Die Absicht, welche uns bei der Ausarbeitung des nachstehenden Aufsatzes geleitet hat, war eine Darstellung der wichtigsten Sätze, auf welchen die Bestimmung der Anzahl und die Trennung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung beruht, zu geben, die sich dem Verständniss von Schülern der Prima einer Realschule anschliesst. Durch den zweiten, die approximative Berechnung der Wurzeln betreffenden Aufsatz, worin eine wesentliche Verbesserung der Newton'schen Methode für Gleichungen mit einer und mit zwei Unbekannten gezeigt ist, hoffen wir zur Benutzung dieser Verbesserung beim Unterrichte, die wir selbst mit Erfolg versucht haben, anzuregen.

I. Die Sätze von Fourier, Sturm, Cauchy über die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

§. 1. Unter einer ganzen Function von x versteht man eine Grösse, deren Zusammensetzung aus einer unbestimmten veränderlichen Grösse x und aus bestimmten, dem Zahlenwerthe nach bekannten Grössen a b c . . . angegeben wird durch die Form

$$ax^m + bx^n + cx^p \ldots,$$

in welcher die Exponenten m n p . . . ganze positive Zahlen sind, die wir uns fallend geordnet denken. Zu den Gliedern ax^m bx^n . . . kann als letztes Glied ein blosser Zahlenwerth addirt sein.

2. Die nächstliegende Haupteigenschaft einer ganzen Function besteht darin, dass diese sich mit der Grösse x zugleich stetig ändert.

Es sei also die ganze Function

$$f(x) = ax^m + bx^n + cx^p + \ldots;$$

ändern wir die Grösse x um h, so ist

$$f(x + h) = a(x + h)^m + b(x + h)^n + c(x + h)^p \ldots$$

Denkt man sich auf der rechten Seite die Multiplication der gleichen Factoren x + h ausgeführt, so kann man nachher alle Glieder zusammenfassen, welche dieselbe Potenz von h enthalten, und man erhält

$$f(x + h) = f(x) + hP + h^2 Q + h^3 R \ldots + ah^m;$$

P Q R . . sind ganze Functionen von x.

Legt man jetzt der Grösse x irgend einen besonderen Werth bei, so erhalten auch P Q R . . besondere positive oder negative Werthe, aber jedenfalls wird einer von ihnen, den wir U nennen wollen, numerisch am grössten sein oder wenigstens nicht kleiner sein als jeder andere Sobald $h < 1$, so ist klar, dass der absolute Werth der Differenz $f(x + h) - f(x)$ weniger beträgt als m U h, unter U h ebenfalls den absoluten Werth verstanden. Nun wird aber m U h mit h zugleich unendlich klein, und damit ist die stetige Aenderung von f (x) für einen beliebigen besondern Werth von x also für jeden Werth von x dargethan.

3. Wenn daher f (x) für einen gewissen Werth α von x nicht Null ist, so wird sich immer der Grösse x ein hinreichend kleines Intervall von $\alpha - h$ bis $\alpha + h$ anweisen lassen, dass f (x) für keinen Werth von x in diesem Intervall Null wird und folglich in dem ganzen Intervall nur Werthe von demselben Vorzeichen darbietet.

4. Für einen unendlich grossen Werth von x wird das Vorzeichen der (fallend geordneten) ganzen Function übereinstimmen mit ihrem ersten Gliede; für einen unendlich kleinen Werth dagegen übereinstimmen mit ihrem letzten Gliede.

Offenbar nämlich hat man im ersten Falle, abgesehen vom Vorzeichen,

$$bx^n + cx^p \ldots < (n + 1)\, kx^n,$$

wenn k den numerisch grössten unter den Coëfficienten b c . . bezeichnet. Es ist aber numerisch $ax^m > (n + 1)\, kx^n$, weil $1 > \dfrac{(n + 1)\, k}{ax^{m-n}}$.

