach EG um einen unendlich kleinen Bogen GH $= d\varphi$ ein Stück der Curvenfläche (Enm) entstanden, das als unendlich kleiner Zuwachs des schon erzeugten Flächenstücks $\mathbf{F} =$ Epn mit $d\mathbf{F}$ zu bezeichnen ist. Da mn unendlich klein, so ist der Fehler, wenn man Emn als gleichschenkliches Kugeldreieck ansieht, auch unendlich klein; also (nach §. 5.), wenn $n = \infty$ ist,

(1.) . . . . . . $dF = \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos\delta)$; wo $\delta = \widehat{En}$ ist; nennt man aber $\widehat{AH} = \varphi$, so ist, weil $\widehat{En} = \widehat{AH}$, nach der Natur unsrer Spirale,

(2.) . . . . . . $dF = \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos\varphi)$;

(3.) . . . . . . Nun ist auch: $d\varphi = \frac{r\pi}{2n}$ (als unendlich kleiner Theil des Normalquadranten $\widehat{AB}$), also

(4.) . . . . . . $dF = r d\varphi\,(1 - \cos\varphi)$; folglich:

$F = \int r d\varphi\,(1 - \cos\varphi) = r\int d\varphi - r\int \cos\varphi\, d\varphi$; . . . . . . (5.)

Das Stück F liegt zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \delta$, also ist (nach Fig. III.)

$$Epn = r\int_{\varphi=0}^{\varphi=\delta} d\varphi - r\int_{\varphi=0}^{\varphi=\delta} \cos\varphi\, d\varphi$$
$$= r\delta - r\sin\delta + \text{const.}$$

Da für $\delta = 0$ aber $Epn = 0$ ist, so ist const $= 0$, also das vollständige Integral:

$Epn = r(\delta - \sin\delta)$ . . . . . . (6.)

Um das vollständige Viertel der Spiralenfläche im ersten Kugelquartier zu berechnen, ist die Gränze zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^\circ$ zu nehmen, also für $r = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{4}\ \text{Spiralfläche} = \frac{\pi}{2} - 1 \\ \text{folglich ganze Fläche} = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots (7.)$$

Nach §. 5 war nun, für $r = 1$,

$$\tfrac{1}{4}\ \text{Spiralfläche} = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^0}{2!} - \frac{\pi^2}{4!} + \frac{\pi^4}{6!} - \frac{\pi^6}{8!}\ \text{2c.}\right)\right]$$

folglich ist $\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^0}{2!} - \frac{\pi^2}{4!} + \frac{\pi^4}{6!} - \frac{\pi^6}{8!} + \text{2c.}\right)$

d. h. $1 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^0}{2!} - \frac{\pi^2}{4!} + \frac{\pi^4}{6!} - \frac{\pi^6}{8!} + \text{2c.}\right)$ . . . . . . (8.)

was eine neue Relation zwischen π und endlichen Zahlen ergiebt.

Anmerkung 1. Nach Grunerts Statik p. 392 ist für die ebene Cyclois, wenn die Basis derselben die Abscissenachse, ihr Anfang der Anfang der x: $x = r(\varphi - \sin\varphi)$, wo φ der Wälzungswinkel. Ich mache auf die mit (6.) oben merkwürdig übereinstimmende Gleichung aufmerksam.

Anmerkung 2. Die Quadratur dieser Curve ist der Gegenstand eines mathematischen Räthsels (aenigma geometricum), welches Viviani, der letzte Schüler Galilei's, 1692 der gelehrten Welt aufgab, „eine halbkugelige Domkuppel mit 4 gleichen Fenstern so zu durchbrechen, daß der übrige Gewölbsraum vollständig zu quadriren sei." Die Fenster sind nach seiner eigenen Lösung vier solche Spiralviertel, deren jedes $= \frac{\pi}{2} - 1$, folglich alle zusammen $= 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ für $r = 1$. Denn, da die Halbkugeloberfläche $= 2\pi$, die Fenster zusammen $= 2\pi - 4$, so ist der übrige Raum $= 4$ (eigentlich $= 4r^2$). (S. Montucla Hist. d. M. I, pag. 71 und Lacroix Calc. int. pag. 219.

2) Rectifikation.

Das vorher mit construirte unendlich kleine Dreieck mnc ist als rechtwinklig und geradlinig anzunehmen, also ist: $mn = ds$, wenn $s =$ Curvenbogen Epn, dann ist ferner:

$$mc = nb = GH = d\varphi,\ nc \begin{Bmatrix} = \sin\delta.\ d\varphi \\ = \sin\varphi.\ d\varphi \end{Bmatrix} \text{[cf. §. 6. bei (1.)],}$$

also, wenn: $\overline{mn}^2 = \overline{mc}^2 + \overline{cn}^2$, so ist

$$ds = \sqrt{1 + \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad \ldots\ldots (1,)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung geschieht am besten durch Reihenentwicklung, indem man

$$\sqrt{1 + \sin^2\varphi} = (1 + \sin^2\varphi)^{1/2} = 1 + {}^1\!/_2 \sin^2\varphi + \frac{{}^1\!/_2({}^1\!/_2 - 1)}{1.\ 2}\sin^4\varphi +$$

$$\frac{{}^1\!/_2({}^1\!/_2 - 1)({}^1\!/_2 - 2)}{1.\ 2.\ 3.}\sin^6\varphi + \text{2c. macht;}$$

alsdann ist (nach Grunerts Statik pag. 326. Ed. 1826.)

$$(2.) \ldots\ldots\ s = \int\sqrt{1 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int d\varphi + {}^1\!/_2 \int \sin^2\varphi d\varphi + \frac{{}^1\!/_2({}^1\!/_2 - 1)}{1.\ 2} \int \sin^4\varphi d\varphi + \text{2c.}$$

Nun ist nach der theilweisen Integration und nach bekannten trigon. Sätzen:

1) $\int \sin^2\varphi d\varphi = \int {}^1\!/_4(1 - \cos 2\varphi)\, d.\, 2\varphi = {}^1\!/_4 \int d.\, 2\varphi - {}^1\!/_4 \int \cos 2\varphi d 2\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin^2\varphi}{4}$

