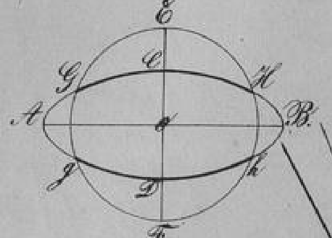


zu Cap. III. §. 9.

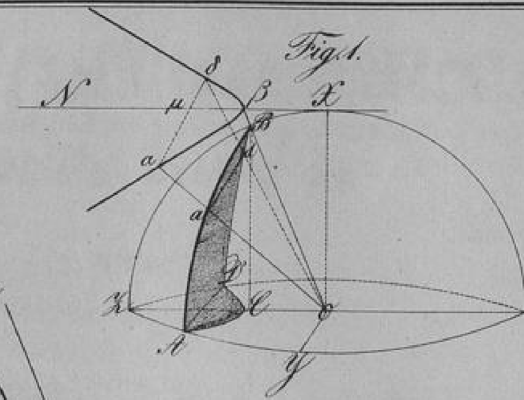
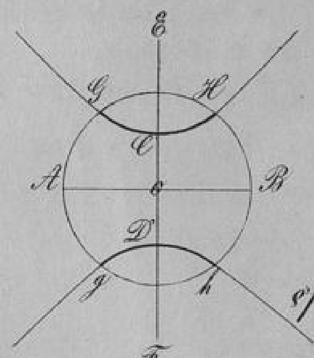


Fig. 1.



zu Cap. III. §. 9.

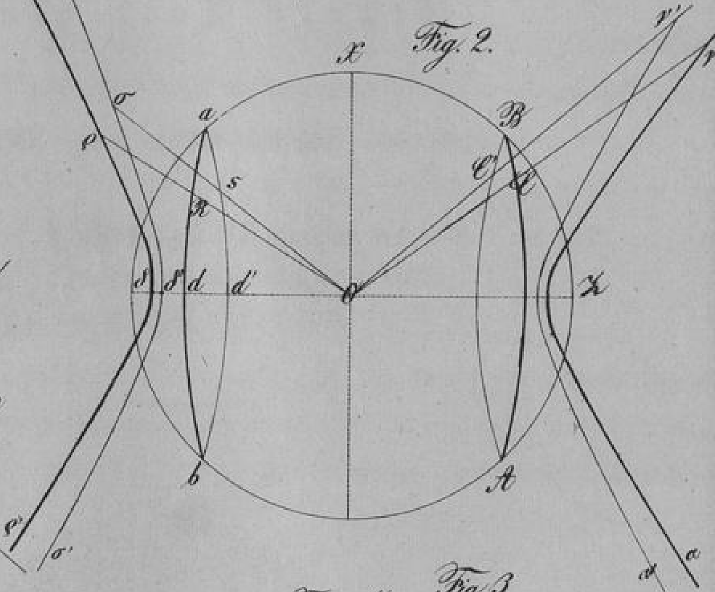


Fig. 2.

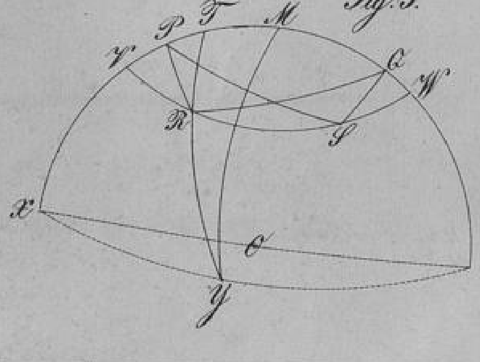


Fig. 3.

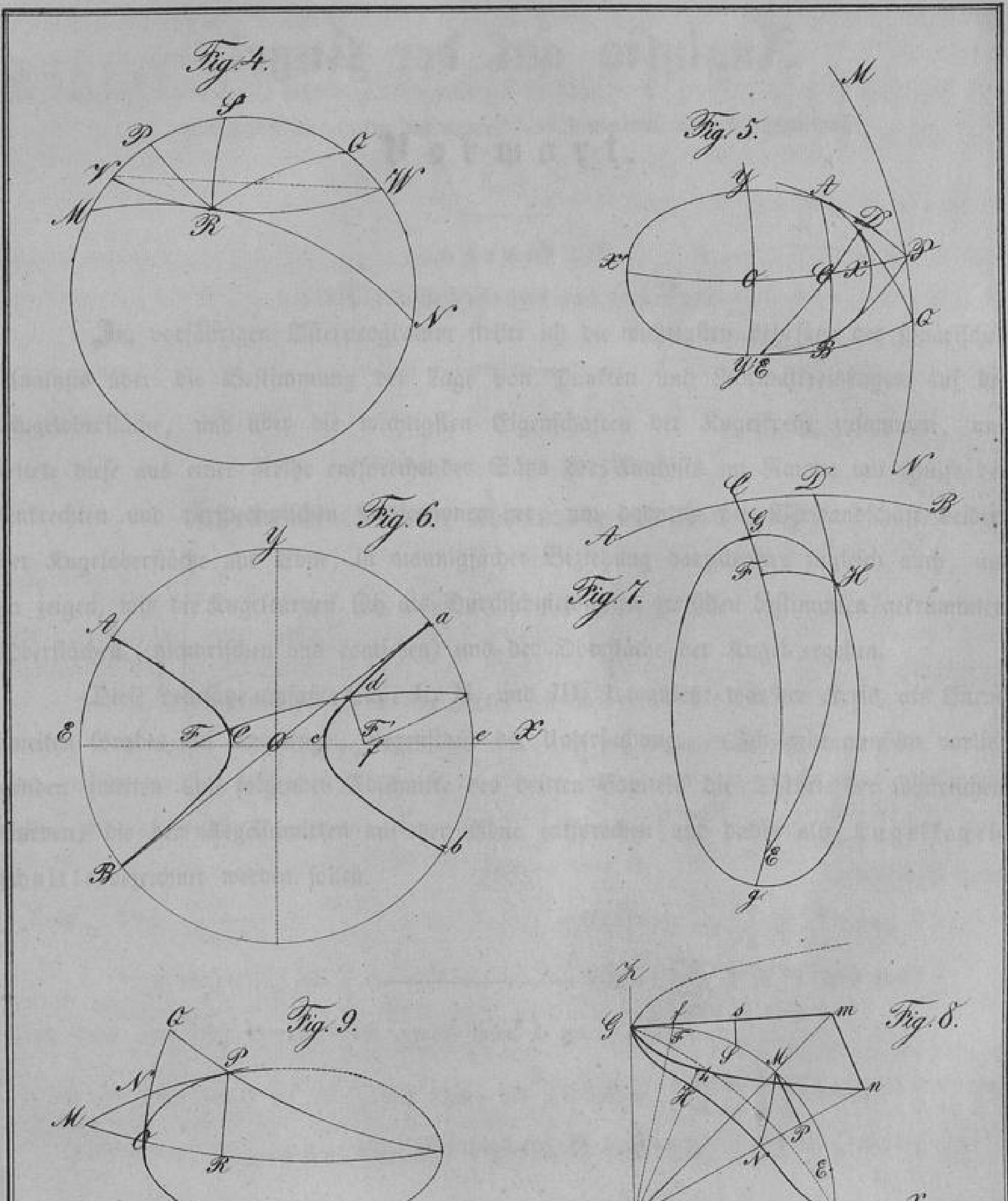


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Vorwort.

Im vorjährigen Osterprogramm stellte ich die wichtigsten Lehrsätze der sphärischen Analysis über die Bestimmung der Lage von Punkten und Normalkreisbogen auf der Kugeloberfläche, und über die wichtigsten Eigenschaften der Kugelkreise zusammen, und leitete diese aus einer Reihe entsprechender Sätze der Analysis im Raume mit Hülfe der senkrechten und perspectivischen Projectionen her, um dadurch die Verwandschaft beider, der Kugeloberfläche und Ebne, in mannigfacher Beziehung darzulegen, zugleich auch, um zu zeigen, wie die Kugelcurven sich als Durchschnittslinien zwischen bestimmten gekrümmten Oberflächen (cylindrischen und conischen) und der Oberfläche der Kugel ergeben.

Diese Lehrsätze umfaßte Cap. I., II. und III. 1.; zuletzt war der Kreis, als Curve zweiten Grades auf der Kugel, Gegenstand der Untersuchung. Ich gebe nun im vorliegenden zweiten und folgenden Abschnitte des dritten Capitels die Theorie der sphärischen Curven, die den Kegelschnitten auf der Ebne entsprechen und daher als Kugelkegelschnitte bezeichnet werden sollen.

Ueber die

Analysis auf der Kugel.

(Fortsetzung der im vorigen Oster-Programm gelieferten Abhandlung.)

Von

R. Gorgas,

Candidat des höheren Schulamts.

(Fortsetzung des dritten Capitels.)

Von den Kugelcurven zweiten Grades.

II. Die Ellipse auf der Kugel.

§. 7.

Herleitung der Gleichung durch senkrechte Projection.

