Ueber die

Analysis auf der Kugel.

von

R. Gorgas,

Candidat des höheren Schulamts.

Einleitung.

Die Rechnung mit gekrümmten Coordinaten auf einer krummen Oberfläche ist eine erst neuerdings in Frankreich versuchte Modification der bisher gebräuchlichen Analysis; aus diesem Grunde läßt sich von ihrer Literatur nur Weniges sagen. Als einleitendes Werk über die analytische Entwickelung von Curvengleichungen auf der Kugeloberfläche insbesondere ist zu nennen: »Analysis auf der Kugel von Carl Dietrich 1843«, in welchem bis zu den Kegelschnitten die wichtigsten Verhältnisse von Punkten und Linien auf sphärischen Oberflächen abgehandelt werden, wobei als Coordinatenachsen zwei sich rechtwinklig schneidende Normalkreise zu Grunde gelegt worden sind.

Meine Absicht ist es nun, in vorliegender Abhandlung das genannte Werk zu erweitern, zugleich aber auch die ganze analytische Entwickelung aus einem andern Prinzipe herzuleiten, indem ich jede Curve auf der Kugeloberfläche als den Durchschnitt der letztern mit einer gegebenen Oberfläche betrachte und also von den räumlichen drei Coordinaten auf die Normalkreiscoordinaten den Uebergang mache.

Wie eng übrigens die Analysis auf der Kugel mit der auf der Ebene zusammenhange, ist theilweise schon von Andern dargethan worden, theils werden sich auch im Laufe der Entwickelung Beweise genug dafür finden. Eins soll noch angedeutet werden, was einen Vorzug der analytischen Sphärik vor der ebenen Analysis bedingt: daß nämlich selbst Kurven mehrfacher Krümmung durch zwei Coordinaten bestimmt werden können, die ein leichteres Eliminiren und Berechnen möglich machen, als die drei Coordinaten der Analysis im Raume.

Erstes Kapitel.

Vom Punkte auf der Kugel.

§. 1.

Bestimmt man einen Punkt P auf der mit dem Radius r construirten Kugel durch seine drei Raumcoordinaten x, y, z, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem im Centrum, und legt durch letzteres zwei Ebenen, deren eine durch das x, die andere durch das y des Punkts geht, so schneiden diese die Kugeloberfläche in zwei Normalkreisen, auf denen im Durchschnittspunkte jenes P zugleich liegt; es geht außerdem die eine durch die X-und die andere durch die Y-Achse der Raumcoordinaten. Den Bogen des ersten Normalkreises zwischen P und der YZ-Ebene, nenne man ξ, den andern Bogen zwischen P und der XZ-Ebene, zum zweiten Normalkreis gehörig, nenne man η, ferner den Bogen, in welchem eine durch die Achse der $\left\{\begin{matrix}\text{Y u. Z}\\ \text{X u. Z}\end{matrix}\right\}$ gelegte Ebene die Kugel schneidet, nenne man $\left\{\begin{matrix}\text{die } \eta\text{-Achse}\\ \text{die } \xi\text{-Achse}\end{matrix}\right\}$ des sphärischen Systems; der eine Punkt, in dem beide letztgenannten Achsen sich schneiden, heiße der Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten. Ein auf beiden Achsenbogen senkrechter Normalkreis, dessen Pol der Anfangspunkt der sph. Coord. ist, werde der Gränzkreis genannt; die Normalentfernung des Punkts P vom Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten sei $= \delta$. Alsdann findet man folgende Gleichungen:

$$(1.)\ x = r \sin \xi,\ y = r \sin \eta,\ z = r \cos \delta.$$

und daraus: $(2.)\ \sin^2 \xi + \sin^2 \eta = \sin^2 \delta.$

Den Bogen auf der ξ-Achse vom Anfangspunkt bis zum Fußpunkte des Bogens η nenne man ξ', den auf der η-Achse ebenso bis zum Fußpunkte des Bogens ξ nenne man η', so ist

$$(3.)\ \frac{x}{z} = \operatorname{tang} \xi',\ \frac{y}{z} = \operatorname{tang} \eta'$$

daraus: $(4.)\ \operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta' = \operatorname{tang}^2 \delta$

und $(5.)\ \sin \xi = \operatorname{tang} \xi' \cos \delta;\ \sin \eta = \operatorname{tang} \eta' \cos \delta.$

§. 2.

Da aber die trigonometrischen Functionen eine Vieldeutigkeit hinsichtlich der zugehörigen Bogengröße involviren, wenn man nicht auf deren Vorzeichen Rücksicht nimmt, so ist es nöthig, zu untersuchen, welche Lagen der Punkt P annimmt, je nachdem die Vorzeichen positiv oder negativ genommen werden. Die sphärische Oberfläche zerfällt aber durch die gehörige Erweiterung der 3 räumlichen Coordinatenebenen in acht Quartiere, welche so benannt werden sollen:

Rechts von der YZ-Ebene, oberhalb der XZ-Ebene auf der vordern Halbkugel liegt das erste (I.) Quartier, auf der hintern Hälfte das zweite (II.) Quartier. Links von der YZ-Ebene oberhalb der XZ-Ebene auf der $\left\{\begin{matrix}\text{hintern}\\ \text{vordern}\end{matrix}\right\}$ Kugelseite das $\left\{\begin{matrix}\text{dritte}\\ \text{vierte}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}\text{III.}\\ \text{IV.}\end{matrix}\right\}$ Quartier, auf der Kugelhälfte aber, welche unter der XZ-Ebene liegt, liegen die Quartiere 1. 2. 3. und 4, polarisch den gleichnamigen entgegengesetzt.

Hieraus ergeben sich folgende Tabellen-Data:

Größe von				Vorzeichen von:				Lage
ξ zwischen	η zwischen	ξ' zwischen	η' zwischen	sin ξ	sin η	tang ξ'	tang η'	des Punkts P im
0°— 90°	0°— 90°	0°— 90°	0°— 90°	+	+	+	+	I. Quartier.
0°— 90°	0°— 90°	90°—180°	90°—180°	+	+	—	—	II. » »
270°—360°	0°— 90°	180°—270°	90°—180°	—	+	+	—	III. » »
270°—360°	0°— 90°	270°—360°	0°— 90°	—	+	—	+	IV. » »
180°—270°	270°—360°	180°—270°	180°—270°	—	—	+	+	1 » »
180°—270°	270°—360°	270°—360°	270°—360°	—	—	—	—	2 » »
90°—180°	270°—360°	0°— 90°	270°—360°	+	—	+	—	3 » »
90°—180°	270°—360°	90°—180°	180°—270°	+	—	—	+	4 » »

wobei zu bemerken, daß alle Coordinaten-Bogen nach derselben Richtung von P aus gerechnet werden, nach welcher sie im ersten Quartiere der Kugeloberfläche laufen.

Aus obiger Tabelle ersieht man

1) Daß alle Punkte, welche um den Kugeldiameter (polarisch) auseinanderliegen, in den Coordinaten ξ, ξ', η' um zwei Quadranten, in den Coordinaten η aber um drei Quadranten verschieden sind;

2) daß die Vorzeichen von sin ξ und sin η allein nicht hinreichend alle 8 Punkte von einander unterscheiden, daß vielmehr die Betrachtung der Vorzeichen von tang ξ' und tang η' zu diesem Zwecke nothwendig mit gehöre, und endlich

3) daß je zwei diametral auseinander liegende zusammengehörige Punkte (z. B. des I. und 1. Quartiers) dasselbe Vorzeichen der tang ξ' und tang η', aber entgegengesetztes für die sin ξ und sin η haben.

§. 3.

Coordinatenverlegungen.

Verlegt man das System der 3 Coordinaten im Raume, ohne den Mittelpunkt desselben zu verändern, so sind folgende Fälle überhaupt möglich:

1.) Es dreht sich das System um den Winkel ω (vor- oder rückwärts) um die Z-Achse, so wird aus den alten Coordinaten x, y, z des Punkts P die neue Ternion a, b, c, wobei folgende Gleichungen Statt haben:

(1.) $z = c$;

(2.) $y = a \sin \omega \pm b \cos \omega$; (Das Vorzeichen $\pm$ bezieht sich auf die Drehung

(3.) $x = a \cos \omega \mp b \sin \omega$; vor- oder rückwärts)

Also die entsprechenden sphärischen Coordinatengleichungen:

(4.) $\sin \eta = \sin \alpha \sin \omega \pm \sin \beta \cos \omega$:

(5.) $\sin \xi = \sin \alpha \cos \omega \mp \sin \beta \sin \omega$;

(6.) $\operatorname{tang} \eta' = \operatorname{tang} \alpha' \sin \omega \pm \operatorname{tang} \beta' \cos \omega$;

(7.) $\operatorname{tang} \xi' = \operatorname{tang} \alpha' \cos \omega \mp \operatorname{tang} \beta' \sin \omega$;

wobei α, β, α', β' die entsprechenden sphärischen Coordinaten für ξ, η, ξ', η', bedeuten.