2) $\int \sin^3\varphi d\varphi = -\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\int \sin\varphi\cos^2\varphi^2 d\varphi$

$= -\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\int \sin\varphi\,(1 - \sin^2\varphi)\, d\varphi$

also: $3\int \sin^3\varphi d\varphi = -\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\int \sin\varphi d\varphi$

$= -\sin^2\varphi\cos\varphi - 2\cos\varphi$

oder: $\int \sin^3\varphi d\varphi = -\left(\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\cos\varphi}{3}\right)$

3) $\int \sin^4\varphi d\varphi = -\sin^3\varphi\cos\varphi + 3\int \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi$, also:

$4\int \sin^4\varphi d\varphi = -\sin^3\varphi\cos\varphi + 3\int \sin^2\varphi d\varphi$

$= -\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{3\varphi}{2} - \frac{3\sin 2\varphi}{4}$

also: $\int \sin^4\varphi d\varphi = \frac{3\varphi}{8} - \frac{3\sin 2\varphi}{16} - \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi}{4}$

4) $\int \sin^5\varphi d\varphi = - \sin^4\varphi\cos\varphi + 4\int \sin^3\varphi\cos^2\varphi d\varphi$, also;

$5\int \sin^5\varphi d\varphi = - \sin^4\varphi\cos\varphi - 4\int \sin^3\varphi d\varphi$

$\sin^5\varphi d\varphi = -\left(\frac{\sin^4\varphi\cos\varphi}{5} + \frac{4(\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\cos\varphi)}{15}\right)$

5) $\int \sin^6\varphi d\varphi = - \sin^5\varphi\cos\varphi + 5\int \sin^4\varphi\cos^2\varphi d\varphi$, also:

$6\int \sin^6\varphi\, d\varphi = - \sin^5\varphi\, \cos\varphi + 5\int \sin^4\varphi\, d\varphi$

$\int \sin^6\varphi d\varphi = \frac{- \sin^5\varphi\cos\varphi + {}^{15}/_{8}\varphi - {}^{15}/_{16}\sin 2\varphi - {}^{5}/_{4}\sin^3\varphi\cos\varphi}{6}$

$= {}^{5}/_{16}\varphi - {}^{5}/_{32}\sin 2\varphi - {}^{5}/_{24}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{\sin^5\varphi\cos\varphi}{6}$;

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Für die Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$ wird alsdann wenn $r = 1$,

$s = \frac{\pi}{2} + + {}^{1}/_{2} \cdot \frac{\pi}{2} - {}^{1}/_{8} \cdot \frac{3\pi}{8} + {}^{1}/_{16} \cdot \frac{5\pi}{16} -$ ꝛc. wie oben,

da alle andere Integralglieder für beide Gränzen = Null werden.

---

2) Die Kugelspiralen arithmetischer Progression höherer und niederer Ordnung.

Nach Erklärung unserer Ausdrucksweise giebt es außer der in vorigen §§. besprochenen Kugelspirale noch unendlich viele andre Arten, die durch schnellere oder langsamere Bewegung des Puncts auf dem sich drehenden Normalquadranten erzeugt werden; jedoch so, daß die Progression, welche das Wachsen seines Wegs anzeigt, eine arithmetische bleibt. (cf. §. 2.) Ein Beispiel davon reicht hin, um danach die allgemeinen Fälle zu behandeln.

§. 8.

Gleichung der Kugelspirale zweiter Ordnung. (Fig. IV.)

Wenn der Punct P bei der Bewegung des Normalquadranten von EA bis ED von E bis p so läuft, daß $\widehat{Ep} = 2\widehat{DA}$ ꝛc. so ist die Curve Epmno ꝛc. eine Spirale zweiter Ordnung auf der Kugeloberfläche. Verlegt man den Anfang der sphärischen Coordinate nach 0, so ist, weil 2oh = hn,

$2\xi' = \eta \;\ldots\ldots (1.)$

die einfachste Gleichung der Curve; folglich ist auch

$2\sin\xi' \cos\xi' = \sin\eta$

oder: $\frac{2\text{tang}\,\xi'}{1+\text{tang}^2\xi'} = \frac{\text{tang}\,\eta'}{\sqrt{1+\text{tang}^2\eta'+\text{tang}^2\xi'}}$

also: $\text{tang}^4\xi' + \frac{2(2+\text{tang}^2\eta')}{4-\text{tang}^2\eta'}\,\text{tang}^2\xi' - \frac{\text{tang}^2\eta'}{4-\text{tang}^2\eta'} = 0 \; \ldots\ldots \; (2.)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{folglich } \text{tang}\,\xi'\ (1.\text{ u. }2.) = \pm\sqrt{\frac{2+\text{tang}^2\eta'+2\sqrt{1+2\text{tang}^2\eta'}}{\text{tang}^2\eta'-4}} \;\ldots\ldots\; (3.)\ a \\ &\text{und } \text{tang}\,\xi'\ (3.\text{ u. }4.) = \pm\sqrt{\frac{2+\text{tang}^2\eta'-2\sqrt{1+2\text{tang}^2\eta'}}{\text{tang}^2\eta'-4}} \;\ldots\ldots\; (3.)\ b \end{aligned}\right\}$$

Dreht man aber das System der sphärischen Coordinatenachsen um die räumliche Y-Achse EC um 45° nach B zurück, so ist (nach Cap. I. §. 3., 3.) $\left.\begin{aligned}\text{tang}\,\xi' &= \text{tang}\,(\alpha'-45) \\ &= \frac{\text{tang}\,\alpha'-1}{1+\text{tang}\,\alpha'}\end{aligned}\right\}$ und $\text{tang}\,\eta' =$

$\frac{\sqrt{2}\,\text{tang}\,\beta'}{1+\text{tang}\,\alpha'} \;\ldots\ldots\ (4.);$

wo α' und β' die neuen sphärischen Coordinaten statt ξ' und η' sind.