Eine durch den Mittelpunkt der Kugel und die räumliche XY-Ebne gelegte Ebne enthalte eine Ellipse, deren Coordinaten aus ihrem, zugleich der Kugel, Mittelpunkte gerechnet werden, und deren halbe $\left\{ \begin{matrix} \text{kleine} \\ \text{große} \end{matrix} \right\}$ Achse $\left\{ \begin{matrix} = b \\ = a \end{matrix} \right\}$ in der $\left\{ \begin{matrix} Y\text{-} \\ X\text{-} \end{matrix} \right\}$ Achse des räumlichen Systems liegt: ihre Gleichung ist alsdann:

$$(1.)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nach Cap. I., §. 1. (3.) ist aber $x = r \sin \xi$, $y = r \sin \eta$, folglich ist

$$(2.)\quad \frac{r^2 \sin^2 \xi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \eta}{b^2} = 1$$ auch eine Ellipsengleichung; wird darin $\left\{ \begin{matrix} \eta = 0 \\ \xi = 0 \end{matrix} \right\}$, so wird $\left\{ \begin{matrix} \xi = A \\ \eta = B \end{matrix} \right\}$, wobei 2A die große Achse, 2B die kleine Achse der Kugelellipse bedeutet, die durch Normalkreis-Bogen dargestellt sind;

alsdann ist in (2.) $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{r^2}{a^2}=\dfrac{1}{\sin^2 A}\\[2mm] \dfrac{r^2}{b^2}=\dfrac{1}{\sin^2 B}\end{array}\right\}$; so daß die Gleichung der projicirten Kugelellipse

wird: (3.) $\dfrac{\sin^2 \xi}{\sin^2 A}+\dfrac{\sin^2 \eta}{\sin^2 B}=1.$

Setzen wir nun [nach Cap. 1., §. 1. (5.)] $\left\{\begin{array}{l}\sin^2 \xi = \text{tang}^2\, \xi' \cos^2 \delta;\\ \sin^2 \eta = \text{tang}^2\, \eta' \cos^2 \delta;\end{array}\right\}$ so wird

(4.) $\dfrac{\text{tang}^2\, \xi'}{\sin^2 A}+\dfrac{\text{tang}^2\, \eta'}{\sin^2 B}=\dfrac{1}{\cos^2 \delta}=1+\text{tang}^2\, \delta = 1+\text{tang}^2\, \xi'+\text{tang}^2\, \eta';$

woraus endlich herzuleiten ist:

(5.) $\dfrac{\text{tang}^2\, \xi'}{\text{tang}^2 A}+\dfrac{\text{tang}^2\, \eta'}{\text{tang}^2 B}=1$, ebenfalls die Gleichung einer Kugelellipse, deren $\left\{\begin{array}{l}\text{große}\\ \text{kleine}\end{array}\right\}$ halbe Achse $\left\{\begin{array}{l}A\\ B\end{array}\right\}$ ist, und deren Mittelpunkt mit dem der sphärischen Coordinaten zusammenfällt.

§. 8.

Perspectivische Projection der Ellipse.

Auf einer der räumlichen XY-Ebne parallel-laufenden Tangentenebne der Kugel sei eine Ellipse verzeichnet, deren große Achse in die XZ-Ebne, deren kleine Achse in die YZ-Ebne, deren Mittelpunkt also in den Berührungspunkt der Kugel und Ebne fällt (d. h. in den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten): so ist die Gleichung der Ellipse

(1.) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$

die Relationen zwischen x, y und dessen perspectivischer Projection auf der Tangentenebne ξ', η' sind aber: $\left\{\begin{array}{l}x = r\ \text{tang}\ \xi'\\ y = r\ \text{tang}\ \eta'\end{array}\right\}$; ferner ist $\left\{\begin{array}{l}a = r\ \text{tang}\ A\\ b = r\ \text{tang}\ B\end{array}\right\}$; also wird:

(2.) $\dfrac{\text{tang}^2\, \xi'}{\text{tang}^2 A}+\dfrac{\text{tang}^2\, \eta'}{\text{tang}^2 B}=1$; die Gleichung der projicirten Kugelellipse, deren Mittelpunkt im Anfange der sphärischen Coordinaten liegt.

Anmerkung. Aus §. 6 und 7 folgt, daß eine Kugelellipse

1) die Durchschnittscurve zwischen einer geraden elliptischen Cylinderoberfläche und der Kugeloberfläche sei, wenn die Achse des Cylinders durch das Centrum der Kugel geht; und ferner aus §. 8., daß sie:

2) die Durchschnittscurve zwischen einer geraden elliptischen Kegel-

oberfläche und der Kugeloberfläche sei, wenn die Spitze des Kegels im Centrum der Kugel liegt.

In beiden Fällen wird dieselbe schneidende Oberfläche, zu beiden Seiten des Kugelmittelpunktes genugsam verlängert, zwei diametral entgegengesetzte Kugelellipsen von völlig gleicher Gestalt und Größe geben, wie es sich bei der früher erwähnten Doppeldeutigkeit der trigonometrisch-quadratischen Ellipsengleichung, (wo selbst der Unterschied der Vorzeichen von sin. und tang. verschwindet), nicht anders erwarten läßt.

§. 9.

Anderweitige senkrechte Projectionen der Kugelellipse auf die räumlichen Coordinaten-Ebnen.

Nach §. 6. hat eine aus dem Mittelpunkte der sphärischen Coordinaten verzeichnete Kugel-Ellipse zur senkrechten Projection auf der XY-Ebne eine Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jetzt wollen wir die Natur ihrer senkrechten Projectionen auf andere Achsenebnen untersuchen:

a) Auf der XZ-Ebne:

Die Gleichung der Ellipse auf der Kugel ist:

$$(1.)\quad \frac{\text{tang}^2\,\xi'}{\text{tang}^2\,A} + \frac{\text{tang}^2\,\eta'}{\text{tang}^2\,B} = 1$$

Da nun für die senkrechte Projection $\text{tang}\,\xi' = \frac{x}{z}$, $\text{tang}\,\eta' = \frac{y}{z}$ ist, so erhält man aus (1.) dadurch:

$$(2.)\quad z^2 = \frac{x^2}{\text{tang}^2 A} + \frac{y^2}{\text{tang}^2 B}.$$

Nun ist aber, der Kugeloberflächen-Gleichung wegen:

$$(3.)\quad y^2 = r^2 - (x^2 + y^2);$$

also daraus:

$$(4.)\quad \frac{x^2}{\frac{r^2\,\text{tang}^2\,A}{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}} + \frac{z^2}{r^2 \cos^2 B}$$ als Gleichung der Kurve, welche durch Projection der Kugelellipse auf die XZ-Ebne entsteht. Diese Kurve ist eine Ellipse, deren halbe große Achse $= \frac{r\,\text{tang}\,A}{\sqrt{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}}$, deren halbe kleine Achse $= r \cos B$ und deren Mittelpunkt im Kugelcentrum ist. Da aber der Bruch $\frac{\text{tang}\,A}{\sqrt{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}} > 1$ ist, weil unter

allen Umständen $\mathrm{tang}^2 A > \mathrm{tang}^2 A - \mathrm{tang}^2 B$, so ist auch die halbe große Achse dieser Ellipse größer, als der Kugelradius; daher wird auf dem, die XZ=Ebne bildenden größten Kugelkreise diese Ellipse nicht ganz zur Vollendung gelangen, sondern nur in zwei congruenten Bogen auf beiden Seiten des Kugelmittelpunkts, in gleicher Entfernung von ihm, erscheinen, wie beistehende Figur andeutet. Jeder dieser Bogen GH und gh für sich ist die Projection einer Kugelellipse, die ganze Projections=Ellipse also bezieht sich auf zwei Kugelellipsen, die einander diametral gegenüberliegen, und die zu derselben Gleichung gehören.

b.) Projection der Kugelellipse auf die YZ=Ebne:

Wenn wir die Gleichung der Projection einer Ellipse mit der Gleichung:

(1.) $\frac{\mathrm{tang}_2\ \xi'}{\mathrm{tang}^2 A} + \frac{\mathrm{tang}^2\ \eta'}{\mathrm{tang}^2 B} = 1$, dargestellt durch die Fußpunkte ihrer räumlichen Abscissenlinie, auf der YZ=Achse entwickeln wollen, so muß aus der Gleichung, die für (1.) zu setzen ist, nämlich:

(2.) $\frac{x^2}{\mathrm{tang}^2 A} + \frac{y^2}{\mathrm{tang}^2 B} = z^2$; das x eliminirt werden. Nun ist aber:

(3.) $x^2 = r^2 - (y^2 + z^2)$; also wird:

(4.) $\frac{z^2}{r^2 \cos^2 A} - \frac{y^2}{\frac{r^2\ \mathrm{tang}^2 B}{\mathrm{tang}^2 A - \mathrm{tang}^2 B}} = 1$ als Gleichung der YZ=Projection für die Kugelellipse; diese Gleichung gehört aber zu einer Hyperbel, deren Centrum in dem Mittelpunkte der Kugel liegt, deren halbe kleine Achse $= \frac{r\ \mathrm{tang}\ B}{\sqrt{\mathrm{tang}^2 A - \mathrm{tang}^2 B}}$, deren halbe große Achse $= r \cos A$ ist, die also auf der Normalkreisebne der YZ=Coordinaten so erscheint, wie die beistehende Figur angiebt. Die beiden zusammengehörigen gleichen Hyperbelbogen GH, gh, welche auf dieser Ebne liegen, bedingen also wieder zwei, von einander diametral abstehende Kugelellipsen, die zu derselben Gleichung gehören.