Das letzte Glied der fallend geordneten Function würde in der steigend geordneten das erste werden. Denken wir uns also die ganze Function hier einmal steigend geordnet und dargestellt durch

$$\alpha x^\mu + \beta x^\nu + \gamma x^\pi \ldots,$$

wo $\mu < \nu < \pi$ . . Für unendlich kleine Werthe von x hat man, wieder abgesehen vom Vorzeichen,

$$\beta x^\nu + \gamma x^\pi \ldots < (\nu + 1)\, \varkappa x^\nu,$$

während $\varkappa$ dieselbe Bedeutung hat wie vorher k. Und wieder ist $\alpha x^\mu > (\nu + 1)\, \varkappa x^\nu$, weil $1 > \dfrac{(\nu + 1)\, \varkappa}{\alpha}\, x^{\nu - \mu}$, was natürlich auch gilt, wenn $\mu = 0$.

§. 2. 1. Die Grösse amx^{m-1} nennt man Ableitung von ax^m; als Ableitung von ax und a betrachtet man resp. a und Null.

Unter der Ableitung von $ax^m + bx^n + cx^p$ .. versteht man die Summe der Ableitungen von den einzelnen Gliedern, also $amx^{m-1} + bnx^{n-1} + cpx^{p-1} \ldots$ Da es offenbar keinen Unterschied macht, ob die Exponenten m n p . . alle verschieden sind oder nicht, so folgt, dass wenn U V W . . beliebige ganze Functionen von x bezeichnen, die Ableitung ihrer Summe $U + V + W \ldots$ gefunden wird, indem man von jeder einzelnen Function U V . . die Ableitung $U_1\ V_1$ . . nimmt, und diese Ableitungen sämmtlich addirt $U_1 + V_1 + W_1 \ldots$

2. Das Product $\alpha x^\mu (ax^m + bx^n + \ldots)$ ist gleich $\alpha a x^{m+\mu} + \alpha b x^{n+\mu} \ldots$, und die Ableitung von dieser Grösse ist

$$\alpha a\, (m + \mu)\, x^{m+\mu-1} + \alpha b\, (n + \mu)\, x^{n+\mu-1} \ldots$$

oder $\alpha\mu x^{\mu-1} (ax^m + bx^n + \ldots) + \alpha x^\mu (amx^{m-1} + bnx^{n-1} + \ldots)$.

Man sieht also, dass

$$\alpha\mu x^{\mu-1}\ U + \alpha x^{\mu}\ U_1$$

die Ableitung darstellt von αx^{μ} U.

Ferner hat man $(\alpha x^{\mu} + \beta x^{\nu} + ..)\ V = \alpha x^{\mu}\ V + \beta x^{\nu}\ V + ..$ und die Ableitung davon

$$\alpha\mu x^{\mu-1}\ V + \alpha x^{\mu}\ V_1$$
$$+ \beta\nu x^{\nu-1}\ V + \beta x^{\nu}\ V_1$$
$$...$$
$$= (\alpha\mu x^{\mu-1} + \beta\nu x^{\nu-1}\ ..)\ V + (\alpha x^{\mu} + \beta x^{\nu}\ ..)\ V_1$$

Mithin ist

$$U_1\ V + U\ V_1$$

die Ableitung von U V.

3. Die Ableitung von UU oder U^2 wird also $2UU_1$. Als Ableitung von U^2 U oder U^3 ergiebt sich $3U^2\ U_1$.

Wenn wir annehmen, dass $nU^{n-1}\ U_1$ die Ableitung sei von U^n, so folgt für die Ableitung von $U^n U$ oder U^{n+1} der Werth $nU^n U_1 + U^n U_1 = (n+1)\ U^n\ U_1$. Da aber das angenommene Gesetz zutrifft für $n = 2$, so muss es auch gelten für $n = 3, 4, 5$ .. kurz für alle ganzen positiven Werthe von n, um die es sich hier allein handelt.

Als Ableitung von $(x - \alpha)^n$ erhält man $n\ (x - \alpha)^{n-1}$.

4. Von der Ableitung kann man wieder die Ableitung nehmen u. s. f. Dann nennt man auch die Ableitung der ursprünglichen Function deren erste Ableitung, die Ableitung davon die zweite der ursprünglichen Function u. s. f. Diese wiederholt genommenen Ableitungen dienen zu einem bemerkenswerthen Ausdrucke für f (x + h), den man die Taylor'sche Reihe für ganze Functionen nennt.