2) Oder es dreht sich das System der 3 Coordinaten xyz um die feste X-Achse, um den Winkel ω, so ist, wenn a, b, c die neuen Coordinaten darstellen:

(1.) $x = a$

(2.) $y = c \sin \omega \pm b \cos \omega$

(3.) $z = c \cos \omega \mp b \sin \omega$;

Und daraus die sphärischen Formeln:

(4.) $\sin \xi = \sin \alpha$;

(5.) $\sin \eta = \cos \Delta \sin \omega \pm \sin \beta \cos \omega$;

(6.) $\cos \delta = \cos \Delta \cos \omega \mp \sin \beta \sin \omega$;

(7.) $\operatorname{tang} \xi' = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \Delta \cos \omega \mp \sin \beta \sin \omega}$;

(8.) $\operatorname{tang} \eta' = \dfrac{\cos \Delta \sin \omega \pm \sin \beta \cos \omega}{\cos \Delta \cos \omega \mp \sin \beta \sin \omega}$;

wobei dem alten δ das neue Δ entspricht.

Durch Division mit $\cos \Delta$ im Zähler und Nenner von (7.) und (8.) wird

(9.) $\operatorname{tang} \xi' = \dfrac{\operatorname{tang} \alpha'}{\cos \omega \mp \operatorname{tang} \beta' \sin \omega}$;

(10.) $\operatorname{tang} \eta' = \dfrac{\sin \omega \pm \operatorname{tang} \beta' \cos \omega}{\cos \omega \mp \operatorname{tang} \beta' \sin \omega} = \operatorname{tang} (\omega \pm \beta')$.

3) Oder es dreht sich das System der xyz um die feste Y-Achse um den Winkel ω, so ist:

(1.) $y = b$;

(2.) $x = c \sin \omega \pm a \operatorname{cosin} \omega$;

(3.) $z = c \operatorname{cosin} \omega \mp a \sin \omega$;

Daraus hergeleitet für die Kugelcoordinaten:

(4.) $\sin \eta = \sin \beta$;

1*

$$(5.)\ \sin\xi = \cos\Delta \sin\omega \pm \sin\alpha \cos\omega;$$

$$(6.)\ \cos\delta = \cos\Delta \cos\omega \mp \sin\alpha \sin\omega;$$

$$(7.)\ \mathrm{tang}\,\eta' = \frac{\sin\beta}{\cos\Delta \cos\omega \mp \sin\alpha \sin\omega};$$

$$(8.)\ \mathrm{tang}\,\xi' = \frac{\cos\Delta \sin\omega \pm \sin\alpha \cos\omega}{\cos\Delta \cos\omega \mp \sin\alpha \sin\omega};$$

oder:

$$(9.)\ \mathrm{tang}\,\eta' = \frac{\mathrm{tang}\,\beta'}{\cos\omega \mp \sin\omega\ \mathrm{tang}\,\alpha'};$$

$$(10.)\ \mathrm{tang}\,\xi' = \frac{\sin\omega \pm \mathrm{tang}\,\alpha' \cos\omega}{\cos\omega \mp \sin\omega\ \mathrm{tang}\,\alpha'} = \mathrm{tang}\,(\omega \pm \alpha').$$

4) Geschehen zwei Drehungen verschiedener Achsen nach einander, so hat man nach 1) bis 3) die entsprechenden Formeln nach einander anzuwenden. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, jedes beliebige sphärische Coordinatensystem rückwärts wiederum auf das zu reduciren, welches die einfachsten Gleichungen liefert, da man den Drehungswinkel so bestimmen kann, daß alle, die Einfachheit der Gleichung störenden Funktionen, sich dadurch aus der sphärischen Coordinatengleichung eliminiren lassen.

§. 4.

Polarcoordinaten.

Zieht man von dem Punkte P nach dem Anfangspunkte des sphärischen Coordinatensystems den Normalkreisbogen $= \delta$, so bildet er mit der Achse der Abscissenbogen den Winkel φ, dessen Größe zugleich mit der von δ den Punkt P der Lage nach vollkommen bestimmt; alsdann ist:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(1.)\ \sin\eta = \sin\delta \sin\varphi \\ (2.)\ \sin\xi = \sin\delta\ \mathrm{cosin}\,\varphi\end{array}\right\} \text{daraus } \dfrac{\sin\eta}{\sin\xi} = \mathrm{tang}\,\varphi\ (3.); \\ \left.\begin{array}{l}(4.)\ \mathrm{tang}\,\eta' = \mathrm{tang}\,\delta \sin\varphi \\ (5.)\ \mathrm{tang}\,\xi' = \mathrm{tang}\,\delta\ \mathrm{cosin}\,\varphi\end{array}\right\} \text{daraus } \dfrac{\mathrm{tang}\,\eta'}{\mathrm{tang}\,\xi'} = \mathrm{tang}\,\varphi\ (6.); \end{array}\right\} \text{daraus } \frac{\sin\eta}{\sin\xi} = \frac{\mathrm{tang}\,\eta'}{\mathrm{tang}\,\xi'}\ (7.)$$

Reducirt man diese Formeln auf die Raumcoordinaten, so erhält man

$$(8.)\ \frac{y}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \pm \sin\varphi;$$

$$(9.)\ \frac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \pm\ \mathrm{cosin}\,\varphi;$$

$$(10.)\ \frac{y}{x} = \mathrm{tang}\,\varphi;$$

welche Ausdrücke zugleich einen Kugelwinkel bestimmen, dessen Scheitel in dem sphärischen Coordinaten-Mittelpunkt, dessen einer Schenkel in der sphärischen Abscissenachse liegt, und dessen andrer Schenkel durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche geht.

Zweites Kapitel.

Vom Normalkreise auf der Kugel.

§. 1.

Allgemeine Gleichungen.

Die Gleichung einer Ebne, die durch den Anfangspunct der Raumcoordinaten geht, ist (1.) $AX + BY + CZ = o$, sie gehe durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche, für welchen (2.) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Beide Gleichungen zusammen ergeben die Gleichung der Durchschnittscurve, eines größten Kugelkreises. Da nun aus (2.) [nach Cap. I. §. 1. (3.)] die Gleichungen $\frac{x}{z} = \text{tang}\ \xi'$ und $\frac{y}{z} = \text{tang}\ \eta'$ sich ergeben, so ist, wenn wir letztere in (1.) einsetzen:

(3). $A\ \text{tang}\ \xi' + B\ \text{tang}\ \eta' + C = o$, woraus

(4.) $\frac{A}{C}\ \text{tang}\ \xi' + \frac{B}{C}\ \text{tang}\ \eta' + 1 = o.$

Zur Bestimmung der Constanten, setzen wir in letzterer Gleichung $\text{tang}\ \xi' = o$, so ist $\text{tang}\ \eta' = -\frac{C}{B}$ (5.) setzen wir $\text{tang}\ \eta' = o$, so ist $\text{tang}\ \xi' = -\frac{C}{A}$ (6.); den aus (5.) sich ergebenden constanten Werth der sphärischer Ordinatentangente setze man = tang n, den aus (6) resultirenden constanten Werth der sphärischen Abscissentangente = tang m, so wird aus (4.):

(7.) $\frac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang}\ m} + \frac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang}\ n} = 1.$ als Gleichung eines beliebigen Kugel-Normalkreises durch die $\Xi'\ H'$-Coordinaten.

Setzt man aber [nach Cap. I. §. 1. (1.)] $x = r \sin \xi$, $y = r \sin \eta$, $z = r \cos \delta$ in (1.) ein, so wird

(8.) $\frac{A}{C} \sin \xi + \frac{B}{C} \sin \eta + \cos \delta = o;$

und nach Obigem:

(9.) $\frac{\sin \xi}{\text{tang}\ m} + \frac{\sin \eta}{\text{tang}\ n} = \cos \delta$; als Gleichung desselben Normalkreises durch die $\Xi\ H$-Coordinaten.

Hierbei ist leicht zu entwickeln, daß $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ der Bogen vom Coordinatenanfang auf der Kugeloberfläche an bis zum Durchschnitt des Normalkreises mit der $\left\{ \begin{matrix} \Xi \\ H \end{matrix} \right\}$-Achse des sphär. Systems sei.