§. 10.

Andere Projectionscurven der Kugelellipse.

Es sei (Fig. 1.) NX der Durchschnitt einer Tangentenebne an die Kugel in dem Endpunkte der X=Achse; ABD sei die eine Hälfte einer Kugelellipse; die Projection derselben auf der YZ=Ebne sei die (in §. 9 betrachtete) Hyperbel ACD und ad sei $\|$AD; denkt man sich nun vom Kugelcentrum O aus einen Leitstrahl durch alle Punkte der Ellipse continuirlich fortbewegt, so beschreibt dieser auf der Tangentenebne NX eine Curve $\alpha\beta\delta$, deren Natur untersucht werden soll.

Man nehme an, dem Punkte a der Kugelellipse entspreche der Punkt α der Tangentenebne, und a sei durch die Coordinaten des Raums $x'' \; y'' \; z''$ gegeben, α aber durch $x' \; y' \; z'$, so hat man folgende Relationen:

(1.) $x' = r$;

(2.) $\frac{x'}{z'} = \frac{x''}{z''}$ und $\frac{y'}{z'} = \frac{y''}{z''}$; ferner ist:

(3.) $\frac{x''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 A} + \frac{y''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 B} = 1$; als Gleichung der Kugelellipse: folglich:

(4.) $\begin{cases} \frac{r^2}{z'^2 \operatorname{tang}^2 A} + \frac{y'^2}{z'^2 \operatorname{tang}^2 B} = 1, \text{ oder} \\ \frac{z'^2}{r^2 \operatorname{cotang}^2 A} - \frac{y'^2}{r^2 \operatorname{tang}^2 B \operatorname{cotang}^2 A} = 1, \end{cases}$ d. h. die Gleichung einer Hyperbel, deren halbe große Achse $= r \operatorname{cotang} A$, deren halbe Nebenachse $= r \operatorname{tang} B \operatorname{cotang} A$ ist.

Zusatz. Nach §. 9. ist die Hyperbel ACD als die senkrechte Projection derselben Ellipse auf die YZ-Ebne, durch die halbe Hauptachse $A' = r \cos A$ und die halbe Nebenachse $B' = \frac{r \operatorname{tang} B}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 A - \operatorname{tang}^2 B}}$ gegeben; sind die Elemente der eben gefundenen Hyperbel A'' und B'', so ist alsdann: $A' : A'' = \sin A : 1$ und $B' : B'' = \operatorname{tang} A : \sqrt{\operatorname{tang}^2 A - \operatorname{tang}^2 B}$.

§. 11.

Fortsetzung.

Legt man aber eine Tangentenebne an das Ende der räumlichen Y-Achse, also parallel mit der XZ-Ebne, so erhält man auf dieser ebenfalls eine Curve durch perspectivische Projection, nämlich (Fig. 2.) $\varrho\varrho'$ und $\alpha\gamma$ (und unterhalb der Kugel $\sigma\sigma'$ und $\alpha' \; \gamma'$), deren Gleichung gesucht wird. Es entspricht z. B. dem Punkte R der linken Kugelellipse oberhalb der Kugel auf der Ebne der Punkt ϱ mit den Coordinaten $x' \; y' \; z'$, während R durch $x'' \; y'' \; z''$ gegeben sei. Dann ist

(1.) $y' = r$;

(2.) $\frac{x'}{z'} = \frac{x''}{z''}$ und $\frac{y'}{z'} = \frac{y''}{z''}$; ferner ist:

(3.) $\frac{x''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 A} + \frac{y''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 B} = 1$ die Gleichung der Kugelellipse: daraus:

(4.) $1 = \frac{z'^2}{r^2 \operatorname{cotang}^2 B} - \frac{x^2}{r^2 \operatorname{tang}^2 A \operatorname{cotang}^2 B}$; die Gleichung einer Hyperbel, deren halbe Hauptachse $= r$ cotang B, deren halbe Nebenachse $= r$ tang A cotang B ist.

Anmerkung 1. Nennt man diese halben Achsen A''' und B''', so ist (aus §. 10.) $A'' : A''' = \text{tang}\, B : \text{tang}\, A$, und $B'' : B''' = \frac{\text{tang}\, B}{\text{tang}\, A} : \frac{\text{tang}\, A}{\text{tang}\, B} = \text{tang}^2\, B : \text{tang}^2\, A$, also $A'' : A''' = \sqrt{B''} : \sqrt{B'''}$.

Anmerkung. 2. Also ist eine Kugelellipse die Durchschnittscurve zwischen einer Kugeloberfläche und

1.) einem graden elliptischen Cylinder
2.) einem graden Hyperbel-Cylinder } , deren Achse durch O geht,

3.) der Oberfläche von 4 zusammengehörigen hyperbolischen Kegelfächern, deren Spitze im Centrum der Kugel liegt. Alle diese Oberflächen geben in ihrer Totalität bei gehöriger Erweiterung zwei Kugelellipsen, die einander diametral gegenüberliegen, und unter sich völlig congruent sind.

§. 12.

Analogon zur Fadenconstruction der ebnen Ellipse.

In zwei Punkten der Kugeloberfläche, welche um O beschrieben ist (Fig. 3.), sei eine biegsame Linie befestigt, deren Länge ($= 2$ A) größer, als die Entfernung ($= 2$ E) ihrer beiden Endpunkte P und Q ist. Durch Anspannen dieser Linie entsteht ein, in allen Lagen darzustellender sphärischer Winkel; z. B. PRQ, der von zwei Normalkreisbogen gebildet wird. Sein Scheitel wird dann eine gekrümmte, in sich zurückkehrende Linie auf der Kugel um P und Q beschreiben, deren Gleichung gesucht werden soll. Man halbire $\widehat{PQ}$ in M, mache $\widehat{MY} \perp \widehat{PQ}$ und $= 90^0$, ziehe z. B. durch R den senkrechten Bogen YT ($= 90^0$), nenne den Bogen $RT = \eta$, den Bogen $MT = \xi'$ (cf. Cap. I. §. 1.); so ist $\widehat{VW} = 2\,A$, $PM = E$, MN sei $= B$. Nun findet man leicht: $\cos PR = \cos \eta \cos (E - \xi')$; und $\cos QR = \cos \eta \cos (E + \xi')$;
Aber $\cos QR = \cos (2\,A - PR) = \cos 2\,A \cos \eta \cos (E - \xi') + \sin 2\,A \sqrt{1 - \cos^2 \eta \cos^2 (E - \xi')}$;
daraus $\sin^2 2\,A = \cos^2 \eta\, (\cos^2 [E + \xi'] + \cos^2 [E - \xi'] + 2 \cos [E + \xi] \cos [E - \xi'] \cos 2\,A)$; also
$1 = \cos^2 \eta \left[\frac{\sin^2 E \sin^2 \xi'}{\sin^2 A} + \frac{\cos^2 E \cos^2 \xi'}{\cos^2 A}\right]$;
weshalb auch: $\frac{1}{\cos^2 \eta \cos^2 \xi} = \frac{1}{\cos^2 \delta} = \frac{\sin^2 E}{\sin^2 A} \text{tang}^2 \xi' + \frac{\cos^2 E}{\cos^2 A}$;
und daraus: $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$. d. h. die Gleichung einer Ellipse auf der Kugeloberfläche.

Anmerkung 1. Diese Gleichung ergiebt sich auch, wenn man die Summe der Radii Vectores statt $= 2\ A$ zu nehmen, $= 180 - 2\ A$ annimmt; dann aber erhält man von denselben Ellipsenbrennpunkten P und Q aus auf der andern Halbkugel die der vorigen diametral gegenüberstehende, congruente Ellipse deren Brennpunkte denen (P und Q) der vorigen ebenfalls diametral gegenüberliegen.

Anmerkung 2. Die Ellipsenelemente A, B und E haben unter sich folgende Beziehung:

$$\cos A = \cos B \cos E;$$

ist also $\cos A = \cos B$, so muß $\cos E = 1$ sein, d. h. $E = o$, welche Bedingung auf den Kugelkreis hinführt.

Ist aber $2\ A = 180^0$, so ist $\cos A = \cos 90^0 = 0$; dann muß entweder $\cos B = o$, d. h. $\cos A = \cos B$, d. h. die Ellipse ein größter Kugelkreis sein, oder $\cos E = o$, d. h. $E = 90^0$, also $E = A$; dann ist $B = o$ zu setzen, und auch eine solche Ellipse wird ein größter Kugelkreis werden.

§. 13.

Die Tangente der Kugelellipse.