Dies in (2.), (3a.) und (3b.) eingesetzt, giebt:

$\frac{\text{tang}^2\alpha'-1}{\text{tang}^2\alpha'+1} = \frac{\text{tang}\,\beta'}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha'+\text{tang}^2\beta'}}; \;\ldots\ldots\ (5.)$

also:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang}\,\beta'\ (1.\text{ u. }2.) &= \pm\frac{\sqrt{\text{tang}^6\alpha'-\text{tang}^4\alpha'-\text{tang}^2\alpha'+1}}{2\text{tang}\,\alpha'} \\ &= \pm\frac{\text{tang}^2\alpha'-1}{2\,\text{tang}\,\alpha'}\sqrt{\text{tang}^2\alpha'+1} \\ &= \mp\frac{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha'}}{\text{tang}\,2\alpha'} \end{aligned}\right\}; \;\ldots\ldots\ (6.)$$

Die zu obigen Gleichungen construirte Kugelcurve geht zweimal durch jeden Pol des Normalkreises, der die X-Achse der sphärischen Coordinaten bildet; denn ξ' wird (sammt $\text{tang}\,\xi'$) viermal $= 0$ [wegen seiner 4 Werthe in (3a.) und (3b.)]. Sie ist im Allgemeinen vierten Grades und besteht aus zwei sich abwärts wieder berührenden Schleifen, deren jede die eine Hälfte der Kugel einnimmt, so daß eine cylindrische Oberfläche mit dem größten Durchmesser $= 2r$, die der Z-Achse der zweiten Coordinatenlage parallel läuft und durch die erste Schleife geht, auf der entgegengesetzten Hemisphäre die andre Schleife abschneidet. Der außerhalb des Cylinders liegende Kugeloberflächenraum besteht aus zwei eben so geschlungenen, aber umgekehrt gelegenen Kugelspiralen, die den vorigen congruent sind. [cf. Fig. V.] Alles dies läßt sich leicht aus den obigen Gleichungen ableiten. Daher ist der Raum, den die ganze Spirale auf der Kugeloberfläche einnimmt, $= 2r^2\pi$, der einer Schleife $= r^2\pi$, d. h. $=$ der Fläche eines Normalkreises der Kugel.

§. 9.

Gleichung der Kugelspirale niederer Ordnung, deren Geschwindigkeiten sich wie 1:2 verhalten (Fig. VI.)

Der Punct auf dem sich drehenden Normalkreise läuft halb so geschwind herab, als die Drehung beträgt. So ist, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in C liegt, CM = 2gM, also:

$$\xi' = 2\eta \; \ldots\ldots \; (1.)$$

die Gleichung der entstandenen Spirale, deren Hälfte $\overline{\mathrm{Cghk} \ldots \mathrm{pE}}$ ist. Ist dagegen der Anfang der Coordinaten in E und beginnt die Drehung von der Achse $\widehat{\mathrm{EA}}$, so ist wenn $\widehat{\mathrm{Ack}} = \varphi$, $\widehat{\mathrm{Ep}} = \delta$:

$$\delta = 2\varphi \; \ldots\ldots \; (2.)$$

eine andere Gleichung der Spirale.

Für die erste Coordinatenachsen-Lage ist aus (1.):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\tan\xi'}{1+\tan^2\xi'} = \dfrac{2\tan\eta'}{1+\tan^2\xi'+\tan^2\eta'} \\ \text{oder: } \tan^2\eta' - 2\,\dfrac{1+\tan^2\xi'}{\tan\xi'}\tan\eta + 1 + \tan^2\xi' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \; (3.)$$

$$\text{folglich } \tan\eta' = \frac{1+\tan^2\xi'}{\tan\xi'} \pm \sqrt{\frac{1+\tan^2\xi'}{\tan^2\xi'}};$$

$$\text{oder } \tan\eta' = \frac{2}{\sin^2\xi'} \pm \frac{1}{\sin\xi'}; \ldots\ldots \; (4.)$$

Für die zweite Lage der Coordinaten-Achsen ist nach (2.):

$$\left.\begin{array}{l} \tan\delta = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} \\ \text{oder: } (\tan^4\xi' - \tan^4\eta')\,(\tan^2\xi' - \tan^2\eta') = 4\tan^2\xi'\tan^2\eta' \end{array}\right\} \ldots\ldots \; (5.)$$

Letztere Gleichung ist vom 6. Grade; die Curve wird also von einem Normalkreise in ihrem Verlaufe 6mal geschnitten (cf. ihre Gestalt Fig. VI. 6c.); sie umschließt die Kugel natürlich erst dann vollständig, kehrt also in sich zurück, wenn der Normalkreisbogen, auf dem der Punct sich bewegt, 720° durchlaufen hat. Daraus folgt, daß das ξ' der Curve bis 720° wachsen kann, während η' nur 360° erreicht. Die Symmetrie der Curve, ihre Lage gegen die Pole sowohl, als gegen die Coordinatenachsen ꝛc. läßt sich leicht aus der Gleichung 4) in der einen, aus der 5) in der andern Lage des Coordinatenanfangs herleiten.

§. 10.

Verallgemeinerung des in §. 8 und §. 9 Vorgetragenen.

Aus dem in genannten §§. Abgehandelten ergiebt sich als die allgemeinste Bogengleichung einer beliebigen Kugelspirale mit **arithmetischem** Geschwindigkeitsgesetz:

entweder: $\xi' = n\eta$; . . . . . . (1.)

oder: $\delta = n\varphi$; . . . . . . (2.)

die erste für rechtwinklige sphärische Ordinaten, die andre für Polarcoordinaten, wobei noch zu bemerken, daß n jede positive ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Will man die höhern und niedern Ordnungen dieser Kugelcurven scheiden und ihre Gleichung trigonometrisch darstellen, so findet man:

a) Für die höhere mte Ordnung:

$\sin(m\xi') = \sin\eta$, woraus man erhält:

$$\frac{\sin\eta}{\cos^m\xi'} = \frac{m}{1}\tang\xi' - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ \ 2\ \ 3}\tang^3\xi' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5}\tang^5\xi' - \text{ꝛc.} =$$

$$\frac{\tang\eta'\sqrt{(1+\tang^2\xi')^m}}{\sqrt{1+\tang^2\eta'+\tang^2\xi'}} \ldots\ldots (3.)$$ d. h. im allgemeinen für $\tang\xi'$ eine Gleichung 2mten, für $\tang\eta'$ dagegen nur 2ten Grades; die Curve liegt, in ihrer Projection auf die XZ-Ebne der räumlichen Coordinaten betrachtet, gegen beide Achsen symmetrisch, die Projection geht durch das Coordinatencentrum zweimal hindurch; da für ξ' 2m Wurzeln gefunden werden, so schneidet ein Normalkreis die sphärische Curve in 2m Puncten.