Nach dem binomischen Lehrsatze hat man nämlich $a\ (x + h)^m$

$$= ax^m + amx^{m-1}\ h + am\ (m - 1)\ x^{m-2}\ \frac{h^2}{2}$$
$$+ am\ (m - 1)\ (m - 2)\ x^{m-3}\ \frac{h^3}{3!}\ ....,$$

unter k! das Product 1 . 2 . 3 . . . k verstanden, also $a\ (x + h)^m$

$$= ax^m + (ax^m)_1\ h + (ax^m)_2\ \frac{h^2}{2} + (ax^m)_3\ \frac{h^3}{3!}\ ...,$$

wenn durch $(ax^m)_1$ $(ax^m)_2$ .. die successiven Ableitungen von ax^m bezeichnet werden. Ebenso ist $b\ (x + h)^n$

$$= bx^n + (bx^n)_1\ h + (bx^n)_2\ \frac{h^2}{2} + (bx^n)_3\ \frac{h^3}{3!}\ ....$$

$c\ (x + h^p)$

$$= cx^p + (cx^p)_1\ h + (cx^p)_2\ \frac{h^2}{2} + (cx^p)_3\ \frac{h^3}{3!}\ ...$$ u. s. f. Folglich

$$a\ (x + h)^m + b\ (x + h)^n + c\ (x + h)^p\ ...$$

oder f (x + h)

$$= f\ (x) + h\ f_1\ (x) + \frac{h^2}{2}\ f_2\ (x) + \frac{h^3}{3!}\ f_3\ (x)\ ...$$

wenn f_1 (x) f_2 (x) f_3 (x) . . . die auf einander folgenden Ableitungen von f (x) bedeuten.

Diese Entwicklung bricht von selbst ab und zwar mit dem Gliede ah^m.

§. 3. 1. Es bedeute α irgend einen beliebigen Zahlenwerth, so kann man die (fallend geordnete) ganze Function

$$f(x) = ax^m + bx^n + cx^p + \dots$$

durch $x - \alpha$ so lange dividiren, bis schliesslich ein Rest kommt, welcher frei ist von x. Es sei R dieser Rest und Q (x) der Quotient, welcher sich als eine ganze Function von x ergeben wird, so haben wir

$$f(x) = (x - \alpha) Q(x) + R$$

folglich

$$R = f(\alpha),$$

so dass immer $f(x) - f(\alpha)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar ist.

Dies zeigt sich auch in der That, denn $f(x) - f(\alpha) = a(x^m - \alpha^m) + b(x^n - \alpha^n) + \dots$ und jedes Glied dieser Summe lässt sich durch $x-\alpha$ theilen.

2. In dem besonderen Falle wo $f(\alpha) = 0$ kann man also f (x) durch $x - \alpha$ ohne Rest theilen, oder es ist

$$f(x) = (x - \alpha) Q(x)$$

also $x - \alpha$ ein Factor von f (x).

Nun kann auch $Q(\alpha) = 0$ sein, dann hat auch Q (x) den Factor $x - \alpha$; wenn wir also $\frac{Q(x)}{x - \alpha} = Q_1(x)$ setzen, so wird $f(x) = (x - \alpha)^2 Q_1(x)$ u. s. f. Wenn nicht etwa $f(x) = a(x - \alpha)^m$ ist, so wird sich f (x) zerlegen lassen in ein Product aus einer Potenz von $x - \alpha$ etwa $(x - \alpha)^n$ und einer ganzen Function $\varphi(x)$, die den Factor $x - \alpha$ nicht mehr enthält oder durch ihn nicht mehr ohne Rest getheilt werden kann.

3. Man nennt einen Werth α, welcher für x gesetzt macht, dass f (x) Null wird, eine Wurzel der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ und zwar eine einfache Wurzel, wenn f (x) zwar durch $x - \alpha$ aber durch keine Potenz von $x - \alpha$ getheilt werden kann; eine n fache Wurzel dagegen, wenn f (x) theilbar ist durch $(x - \alpha)^n$ aber durch keine höhere Potenz von $x - \alpha$. Man kann in diesem Falle sagen, es seien n Wurzeln vorhanden, von denen jede gleich α.

§. 4. Es sei α eine nfache Wurzel (n kann wie künftig immer auch 1 sein) der Gleichung $f(x) = 0$, also

$$f(x) = (x - \alpha)^n \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ nicht mehr durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar sein, oder was dasselbe ist, $\varphi(\alpha)$ nicht Null sein soll.