Die Gleichung der Ellipse für den Punkt $\xi'\ \eta'$ ist:

(1.) $\dfrac{\operatorname{tang}^2 \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} + \dfrac{\operatorname{tang}^2 \eta'}{\operatorname{tang}^2 B} = 1$; die Gleichung eines Normalkreises durch denselben Punkt ist ferner

(2.) $\dfrac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \dfrac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1$; daraus:

(3.) $\operatorname{tang}^2 \xi - \dfrac{2 \operatorname{tang} m \operatorname{tang}^2 A \operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 B} + \dfrac{(\operatorname{tang}^2 n - \operatorname{tang}^2 B) \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 A}{\operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 B}$;

also (4.) $\operatorname{tang} \xi' =$

$$\frac{\operatorname{tang} m \operatorname{tang}^2 A \operatorname{tang}^2 n}{tg^2 n\, tg^2 A + tg^2 m\, tg^2 B} \pm \frac{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} A}{tg^2 n\, tg^2 A + tg^2 m\, tg^2 B} \sqrt{tg^2 B (tg^2 n\, tg^2 A + tg^2 m\, tg^2 B - tg^2 m\, tg^2 n)};$$

Diese Gleichung für $\operatorname{tang} \xi'$ zeigt durch ihr $\pm$ an, daß ein Normalkreis im Allgemeinen zwei Punkte mit einer Ellipse gemeinschaftlich haben könne; soll daraus aber eine Tangente werden, so muß dies Paar von Durchschnittspunkten zu einem Punkte zusammenfallen, d. h. das Glied mit $\pm$ in (4.) muß $= o$ werden.

Alsdann wird, für den Fall der Berührung:

(5.) $\operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 B = \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 n$ als Bedingung für die Constanten,

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{tang}\ \xi' = \dfrac{\text{tang}^2\ A}{\text{tang}\ m} \\[2ex] \text{tang}\ \eta' = \dfrac{\text{tang}^2\ B}{\text{tang}\ n} \end{array}\right\} \text{als Bedingung für die Coordinaten des Berührungspunkts.}$$

Da nun, nach (1.) $\dfrac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang}\ m} + \dfrac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang}\ n} = 1$, so ist für die Tangente

(7.) $\dfrac{\text{tang}^2\ A}{\text{tang}^2\ m} + \dfrac{\text{tang}^2\ B}{\text{tang}^2\ n} = 1$. Ihre allgemeinste Gleichung ist aber, in Bezug auf den Punkt $\xi'\ \eta'$:

$$(8.)\quad \frac{\text{tang}\ X' - \text{tang}\ \xi'}{\text{tang}\ m} + \frac{\text{tang}\ Y' - \text{tang}\ \eta'}{\text{tang}\ n} = 0,$$

woraus, mit Hülfe von (6.), entsteht:

(9.) $\dfrac{\text{tang}\ X'\ \text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ A} + \dfrac{\text{tang}\ Y'\ \text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ B} = 1$ als die Gleichung der sphärischen Ellipsen-Tangente.

Anmerkung. Diese Gleichung ist sehr leicht aus der für eine Tangente an die ebne Ellipse herzuleiten. Dieselbe ist:

$\dfrac{X'\ x'}{a^2} + \dfrac{Y'\ y'}{b^2} = 1$, wenn diese Ellipse auf einer Tangentenebne liegt, die die Z-Achse in ihrem Endpunkte berührt. Projicirt man diese Ellipsen-Tangente sammt ihrer Curve perspectivisch auf die Kugel, aus deren Centrum, so ist für sie nach dem oben angeführten Reductions-Verfahren zu entwickeln: $\dfrac{\text{tang}\ X'\ \text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ A} + \dfrac{\text{tang}\ Y'\ \text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ B} = 1$; wie oben.

§. 14.

Ueber die Pole einer Ellipsentangente.

Nach Cap. II. §. 9. (3.) gehört zu jeder Ellipsentangente von der Gleichung:

$\dfrac{\text{tang}\ X'\ \text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ A} + \dfrac{\text{tang}\ Y'\ \text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ B} = 1$ ein Paar von Polen, die durch die Coordinaten $a'\ b$, und $\alpha'\ \beta'$ bestimmt werden, so daß:

(1.) $\text{tang}\ a' = \dfrac{+\ \text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ A}$ und $\text{tang}\ b' = \dfrac{+\ \text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ B}$;

(2.) $\text{tang}\ \alpha' = \dfrac{-\ \text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ A}$ und $\text{tang}\ \beta' = \dfrac{-\ \text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ B}$ sein muß. Aus (1.) läßt sich sodann herleiten:

(3.) $\tang^2 a' \tang^2 A + \tang^2 b' \tang^2 B = 1$; setzt man nun a' und b' als veränderliche Coordinaten, wenn ξ' und η' sich ändern, und $\tang A = \frac{1}{\tang M'}$, so wie $\tang B = \frac{1}{\tang N'}$; also: $\left\{\begin{matrix} A = 90 \pm M \\ B = 90 \pm N \end{matrix}\right\}$, so wird aus (3.)

(4.) $\frac{\tang^2 a'}{\tang^2 M} + \frac{\tang^2 b'}{\tang N^2} = 1$; als Gleichung einer neuen Ellipse, in der alle die Tangentenpole der erst-gegebenen liegen, und deren halbe Achsen sich um 90^0 von denen der frühern unterscheiden. Dasselbe gilt für den diametral von $a' b'$ verschiedenen zweiten Pol $\alpha' \beta'$. Da aber $A > B$, also auch $\tang A > \tang B$, so ist jedenfalls $\tang M$ [$= \tang (90^0 \pm A)$] $<$ $\tang N$ [$= \tang (90^0 \pm B)$] also steht die $\left\{\begin{matrix}\text{große}\\ \text{kleine}\end{matrix}\right\}$ Achse der Pol-Ellipse senkrecht auf der $\left\{\begin{matrix}\text{kleinen}\\ \text{großen}\end{matrix}\right\}$ Achse der anfänglich gegebenen, und zwar im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten, der zugleich beider Ellipsen Mittelpunkt ist.

Anmerkung. Wir wollen diese von einander in der §. 14 geschilderten Weise abhängigen Ellipsen auf der Kugel complementäre Ellipsen nennen, so wie man die sich diametral gegenüberstehenden, durch dieselbe Gleichung gegebenen, supplementäre Ellipsen nennen kann, da ihre Abstände durch 2 R, jene aber durch 1 R bestimmt werden.

§. 15.

Einige Eigenschaften zweier complementärer Ellipsen.

1) Die Abhängigkeit zweier complementärer Ellipsen von einander ist gegenseitig, d. h. jede von ihnen kann die ursprüngliche, die andere die abgeleitete sein; denn da $\tang^2 A = \frac{1}{\tang^2 N}$ und $\tang^2 B = \frac{1}{\tang^2 M}$ ist, so ist auch $\tang^2 M = \frac{1}{\tang^2 B}$ und $\tang^2 N = \frac{1}{\tang^2 A}$.

2) Die complementären Ellipsen e und e' zweier sich diametral gegenüberliegender Ellipsen E und E' sind unter sich wiederum diametral entgegengesetzt.

3) Deshalb sind die Bestimmungsgleichungen von Linien rc., die zwei complementären Ellipsen zugleich angehören, so beschaffen, daß sie durch Umtausch ihrer Elemente nicht verändert werden.

4) Zu einer Ellipse E gehört als complementär nicht blos ihre eingeschlossene e, sondern auch deren diametrale e'.

5) Zieht man an die einander zugehörigen Punkte P und p zweier complementärer Ellipsen E und e zwei Tangenten, so stehen beide auf Pp (dem Verbindungs-Normalbogen zwischen P, p) senkrecht, schneiden sich also in den dem Bogen Pp zugehörigen Polen. — Denn der Punkt $\xi' \eta'$ der Tangente an E hat die Gleichung:

$\frac{\text{tang}\,\eta'}{\text{tang n}} + \frac{\text{tang}\,\xi'}{\text{tang m}} = 1$, der $\alpha'\ \beta'$ der Tangente an e, als $\xi'\ \eta'$ entsprechend,

$\frac{\text{tang}\,\alpha'}{\text{tang m}'} + \frac{\text{tang}\,\beta'}{\text{tang n}'} = 1$. Nun ist aber $\left\{\begin{matrix}\alpha'\ \beta'\\ \xi'\ \eta'\end{matrix}\right\}$ der Pol von der Tangente an $\left\{\begin{matrix}\xi'\ \eta'\\ \alpha'\ \beta'\end{matrix}\right\}$, folglich ist

$$(1.)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\alpha' = \frac{1}{\text{tang m}'},\ \text{tang}\,\beta = \frac{1}{\text{tang n}'}; \\ \text{tang}\,\xi' = \frac{1}{\text{tang m}'},\ \text{tang}\,\eta' = \frac{1}{\text{tang n}'}. \end{cases}$$

Die Verbindungslinie Pp zwischen $\xi'\ \eta'$ und $\alpha'\ \beta'$ hat aber als Gleichungen der Coordinatenachsen-Abschnitte:

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\mu = \frac{\text{tang}\,\alpha'\ \text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta'\ \text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta'} \text{ und} \\ \text{tang}\,\nu = \frac{\text{tang}\,\alpha'\ \text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta'\ \text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\xi'}; \end{cases}$$

folglich ist (nach Einsetzen der Werthe aus (1.)) leicht zu finden, daß:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\text{tang}\,\mu\ \text{tang m}} + \frac{1}{\text{tang}\,\nu\ \text{tang n}} = 1 \text{ und}; \\ \frac{1}{\text{tang}\,\mu\ \text{tang m}'} + \frac{1}{\text{tang}\,\nu\ \text{tang n}'} = 1 \end{cases}$$

ist, d. h. daß Pp auf beiden Tangenten senkrecht steht.