Aus der Bogengleichung $\delta = m\varphi$ erhält man eine ähnliche trig. Curvengleichung:

$$(4.)\quad \frac{\sqrt{(1+\tang^2\varphi)^m}\cdot\sqrt{\tang^2\xi'+\tang^2\eta'}}{\sqrt{1+\tang^2\xi'+\tang^2\eta'}} = \frac{m}{1}\tang\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ \ 2\ \ 3}\tang^3\varphi + \text{ꝛc.}$$

b) Für die niedere mte Ordnung:

$\frac{\xi'}{m} = \eta$ . . . . . . (5.) für die eine Coordinatenlage und:

$\frac{\delta}{m} = \varphi$ . . . . . . (6.) für die andre;

also:

$$(7.)\quad \tang\xi'\sqrt{(1+\tang^2\xi'+\tang^2\eta')^m} = \frac{m}{1}\tang\eta'\sqrt{(1+\tang^2\xi')^m} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ \ 2\ \ 3}\tang^3\eta'\sqrt{(1+\tang^2\xi')^{m-2}}\ \text{ꝛc.}$$

und eine ähnliche Gleichung für $\sin\delta = \sin(m\varphi)$. Beide sind für die Berechnung von ξ' und η' schwieriger, da die Tangens beider in den Wurzeln aller Glieder sowohl, als außerhalb derselben steht. Ein Normalkreis schneidet im Allgemeinen auch diese Curve in 2 (m+1) Puncten, die Gleichung ist also vom 2 (m+1)ten Grade für tang ξ'.

§. 11.

Quadratur und Rectification solcher Kugelspiralen beider Ordnungen.

a) Quadratur und Rectification der Spirale aus §. 8. (Fig. IV.) auf elementarem Wege.

1) Um sich zuerst den Abschnitt $\mathbf{F}$ der Curvenfläche zwischen den Meridianen EA und EO zu berechnen, theile man den achten Theil des Aequatorumfangs, also von A bis O in n gleiche Theile $\widehat{AD} = \widehat{DF} = \ldots = \frac{r\pi}{4n}$, ziehe die Quadranten $\widehat{ED}$, $\widehat{EF}$ ꝛc. so ist (nach der Natur der Curve) $\widehat{Ep} = 2 \cdot \frac{r\pi}{4n}$, $\widehat{Em} = 4 \cdot \frac{r\pi}{4n}$, ꝛc. $\widehat{EO} = 90^0 = 2n \cdot \frac{r\pi}{4n}$; also ist das Kugeldreieck $Epb = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 \frac{r\pi}{4n}$ ferner $Emd = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 2\frac{r\pi}{4n}, \ldots$ endlich $Eoh = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 n\frac{r\pi}{4n} = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 45^0$. Sind nun alle diese Flächenelemente unendlich klein (bei $n = \infty$) so ist (mit unendlich kleinem Fehler), wenn $\frac{r\pi}{4n} = \psi$, also $n\psi = 45^0$;

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}\,[\sin^2\psi + \sin^2 2\psi + \sin^2 3\psi + \ldots + \sin^2 45] \ldots\ldots (1.)$$

Nun ist (nach §. 6.):

$$\sin^2\psi = \frac{1-\cos 2\psi}{2},\ \text{also ist: } \sin^2 2\psi = \frac{1-\cos 4\psi}{2}\ \text{ꝛc.}$$

$$\text{Mithin } \mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}\left[\frac{n-(\cos 2\psi + \cos 4\psi + \cos 6\psi + \ldots + \cos 2n\psi)}{2}\right] \ldots . (2.)$$

Setzt man nun $2\psi = \omega$, so ist

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}\left[\frac{n-(\cos\omega + \cos 2\omega + \ldots + \cos n\omega)}{2}\right]$$

Diese Reihe geht bis zu cos 90^0 hinauf, ist also $= \sin\omega + \sin 2\omega + \sin 3\omega + \ldots + \sin n\omega = \mathbf{S}$ [§. 5. (4.)]

Setzt man ferner $r = 1$, so ist $\mathbf{S} = \frac{2}{\pi}$, also ist:

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{4}\left[1 - \frac{2}{\pi}\right] = \frac{r^2}{4}(\pi - 2); \ldots . (3.)$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem der Fläche in §. 7. (7.), welche den ähnlichen Abschnitt der Spirale erster Ordnung bildet, so finden wir, daß jener doppelt so groß ist, als der in vorliegendem §. entwickelte.

Daraus läßt sich der leicht zu beweisende Schluß ziehen: Die Abschnitte der Spiral-Curven, die vom Pol aus bis zum ersten Durchschnittspunct derselben mit dem Aequator liegen und durch einen Meridian begränzt werden, verhalten sich umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten des beschreibenden Punctes.

Der zweite Curvenabschnitt zwischen den untern Meridianen BC und CO ist dem vorigen congruent. Die Fläche Epm....o....swC, die durch den Normalbogen EBC begränzt wird, ist also = den Kugelzweieck EBCOE = $\frac{1}{8}$ Kugeloberfläche. Ferner ist das Kugelflächenviertel EBCAE durch genannte Curve halbirt.