Nehmen wir die Ableitung von f (x), diese wird

$$f_1(x) = n(x - \alpha)^{n-1} \varphi(x) + (x - \alpha)^n \varphi_1(x),$$

wenn $\varphi_1(x)$ die Ableitung von $\varphi(x)$ bedeutet. Sie ist theilbar ohne Rest durch $(x - \alpha)^{n-1}$ nicht aber durch $(x - \alpha)^n$.

Da $\varphi(\alpha)$ nicht Null ist, also irgend einen endlichen Werth hat, so wird $\varphi(x)$ in einem unendlich kleinen Intervall von $x = \alpha - h$ bis $x = \alpha + h$ nur endliche Werthe von demselben Vorzeichen darbieten. Die Ableitung $\varphi_1(x)$ muss in diesem Intervall, da nämlich α nicht unendlich gross ist, endlich bleiben.

Für $x = \alpha - h$ erhält man durch Einsetzen in die obigen Ausdrücke

$$f(\alpha - h) = (-h)^n \varphi(\alpha - h)$$

$$f_1(\alpha - h) = (-h)^{n-1} \left\{ n \varphi(\alpha - h) - h \varphi_1(\alpha - h) \right\}$$

oder weil das unendlich kleine Glied $h \varphi_1(\alpha - h)$ auf das Vorzeichen der ganzen Grösse, worauf es uns allein ankommt, keinen Einfluss haben kann,

$$f_1(\alpha - h) = (-h)^{n-1} n \varphi(\alpha - h).$$

Dagegen würde man für $x = \alpha + h$ erhalten

$$f(\alpha + h) = h^n \varphi(\alpha + h)$$

$$f_1(\alpha + h) = h^{n-1} n \varphi(\alpha + h).$$

Man sieht hieraus, dass die Function $f(x)$ und ihre Ableitung $f_1(x)$ Verschiedenheit oder wie man sich ausdrückt W e c h s e l der Vorzeichen darbieten für $x = \alpha - h$, Uebereinstimmung oder F o l g e dagegen für $x = \alpha + h$. Oder man kann auch sagen: der Quotient $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ ist negativ für $x = \alpha - h$, positiv für $x = \alpha + h$.

Dasselbe würde man auch durch Benutzung der Taylor'schen Reihe sehen können.

§. 5. Es sei nun a irgend ein Werth von x, für welchen weder $f(a)$ noch $f_1(a)$ Null wird, und b ein zweiter Werth, für welchen dieselbe Bedingung stattfindet. Dann bieten also $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ und $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ bestimmte Vorzeichen dar, entweder gleiche oder verschiedene. Nehmen wir im algebraischen Sinne $a < b$ und denken wir uns x stetig wachsend von a bis zu b.

Im ersten Falle ist klar, dass die Grösse $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ innerhalb des Intervalls von $x = a$ bis $x = b$ gleich viel Uebergänge von $-$ zu $+$ und von $+$ zu $-$ muss gemacht haben. Im zweiten Falle dagegen werden die Uebergänge der einen oder andern Art die der zweiten Art um einen übertreffen.

Sobald aber x wachsend durch einen Wurzelwerth α der Gleichung $f(x) = 0$ hindurchgeht, so macht die Grösse $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ immer einen Uebergang von $-$ zu $+$, wie oben gezeigt ist. Ein Uebergang von $+$ zu $-$ kann daher nur eintreten, wenn der Nenner $f_1(x)$ verschwindet ohne das gleichzeitige Verschwinden des Zählers $f(x)$, braucht jedoch dann nicht allemal einzutreten.

Der Uebergänge von $+$ zu $-$ können aus diesen beiden Gründen höchstens so viele sein als die Gleichung $f_1(x) = 0$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ verschiedene Wurzeln hat, wogegen es der Uebergänge von $-$ zu $+$ wenigstens so viele geben muss, als die Gleichung $f(x) = 0$ zwischen $x = a$ und $x = b$ verschiedene Wurzeln besitzt.