6) Die beiden Tangenten an die sich entsprechenden Punkte $\xi'\ \eta'$ und $\alpha'\ \beta'$ stehen auch auf einander senkrecht. Denn da $\frac{\text{tang}\,\alpha'}{\text{tang m}'} + \frac{\text{tang}\,\beta'}{\text{tang n}'} = 1$ und $\text{tang}\,\alpha' = \frac{1}{\text{tang m}}$, $\text{tang}\,\beta' = \frac{1}{\text{tang n}}$, so ist $\frac{1}{\text{tang m tang m}'} + \frac{1}{\text{tang n tang n}'} = 1$, d. h. die eine auf der andern senkrecht.

7) Sind A, B, E die Elemente der Ellipse E und A′, B′, E′, die Elemente der Ellipse e; so ist $\cos E' = \frac{\sin B}{\sin A}$ (1.)

Da aber $\cos E = \frac{\cos A}{\cos B}$; so ist

$\cos E \cos E' = \frac{\text{tang B}}{\text{tang A}}$ (2.); und

(3.) $\frac{\cos E}{\cos E'} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B}$; da aber alle diese Elemente durch die Gleichungen

$\left\{\begin{array}{l} A = 90^\circ \pm B' \\ B = 90 \mp A' \end{array}\right\}$ unter sich zusammenhängen, so kann man in die Gleichung (1.) (2.) und (3.) leicht die Elemente A', B' einführen.

§. 16.

Die Normale auf der Tangente einer Ellipse. (Fig. 4.)

Es sei MN Tangente an die Ellipse im Punkte R und SR sei senkrecht darauf errichtet; so ist die Gleichung der Tangente, wenn R durch ξ' η' bestimmt wird:

(1.) $\frac{\tang \xi'}{\tang m} + \frac{\tang \eta'}{\tang n} = 1$;

Die Gleichung der Ellipse für diesen Punkt ist aber

(2.) $\frac{\tang^2 \xi'}{\tang^2 A} + \frac{\tang^2 \eta'}{\tang^2 B} = 1$;

Die Normale RS geht durch ξ' η', daher ist ihre Gleichung:

(3.) $\frac{\tang \xi'}{\tang m'} - \frac{\tang \eta'}{\tang n'} = 1$; [NB. das negative Vorzeichen von n' macht das zweite Glied subtractiv;] und, da sie auf der Tangente senkrecht ist:

(4.) $\frac{1}{\tang m \tang m'} - \frac{1}{\tang n \tang n'} = 1$.

Mit Hülfe dieser Relationen erhält man

(5.) $\tang m \tang m' = \cos^2 B (\tang^2 A - \tang^2 B)$; folglich muß $\tang^2 E = \tang m \tang m'$ sein. Daraus entwickelt man:

(6.) $\frac{\tang m + \tang E}{\tang m - \tang E} = \frac{\tang m' + \tang E}{\tang E - \tang m'}$;

Da nun $\left\{\begin{array}{l} MQ = E + m,\ PS = E - m' \\ MP = m - E,\ QS = E + m' \end{array}\right\}$ ist, so wird aus (6.):

(7.) $\sin QM : \sin PM = \sin QS : \sin PS$; daraus folgt, daß der Winkel PRQ durch die Normale RS halbirt worden sei. **Jede Normale auf einer Kugelellipsen-Tangente halbirt also den Winkel, den die zum Berührungspunkte gehörigen zwe Radiivectoren bilden.**

§. 17.

Ueber Tangentensehnen.

Erklärung. Zieht man von einem Punkte der Kugeloberfläche außerhalb einer Kugelellipse ein Tangentenpaar an dieselbe und verbindet die beiden Berührungspunkte desselben mit einander durch einen Normalkreisbogen, so nennt man diesen eine **Tangentensehne.**

Lehrsatz I. Gehen von beliebigen Punkten eines Normalkreises, der auf der verlängerten großen Ellipsenachse senkrecht steht, Tangentenpaare an die Ellipse, so schneiden sich die zugehörigen Tangentensehnen alle in einem Punkte auf der großen Achse.

Beweis. (analytisch:) Es sei das Centrum der Kugelcoordinaten im Mittelpunkte der Ellipse, die große Achse sei die X-Achse derselben: so ist

(1.) $\frac{\tang^2 \xi'}{\tang^2 A} + \frac{\tang^2 \eta'}{\tang^2 B} = 1$; als Ellipsengleichung.

Von einem Punkte $a'\,b'$ des Normalkreises gehen zwei Tangenten an die Ellipse in den Punkten: $\left\{ \begin{matrix} u' & v' \\ x' & y' \end{matrix} \right\}$, also ist

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tang u' \tang a'}{\tang^2 A} + \frac{\tang v' \tang b'}{\tang^2 B} = 1 \\ \frac{\tang x' \tang a'}{\tang^2 A} + \frac{\tang y' \tang b'}{\tang^2 B} = 1 \end{aligned} \right\} \text{wegen der Tangenten.}$$

Werden diese beiden Punkte $\left\{ \begin{matrix} x' & y' \\ u' & v' \end{matrix} \right\}$ durch einen Normalkreisbogen verbunden, so schneidet derselbe auf der X-Achse das Stück m ab, dessen Gleichung [nach Cap. II, §. 5, (3.)] ist:

$$(3.) \quad \tang m = \frac{\tang x' \tang v' - \tang y' \tang u'}{\tang v' - \tang y'};$$

Nun ist aber aus (2.) herzuleiten:

$$(4.) \quad \frac{\tang x' \tang v' - \tang y' \tang u'}{\tang v' - \tang y'} = \frac{\tang^2 A}{\tang a'}; \text{ also ist}$$

(5.) $\tang m = \frac{\tang^2 A}{\tang a'}$; weil aber der Normalkreis, auf dem $(a'\,b')$ liegt, senkrecht auf der X-Achse steht, so ist das darauf abgeschnittene a' 2c. jedes Punktes desselben constant, folglich wird auch tang m einen constanten Werth erhalten, d. h. die übrigen, eben so construirten Tangentensehnen schneiden sich auf der X-Achse in demselben Punkte, dessen tang m (oder Abscissentangente) $= \frac{\tang^2 A}{\tang a'}$ ist.

Lehrsatz II. (Verallgemeinerung des Lehrs. I.) Gehen von beliebigen Punkten eines beliebigen Normalkreises außerhalb einer Kugelellipse Tangentenpaare an dieselbe, so schneiden sich die zugehörigen Tangentensehnen alle in einem Punkte innerhalb der Ellipse.

Es sei die Gleichung des beliebigen Normalkreisbogens für den Punkt $(a'\,b')$:

$$\frac{\text{tang } a'}{\text{tang } m'} + \frac{\text{tang } b'}{\text{tang } n'} = 1. \quad (1.)$$

Die Gleichung der Ellipsentangenten sind dann für die Berührungspunkte $\left\{\begin{matrix} u' v' \\ x' y' \end{matrix}\right\}$ derselben:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\text{tang } u' \text{ tang } a'}{\text{tang}^2 A} + \dfrac{\text{tang } v' \text{ tang } b'}{\text{tang}^2 B} = 1 \\[2ex] \dfrac{\text{tang } x' \text{ tang } a'}{\text{tang}^2 A} + \dfrac{\text{tang } y' \text{ tang } b'}{\text{tang}^2 B} = 1 \end{cases}\right\} (2.)$$

Also wird, [wie in Lehrsatz I.] der Abschnitt m, den die Tangentensehne zwischen $\left\{\begin{matrix} u' v' \\ x' y' \end{matrix}\right\}$ auf der X-Achse macht, gegeben durch:

$$(3.)\ \text{tang } m = \frac{\text{tang}^2 A}{\text{tang } a'}$$ und der Abschnitt auf der Y-Achse, also n, durch

$$(4.)\ \text{tang } n = \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang } b'}.$$

Für eine andre Tangentensehne, gehörig zum Puncte $\alpha' \beta'$ des beliebigen Normalkreises (1.), wird also

$$(5.)\ \begin{cases} \text{tang } \mu = \dfrac{\text{tang}^2 A}{\text{tang } \alpha'}; \\[2ex] \text{tang } \nu = \dfrac{\text{tang}^2 B}{\text{tang } \beta'}; \end{cases}$$

Beide Tangentensehnen schneiden sich im Punkte $r' s'$, so ist [nach Cap. II. §. 8. Zus. 1.]:

$$(6.)\ \begin{cases} \text{tang } r' = \dfrac{\text{tang}^2 A \,(\text{tang } b' - \text{tang } \beta')}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'}; \\[2ex] \text{tang } s' = \dfrac{\text{tang}^2 B \,(\text{tang } \alpha' - \text{tang } a')}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'}; \end{cases}$$

Da aber $a' b'$ und $\alpha' \beta'$ auf demselben Normalkreise (1.) liegen, so ist:

$$(7.)\ \begin{cases} \dfrac{\text{tang } b' - \text{tang } \beta'}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'} = \dfrac{1}{\text{tang } m'} \text{ und} \\[2ex] \dfrac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } a'}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'} = \dfrac{1}{\text{tang } n'}; \text{ also wird aus (6.)} \end{cases}$$

$$(8.)\ \text{tang } r' = \frac{\text{tang}^2 A}{\text{tang } m'} \text{ und } \text{tang } s' = \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang } n'},$$ welche Werthe constante bleiben, so lange der gegebne Normalkreis (1.) seine Lage beibehält. Folglich ist für alle Tangentensehnen desselben der Durchschnittspunkt $r' s'$ ein constanter.