2) Zur Rectification der Curve gelangt man ähnlich wie in §. 6., durch Berechnung der Curvenelemente on, nm etc., die in den fast gradlinigen Dreiecken onh, mnf etc. die Hypotenuse bilden. Also ist:

$$(1.) \ldots \mathbb{L} = \widehat{on} + \widehat{nm} + \ldots + \widehat{Ep} = \sqrt{oh^2 + hn^2} + \sqrt{nf^2 + fm^2} + \ldots + \sqrt{pb^2 + Eb^2}$$

Nun ist nh = mf = ... = Eb = $2\frac{r\pi}{4n}$ (cf. oben), dagegen oh = $\frac{r\pi}{4n} \sin\left(2n \cdot \frac{r\pi}{4n}\right)$, nf = $\frac{r\pi}{4n} \sin\left[2(n-1)\frac{r\pi}{4n}\right]$, ... pb = $\frac{r\pi}{4n} \sin 2\frac{r\pi}{4n}$. Man setze wieder $\frac{r\pi}{4n} = \psi$, so wird:

$$(2.)\ \mathbb{L} = \frac{r\pi}{2n}\left\{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\psi}{4}} + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 4\psi}{4}} + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 6\psi}{4}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 2n\psi}{4}};\right\}$$

folglich, [wenn $2\psi = \omega$, also $2n\psi = 90^0 = n\omega$]:

$$(3.)\ \mathbb{L} = \frac{r\pi}{2n}\left\{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \omega}{4}} + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\omega}{4}} + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 3\omega}{4}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{\sin^2 n\omega}{4}}\right\}$$

Nach der binomischen Entwicklungsreihe für gebrochene Potenzen ist ferner:

$$\sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega}{4}} = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2\omega}{4} - \tfrac{1}{8}\frac{\sin^4\omega}{4^2} + \tfrac{1}{16}\frac{\sin^6\omega}{4^3} - \tfrac{5}{128}\frac{\sin^8\omega}{4^4} + \tfrac{7}{256}\frac{\sin^{10}\omega}{4^5} - \text{ꝛc.}$$

$$\sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\omega}{4}} = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 2\omega}{4} - \tfrac{1}{8}\frac{\sin^4 2\omega}{4^2} + \tfrac{1}{16}\frac{\sin^6 2\omega}{4^3} - \tfrac{5}{128}\frac{\sin^8 2\omega}{4^4} + \tfrac{7}{256}\frac{\sin^{10} 2\omega}{4^5} - \text{ꝛc.}$$

$$\sqrt{1 + \frac{\sin^2 n\omega}{4}} = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 n\omega}{4} - \tfrac{1}{8}\frac{\sin^4 n\omega}{4^2} + \tfrac{1}{16}\frac{\sin^6 n\omega}{4^3} - \tfrac{5}{128}\frac{\sin^8 n\omega}{4^4} + \tfrac{7}{256}\frac{\sin^{10} n\omega}{4^5} - \text{ꝛc.}$$

folglich: $(4.)\ \mathbb{L} = \frac{r\pi}{2n}\left\{n + \tfrac{1}{8}\,\mathbb{S}_{(2)} - \tfrac{1}{128}\,\mathbb{S}_{(4)} + \tfrac{1}{1024}\,\mathbb{S}_{(6)} - \tfrac{5}{32768}\,\mathbb{S}_{(8)} + \tfrac{7}{262144}\,\mathbb{S}_{(19)} - \text{ꝛc.}\right\}$

Setzt man nun die in §. 6. (8.) entwickelten Werthe von $\mathbb{S}_{(2)}$, $\mathbb{S}_{(4)}$ ꝛc. ein, so erhält man nach der Division mit n:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{L} &= \frac{r\pi}{2}\left[1 + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{128}\cdot\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{1024}\cdot\tfrac{10}{32} - \tfrac{5}{32768}\cdot\tfrac{35}{128} + \text{ꝛc.}\right]; \ldots \\ &= \frac{r\pi}{2}\cdot 1{,}05984 \ldots \end{aligned}\right\} (5.)$$

§. 12.

Fortsetzung.

a.) Quadratur und Rectification der Spirale aus §. 9. (Fig. VI.)

Man theile den Quadranten AB in n sehr kleine Abschnitte, so daß $\widehat{BG} = \widehat{GH} =$ ꝛc. = $\widehat{KA} = \frac{r\pi}{2n}$; ferner nach der Natur der Curve ist: $\widehat{Ep} = \frac{r\pi}{4n}$, $\widehat{En} = \frac{2r\pi}{4n}$, ꝛc., $\widehat{El} = n\frac{r\pi}{4n} = 45^0$. Berechnet man also zuerst den Curvenabschnitt zwischen EA und EB, so findet man, (wenn $n = \infty$ wird) mit verschwindendem Fehler:

$$\mathbf{F} = Epz + Env + \ldots\ldots + Elr;$$

$$= \frac{r^2\pi}{2n}\left[n - \left(\cos\frac{r\pi}{4n} + \cos 2\frac{r\pi}{4n} + \cos 3\frac{r\pi}{4n} + \ldots\ldots + \cos 45^0\right)\right]; \ldots\ldots (1.)$$

Setzt man nun $\frac{r\pi}{4n} = a$, so ist zu berechnen, wie groß die Summe: $\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos 45^0$ sei. Man setze sie $= \mathbf{S}_{\prime}$, dagegen $\sin a + \sin 2a + \ldots\ldots + \sin 45 = \mathbf{S}_{\prime\prime}$, so ist,

$$\text{weil}\left\{\begin{array}{l} \cos(45-a) = \frac{\cos a + \sin a}{\sqrt{2}}; \\ \cos(45-2a) = \frac{\cos 2a + \sin 2a}{\sqrt{2}}; \\ \cos 2a = \frac{\cos(45-2a) + \sin(45-2a)}{\sqrt{2}}; \\ \cos a = \frac{\cos(45-a) + \sin(45-a)}{\sqrt{2}}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (2.)$$

auch in der Summe:

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(45-a) = \frac{[\cos a + \cos 2a + . + \cos(45-a)] + [\sin a + \sin 2a + . + \sin(45-a)]}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{d. h. } \mathbf{S}_{\prime} - \cos 45 = \frac{\mathbf{S}_{\prime} + \mathbf{S}_{\prime\prime} - (\cos 45^0 + \sin 45^0)}{\sqrt{2}}; \\ \text{also } \mathbf{S}_{\prime} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{S}_{\prime} + \mathbf{S}_{\prime\prime} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \\ \text{oder } \mathbf{S}_{\prime\prime} = (\sqrt{2} - 1)(\mathbf{S}_{\prime} + 1) \end{array}\right\} \ldots\ldots (3.)$$