Zusatz. Geht der Normalkreis durch den Anfangspunkt der Kugelcoordinaten, so ist

$\left\{\begin{matrix} m = o \\ n = o \end{matrix}\right\}$ durch welche besondere Werthe die Gleichungen (7.) und (9.) formlos werden. Die nähere Untersuchung dieses speciellen Falles muß also auf die Gleichungen $\tang m = \frac{-C}{A}$ und $\tang n = \frac{-C}{B}$ zurückgeleitet werden. Ist $\left\{\begin{matrix} \tang m \\ \tang n \end{matrix}\right\} = o$, so wird $C = o$, also die Gleichung (3.) geht über in:

$$(10.)\ A \tang \xi' + B \tang \eta' = o;$$

so wie die Gleichung (8.) in:

$$(11.)\ A \sin \xi + B \sin \eta = o;$$

Aus beiden letztern folgt: $\frac{-A}{B} = \frac{\tang \eta'}{\tang \xi'} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi}$:

Nun ist [nach Cap. I. §. 4. (3.) u. (6.)] $\frac{\tang \eta'}{\tang \xi'} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi} = \tang \varphi$;

also, in (10.) und (11.) eingesetzt, wird

$$(12.)\ \left\{\begin{matrix} \tang \eta' = \tang \xi' \tang \varphi; \\ \sin \eta = \sin \xi \tang \varphi; \end{matrix}\right\}$$ als Gleichungen eines durch den Anfangspunct der sphärischen Coordinaten gehenden Normalkreises, der mit der Abscissenachse den Winkel φ macht.

§. 2.

Andere Herleitung dieser Normalkreisgleichungen.

Eine Ellipse auf der XY-Ebne der Raumcoordinaten, deren Mittelpunct im Centrum der Kugel liegt, deren große Achse $= r$, deren kleine Achse $= b$ ist, hat als Gleichung

$$(1.)\ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ also}$$

$$(2.)\ \frac{\tang^2 \xi'}{r^2} + \frac{\tang^2 \eta'}{b^2} + \frac{1}{z^2};$$ setze man nun $b = r \sin n$, so wird aus (2.)

$$(3.)\ \tang^2 \xi' + \frac{\tang^2 \eta'}{\sin n} = \frac{r^2}{z^2} = \frac{1}{\cos \delta} = 1 + \tang^2 \delta;$$

also, nach Cap. I. §. 1. (4.)

wird daraus: $\frac{\tang^2 \eta'}{\sin^2 n} - \tang^2 \eta' = 1$

oder: $\frac{\tang \eta'}{\tang n} = \pm 1$ (4.)

d. h. die Gleichung eines Normalkreisbogens, dessen $\tang m = \infty$, d. h. dessen $m = 90^\circ$, dessen n aber $= \pm \tang \eta'$ ist. Der zugehörige Normalkreis geht also entweder auf der rechten oder linken Seite der Ordinatenachse auf der Kugeloberfläche durch die beiden Endpunkte der räumlichen Y-Achse. Daraus folgt:

1) Die Durchschnittscurven eines graden elliptischen Cylinders, — dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und dessen Erzeugungs-Ellipse mit der halben großen Achse $= r$ construirt ist, — mit einer zu r gehörigen Kugeloberfläche sind zwei sich kreuzende Normalkreise, deren größter Bogenabstand zum Sinus die halbe kleine Ellipsenachse hat.

2) Die senkrechte Projection eines größten Kugelkreises, der auf der Projectionsebene nicht senkrecht steht, auch nicht mit ihr zusammenfällt, ist stets eine Ellipse, deren große Achse $= 2r$, deren halbe kleine Achse = dem Cosinus des Neigungswinkels der Normalkreisebne gegen die Projectionsebene, für den Radius $= r$ ist.

3) Zwei zusammengehörige Kugelzweiecke haben stets dieselbe Ellipse als senkrechte Projectionscurve auf der Ebene des durch ihre Scheitel gelegten sie halbirenden Normalkreises.

§. 3.

a) Berechnung des zwischen den sphärischen Coordinatenachsen enthaltenen Stückes eines Normalkreises:

Gesetzt der durch die Gleichung $\frac{\tang \xi'}{\tang m} + \frac{\tang \eta'}{\tang n} = 1$ gegebene Normalkreis habe das Stück D zwischen beiden sphärischen Achsen, so ist

$$(1.)\ \cos D = \cos m . \cos n$$

also: $\frac{1}{1 + \tang^2 D} = \frac{1}{(1 + \tang^2 m)(1 + \tang^2 n)}$; oder:

$$(2.)\ \tang^2 D = \tang^2 m \tang^2 n \left(1 + \frac{1}{\tang^2 m} + \frac{1}{\tang^2 n}\right)$$

Zusatz. Ist daher $D = 90°$, so muß tang m oder tang n unendlich groß werden, d. h. entweder auch $m = 90°$ oder $n = 90°$, oder endlich beides zugleich.

b) Berechnung des auf dem Stücke D vom Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten construirten senkrechten Normalkreisbogens $\varDelta$.

Der senkrechte Normalkreisbogen muß das Minimum aller Entfernungen sein, welche durch größte Kreise vom Anfangspunkte der Kugelcoordinaten aus bis zu dem durch die Gleichung (1.) in a) gegebenen Normalkreise dargestellt werden, und die man allgemein durch δ bezeichnet hatte. Nun war $\tang^2 \delta = \tang^2 \xi' + \tang^2 \eta'$: [nach Cap. I. §. 1.(4.)] Differentiiren wir, um das Minimum zu finden, diese Gleichung, so ist:

$$(3.)\ \tang \delta . d(\tang \delta) = \tang \xi' . d(\tang \xi') + \tang \eta' . d(\tang \eta');$$

Für $\delta = \varDelta$ muß also $d(\tang \delta) = o$ sein, folglich

$$(4.)\ \tang \xi' . d(\tang \xi') + \tang \eta' d(\tang \eta') = o;$$

Nun ist aber die Differentialgleichung des Normalkreises im Allgemeinen:

(5.) $\frac{d\,(\mathrm{tang}\ \xi')}{\mathrm{tang}\ m} + \frac{d\,(\mathrm{tang}\ \eta')}{\mathrm{tang}\ n} = o$; daraus, durch Elimination der Differentiale, resultirt:

(6.) $\mathrm{tang}\ n\ \mathrm{tang}\ \eta' = \mathrm{tang}\ m\ \mathrm{tang}\ \xi'$ als Gleichung des dem Coordinaten-Centrum nächsten Punktes.

Setzt man diese speciellen Werthe von $\mathrm{tang}\ \xi'$ und $\mathrm{tang}\ \eta'$ in die Gleichung $\mathrm{tang}^2\ \Delta = \mathrm{tang}^2\ \xi' + \mathrm{tang}^2\ \eta'$ ein, so ist die gesuchte Gleichung:

(7.) $\mathrm{tang}^2\ \Delta = \frac{\mathrm{tang}^2\ m\ \mathrm{tang}^2\ n}{\mathrm{tang}^2 m + \mathrm{tang}^2 n}$ für die kleinste Entfernung vom Coordinaten-Centrum.

§. 4.

Ueber die Winkel, die der gegebene Normalkreis mit den sphärischen Coordinatenachsen macht.

Der durch die Gleichung $\frac{\mathrm{tang}\ \xi'}{\mathrm{tang}\ m} + \frac{\mathrm{tang}\ \eta'}{\mathrm{tang}\ n} = 1$ gegebene Normalkreis schneide die sphärische Abscissenachse unter dem Winkel θ, die Ordinatenachse unter dem Winkel ψ, so ist $\sin \Delta : \sin \theta = \sin m : 1$ (1.), und $\sin \Delta : \sin \psi = \sin n : 1$ (2.)

Nun ist [nach II. §. 2. (7.)] $\pm \sin \Delta = \frac{\mathrm{tang}\ m\ \mathrm{tang}\ n}{\sqrt{\mathrm{tang}^2\ m + \mathrm{tang}^2\ n + \mathrm{tang}^2\ m\ \mathrm{tang}^2\ n}}$, (3.)

Also [aus (1.) und (3.)]:

$$\pm \sin \theta = \frac{\mathrm{tang}\ n \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\ m}}{\sqrt{\mathrm{tang}^2 m + \mathrm{tang}^2 n + \mathrm{tang}^2 m\, \mathrm{tang}^2 n}}; \quad (4.)$$

$$\text{und } \pm \sin \psi = \frac{\mathrm{tang}\ m \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\ n}}{\sqrt{\mathrm{tang}^2\ m + \mathrm{tang}^2\ n + \mathrm{tang}^2\ m\ \mathrm{tang}^2\ n}}; \quad (5.)$$

Nach einer bekannten sphärischen Formel ist aber auch:

(6.) $\mathrm{tang}\ \theta = \frac{\mathrm{tang}\ n}{\sin\ m} = \pm \frac{\mathrm{tang}\ n \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2 m}}{\mathrm{tang}\ m}$ und:

(7.) $\mathrm{tang}\ \psi = \frac{\mathrm{tang}\ m}{\sin\ n} = \pm \frac{\mathrm{tang}\ m \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\ n}}{\mathrm{tang}\ n}$;

Da nun nach Vorigem [§. 3 (2.)] $\mathrm{tang}\ D = \pm \sqrt{\mathrm{tang}^2 m + \mathrm{tang}^2 n + \mathrm{tang}^2 m\, \mathrm{tang}^2 n}$, so ist, wegen (4.) und (5.), ferner:

$$\pm \sin \theta = \frac{\mathrm{tang}\ n \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\ m}}{\mathrm{tang}\ D} \ (8.);$$

$$\text{und } \pm \sin \psi = \frac{\mathrm{tang}\ m \sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\ n}}{\mathrm{tang}\ D} \ (9.).$$

§. 5.