Anmerkung. Da durch dieselbe Gleichung zwei sich diametral entgegengesetzte Ellipsen gegeben sind, so kann man auch die Sätze §. 17 auf solche Tangenten und Tangentensehnen ausdehnen, welche von den Punkten eines Normalkreisbogens außerhalb nach allen beiden Ellipsen gezogen werden. Zieht man z. B. nach den Punkten P und P′ der Ellipse E Tangenten und Sehne, so geht letztere, bei hinreichender Verlängerung, auch durch die Punkte p und p′ der Ellipse e, die von demselben Punkte außerhalb ihre Tangenten haben, wie P und P′. Es ist also auch statthaft, von diesem Punkte außerhalb der 2 Ellipsen eine Tangente nach P und p′, oder nach P′ und p zu ziehen; man wird zur Berührungssehne beider Arten denselben Normalkreis P P′ p′ p erhalten, da die Punkte P und P′ denen p und p′ diametral gegenüberliegen. Betrachten wir aber jede dieser Berührungssehnen als ganzen Normalkreis, so werden sie sich zweimal, in 2 gemeinschaftlichen Punkten schneiden, die einander wiederum diametral gegenüberliegen.

§. 18.

Anwendung des Vorigen auf ebne Kegelschnitte.

Der in §. 17. II. aufgestellte Satz enthält in seiner allgemeinern Fassung die Lehrsätze über Tangentensehnen ebner Kegelschnitte aller Art in sich, die aus ihm leicht durch Projectionsverfahren entwickelt werden können; über gradlinige Verbindungen der zugehörigen Paare von Berührungspunkten dieser Kegelschnitte wird die perspectivische Projection auf die Tangentenebnen (cf. C. II. 10. §.) besonders Aufschluß geben können, weil alle Normalkreise irgend welcher Richtung hier als gerade Linien erscheinen; während die orthographische Projection der Kugelfiguren auch Curven zwischen den Berührungspunkten darstellen wird, die alle sich in einem Punkte schneiden. Hier sollen, der Kürze wegen, nur einige abgeleitete Lehrsätze der Planimetrie angeführt werden.

a) Zieht man von einer Geraden außerhalb eines Kreises, einer Ellipse oder Hyperbel (später wird auch die Parabel als hierher gehörig sich erweisen) auf der Ebne, an diese Curven Tangentenpaare, so schneiden sich die zugehörigen Tangentensehnen in einem Punkte. [Dies gilt bei der Hyperbel für beide Hälften, sowohl jede für sich, als auch beide mit einander verbunden betrachtet.] (Aus der perspect. Projection.)

b) Hat man innerhalb eines Kreises eine kleinere Ellipse e, deren Mittelpunkt im Centrum desselben liegt, und unter derselben Bedingung um sie eine beliebige andere, E, deren große Achse = dem Diameter des Kreises ist, und welche die e ganz umschließt, so construire man von der Peripherie der E tangirende Ellipsenpaare an e, deren große Achsen auch = 2 r und deren Centrum das der ersten ist, und durch die Berührungspunkte jedes Paars mit der Ellipse e je eine Ellipse, deren große Achse = 2 r, deren Mittelpunkt wiederum derselbe ist, so schneiden sich alle diese letztconstruirten Ellipsen in zwei Punkten innerhalb der Ellipse e, die mit dem Centrum des Kreises in derselben Graden liegen und gleich weit von ihm abstehen. (NB. Nach der Theorie der ebnen Kegelschnitte ist die Construction einer Ellipse stets möglich, wenn man Mittelpunkt, Größe der großen Achse und entweder zwei Punkte der Peripherie, oder einen Durchmesser derselben kennt.) (Aus der orthographischen Projection).

c) Dasselbe gilt auch für eine Hyperbel, die statt der Ellipse e in den Kreis verzeichnet ist, nur muß dann auch ihr Mittelpunkt der des Kreises zugleich sein, und die Ellipse E zwischen beiden Hälften derselben liegen, ohne sie zu schneiden. (Ebenfalls aus der orthograph. Projection.)

III. Die Hyperbel auf der Kugel.

§. 19.

Ableitung aus der Kugelellipse.

Construirt man auf der Kugeloberfläche zwei sich diametral entsprechende Ellipsen, deren gemeinschaftliche Gleichung sei:

(1.) $\frac{\tang^2 \xi'}{\tang^2 A} + \frac{\tang^2 \eta'}{\tang^2 B} = 1$; [Fig. 6. ACB und acb] und verändert die Lage des sphärischen Coordinatensystems um 90°, ohne die Lage der X-Achse desselben (Ee) zu ändern, so daß YO die neue Y-Achse davon wird, so wie O der neue Anfangspunkt der Coordinaten, so erhält man auf der obern Kugelhälfte zwei Ellipsenhälften, deren jede einen Brennpunkt [F und f] in gleicher Entfernung von O und den Scheiteln C und c in sich trägt. Nimmt man auf der Hälfte acb rechts einen Punkt d an und verbindet ihn durch Normalbogen mit F und f, so geht Fd verlängert auch durch den F diametral entgegengesetzten Brennpunkt F′, der in der rechten Ellipse liegt, und der ganze Normalkreisbogen von F bis dahin ist = 180°. Nun ist [nach §. 12]: fd + F′ d = 2 A = 180° − Cc; und F′ d = 180 − Fd, folglich, wenn wir Cc = 2A′ setzen, ist

(2.) Fd − fd = 2 A′;

d. h. jeder Punkt einer von zwei diametral sich zugeordneten Ellipsen auf der Kugel ist von den zwei nächstliegenden Brennpunkten, deren jeder einer andern Ellipse angehört, in der Weise entfernt, daß der Unterschied beider Bogen-Abstände einer constanten Größe, nämlich dem Abstande der einander nächsten Scheitel beider Ellipsen (= 2A′) gleich ist.

Da aber diese Eigenschaft der ebnen Hyperbel auch zukommt, so können wir, der Analogie zufolge, die beiden Ellipsenhälften in der neuen Achsenlage als Kugelhyperbeln gelten lassen, die aber keine unendlichen Arme haben, wie die ebnen, sondern auf der abgewandten Kugelhälfte in gleicher Weise geschlossen sind. Daher kommt es, daß in dieser Lage die Kugelellipsen als ihre Projectionen Hyperbeln haben, wie dies in §. 9 und §. 10 bewiesen worden ist.

§. 20.

Anderweitige Herleitung.

Man lege sich das Coordinatensystem auf der Kugel, wie in §. 19, und lasse die Curven **ACB** und **acb** aus den zusammengehörigen Brennpunkten **F** und **f** so entstehen, daß die Differenz der Abstände stets $= 2A'$ ist; nennt man dann $Ff = 2E'$, so ist

(1.) $\cos Fd = \cos (2A' + fd)$; ferner

(2.) $\left\{ \begin{array}{l} \cos Fd = \cos \eta \cos (E' + \xi'); \\ \cos fd = \cos \eta \cos (E' - \xi'); \end{array} \right\}$

also $\cos \eta \cos (E' + \xi') = \cos 2A' \cos \eta \cos (E' - \xi') - \sin 2A' \sin fd$,

$= \cos 2A' \cos \eta \cos (E' - \xi') - \sin 2A' \sqrt{1 - \cos^2 \eta \cos^2 (E' - \xi')}$;

also: $\sin^2 2A' = \cos^2 \eta\, [\cos^2 (E' + \xi') + \cos^2 (E' - \xi') - 2 \cos (E' + \xi') \cos (E' - \xi') \cos 2A']$

daraus: $1 = \cos^2 \eta \left[\frac{\cos^2 E' \cos^2 \xi'}{\cos^2 A'} + \frac{\sin^2 E' \sin^2 \xi'}{\sin^2 A'}\right]$; welche Formel vollkommen mit der Ellipsengleichung in §. 12. dieses Capitels übereinstimmt. Daraus leitet man ferner ab:

(3.) $1 + \tan^2 \delta = \frac{\cos^2 E'}{\cos^2 A'} + \frac{\sin^2 E'}{\sin^2 A'} \tan^2 \xi'$.

Nun ist aber bei der Hyperbel (nach Analogie der ebnen Kegelschnitte) die halbe Excentricität die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die halbe große und kleine Achse bilden, also ist:

$\cos E' = \cos A' \cos B'$; folglich, dies in (3.) eingesetzt, erhalten wir:

$1 + \tan^2 \eta' + \tan^2 \xi' = \cos^2 B' + \frac{1 - \cos^2 A' \cos^2 B'}{1 - \cos^2 A'} \tan^2 \xi'$; also:

$1 + \tan^2 \eta' = \frac{1}{1 + \tan^2 B'} + \frac{\sin^2 B'}{\tan^2 A'} \tan^2 \xi'$; folglich

$\frac{\tan^2 B'}{1 + \tan^2 B'} = \sin^2 B' = \frac{\sin^2 B' \tan^2 \xi'}{\tan^2 A'} - \tan \eta'$

(4.) oder: $1 = \frac{\tan^2 \xi'}{\tan^2 A'} - \frac{\tan^2 \eta'}{\sin^2 B'}$ als Gleichung der der Hyperbel analogen Kugelellipsen.