Nun ist (nach §. 5. 14) $\frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(m-1)a}{m} = 0{,}63661977 \ldots$ wenn $ma = 90^0$ ist, also ist [da auch $\sin(45 + a) = \cos(45 - a)$ 2c. und da $m = 2n$,] $\frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{\frac{1}{2}\left[\mathbf{S}_{\prime} + \mathbf{S}_{\prime\prime} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{n}$; ... (4.); Da aber $n = \infty$, so ist $\frac{1}{2\sqrt{2}\,n}$ gegen die andern Größen als verschwindend zu betrachten, also auch: $\frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{S}_{\prime}}{n} + \frac{\mathbf{S}_{\prime\prime}}{n}\right]$; nun ist aber nach (3.) $\mathbf{S}_{\prime\prime}$ eine Function von $\mathbf{S}_{\prime}$, also durch Substitution:

$$(5.) \ldots\ldots \frac{\mathbf{S}_{\prime}}{n} = \sqrt{2}\,.\,0{,}63661977\ldots; \text{ (nach Weglassung des unendlich Kleinen).}$$

Dies setzen wir jetzt in die Reihe (1.) ein, und finden somit den Werth:

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}(1 - \sqrt{2}\,.\,0{,}63661977\ldots\ldots)$$

$$= \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) \text{ oder } = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi\cos 45^0}\right) \ldots\ldots (6.)$$

Anmerkung 1. Um die Gleichung des Flächeninhalts für die Spirale erster Ordnung in §. 5 und 7 dieser ähnlicher zu machen, kann man jene auch so schreiben

$$\text{Fläche} = \frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi\cos 0^0}\right].$$

Anmerkung 2. Es läßt sich leicht beweisen, daß wenn die Geschwindigkeit des Puncts vom Pole E herab (Fig. VI.) noch einmal so langsam, als vorhin angenommen worden wäre: d. h. daß sie sich zu der des Normalquadranten wie 1 : 4 verhielte, die Fläche zwischen $\widehat{EA}$ und $\widehat{EB}$ sich ausdrücken ließe durch

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi . \cos 45^0 . \cos 22^1/_2{}^0}\right) \ldots\ldots (7.)$$

Denn die Reihe in der Gleichung (1,) ginge für diesen Fall von $\cos a$ nur bis $\cos 22^1/_2{}^0$, statt n wäre also $n/_2$ zu schreiben; Nun ist aber:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(22^1/_2{}^0 - a) = \cos 22^1/_2{}^0 \cos a + \sin 22^1/_2{}^0 \sin a \\ \cos(22^1/_2{}^0 - 2a) = \cos 25^1/_2 \cos 2a + \sin 22^1/_2 \sin 2a \\ \cos a = \cos 22^1/_2 \cos(22^1/_2 - a) + \sin 22^1/_2 \sin(22^1/_2 - a)\end{array}\right\} (8.)$$

$$\text{also: } \left.\begin{array}{l}\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(22^1/_2 - a) = u \\ \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(22^1/_2 - a) = v\end{array}\right\} \text{ gesetzt:}$$

$$u = u\cos 22^1/_2{}^0 + v \sin 22^1/_2{}^0$$

Nun ist ferner:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(22^1/_2 + a) = \cos 22^1/_2 \cos a - \sin 22^1/_2 \sin a \\ \cos(22^1/_2 + 2a) = \cos 22^1/_2 \cos 2a - \sin 22^1/_2 \sin 2a \\ \cos(22^1/_2 + 22^1/_2 - a) = \cos 22^1/_2 \cos(22^1/_2 - a) - \sin 22^1/_2 \sin(22^1/_2 - a)\end{array}\right\} (9.)$$

also, wenn $\cos(22^1/_2 + a) + \ldots + \cos(45 - a) = w$, so ist

$$w = u\cos 22^1/_2 - v\sin 22^1/_2$$

folglich $u + w = 2u\cos 22^1/_2{}^0$; . . . . (10.)

Aber $u + w = \mathbf{S}_1 - \cos 22^1/_2{}^0 - \cos 45^0$, folglich $\dfrac{\mathbf{S}_1 - \cos 22^1/_2 - \cos 45}{2\cos 22^1/_2} = u$. Auf beiden Seiten mit n dividirt, giebt (nach Weglassung des unendlich Kleinen,) $\dfrac{\mathbf{S}_1}{n} . \dfrac{1}{\cos 22^1/_2} = \dfrac{u}{n/_2}$, folglich, da $\mathbf{F} = \dfrac{r^2\pi}{2}\left(1 - \dfrac{u}{n/_2}\right)$ wird, $\mathbf{F} = \dfrac{r^2\pi}{2}\left(1 - \dfrac{2}{\pi . \cos 45^0 . \cos 22^1/_2{}^0}\right)$, wie oben in (7.) behauptet wurde.

Anmerkung 3. Setzt man diese Verdopplung der Geschwindigkeit des Normalquadranten $\widehat{AE}$ fort, so daß sie sich zu der des Puncts verhält, wie 8 : 1, oder wie 16 : 1, oder allgemein wie 2^n : 1 so erhält man für diesen Flächenraum zwischen $\widehat{AE}$ und $\widehat{BE}$ im ersten Kugeloctanten allmälig die Werthe:

$$\mathbf{F}_{(8:1)} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{90^0}{2}\right)\cos\left(\frac{90^0}{2^2}\right)\cos\left(\frac{90^0}{2^3}\right)}\right\};$$

$$\mathbf{F}_{(16:1)} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{90^0}{2}\right)\cos\left(\frac{90^0}{2^2}\right)\cos\left(\frac{90^0}{2^3}\right)\cos\left(\frac{90^0}{2^4}\right)}\right\};$$

allgemein $\mathbf{F}_{(2^n:1)} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{90^0}{2}\right)\cos\left(\frac{90^0}{2^2}\right)\ldots\ldots\cos\left(\frac{90^0}{2^n}\right)}\right\};$

wo n alle Werthe von 1 bis ∞ haben darf.

§. 13.

Fortsetzung der Quadratur ꝛc.