Der Normalkreisbogen, der durch zwei feste Punkte geht, deren sphärische Coordinaten $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' & \alpha & \beta \\ \xi' & \eta' & \xi & \eta\end{matrix}\right\}$ sind.

Die allgemeine Gleichung des Normalkreises sei

$$(1.)\quad \frac{\operatorname{tang} \Xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} H'}{\operatorname{tang} n} = 1$$

so muß $(2.)\quad \left.\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tang} \alpha'}{\operatorname{tang} m} + \dfrac{\operatorname{tang} \beta'}{\operatorname{tang} n} = 1 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \dfrac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1 \end{cases}\right\}$ zugleich sein, also

$$(3.)\quad \operatorname{tang} m = \frac{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta'} \text{ und}$$

$$(4.)\quad \operatorname{tang} n = \frac{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi'};$$

also in (1.) dies eingesetzt:

$$1 = \frac{\operatorname{tang} \Xi' (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta') + \operatorname{tang} H' (\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi')}{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'}; \quad (5.)$$

als Gleichung eines Normalkreises, der durch zwei feste Punkte geht.

Zusatz 1. Liegen also drei Punkte $\left\{\begin{matrix}\xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta' \\ \varrho' & \sigma'\end{matrix}\right\}$ in einem Normalkreise, so muß:

$$(6.)\quad 1 = \frac{\operatorname{tang} \varrho' (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta') + \operatorname{tang} \sigma' (\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi')}{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'} \text{ sein.}$$

Zusatz 2. Aus (3.) und (4.) folgt, daß

$$(7.)\quad \frac{\operatorname{tang} m}{\operatorname{tang} n} = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta'} \text{ sei.}$$

Liegen also drei Punkte in demselben Normalkreise, so ist für dieselben auch:

$$(8.)\quad \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta'} = \frac{\operatorname{tang} \varrho' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \sigma'} = \frac{\operatorname{tang} \varrho' - \operatorname{tang} \alpha'}{\operatorname{tang} \beta' - \operatorname{tang} \sigma'}.$$

§. 6.

Die Entfernung zweier festen Punkte auf der Kugeloberfläche.

Das Stück des durch 2 Punkte $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' \\ \xi' & \eta'\end{matrix}\right\}$ gehenden Normalkreises zwischen diesen Punkten sei $= R$, so ist, wenn man die dazu gehörige gradlinige Sehne $= S$ nennt, nach der Analysis im Raume:

$$(1.)\ S = 2\,r \sin \frac{R}{2} = \pm \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$ wenn $\left\{\begin{matrix} x, y, z \\ a, b, c \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten von $\left\{\begin{matrix} \xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta' \end{matrix}\right\}$ sind; also:

$$(2.)\ 2 - 2\cos R = (\sin\xi - \sin\alpha)^2 + (\sin\eta - \sin\beta)^2 + (\cos\delta - \cos\delta')^2$$

[wo δ die Entfernung des Punkts $\xi\,\eta$, δ' die Entfernung des Punkts $\alpha\ \beta$ vom sphärischen Coordinaten-Centrum bezeichnet.]

Nun ist aber $\left\{\begin{matrix} \sin\xi = \cos\delta \tan\xi' \\ \sin\alpha = \cos\delta \tan\alpha' \end{matrix}\right\}$ rc.; also:

$$2 - 2\cos R = \cos^2\delta'\,(1 + \tan^2\alpha' + \tan^2\beta') + \cos^2\delta\,(1 + \tan^2\xi' + \tan^2\eta')$$
$$- 2\cos\delta\cos\delta'\,(\tan\alpha'\tan\xi' + \tan\beta'\tan\eta' + 1),$$

woraus sich herleiten läßt:

$$(3.)\ \cos R = \cos\delta\cos\delta'\,(1 + \tan\alpha'\tan\xi' + \tan\beta'\tan\eta');\ \text{oder:}$$

$$(4.)\ \cos R = \frac{1 + \tan\alpha'\tan\xi' + \tan\beta'\tan\eta'}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha' + \tan^2\beta'}\ \sqrt{1 + \tan^2\xi' + \tan^2\eta'}}$$

$$(5.)\ \sin^2 R = \frac{(\tan\xi' - \tan\alpha')^2 + (\tan\eta' - \tan\beta')^2 + (\tan\eta'\tan\alpha' - \tan\xi'\tan\beta')^2}{(1 + \tan^2\alpha' + \tan^2\beta')\,(1 + \tan^2\xi' + \tan^2\eta')};$$

Zusatz 1. Ist $R = 90^\circ$, mithin $\cos R = o$, so ist demgemäß [nach (3.)]:

$$(6.)\ 1 + \tan\alpha'\tan\xi' + \tan\beta'\tan\eta' = o;$$

welche Gleichung also zwischen jedem Paare von Punkten besteht, die auf der Kugel um 90° auseinander liegen.

Zusatz 2. Ist $\left\{\begin{matrix} \alpha' = o \\ \beta' = o \end{matrix}\right\}$, so liegt R mit dem einen Endpunkte im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten: alsdann ist $\sin^2 R = \dfrac{\tan^2\xi' + \tan^2\eta'}{1 + \tan^2\xi' + \tan^2\eta'} = \sin^2\delta$, also dann $R = \delta$ oder $R = 180 - \delta$; wie nach der Annahme zu erwarten war.

§. 7.

Der Winkel, den zwei Normalkreise bilden.

Zieht man in einer beliebigen Richtung von dem Mittelpunkte der Kugel zwei Radien, deren Gleichungen sind:

$$(1.)\ \left\{\begin{matrix} x = Mz \\ y = Nz \end{matrix}\right\} \text{ und}$$

$$(2.)\ \left\{\begin{matrix} x' = M'z' \\ y' = N'z' \end{matrix}\right\},$$ so treffen diese die Kugel in den beiden Punkten, deren sphärische Gleichungen sind $(3.) \left\{\begin{matrix} \tan\xi' = M \\ \tan\eta' = N \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} \tan\alpha' = M' \\ \tan\beta' = N' \end{matrix}\right\} (4.)$

Diese letztern Punkte haben, als ihre Normalentfernung, zwischen sich den Bogen V, der zugleich das Maaß für den von den beiden Radien gebildeten Centriwinkel v ist.

Nach II. §. 6. (4.) ist also:

$$(5.)\ \cos V = \cos v = \frac{1 + M M' + N N'}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\,\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}};$$

bestimmt man nun einen dritten Punkt auf der Kugel so, daß er von jedem der Punkte in (3.) und (4.) um 90° entfernt ist, [nach II. §. 6. (6.)] so bilden die 2 Verbindungs-Normalbogen zwischen ihm und den beiden ersten Punkten mit einander einen sphärischen Winkel v', dessen Maaß ebenfalls $V = v$ ist; also auch für diesen sphärischen Winkel v' muß

$$(6.)\ \cos v' = \cos V = \frac{1 + M M' + N N'}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\,\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}}\ \text{sein.}$$

Um nun M, N, M', N', durch Ausdrücke dieser Winkel einschließenden Normalkreise zu bestimmen, muß man den Scheitelpunkt des sphärischen Winkels finden, der von ξ', η' und α', β' um 90° entfernt sein soll. Es ist aber, wenn seine Kugelcoordinaten t', u' sind:

$$(7.)\ \left\{\begin{array}{l} 1 + M \operatorname{tang} t' + N \operatorname{tang} u' = o \\ 1 + M' \operatorname{tang} t' + N' \operatorname{tang} u' = o \end{array}\right\}\ \text{nach II. §. 6. (4.)}$$

$$\text{also } \operatorname{tang} t' = \frac{N' - N}{M'N - MN'}\ (8.)\ \text{und } \operatorname{tang} u' = \frac{M - M'}{M'N - MN'}\ (9.)$$

Nun ist aber auch:

$$(10.)\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{tang} t'}{\operatorname{tang} m} + \dfrac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} n} = 1 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{tang} t'}{\operatorname{tang} m'} + \dfrac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} n'} = 1; \end{array}\right\}$$

als Gleichungen der beiden Normalkreise, die (als Schenkel des sphärischen Winkels) von t', u' ausgehen, folglich muß [nach (7.) und (10.)]:

$$(11.)\ \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\operatorname{tang} m} = M;\ -\dfrac{1}{\operatorname{tang} m'} = M'; \\[2ex] -\dfrac{1}{\operatorname{tang} n} = N;\ -\dfrac{1}{\operatorname{tang} n'} = N'; \end{array}\right\}$$

sein, so daß also [mit Hülfe von (8.) und (9.)] endlich gefunden wird:

$$(12.)\ \cos v' = \frac{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} m'} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} n \operatorname{tang} n'}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 m} + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 n}}\,\sqrt{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 m'} + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 n'}}};$$

und (13.)