Setzt man aber in (3.) eine andre Hülfsgröße B'' ein, deren Gleichung ist:

$\tan^2 B'' = \frac{\cos^2 A' - \cos^2 E'}{\cos^2 A'}$, so ist

(5.) $1 = \frac{\tan^2 \xi'}{\tan^2 A'} - \frac{\tan^2 \eta'}{\tan^2 B''}$, ebenfalls eine (noch gebräuchlichere) Gleichung der Hyperbel-Ellipsen. Beide entsprechen in ihrer Form der analogen Hyperbelgleichung auf der Ebne:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Nennt man die halben Achsen der als Ellipsen betrachteten Curven [nach §. 7.] A und B, so ist $\tan B'' = \frac{\tan B}{\tan A}$. (cf. ihre Projectionsgleichung §. 11.)

§. 21.

Tangentengleichung.

Legen wir die Gleichung (5.) des vorigen §. unserer fernern Untersuchung zu Grunde, so erhalten wir, als Gleichung für den doppelten Durchschnittspunkt eines Normalkreises $\frac{\tan X'}{\tan m} + \frac{\tan Y'}{\tan n} = 1$ mit der Peripherie der Ellipsen-Hyperbel, folgende:

$$(1.)\ \tan \xi' = \frac{\tan m \tan^2 A' \tan^2 n}{\mathrm{tg}^2 n\, \mathrm{tg}^2 A' - \mathrm{tg}^2 m\, \mathrm{tg}^2 B''} \pm \frac{\tan m \tan A' \tan B''}{\mathrm{tg}^2 n\, \mathrm{tg}^2 A' - \mathrm{tg}^2 m\, \mathrm{tg}^2 B''} \sqrt{\mathrm{tg}^2 m\, \mathrm{tg}^2 n - (\mathrm{tg}^2 A'\, \mathrm{tg}^2 n - \mathrm{tg}^2 B''\, \mathrm{tg}^2 m)}.$$

Soll nun $\tan \xi'$ nur einen Werth haben, d. h. soll der Normalkreis zur Hyperbel-tangente werden, so muß $\tan^2 m \tan^2 n = \tan^2 A' \tan^2 n - \tan^2 B'' \tan^2 m$ sein, also:

$$(2.)\ \tan \xi' = \frac{\tan^2 A'}{\tan m} \text{ und } \tan \eta' = \frac{-\tan^2 B''}{\tan n},$$ (nach derselben Analogie); also hat die Tangente an eine Kugel-Hyperbelellipse bei verändertem Coordinatensystem fast dieselben Gleichungen für ihren Berührungspunkt, als die der Ellipse, welche §. 13. (6.) entwickelt wurden.

Setzen wir die Gleichungen (2.) in die gegebene Curvengleichung ein, so erhalten wir:

$$(3.)\ \frac{\tan^2 A'}{\tan^2 m} - \frac{\tan^2 B''}{\tan^2 n} = 1 \text{ und}$$

$$(4.)\ \frac{\tan X' \tan \xi'}{\tan^2 A'} - \frac{\tan Y' \tan \eta'}{\tan^2 B''} = 1$$ als die Gleichungen dieser Tangente an die Hyperbel-Ellipse.

Zusatz I. Ueber ein Analogon der Assymptoten bei der Hyperbel-Ellipse. (Figur 6.)

Zieht man vom Anfangspunkte der Coordinaten O an diese Curve eine Tangente, so steht diese im Berührungspunkte a auf dem Gränzkreise $\widehat{aeb}$ senkrecht, denn da $\left\{\begin{matrix} m = o \\ n = o \end{matrix}\right\}$, so ist $\left\{\begin{matrix} \tan \xi' \\ \tan \eta' \end{matrix}\right\} = \infty$, also ist $\left\{\begin{matrix} \xi' = 90^\circ \\ \eta' = 90^\circ \end{matrix}\right\}$, was auf dem Gränzkreise allein stattfindet.

Wird nun die Kugel **unendlich** erweitert, so wird der Gränzkreis mit dem Berührungspunkte a in's Unendliche gerückt, d. h. die dann als Grade erscheinende Linie **Oa** wird eine **Assymptote der ebnen Hyperbel** $\widehat{acb}$. Ihre Gleichung auf der Kugel ist jederzeit [nach Cap. II. §. 1 (12.)] tang Y′ = tang X′ tang B, wenn B die halbe kleine Achse der Ellipse ist, die man jetzt als **Hyperbel** betrachtet.

Nun ist aber nach dem oben Angenommenen tang B = tang B″. tang A;

und da $\tan A = \tan(90 - A') = \frac{1}{\tan A'}$, so ist $\tan B = \frac{\tan B''}{\tan A'}$; folglich ist

$\frac{\tan Y'}{\tan X'} = \frac{\tan B''}{\tan A'}$ die **Gleichung der der Assymptote analogen Tangente**, welche in der Ebne für letztere lautet: $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; wenn y und x ihre allgemeinen Coordinaten, und b und a die halben Achsen der Hyperbel sind. —

Zusatz II. Die sonst noch zu erwähnenden Eigenschaften der Ellipsenhyperbeln auf der Kugel sollen für jetzt übergangen werden; im Ganzen bedarf es nur einer Andeutung, daß alle schon bei der Ellipse abgehandelten Eigenschaften hierher ebenfalls zu rechnen sind. Wir gehen daher endlich zur

IV. Parabel auf der Kugeloberfläche

über, um auch von diesem Kegelschnitte die Analogie aufzusuchen. Wir legen dabei Fig. 7 zu Grunde.

§. 22.

Construction mittelst der Directrix.

Es sei AB ein Normalkreisbogen, worauf andere Normalkreise senkrecht stehen, (z. B. CE, DE), die sich [nach Cap. II. §. 8.] in dem Pole des erstern, in E, schneiden; F sei auf CE beliebig gesetzt und auf jedem senkrechten Normalkreise ein Punkt angenommen, dessen Bogenentfernung, von diesem F gleich der vom Bogen AB ist, (also FG = GC, FH = HD ꝛc.) so **bilden diese continuirlich fortrückenden Punkte** (G, ..., H,) **eine der ebnen Parabel analoge Curve auf der Kugel.**

Nun ist $\widehat{CE} = \widehat{DE} = 90^0$, also auch GF + GE = 90° und ebenso FH + HE = 90° = Gg, wenn GF = Eg gemacht wird; d. h. die Curve ist eine **Kugelellipse**, da die Summe je zweier conjugirten Brennstrahlen eine **constante** Größe, nämlich = 90° = 2 A ist. Demnach ist, vom Mittelpunkte derselben aus, die große Achse als sphärische Abscissenachse betrachtet, ihre Gleichung:

(1.) $\tan^2 \xi' + \frac{\tan^2 \eta'}{\tan^2 B} = 1$; weil tang A = tang $45^0 = 1$ ist.

Dreht man das System um die feste Raum-y-Achse (innerhalb der Kugel) um 45^0, so wird der Scheitel G der Parabel-Ellipse der Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten, (cf. Fig. 8.), dann wird [nach Cap. I. §. 3. (3)] aus den bisherigen Coordinaten:

(2.) $\tan^2 \xi' = \tan^2 (\alpha' - 45) = \frac{(\tan \alpha' - 1)^2}{(1 + \tan \alpha')^2}$;

(3.) $\tan^2 \eta = \frac{2 \tan^2 \beta'}{(1 + \tan \alpha')^2}$;

Also in (1.) dies eingesetzt:

(4.) $\tan^2 \beta' = 2 \tan^2 B \tan \alpha'$; als die Gleichung einer Parabel-Ellipse, vom Scheitel aus gerechnet.

§. 23.
Projectionen.

1) Auf die der XY-Ebne parallele Tangentenebne; (perspectivische Projection) [conf. Fig. 8.]

Es ist $\left\{ \begin{array}{l} x = r \tan \xi'; \\ y = r \tan \eta'; \end{array} \right\}$, folglich wird aus §. 22. (1.) die Projectionsgleichung

(1.) $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d. h. die Gleichung einer Ellipse, vom Mittelpunkte aus berechnet, deren halbe große Achse = dem Radius der Kugel ist. — Projicirt man die durch die Gleichung (4) in §. 22 bestimmte Curve, deren Scheitel im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten liegt, perspectivisch auf die Tangentenebne, die der Ebne der X, Y parallel läuft, so erhält man eine ebne Curve mit der Gleichung:

(2.) $y^2 = 2 r \tan^2 B . x$; oder

(3.) $y^2 = p . x$, d. h. eine Parabel; nach Fig. 8. ist GHNg die Kugelcurve, Ghn... die Projection derselben, der Bogen MN = B, MP = r tang B; da nun $\frac{OM}{Om} = \frac{r \tan B}{mn}$, und $mn = \sqrt{r . p}$, so ist $\frac{r . p}{2} = r^2 \tan^2 B$, d. h. die lineäre Tangente zur halben kleinen Achse der Parabel-Ellipse auf der Kugel ist die mittlere Proportionale zwischen dem halben Kugelradius und dem Parameter der projicirten ebnen Parabel in 3.)