Kehren wir zur Quadratur der Spirale im §. 9. (Fig. VI.) zurück, so kann ferner die Ausmessung des Flächeninhalts gefordert werden, der zwischen den Quadraten AE und EC auf dem Viertel der Kugeloberfläche liegt und durch die Curve Epnm . . . hgC begränzt wird. Setzen wir diesen Raum $= \mathbf{R}$, so ist

(1.) . . . . $\mathbf{R} = EMC + Ebg + Edh + \ldots + Evn + Ezp$, wenn der Aequator AC in 2p unendlich kleine Theile getheilt wird. Dann ist aber auch, wenn $AK = KH =$ ꝛc. $= a$

$$(2.)\quad\begin{cases} EMC = \frac{r^2\pi}{p}\,[1 - \cos pa]; \text{ wo } pa = 90^0; \\ Ebg = \frac{r^2\pi}{p}\,[1 - \cos(p-1)a]; \\ Evn = \frac{r^2\pi}{p}\,[1 - \cos 2a]; \\ Ezp = \frac{r^2\pi}{p}\,[1 - \cos a]; \end{cases}$$

folglich $\mathbf{R} = \frac{r^2\pi}{p}[p - (\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos pa)]; \ldots . (3.)$

Nun ist [nach §. 5. und §. 7.] $\frac{\cos a + \cos 2a + \ldots \cos 90^0}{p} = \frac{2}{\pi}$ also:

$$\mathbf{R} = r^2\pi\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0{,}36338022 \ldots r^2\pi. \ (4.)$$

d. h. das doppelte der entsprechenden Fläche der Spirale erster Ordnung im ersten Octanten (Fig. III.)

Hieraus läßt sich ein leicht zu erweisender Schluß per inductionem ziehen:

Ist die Geschwindigkeit des sich bewegenden Normalquadranten nmal größer, als die des auf ihm sich bewegendon Puncts, so ist die Fläche, die die

Curve bis zum Aequator hinab mit dem letzten Meridiane einschließt, n mal so groß als bei der Spirale erster Ordnung, also allgemein $= n.\frac{r^2\pi}{2}\,0{,}36338022\ldots.$

Anmerkung 1. Ist also das Geschwindigkeitsverhältniß z. B. wie 4 : 1, so ist

$$\mathbf{R} = 4.\frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi}\right\}$$

$= 2r^2\pi - 4r^2$ (wie bei dem Problem des Viviani; cf. §. 7. Anmerkung 2.) Also bleibt als Rest von der Oberfläche der Halbkugel die Fläche $= 4r^2$, d. h. eine vollkommne quadrable Fläche. Dieser Satz findet sich, isolirt stehend, ebenfalls unter den Problemen der ältern Zeit.

§. 14.

Rectificationen ꝛc. (Fig. VI.)

1) Rectification des Curvenbogens Epnml im ersten Kugeloctanten.

Es wird $L = lm + mn + \ldots . + Ep = \sqrt{lr^2 + mr^2} + \sqrt{mt^2 + nt^2} + \ldots + \sqrt{pz^2 + Ez^2}$;

Nun ist $Ez = mr = nt$ ꝛc. $= \frac{r\pi}{4n}$, ferner, wenn $a = \frac{90^0}{2n}$, so ist:

$pz = \frac{r\pi}{2n}\sin a,\ nv = \frac{r\pi}{2n}\sin 2a, \ldots$ endlich $lr = \frac{r\pi}{2n}\sin na = \frac{r\pi}{2n}\sin 45^0$, also:

$$(1.) = \frac{r\pi}{4n}\left\{\begin{array}{l} n + \frac{1}{2}\,2^2\sin^2 a - \frac{1}{8}\,2^4\sin^4 a + \frac{1}{16}\,2^6\sin^6 a - \ldots . \\ \quad + \frac{1}{2}\,2^2\sin^2 2a - \frac{1}{8}\,2^4\sin^4 2a + \frac{1}{16}\,2^6\sin^6 2a - \ldots \\ \quad + \frac{1}{2}\,2^2\sin^2 3a - \frac{1}{8}\,2^4\sin^4 3a + \frac{1}{16}\,2^6\sin^6 3a - \ldots \\ \quad + \frac{1}{2}\,2^2\sin^2 45^0 - \frac{1}{8}\,2^4\sin^4 45^0 + \frac{1}{16}\,2^6\sin^6 45^0 - \ldots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{r\pi}{4n}\left[n + \tfrac{1}{2}.2^2.\Sigma_{(2)} - \tfrac{1}{8}\,2^4\,\Sigma_{(4)} + \tfrac{1}{16}\,2^6\,\Sigma_{(6)} - \ldots . \text{ꝛc.}\right]$$

wenn $\Sigma_{(2)} = \sin^2 a + \sin^2 2a + \ldots . + \sin^2 45$, und ähnlich $\Sigma_{(4)} =$ der vierten Potenzreihe ꝛc. Nun kömmt es darauf an, $\frac{\Sigma_{(2)}}{n}, \frac{\Sigma_{(4)}}{n}$ ꝛc. in ihren Gränzwerthen zu bestimmen.

Nach §. 6. (5.) ist aber:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \\ \sin^2 2a = \frac{1-\cos 4a}{2} \\ \sin^2 na = \frac{1-\cos 2na}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{folglich } \Sigma_{(2)} = \frac{n - (\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 90^0)}{2} \\ \text{also } \frac{\Sigma_{(2)}}{n} = \frac{1 - \frac{(\sin 90 + \ldots . + \sin 2a)}{n}}{2} \end{array}$$

$$(\text{cf. §. 7. (7.)}) = \frac{1 - {}^2/_\pi}{2} = 0{,}18169011\ldots (2.)$$

Verfährt man ähnlich mit $\sin^4 a + \ldots + \sin^4 na$ ꝛc., so stößt man auf Cosinusreihen folgender Gestalt:

$$(2.)\quad \frac{\cos 4a + \cos 8a + \ldots + \cos 180^0}{n} = -\,{}^1\!/n = 0;\ (\text{wenn } n = \infty)$$

$$(3.)\quad \frac{\cos 6a + \cos 12a + \ldots + \cos 270^0}{n} = -\,{}^2\!/\pi;$$

$$(5.)\quad \frac{\cos 8a + \cos 16a + \ldots + \cos 360^0}{n} = +\,{}^1\!/n = +\,0;$$

$$(6.)\quad \frac{\cos 10a + \cos 20a + \cos 30a + \ldots + \cos 450^0}{n} = \frac{\cos 2a + \ldots + \cos 90}{n} = {}^2\!/\pi$$

d. h. es kehren nun alle 4 Werthe ${}^2\!/\pi,\ -\,0,\ -\,{}^2\!/\pi,\ +\,0$ wieder.