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang} t' = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tang} n} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} n'}}{\dfrac{1}{\operatorname{tang} m' \operatorname{tang} n} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n'}} = \operatorname{tang} m \operatorname{tang} m' \dfrac{\operatorname{tang} n' - \operatorname{tang} n}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n' - \operatorname{tang} n \operatorname{tang} m'} \\[4ex] \operatorname{tang} u' = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tang} m'} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} m}}{\dfrac{1}{\operatorname{tang} m' \operatorname{tang} n} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n'}} = \operatorname{tang} n \operatorname{tang} n' \dfrac{\operatorname{tang} m - \operatorname{tang} m'}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n' - \operatorname{tang} n \operatorname{tang} m}, \end{array}\right.$$

wobei also t' und u' die sphärischen Coordinaten des Winkelscheitels, $\left\{\begin{matrix} m \text{ u. } n \\ m' \text{ u. } n' \end{matrix}\right\}$ die Stücken der Coordinaten-Achsen bis zum Coordinaten-Centrum sind, welche die Schenkel darauf abschneiden.

§. 8.

Zusätze.

Zusatz 1. Die beiden unter (13.) aufgestellten Gleichungen geben zugleich die Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier gegebener Normalkreise

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} = 1 \\ \frac{\text{tang } \alpha'}{\text{tang m}'} + \frac{\text{tang } \beta'}{\text{tang n}'} = 1 \end{matrix}\right\} \text{untereinander an.}$$

Zusatz 2. Sind also zwei in Zusatz 1. bezeichnete Normalkreise auf einander senkrecht, so muß $\cos v' = o$, also

$$(14.)\quad 0 = 1 + \frac{1}{\text{tang m tang m}'} + \frac{1}{\text{tang n tang n}'} \text{ sein.}$$

Zusatz 3. Wenn zwei Normalkreise II. und III, der $\left\{\begin{matrix} \text{erste} \\ \text{andere} \end{matrix}\right\}$ mit den Achsenabschnitten $\left\{\begin{matrix} m' \; n' \\ m'' \; n'' \end{matrix}\right\}$ auf demselben Normalkreise I senkrecht stehen, so ist:

$$\left\{\begin{matrix} \frac{1}{\text{tang m tang m}'} + \frac{1}{\text{tang n tang n}'} + 1 = 0 \\ \frac{1}{\text{tang m tang m}''} + \frac{1}{\text{tang n tang n}''} + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

folglich auch $\frac{\text{tang m}'' - \text{tang m}'}{\text{tang m tang m}' \text{ tang m}''} + \frac{\text{tang n}'' - \text{tang n}'}{\text{tang n tang n}' \text{ tang n}''} = o$ (15.)

Der Durchschnittspunkt von den Normalkreisen II. und III. sei durch die sphärischen Coordinaten a', b', gegeben, so ist, [nach (13.)]:

$$\text{tang a}' = \frac{\text{tang m}' \text{ tang m}'' \; (\text{tang n}'' - \text{tang n}')}{\text{tang m}' \text{ tang n}'' - \text{tang m}'' \text{ tang n}'}$$

$$\text{tang b}' = \frac{-\text{tang n}' \text{ tang n}'' \; (\text{tang m}'' - \text{tang m}')}{\text{tang m}' \text{ tang n}'' - \text{tang m}'' \text{ tang n}'}$$

also ist, [dies in (15.) eingesetzt]:

$$\frac{\text{tang a}'}{\text{tang n}} = \frac{\text{tang b}'}{\text{tang m}} \quad (16.)$$

Diese Gleichung zwischen a' und b' ist aber nicht abhängig von den Abschnitten der einzelnen Normalkreise II und III. 2c., sondern richtet sich allein nach der Lage des Normalkreises I.

Sie gilt daher für alle Durchschnittspunkte a″, b″ ꝛc. zwischen ähnlichen Normalkreisen wie II. und III, folglich auch für den einen, der durch das Coordinaten-Centrum auf der Kugel geht. Dieser aber bildet mit der sphärischen Abscissenachse einen Winkel φ, der durch die Gleichung [Cap. II. §. 1. (12.)] $\tang \varphi = \frac{\tang H'}{\tang \Xi'}$ bestimmt wird. Schneidet dieser den Kreis I. in dem Punkte, dessen sphärische Coordinaten ξ' η' sind, so ist [nach Cap. II. §. 3. (6.)] $\frac{\tang \xi'}{\tang n} = \frac{\tang \eta'}{\tang m}$

Folglich ist $\frac{\tang n}{\tang m} = \frac{\tang a'}{\tang b'} = \frac{\tang a''}{\tang b''}$ ꝛc. $= \frac{\tang \xi'}{\tang \eta'}$; d. h. Alle die Punkte a′, b′, a″, b″, ꝛc. ξ' η' liegen auf demselben Normalkreise, der durch das Coordinaten-Centrum geht, und auf I. senkrecht steht. Nach Voraussetzung lagen aber die Punkte a′ b′, a″ b″ ꝛc. auch auf den übrigen Normalkreisen II. und III. ꝛc., die nicht durch das Coordinaten-Centrum auf der Kugel gehn: folglich fallen, um den Widerspruch zu lösen, alle Punkte a′ b′, a″ b″ ꝛc. in den einen a′ b′ zusammen, d. h. alle auf dem Normalkreise I. senkrechten Normalkreise schneiden sich in demselben Punkte, dessen Gleichung in (16.) angegeben ist.

Zusatz 4. Wenn die Normalkreise II. und III. auf dem Normalkreise I. senkrecht stehen, und zwischen sich den Bogen Δ des letztern haben, so ist nach bekannter Formel:

(17.) $\cos S = \cos S' \cos \Delta$;

wobei S und S′ die Größe der Bogen II. und III. von I. an bis zu ihrem Durchschnittspunkte bezeichnet. Nun ist aber auch

(18.) $\cos S' = \cos S \cos \Delta$;

beide Gleichungen (17.) und (18.) können aber, bei der beliebigen Größe von Δ, nur dann zugleich bestehen, wenn zugleich $\left\{ \begin{array}{l} \cos S = o \\ \cos S' = o \end{array} \right\}$, also $S = S' \left\{ \begin{array}{l} = 90^\circ \\ = 270^\circ \end{array} \right\}$ ist. Daher schneiden sich zwei auf einem dritten senkrechten Normalkreise in zwei entgegengesetzten Punkten der Kugel, die zu dem Normalkreise, auf dem jene senkrecht sind, als Pole gehören.

§. 9.

Verhältniß eines Normalkreises zu seinen Polen a′ b′ und a″ b″.

Wenn die Gleichung eines Normalkreises allgemein diese ist:

(1.) $\frac{\tang \Xi'}{\tang m} + \frac{\tang H'}{\tang n}$ so ist jeder seiner Pole durch die Gleichungen gegeben:

(2.) $\left\{ \begin{array}{l} 1 + \tang a' \tang \Xi' + \tang b' \tang H'; \\ 1 + \tang a'' \tang \Xi' + \tang b'' \tang H'; \end{array} \right.$

Denn nach Cap. II. §. 6. (6.) sind die unter (2.) angegebenen Gleichungen solchen Punkten eigen, die um 90° von einander abstehen, was auch die Eigenthümlichkeit des Pols ausmacht.

Also ist, durch Vergleichung von (1.) und (2.)

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{tang } a' = \dfrac{-1}{\text{tang } m};\ \text{tang } b' = \dfrac{-1}{\text{tang } n};\ \text{also}\ a' = 90^\circ + m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ a'' = 270^\circ + m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ b' = 90^\circ + n \\ \text{tang } a'' = \dfrac{-1}{\text{tang } m};\ \text{tang } b'' = \dfrac{-1}{\text{tang } n};\qquad\quad b'' = 270^\circ + n \end{array}\right\}$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus Cap. II. §. 7. (11.), wo zu zwei Punkten ein 3ter, von jedem um 90° abstehender gesucht wurde; derselbe Fall ist hier nur allgemeiner, für alle Punkte eines Normalkreises, aufgefaßt.