Bezeichnen wir die Zahl der Uebergänge von $-$ zu $+$ mit u_1, dagegen die Zahl der Uebergänge von $+$ zu $-$ mit u_2, so wird die Differenz $u_1 - u_2$ die drei Werthe haben können Null 1 oder -1. Den Werth 0, wenn $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ und $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ beide positiv oder beide negativ sind; den Werth 1, wenn $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ negativ dagegen $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ positiv ist; den Werth — 1, wenn das Umgekehrte stattfindet.

Bezeichnen wir ferner durch i und i_1 resp. die Zahl der verschiedenen Wurzeln von f (x) und f_1 (x) zwischen a und b, so ist nach dem Obigen sicher

$$u_1 \geqq i \qquad u_2 \leqq i_1$$

und deshalb algebraisch

$$i - i_1 \leqq u_1 - u_2$$

Für die Differenz $u_1 - u_2$, welche, wie oben bemerkt, je nach den Umständen Null 1 oder — 1 sein kann, wollen wir den Buchstaben Δ einführen. Dann wird also

$$i \leqq i_1 + \Delta.$$

§. 6. Da Δ höchstens 1 betragen kann, so zeigt sich, dass wenn die Ableitung $f_1(x) = 0$ in dem Intervall zwischen a und b i_1 verschiedene Wurzeln hat, die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens $i_1 + 1$ verschiedene Wurzeln in demselben Intervall haben kann.

Zwischen zwei nächst auf einander folgenden Wurzeln der Ableitung kann daher höchstens eine (einfache oder mehrfache) Wurzel der Gleichung liegen.

Diess ist der Lehrsatz von Rolle.

Die Einschränkung, dass f (x) und f_1 (x) weder für $x = a$ noch für $x = b$ Null sein dürfen, kann jetzt in Bezug auf den Rolle'schen Satz wegfallen, weil der Satz in diesem Falle richtig bleibt für ein unendlich wenig engeres und ein unendlich wenig weiteres Intervall, folglich auch für das genaue Intervall selbst.

§. 7. Man kann die sämmtlichen Ableitungen von f (x) bilden, deren Anzahl m ist, wenn m den höchsten Exponenten von x in f (x) bezeichnet, den man auch den Grad dieser Function oder der Gleichung $f(x) = 0$ nennt. Die letzte Ableitung ist keine Function, sondern hat den Zahlenwerth m!

Wenn man die obige Einschränkung festhält, dass keine dieser Ableitungen (und auch die Function selbst nicht) Null sei weder für $x = a$ noch für $x = b$, und wenn man mit $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots$ Werthe bezeichnet, welche in Bezug auf $\frac{f_1}{f_2}\ \frac{f_2}{f_3}\ \frac{f_3}{f_4} \ldots$ ganz dieselben sind, wie Δ in Bezug auf $\frac{f}{f_1}$, so ist

$$\begin{aligned} i &\leqq i_1 + \Delta \\ i_1 &\leqq i_2 + \Delta_1 \\ i_2 &\leqq i_3 + \Delta_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

folglich, da $i_m = 0$ ist,

$$i \leqq \Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots.$$

Da i der Natur der Sache nach nur eine positive ganze Zahl oder Null sein kann, so ist man sicher, dass auch die Summe $\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 \ldots$ nicht negativ wird, obgleich die einzelnen Summanden Null 1 oder — 1 sein können.

Der Werth von Δ war Null, wenn $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ und $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ beide positiv oder beide negativ sind; in diesem Falle werden f (a) und f_1 (a) eine Folge oder einen Wechsel der Vorzeichen darbieten können, f (b) und f_1 (b) dagegen übereinstimmend damit eine Folge oder einen Wechsel darbieten müssen. Für $\Delta = 1$ ist $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ negativ, $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ positiv; also bieten f (a) und f_1 (a) Wechsel, f (b) und f_1 (b) Folge der Vorzeichen dar. Umgekehrt ist es für $\Delta = -1$, wo f (a) und f_1 (a) Folge, f (b) und f_1 (b) Wechsel der Vorzeichen darbieten.