Fernerhin findet man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{(4)} &= \frac{3n - 4(\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 90) + (\cos 4a + \cos 8a + \ldots \cos 180^0)}{8} \\ \Sigma_{(6)} &= \frac{10n - 15(\cos 2a + \cos 4a + . + \cos 90) + 6(\cos 4a + . + \cos 180) - (\cos 6a + \cos 12a + . + \cos 270}{32} \end{aligned}\right\} (7.)$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

folglich ist:

$$\frac{\Sigma_{(4)}}{n} = \frac{3 - {}^8\!/\pi}{8},\ \frac{\Sigma_{(6)}}{n} = \frac{10 - {}^{30}\!/\pi + {}^2\!/\pi}{32},\ \frac{\Sigma_{(8)}}{n} = \frac{35 - {}^{112}\!/\pi + {}^{16}\!/\pi}{128} \text{ ꝛc. } \ldots\ (8.)$$

Daraus folgt endlich:

$$\mathbf{L} = \frac{r\pi}{4}\left\{1 + 2\,\frac{1 - {}^2\!/\pi}{n} - 2\,\frac{3 - {}^8\!/\pi}{n} + 4\,\frac{5 - {}^{14}\!/\pi}{16} - 10\,\frac{35 - {}^{96}\!/\pi}{128} \text{ ꝛc.}\right\} \ldots\ (9.)$$

$$= \frac{r\pi}{4}\,[1 + 0{,}36338022 \ldots - 0{,}11338023 \ldots + 0{,}13521540 \ldots - \text{ꝛc.}]$$

eine Reihe, die wenig oder gar nicht zu convergiren scheint.

§. 15.

Fortsetzung. (Fig. VI.)

Diese ganze Berechnung ließe sich eben so leicht mit Integralrechnung anstellen. Wir wollen das Verfahren hier noch mittheilen, um endlich zu der allgemeinsten Formel für die Rectification der arithmetischen Kugelspiralen von vorgeschriebener Art zu gelangen.

Es sei (wie ähnlich in §. 7. 2.) das Curvenstück $\widehat{Epn} = \mathbf{S}$ der Zuwachs $\widehat{nm} = d\mathbf{S}$, $\widehat{En} = \delta$, also $\widehat{um} = d\delta$, $\widehat{un} = \widehat{GH} . \sin \delta$, und da $\widehat{GH} = d\varphi$ und $2\delta = \varphi$, so ist. $d\mathbf{S} = \sqrt{um^2 + un^2}$ $= \sqrt{1 + 4 \sin^2 \delta}\ d\delta = d\delta\ \left\{1 + {}^1\!/_2\, 4 \sin^2 \delta + \frac{{}^1\!/_2 . ({}^1\!/_2 - 1)}{1\ \ 2}\, 16 \sin^4 \delta + \frac{{}^1\!/_2\ ({}^1\!/_2 - 1)\ ({}^1\!/_2 - 2)}{1\ \ 2\ \ 3}\, 64 \sin^6 \delta + \text{ꝛc.}\right\}$

Also $\mathfrak{S} = \int d\delta + 2\int \sin^2\delta d\delta - 2\int \sin^4\delta d\delta + 4\int \sin^6\delta d\delta -$ 2c.

$$= \delta + \delta - \frac{\sin 2\delta}{2} + 2\sin^3\delta\cos\delta - 3\delta + \frac{3\sin 2\delta}{2} + {}^5/_4\delta - {}^5/_8\sin 2\delta - {}^5/_6\sin^3\delta\cos\delta -$$

${}^2/_3\sin 5\delta\cos\delta$ . . . 2c. (1.) (nach §. 7. 2.)

Setzt man nun die Gränzen von $\delta = 0$ bis $\delta = \frac{r\pi}{4}$, so erhält man die Rectificationen der Curve von E bis I:

(2.) . . . . $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}(r, \pi)$ in einer fortlaufenden Zahlenreihe ohne trigonometrische Functionen, da $\sin 45 = \sqrt{{}^1/_2}$.

In der Formel (1.) liegt zugleich die Berechnung der Curvenlänge in jeder gegebenen Ausdehnung begründet, da man nur δ nach und nach $= \frac{r\pi}{2}, = \frac{3r\pi}{4}, = r\pi$ u. s. f. bis $\delta = 360^0 = 2r\pi$ einzusetzen hat. Die Ausführung dessen liegt jedoch außerhalb der engern Gränzen dieser Abhandlung.

Eben so überlassen wir die Bearbeitung der Eigenschaften, welche den Kugelspiralen mit geometrischem Verhältnisse zukommen, späteren Musestunden und schließen mit der Bemerkung, wie sich schon aus den vorliegenden drei Abhandlungen leicht der Beweis für die Nützlichkeit der sphärischen Analysis bei Untersuchung von Curven mehrfacher Krümmung (z. B. Kugelellipse und Kugelspiralen) herleiten läßt, deren Formeln mit nur zwei Coordinaten eine sehr leichte und einfache Berechnung (auch Integration) möglich machen.

Berichtigungen.

Seite 23, Z. 15 v. o. [bei § 14. (1.)] statt (1.) $= \frac{r\pi}{4n}$ } } zu setzen (1.) $L = \frac{r\pi}{4n}$ } }

Seite 24, Z. 9 v. o. fehlt am Ende vor } (7.) die Schluß-Klammer)

Eben da, Z. 14 v. o. in der Formel (9.) ist statt $2\frac{1 - {}^2/\pi}{n}$ zu setzen $2\frac{1 - {}^2/\pi}{2}$, und $2\frac{3 - {}^8/\pi}{8}$ statt $2\frac{3 - {}^8/\pi}{n}$.

Eben da, Z. 15 v. o. lies + 0, 13591540 . . . statt + 0, 13521540 . . .

Außerdem ist S. 14, Z. 11 v. o. einmal das + zu streichen, wo es doppelt steht.