Hat man nun noch einen zweiten Normalkreis

$$(4.)\quad \frac{\text{tang } U'}{\text{tang } m'} + \frac{\text{tang } V'}{\text{tang } n'} = 1$$

und dessen Pole sind $\alpha'\ \beta'$ und $\alpha''\ \beta''$, so ist auch für diesen

$$\text{tang } \alpha' = \frac{-1}{\text{tang } m'};\ \text{tang } \beta' = \frac{-1}{\text{tang } n'};$$

$$\text{tang } \alpha'' = \frac{-1}{\text{tang } m'};\ \text{tang } \beta'' = \frac{-1}{\text{tang } n'};$$

Nun ist der Winkel v' zwischen den beiden Normalkreisen bestimmt durch

$$\cos v' = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang } m \text{ tang } m'} + \dfrac{1}{\text{tang } n \text{ tang } n'}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang}^2 m} + \dfrac{1}{\text{tang}^2 n}}\ \sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang}^2 m'} + \dfrac{1}{\text{tang}^2 n'}}};$$

[nach Cap. II. §. 7. (12.)] also ist auch:

$$\cos v' = \frac{1 + \text{tang } a' \text{ tang } \alpha' + \text{tang } b' \text{ tang } \beta'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a' + \text{tang}^2 b'}\ \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha' + \text{tang}^2 \beta'}};$$

Diese Formel ist aber [nach Cap. II. §. 6. (4.)] zugleich der Ausdruck für $\cos R$, wenn R die Entfernung von $a'\ b'$ und $\alpha'\ \beta'$ angiebt. Daraus folgt:

Die Bogenentfernung zweier gleichartiger Pole ist zugleich auch das Maaß für die Größe des von den beiden zugehörigen Normalkreisen gebildeten Winkels; und umgekehrt.

§. 10.

Perspectivische Projectionen vom Kugel-Centrum aus auf eine Tangentenebene.

Die hier entwickelten Gleichungen des Normalkreises, der Senkrechten, des Winkels auf der Kugel u. s. w. lassen sich auch noch durch ein anderes Projectionsverfahren aus der Raum-Analysis herleiten, nämlich durch Projectionsstrahlen vom Mittelpunkt der Kugel nach einer Tangentenebene, welche an den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten, (also an das Ende der räumlichen Z-Achse) gelegt wird. Durchläuft nämlich das Ende des durch das Kugel-Centrum gelegten Projectionsstrahls (den wir Leitstrahl nennen wollen) auf der Ebne eine Gerade, so schneidet er die Kugeloberfläche in einem zugehörigen größten Kreise, dessen Gleichung mit der der Geraden im Zusammenhange stehen muß.

Geht ein Leitstrahl durch der Punkt $x' y' z'$ der mit der XY-Ebene parallel laufenden Tangentenebene, so ist, wegen des Abstands r (Kugelradius) beider Ebenen, das z' jenes Punktes stets constant, nämlich $= r$, so daß alle Linien der Tangentenebene nur durch $x' y'$ ausgedrückt zu werden brauchen. Zu dem Punkte $x' y' z'$ gehört also auf der Kugel ein zweiter $x y z$, durch folgende Gleichungen zu bestimmen:

(1.) $y' = \frac{y}{\cos \delta}$ und (2.) $x' = \frac{x}{\cos \delta}$, wenn δ die alte Bedeutung behält, den Bogenabstand des Punkts $x y z$ der Kugeloberfläche von dem Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten (zugleich dem Berührungspunkte zwischen Ebne und Kugel) zu bezeichnen. Da aber $y = r \sin \eta$ und $x = r \sin \xi$ war, so ist [nach I. §. 1. (1.) und (5.)]

(3.) $x' = r \tang \xi'$ und (4.) $y' = r \tang \eta'$; durch welche beiden Gleichungen die Verwandtschaft der projicirten ebnen Figur mit ihren Kugelprojectionen leicht zur Darstellung zu bringen ist. Durch diese Art der Ableitung der sphärischen Figuren aus den ebnen gewinnt man außer an der Leichtigkeit des Uebergangs in die entsprechenden Gleichungen auch daran, daß man nun jede sphärische Formel leicht in die entsprechende ebne reduciren kann, indem man den Kugelradius $= \infty$ annimmt, d. h. die Kugeloberfläche mit der Tangentenebene vertauscht.

So sind z. B. die Formeln

$\frac{\tang \xi'}{\tang m} + \frac{\tang \eta'}{\tang n} = 1$ und $\frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$ auf diese Weise unter sich verwandt, denn man braucht nur $\left\{ \begin{array}{l} y' = r \tang \eta' \text{ und } n' = r \tang n \\ x' = r \tang \xi' \text{ und } m' = r \tang m \end{array} \right\}$ zu setzen, um eine in die andere übergehn zu lassen.

§. 11.

Senkrechte Bogenentfernung eines Punkts auf der Kugel von einem gegebenen Normalkreise.

Es sei der Normalkreis durch die Gleichung gegeben,

$$(1.) \quad \frac{\tang \xi'}{\tang m} + \frac{\tang \eta'}{\tang n} = 1$$

wenn der Fußpunkt des senkrechten Bogens $\xi' \eta'$ ist; der Ausgangspunkt des letztern sei $\alpha' \beta'$, dann ist, wenn die Achsenabschnitte desselben m' und n' sind, [nach Cap. II. §. 7. (14.)]

$$(2.)\quad \frac{1}{\tang m \tang m'} + \frac{1}{\tang n \tang n'} + 1 = o$$ wegen der senkrechten Lage;

die Punkte $\xi'\ \eta'$ und $\alpha'\ \beta'$ sind untereinander verbunden, daher ist [nach Cap. II. §. 5. (3.) und (4.)]

$$(3.)\quad \begin{cases} \tang m' = \dfrac{\tang \alpha' \tang \eta' - \tang \beta' \tang \xi'}{\tang \eta' - \tang \beta'} \\[2ex] \tang n' = \dfrac{\tang \alpha' \tang \eta' - \tang \beta' \tang \xi'}{\tang \alpha' - \tang \xi'}; \end{cases}$$

und [nach Cap. II. §. 6. (5.)]:

$$(4.)\ \sin R = \sqrt{\frac{(\tang \xi' - \tang \alpha')^2 + (\tang \eta' - \tang \beta')^2 + (\tang \eta' \tang \alpha' - \tang \beta' \tang \xi')^2}{(1 + \tang^2 \alpha' + \tang^2 \beta')(1 + \tang^2 \xi' + \tang^2 \eta')}};$$

wenn R die Entfernung von $\alpha'\ \beta'$ und $\xi'\ \eta'$ bedeutet: also aus (3.) und (4.), wenn wir, zur Abkürzung, $(\tang \eta' \tang \alpha' - \tang \beta' \tang \xi')^2 = Z^2$ nennen:

$$(5.)\ \sin R = \frac{Z}{\sqrt{(1 + \tang^2 \alpha' + \tang^2 \beta')(1 + \tang^2 \xi' + \tang^2 \eta')}} \sqrt{\left(\frac{1}{\tang m'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tang n'}\right)^2 + 1};$$

Nun ist aber aus (2.) und (3.)

$$(6.)\ Z = -\left[\frac{\tang \eta' - \tang \beta'}{\tang m} + \frac{\tang \alpha' - \tang \xi'}{\tang n}\right].$$

Dies in (5.) eingesetzt, erhält man eine, durch die Coordinaten der beiden Punkte und die Achsenabschnitte der beiden Linien ausgedrückte Gleichung, die die senkrechte Entfernung des Punkts $\alpha'\ \beta'$ von der Linie (1.) ausdrückt.

Drittes Kapitel.

Von den Kurven zweiten Grades auf der Kugel.

I. Der Kreis.

§. 1.

Ueber die Herleitung der Gleichung aus sphärischen Formeln.

Die Formel für die Entfernung zweier festen Punkte auf der Kugel ist [nach Cap. II. §. 6.]

$$\cos R = \frac{1 + \tang \alpha' \tang \xi' + \tang \beta' \tang \eta'}{\sqrt{1 + \tang^2 \alpha' + \tang^2 \beta'}\ \sqrt{1 + \tang^2 \xi' + \tang^2 \eta'}};$$

daraus (1.) $\tan^2 R$

$$= \frac{(\tan\xi' - \tan\alpha')^2 + (\tan\eta' - \tan\beta')^2 + (\tan\eta' \tan\alpha' - \tan\xi' \tan\beta')^2}{(1 + \tan\alpha' \tan\xi' + \tan\beta' \tan\eta')^2};$$

nimmt man nun den Punkt $\alpha'\ \beta'$ als fest an, während der Punkt $\xi'\ \eta'$ sich um denselben in stets gleicher Entfernung $= R$ herumbewegt, so beschreibt letzterer auf der Kugel einen Kreis mit dem Bogen R als Radius und obige Gleichungen sind daher zugleich die des Kreises.