Wenn man nun die Reihe bildet

$$f(a) \quad f_1(a) \quad f_2(a) \ldots \, f_{m-1}(a) \quad f_m,$$

in welcher nach der Voraussetzung kein Glied Null ist, und in ihr die Relation eines jeden Gliedes zu dem nächst folgenden, bezüglich des Vorzeichens betrachtet, ebenso die Reihe

$$f(b) \quad f_1(b) \quad f_2(b) \ldots \, f_{m-1}(b) \quad f_m,$$

so ist nach dem eben bemerkten klar, dass die Summe $\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots$ durch ihren Werth anzeigen wird die Anzahl Uebergänge, welche stattgefunden haben von Zeichenwechseln in der Reihe a zu Zeichenfolgen in der Reihe b minus der Anzahl der umgekehrten Uebergänge von Folgen in der Reihe a zu Wechseln in der Reihe b.

Es wird daher die Summe $\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 \ldots$ gleich sein dem Ueberschuss aller Wechsel in der Reihe a über alle Wechsel in der Reihe b, und die Anzahl der verschiedenen Wurzeln von $f(x) = 0$ zwischen a und b ist diesem Ueberschusse höchstens gleich.

Niemals kann die Reihe b eine grössere Zahl Wechsel darbieten als die Reihe a.

§. 8. Wir müssen auch den Fall betrachten, wenn in der Reihe a oder b Glieder vorkommen, gruppenweise oder einzeln, die Null sind. Jedoch soll weder f (a) Null sein noch f (b).

Es sei z. B.

$$f_e(a) \; f_{e+1}(a) \; f_{e+2}(a) \ldots\ldots f_{e+k}(a)$$

eine Gruppe von verschwindenden Gliedern während f_{e-1} (a) und f_{e+k+1} (a) nicht verschwinden sollen.

Für ein unendlich kleines h werden nach §. 4 die Glieder

$$f_e(a-h) \; f_{e+1}(a-h) \ldots f_{e+k}(a-h) \; f_{e+k+1}(a-h)$$

lauter Zeichenwechsel darbieten, dagegen die Glieder

$$f_e(a+h) \; f_{e+1}(a+h) \ldots f_{e+k}(a+h) \; f_{e+k+1}(a+h)$$

lauter Zeichenfolgen. Für a — h werden also die Zeichen der verschwindenden Gruppe abwechselnd dem Zeichen von f_{e+k+1} (a) entgegengesetzt oder gleich, für a + h dagegen sämmtlich diesem Zeichen gleich.

Aehnliches gilt für jede andere Gruppe von verschwindenden Gliedern und für jedes einzelne Glied, das verschwindet in der Reihe a oder b.

Die drei Intervalle $a \,..\, b$, $a - h \,..\, b + h$ und $a + h \,..\, b - h$ enthalten dieselben Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Der Ueberschuss der Wechsel kann grösser ausfallen für die Grenzen $a - h$ und $b + h$ als für $a + h$ und $b - h$, aber nicht umgekehrt. Darum ist es zweckmässig sich dieser letzteren zu bedienen.

§. 9. Es sei c ein solcher Werth zwischen a und b, dass in dem Intervall von a bis c keine anderen als einfache Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen; dagegen soll c selbst eine mehrfache und zwar nfache Wurzel dieser Gleichung sein. Dann hat also $f(x)$ den Factor $(x - c)^n$, die Ableitung $f_1(x)$ dagegen nur $(x - c)^{n-1}$; die zweite Ableitung $f_2(x)$ hat nur den Factor $(x - c)^{n-2}$; die dritte $(x - c)^{n-3}$ u. s. f. Für $x = c$ werden also $f\, f_1 \ldots f_{n-1}$ sämmtlich Null, aber nicht mehr f_n.

Betrachten wir das Intervall von $c - h$ bis $c + h$ für h unendlich klein. Die Werthe von $f\, f_1 \,..\, f_{n-1}\, f_n$ bieten für $x = c - h$ lauter Wechsel der Vorzeichen dar, für $x = c + h$ dagegen lauter Folgen. Der Ueberschuss an Wechseln in der ganzen Reihe

$$f(c - h) \ldots f_{m-1}(c - h)\, f_m$$

über die Wechsel in der ganzen Reihe

$$f(c + h) \ldots f_{m-1}(c + h)\, f_m$$

wird daher n betragen, wenn für $x = c$ kein Glied ausser den genannten verschwindet. Er kann aber in keinem Falle kleiner sein als n.