Anmerkung. Zu der Kugelellipse, deren große Achse = 90^0, gehört ebenfalls eine supplementäre auf der entgegengesetzten Halbkugel, die durch dieselbe Gleichung bestimmt wird.

Die Projection derselben auf eine Tangentenebne, die der obigen diametral entgegensteht, ist daher eine der durch (3.) bestimmten congruente ebne Parabel, in entgegengesetzter Richtung sich ausbreitend, deren Leitstrahlen (verlängerte Kugel-Durchmesser) dieselben Graden sind und daher zusammen zwei conjugirte conoidische Oberflächen mit der Spitze im Kugelcentrum bilden, als deren Durchschnittscurven mit der Kugeloberfläche die beiden conjugirten Parabelellipsen sich ergeben.

2) Auf die XY-Ebne aus der in §. 22. (4.) angenommene Lage gegen die sphärischen Coordinaten: (senkrechte Projection.) [Fig. 8.]

Legt man durch die beiden Scheitel Gg eine auf der XZ-Ebne senkrecht stehende Ebne und projicirt darauf die Parabelellipse GHNg senkrecht, so erhält man (nach (1.) dieses §. 8.) eine Ellipse, deren Ebne gegen die YZ-Ebne sowohl, als gegen die der XY um 45° geneigt ist: ihre große Achse $2a$ wird $= r\sqrt{2}$, also $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$, ihre halbe kleine Achse $b = r \sin B$; wenn man diese wiederum senkrecht auf die XY-Ebne projicirt, so ist ihre Projectionscurve wieder eine Ellipse, deren halbe große Achse $\alpha = \frac{r}{2}$, deren halbe kleine Achse $\beta = b = r \sin B$. Diese Curve ist aber zugleich auch die senkrechte Projection jener Kugelellipse; ihre Coo:-Achsen liegen im Centrum der Kugel, zugleich in einem ihrer Scheitel. Ihre Gleichung ist daher von der Form:

$$(4.)\quad \frac{\left(\frac{r}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{r^2 \sin^2 B} = 1;$$

Projicirt man dieselbe Ellipse in der gegen die Achsenebnen um 45° geneigten Ebne auf die YZ-Ebne senkrecht, so erhält man eine der in (4.) gefundnen Ellipse völlig congruente, deren Scheitel ebenfalls im Anfangspunkte der Coo. liegt; ihre Gleichung ist:

$$(5.)\quad \frac{\left(\frac{r}{2} - z'\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{y'^2}{r^2 \sin^2 B} = 1;$$

Zwischen den Coordinaten, welche zu einem Paare von Punkten dieser beiden Projectionen gehören, von denen der $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{andre}\end{matrix}\right\}$ in der $\left\{\begin{matrix}\text{XY-Ellipse}\\ \text{YZ-Ellipse}\end{matrix}\right\}$ Projection desselben Punkts der Parabelellipse ist, finden die Gleichungen statt:

(6.) $y' = y$

(7.) $z' = r - x$.

Anmerkung 1. Sollen jene beiden Projectionen (4.) und (5.) der Parabelellipse Kreise sein, so muß $\frac{r}{2} = r \sin B$ werden, d. h. $\sin B = \frac{1}{2}$, also $B = 30°$. Dann wird aus der allgemeinen sphärischen Gleichung derselben $\tang^2 \beta' = 2 \tang^2 B \tang \alpha'$ die besondere:

(8.) $\tang^2 \beta' = \frac{2}{3} \tang \alpha'$.

Anmerkung 2. Daraus folgt, daß, wenn ein grader Cylinder mit einer kreisförmigen Basis, deren Radius $= \frac{r}{2}$ ist, eine Kugeloberfläche, so schneidet, daß die Kreisbasis des Cylinders den Normalkreis, worauf der Cylinder senkrecht steht, von innen berührt, die Durchschnittscurve der beiden Oberflächen eine Parabelellipse sei, deren halbe kleine Achse $= 30^0$ ist.

3) Auf die XZ-Ebne, aus derselben Lage. (Senkrechte Projection).

Nach §. 9 (4.) dieses Capitels ist diese Curve eine Ellipse, die den Normalkreis, in welchem ihre Ebne die Kugel schneidet, in 4 Punkten trifft. Es ist in obiger Formel alsdann $\tang A = 1$ zu setzen, und dann wird:

(9). $\frac{x^2 (1 - \tang^2 B)}{r^2} + \frac{z^2 (1 + \tang^2 B)}{r^2} = 1$ ihre Gleichung vom Mittelpunkte aus; soll sie von ihrem Scheitel aus genommen werden, so muß das System der XZ-Achsen um 45^0 gedreht werden: dann ist (nach der Coordinatenverlegungsformel)

(10.) $x^2 = \frac{(x' - z')^2}{2}$ und $z^2 = \frac{(x' + z')^2}{2}$ in (9.) einzusetzen, so daß daraus entsteht:

(11.) $z'^2 + x'^2 + 2 z' x' \tang^2 B = r$ als die Gleichung derselben Projections-Ellipse in der XZ-Ebne.

Anmerkung. Wird darin $2 B = 90^0$, d. h. aus der Ellipsenparabel auf der Kugel ein Kugelkreis mit dem Radius $= 90^0$, so wird aus (11.) die Gleichung

$(x' + z')^2 = r^2$, d. h. $x' = r - z'$ (12.)

d. i. die Gleichung einer gegen die XZ-Achsen um 45^0 geneigten graden Linie.

§. 24.

Die Tangente an die Parabelellipse.

Die Gleichung eines Normalkreisbogens, welcher die Parabelellipse berührt, deren Gleichung nach §. 22. (1.) vom Mittelpunkte aus gerechnet $\tang^2 \xi' + \frac{\tang^2 \eta'}{\tang^2 B} = 1$ ist, läßt sich aus der allgemeineren Gleichung der Ellipsentangente (§. 13, 9) herleiten, indem man $A = 45^0$ setzt. Dann wird

(1.) $\tang X' \tang \xi' + \frac{\tang Y' \tang \eta'}{\tang^2 B} = 1$ die verlangte Parabeltangenten-Gleichung.

Verlegt man wiederum dieses Coordinatensystem in die neue Lage, so daß der eine Scheitel der Parabelellipse Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten wird, (also durch eine Drehung um 45^0 um die Y-Achse des Raums), so ist aus der Gleichung der Parabelellipse [nach §. 22 (4.)] und aus der Gleichung einer Sekante derselben $\frac{\text{tang}\,\xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang}\,\eta'}{\text{tang n}} = 1$ eine neue Gleichung für das ξ' des Durchschnittspunktes der letztern zu deriviren:

$$2.)\ \text{tang}\,\xi' = \text{tang m} + \frac{\text{tang}^2 \text{B tang}^2 \text{m}}{\text{tang}^2 \text{n}} \pm \sqrt{\frac{\text{tang}^2 \text{B tang}^2 \text{m}}{\text{tang}^2 \text{n}}\left(2\,\text{tg m} + \frac{\text{tang}^2 \text{B tang}^2 \text{m}}{\text{tang}^2 \text{n}}\right)};$$

eben so für dessen η' eine ähnliche.

Soll nun aus der Sekante eine Tangente werden, so müssen die Werthe für ξ' η' einfach sein, d. h. das Glied $\pm \sqrt{\ldots\ldots}$ muß verschwinden, also muß:

(3.) $2\ \text{tang}^2\ \text{n} + \text{tang}^2\ \text{B tang m} = \text{o}$ werden.

Dann wird aber zugleich auch:

(4.) $\text{tang}\,\xi' = \text{tang m}\left(\frac{\text{tang}^2\ \text{n} + \text{tang}^2\ \text{B tang m}}{\text{tang}^2\ \text{n}}\right) = -\ \text{tang m}$, also

(5.) $\text{tang}\,\eta' = 2\ \text{tang n}$; d. h. die Abschnitte, welche eine Parabelellipsen-Tangente von den sphärischen Coordinaten-Achsen macht, stehen zu den Coordinaten des Berührungspunkts in einer solchen Beziehung, daß die tang. des auf der X-Achse = der negativen Tangente des ξ', die des auf der Y-Achse doppelt genommenen, gleich der tang. des η' ist, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in den einen Scheitel der Curve fällt.

Anmerkung 1. In Fig. 9. ist also tang MO = — tang OR, d. h. — OM = OR (in entgegengesetzter Richtung) und tang OQ = 2 tang NO, woraus für die ebne Parabel der Lehrsatz herzuleiten, daß die Subtangente MR = 2 x, das Stück der Scheiteltangente NO aber = 2 y sein müsse.

Anmerkung 2. Die Länge des Tangentenbogens MP = T wird also durch die Gleichungen bestimmt: $\cos \text{T} = \cos 2\,\xi' \cos \eta$; oder in ξ' η' - Coordinaten ausgedrückt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{T}}} = \frac{1 - \text{tang}^2\ \xi'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \xi'}\sqrt{1 + \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta'}};$$

(Fortsetzung folgt.)