Zusatz a.) Wird $R = 90^\circ$, so ist $\left\{ \begin{matrix} \cos R = o \\ \tan R = \infty \end{matrix} \right\}$, also wird

(2.) $1 + \tan\alpha' \tan\xi' + \tan\beta' \tan\eta' = o;$

als Gleichung eines Normalkreises, dessen Pol $\alpha'\ \beta'$ ist. [f. Cap. II. §. 9.]

b) Wird $R = 180 - r$, so ist $180^\circ - R = r$

(3.) $\cos R = -\cos r = \dfrac{1 + \tan\alpha' \tan\xi' + \tan\eta' \tan\beta'}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha' + \tan^2\beta'}\ \sqrt{1 + \tan\xi' + \tan\eta'}};$

Erhebt man aber diese Formel auf das Quadrat, so verschwindet das negative Zeichen und man erhält eine der frühern identische Kreisformel. Das negative Cosinuszeichen bei r deutet aber darauf hin, daß dieser Kreis dem früher durch R bestimmten diametral entgegenliege [cf. Cap. I. §. 2. 3.)], daß also zweier diametral-conjugirten Kugelkreise Bogenhalbmesser sich wie Supplemente verhalten, wenn man beide aus demselben Centrum construirt.

c) Wird $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = o \\ \beta' = o \end{matrix} \right\}$, d. h. liegt der Mittelpunkt des Kugelkreises im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten, so wird: [nach Cap. II. §. 1. (2.) und (4.)]

(4.) $\tan^2 R = \tan^2 \xi' + \tan^2 \eta'$ und

(5.) $\sin^2 R = \sin^2 \xi + \sin^2 \eta$, die Gleichung des zugehörigen Kreises, ausgedrückt durch die $\left\{ \begin{matrix} \Xi',\ H', \\ \Xi,\ H, \end{matrix} \right\}$ Coordinaten.

§. 2.

Herleitung der Kreisgleichung mit Hülfe der senkrechten Projection.

a.) Hat man im Mittelpunkte der Kugel das [in Cap II. §. 1. (cf. Cap. I. §. 1.) erwähnte] räumliche 3-achsige Coordinatensystem, und beschreibt auf einer Achsenebne, z. B. auf der XY-Ebne vom Centrum der Coordinaten aus einen Kreis mit dem Radius R, so ist

(1.) $R^2 = x^2 + y^2$. Da aber bei der senkrechten Projection dieses Kreises auf die Oberfläche der Kugel, $R = r \sin\varphi$, und $x = r \sin\xi$, $y = r \sin\eta$ wird [Cap. I. §. 1.), so ist

(2.) $\sin^2\varphi = \sin^2\xi + \sin^2\eta$, woraus folgt [nach §. 1. Zusatz c) (5.)]:

daß ein gerader Cylinder, dessen Basis ein Kreis ist, die Kugeloberfläche in einem Kugelkreise schneiden müsse, wenn die Achse des Cylinders durch das Kugelcentrum geht.

b.) Nehmen wir an, der Kugelkreis sei mit dem Radius R auf der sphärischen Y-Achse so beschrieben, daß seine Peripherie durch den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten geht, so wird, wenn die Coordinaten des Mittelpunkts sind $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = 0 \\ \beta' = b' \end{matrix} \right\}$, auch $R = b'$, folglich ist [nach Cap. III. §. 1. (1.)]

$$\tang^2 b' = \frac{\tang^2 \xi' + (\tang \eta' - \tang b')^2 + \tang^2 \xi' \tang^2 b'}{(1 + \tang b' \tang \eta')^2}$$

Wendet man darauf die Formeln an: $\tang b' = \frac{b}{c}$, $\tang \xi' = \frac{x}{z}$, $\tang \eta' = \frac{y}{z}$, [wo b, c, x, y, z die räumlichen Coordinaten derselben Punkte auf der Kugel bedeuten], so erhält man:

$$(1.)\ \frac{b^2}{c^2} = \frac{x^2 (b^2 + c^2) + (cy - bz)^2}{(cz + by)^2} = \frac{r^2 x^2 + (cy - bz)^2}{(cz + by)^2};$$

löst man diese Gleichung auf, so erhält man endlich:

$$(2.)\ b^2 y^2 + c^2 z^2 + 2\, bcyz = c^2 r^2 = (by + cz)^2$$

also: (3.) $by + cz = cr$, d. h. die Gleichung einer geraden Linie auf der YZ-Ebene: legt man durch dieselbe eine Ebne, welche zugleich durch den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten geht, so schneidet diese die Kugeloberfläche in jenem Kreise, dessen Gleichung oben angeführt worden ist.

Entwickeln wir aber die Gleichung (3.) nur für x und z, so erhält man

$$(4.)\ x^2 + \frac{r^2}{b^2} z^2 - \frac{2\, c^2 r}{b^2} z + \frac{r^2 (c^2 - b^2)}{b^2} = o,$$ als die allgemeinste Gleichung einer Ellipse in der XZ-Ebne, deren große Achse in der Richtung der räumlichen Abscissenachse, nicht aber mit dieser zusammenfällt, und deren Mittelpunkt außerhalb des Anfangspunktes der räumlichen Coordinaten ist, deren kleine Achse endlich auf der Z-Achse liegt und im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten endet.

Daraus folgt, daß ein elliptischer Cylinder, dessen Basis obige Ellipse in der xz-Ebene ist, wenn er auf dieser Ebene senkrecht steht, die Kugeloberfläche in einem Kugelkreise schneidet.

Aehnlich wird die Gleichung (3.) für x, y entwickelt, eine andre Ellipsen-Gleichung zwischen diesen Coordinaten von der Form:

$$(5.)\ x^2 + \frac{r^2}{c^2} y^2 - \frac{2\, br}{c} y = o,$$ zu einer Ellipse gehörig, deren Mittelpunkt ebenfalls nicht im Coordinaten-Centrum des räumlichen Systems liegt, deren eine Achse aber (die kleine) mit einem ihrer Endpunkte in dieses Centrum fällt und zugleich mit der Y-Achse der geraden Coordinaten coincidirt, während die große Achse der X-Achse desselben Systems parallel

läuft. Auch ein durch diese Ellipse gehender grader Cylinder schneidet die Kugeloberfläche in einem Kugelkreise.

Man kann also im Allgemeinen sagen:

Jeder Kugelkreis hat zur senkrechten Projection

aa) entweder eine gerade Linie,

bb) oder einen Kreis, [cf. (a)]

cc) oder eine Ellipse [cf. (b.) und (c.)].

§. 3.

Herleitung der Kreisgleichung aus der perspectivischen Projection.

Nach dem im Cap. II. §. 10. angedeuteten Verfahren erhält man die Gleichung eines beliebigen Kugelkreises auch als perspectivische Projection eines auf einer Tangentenebne aus deren Berührungspunkte (als dem Centrum) construirten Kreises. Dessen Gleichung ist nämlich

(1.) $x^2 + y^2 = \varrho^2$; da nun $x = r \operatorname{tang} \xi'$, $y = r \operatorname{tang} \eta'$, $\varrho = r \operatorname{tang} R$,

so wird die Gleichung (1.) zu der folgenden:

(2.) $\operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta' = \operatorname{tang}^2 R$.

Daraus folgt:

Jeder sphärische Kreis kann als Durchschnittscurve der Kugelfläche mit einem graden Kegel angesehen werden, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt, dessen kreisförmige Grundfläche aber in ihrem Mittelpunkte die Kugel berührt.

Da aber auch Kegel mit elliptischer Basis kreisförmige Durchschnittscurven mit besonders geneigten Ebnen ergeben können, so können diese auch in solchen Fällen auf der Kugeloberfläche sphärische Kreise abgränzen, wenn nämlich die Ebne jedes Kreisschnitts mit der eben erwähnten Kegelschnitt-Ebne zusammenfällt. Wir wollen zeigen, wie auch dies aus den analytischen Entwickelungen leicht folgt.

Gesetzt, auf der Tangentenebene, welche die auf der Kugeloberfläche zu projicirende Figur enthält, sei eine Ellipse verzeichnet, deren Coordinatencentrum im Berührungspunkte der Ebne mit der Kugel liegt, und die Y-Achse sei in der YZ-Ebne des räumlichen Coordinatensystems gelegen, so ist die Gleichung dieser Ellipse im Allgemeinen:

(3.) $a^2 x^2 = 2 ab^2 y - b^2 y^2$;

wäre die Projection dieser Ellipse ein Kugelkreis, so müßte dieser folgende Gleichung haben:

$$(4.)\ \operatorname{tang}^2 R = \frac{\operatorname{tang}^2 \xi' + (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} R)^2 + \operatorname{tang}^2 \xi' \operatorname{tang}^2 R'}{(1 + \operatorname{tang} R \operatorname{tang} \eta')^2}$$

[cf. Cap. III. §. 1. (1.); worin die Coordinaten des Centrums $\left\{\begin{array}{l}\alpha' = o\\ \beta' = R\end{array}\right\}$ gesetzt werden müssen.

Entwickeln wir die Gleichung (4.) in derselben Form, wie (3.), so ergeben sich, nachdem $\left\{\begin{array}{l} x = r \operatorname{tang} \xi' \\ y = r \operatorname{tang} \eta' \end{array}\right\}$ gesetzt worden ist, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (5.)\ a = \dfrac{r \operatorname{tang} R}{1 - \operatorname{tang}^2 R} \\ \text{und} \quad (6.)\ \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tang}^2 R} \end{array}\right\} \text{also } (7.)\ b = \frac{r \operatorname{tang} R}{\sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 R}};$$

werden diese Bedingungen durch die Gleichungen der Ellipsenelemente erfüllt, so ist die Projection einer solchen Ellipse auf der Tangentenebne ebenfalls ein Kugelkreis:

§. 4.

Die Tangente an den Kugelkreis.

Der größern Einfachheit wegen nehmen wir an, der Mittelpunkt des mit dem Bogenradius R beschriebenen Kugelkreises liege im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten; so wird seine Gleichung [nach Cap. III. §. 1. (4.)]

$$(1.)\ \operatorname{tang}^2 R = \operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta';$$

Ein Normalkreis gehe durch den speciellen Punkt $\xi'\ \eta'$ dieses Kreises, so ist seine Gleichung:

$$(2.)\ \frac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1$$

Aus beiden Gleichungen eliminire man $\operatorname{tang} \eta'$, so erhält man die quadratische Gleichung für $\operatorname{tang} \xi'$

$$(3.)\ o = \operatorname{tang}^2 \xi' - \frac{2 \operatorname{tang} m \operatorname{tang}^2 n}{\operatorname{tang}^2 m + \operatorname{tang}^2 n} \operatorname{tang} \xi' + \frac{\operatorname{tang}^2 m\,(\operatorname{tang}^2 n - \operatorname{tang}^2 R)}{\operatorname{tang}^2 m + \operatorname{tang}^2 n}$$

mit der Lösung:

$$(4.)\ \operatorname{tang} \xi' =$$

$$\frac{\operatorname{tang} m \operatorname{tang}^2 n}{\operatorname{tang}^2 m + \operatorname{tang}^2 n} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^4 n - \operatorname{tang}^2 m\,(\operatorname{tang}^2 n - \operatorname{tang}^2 R)\,(\operatorname{tang}^2 m + \operatorname{tang}^2 n)}{(\operatorname{tang}^2 m + \operatorname{tang}^2 n)^2}}$$

der doppelte Werth für $\operatorname{tang} \xi'$, der durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel bedingt wird, deutet auf einen zwiefachen Punkt der Gemeinschaft zwischen Normalkreis und Kugelkreis, d. h. beide schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten; soll aber das Schneiden in ein Berühren übergehn, so muß dieser Doppelwerth von $\operatorname{tang} \xi'$ zu einem einfachen werden, d. h. die Wurzel mit $\pm$ muß $= 0$ werden. Daraus entspringt also folgende Relation im Fall der Berührung zwischen m, n und R:

$$(5.)\ \operatorname{tang}^2 R = \frac{\operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 n}{\operatorname{tang}^2 m + \operatorname{tang}^2 n};$$

Diese Gleichung ist aber [nach Cap. II. §. 3. (7.)] die der kleinsten Entfernung des Anfangspunkts der sphärischen Coordinaten von der Linie (2.), d. h. die Gleichung der Senkrechten auf letzterer, woraus gefolgert werden darf:

daß die Tangentenlinie in $\xi' \eta'$ an den mit R construirten Kugelkreis, senkrecht auf dem nach $\xi' \eta'$ gezogenen Kreisradius steht.

In dem Falle der Berührung wird aber ferner:

$$(6.)\ \tan \xi' = \frac{\tan m \tan^2 n}{\tan^2 m + \tan^2 n};$$

$$(7.)\ \tan \eta' = \frac{\tan^2 m \tan n}{\tan^2 m + \tan^2 n};$$

als Gleichungen zur Bestimmung des Berührungspunkts.

Es ist nur noch übrig, die Gleichung des berührenden Normalkreises für den Punkt $\xi' \eta'$ zu finden: nun ist aber:

$$(8.)\ \frac{\tan \Xi' - \tan \xi'}{\tan m} + \frac{\tan H' - \tan \eta'}{\tan n} = o$$

die Gleichung des durch $\xi' \eta'$ gehenden Normalkreises.

Nach (6.) und (7.) wird ferner:

$$(9.)\ \tan \xi' \tan m = \tan \eta' \tan n$$

daher: (10.) $\tan \Xi' \tan \xi' + \tan H' \tan \eta' = \tan^2 R$ die gesuchte Tangentengleichung für den Kreis, dessen Centrum in dem Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten liegt.

§. 5.

Herleitnng der Tangentengleichung aus der perspectivischen Projection.

Die Bedingungen seien dieselben, als in §. 3. Auf der Tangentenebne sei ein Kreis verzeichnet, dessen Gleichung

(1.) $x^2 + y^2 = r^2$ ist. Die zugehörige Tangente werde bestimmt durch

(2.) $Xx + Yy = r^2$. Der Kreis hat als Projection auf der Kugel den durch die Gleichung

(3.) $\tan^2 \xi' + \tan^2 \eta' = \tan^2 R$ bestimmten: Legt man nun durch die Tangente in (2.) und das Kugelcentrum eine Ebne, so schneidet diese die Kugeloberfläche in einem Normalkreise, der für den Kugelkreis (3.) zur Tangente werden muß. Reducirt man also die Gleichung (2.) auf die Projectionsgleichung, so erhält man als Tangentengleichung für den Kugelkreis:

(4.) $\tan \Xi' \tan \xi' + \tan H' \tan \eta' = \tan^2 R$;

ganz wie in §. 4. (10.) entwickelt worden war. Die übrigen Gleichungen in §. 4. haben also auch ihre vollkommen entsprechenden auf der Tangentenebne, z. B.

(5.) entspricht: $r^2 = \dfrac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}$;

$$\left.\begin{matrix}(6.)\\(7.)\end{matrix}\right\}\text{entspricht: } \left.\begin{aligned} x &= \frac{mn^2}{m^2+n^2}\\ y &= \frac{m^2 n}{m^2+n^2}\end{aligned}\right\}\text{ daraus } xm = yn; \text{ [entsprechend (9.)]}$$

wenn x, y die räumlichen Coordinaten des Berührungspunkts sind.

Anmerkung. Es bedarf sicher nur einer Andeutung, daß das perspectivische Projiciren auf der Kugel der beste Weg sei, zugleich die Verwandtschaft von ebner und sphärischer Analysis, so wie überhaupt von Ebne und Kugeloberfläche ins klare Licht zu stellen; in der That braucht man nur den Kugelradius als unendlich groß anzunehmen, um zu bewirken, daß Tangentenebne und Kugeloberfläche völlig ineinander fallen, d. h., daß die sphärischen Formeln sämmtlich in die entsprechendender ebnen Analysis übergehn.

§. 6.

Der Pol einer Tangente.

Nach Cap. II. §. 9. (3.) ist zu einem Normalkreise, dessen Gleichung $\frac{\text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,m} + \frac{\text{tang}\,\eta'}{\text{tang}\,n} = 1$ lautet, als Pol der Punkt (eigentlich ein Paar) a' b' so zu bestimmen, daß

$$(1.)\ \text{tang}\ a' = \frac{-1}{\text{tang}\ m} \text{ und}$$

$$(2.)\ \text{tang}\ b' = \frac{-1}{\text{tang}\ n} \text{ ist;}$$

Folglich hat die Kreistangente wegen ihrer Gleichung

$$(3.)\quad \frac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ R}\,\text{tang}\ \Xi' + \frac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ R}\ \text{tang}\ H' = 1$$

als Pol den Punkt a' b', dessen sphärische Coordinaten durch die Gleichung

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} \text{tang}\ a' &= \frac{-\,\text{tang}\ \xi'}{\text{tang}^2\ R}\\ \text{tang}\ b' &= \frac{-\,\text{tang}\ \eta'}{\text{tang}^2\ R}\end{aligned}\right\} \text{ gegeben sind.}$$

Daraus entsteht:

$$(5.)\ \text{tang}^2\ a' + \text{tang}^2\ b' = \text{tang}^2\ \varrho = \frac{1}{\text{tang}^2\ R};$$

d. h. rückt eine Kugelkreis-Tangente an ihrem Kreise continuirlich fort, so beschreibt ihr Pol einen Kreis, dessen Radius-Tangente den reciproken Werth der des gegebnen Halbmessers hat, d. h. dessen Radius das Complement zum gegebnen ausmacht, und dessen Centrum mit dem des gegebnen Kreises zusammenfällt.

Anmerkung. Ist also $R = 45^\circ$, so ist auch $\varrho = 45^\circ$, d. h. beide Kreise fallen alsdann völlig in einander.

Bemerkung.

Wegen Mangel an Raum sind die folgenden Abschnitte II. III. IV., welche von den merkwürdigsten Eigenschaften der Kugel-Kegelschnitte handeln, hier nicht mit aufgenommen worden, und muß ihnen daher in einem der folgenden Programme der Platz angewiesen werden.