Denn das Verschwinden irgend einer weiteren Gruppe von k Gliedern (k kann auch 1 sein) muss wenigstens die Verwandlung von noch $k - 1$ Zeichenwechseln der Reihe $c - h$ in Folgen der Reihe $c + h$ herbeiführen.

Die Zahl der Zeichenwechsel in der ganzen Reihe

$$f(x)\, f_1(x) \ldots f_{m-1}(x)\, f_m$$

kann niemals grösser werden beim Zunehmen von x. Wir können also das Intervall $a \,..\, b$ in beliebige Intervalle theilen, und der Ueberschuss an Wechseln in der Reihe a über die Wechsel in der Reihe b wird gleich sein der Summe der Ueberschüsse, welche diesen Theil-Intervallen entsprechen.

Wir sehen demnach, dass dieser Ueberschuss mindestens so gross sein muss als die Zahl aller Wurzeln der Gleichung zwischen a und b, wenn man jede nfache als n einfache (gleiche) Wurzeln zählt.

Für $x = -\infty$ bietet die Zeichenreihe nur Wechsel dar, für $x = +\infty$ nur Folgen. Im Ganzen verliert also die Reihe beim Uebergange der Grösse x von $-\infty$ zu $+\infty$ so viel Zeichenwechsel als der Grad der Gleichung beträgt, und die Anzahl der Wechsel, welche nicht durch das Verschwinden der Function $f(x)$ verloren gehen, ist der Anzahl der imaginären Wurzeln gleich.

§. 10. Wenn $f(x)$ und die n ersten Ableitungen verschwinden, so werden dadurch $n + 1$ Zeichenwechsel der Reihe $x - h$ in Folgen der Reihe $x + h$ verwandelt.

Die Zahl $n + 1$ wird ungerade sein, wenn n gerade oder Null ist. Die Reihe kann also beim Verschwinden von $f(x)$ eine ungerade Anzahl Zeichenwechsel verlieren.

Dagegen kann das Verschwinden irgend eines mittleren Gliedes der Reihe oder einer Gruppe von solchen Gliedern immer nur den Verlust einer geraden Anzahl Zeichenwechsel bewirken.

Denn es möge z das positive oder negative Vorzeichen des auf die Gruppe unmittelbar folgenden Gliedes, welches von $x - h$ bis $x + h$ nicht verschwindet, bezeichnen, so bieten die Gruppe und dieses Glied für $x - h$ folgende Vorzeichen dar

$$\ldots z \; -z \quad z \; -z \quad z \; -z \; z$$

für $x + h$ dagegen

$$\ldots z\, z\, z\, z\, z\, z\, z.$$

Ist daher die Zahl k der Glieder in der Gruppe gerade, so wird das erste Glied der Gruppe für $x - h$ dasselbe Vorzeichen darbieten wie für $x + h$. Das der Gruppe unmittelbar vorhergehende Glied hat aber, da es nicht verschwindet, in beiden Reihen dasselbe Zeichen. Wir haben deshalb k Wechsel in der Reihe $x - h$ und k Folgen in der Reihe $x + h$.

Ist dagegen die Zahl k ungerade (auch der Fall $k = 1$ ist hier eingeschlossen), so wird das erste Glied der Gruppe für $x - h$ das entgegengesetzte Vorzeichen darbieten wie für $x + h$. Es wird daher mit dem unmittelbar vorhergehenden Gliede in einer der beiden Reihen einen Wechsel bilden, in der anderen eine Folge. Wir haben also jetzt entweder $k + 1$ Wechsel in der Reihe $x - h$ und $k + 1$ Folgen in der Reihe $x + h$ oder $k - 1$ Wechsel für $x - h$ und $k - 1$ Folgen für $x + h$, beidemal also eine gerade Anzahl.

Somit ist der Lehrsatz von Fourier vollständig erwiesen, dass der Ueberschuss der Zeichenwechsel in der Reihe a über die Wechsel in der Reihe b mindestens so gross sein muss als die Anzahl aller verschiedenen und gleichen Wurzeln, welche die Gleichung in diesem Intervall hat, dass er aber nur um eine gerade Zahl grösser sein kann. Ist also der Ueberschuss 1, so hat man sicher eine einfache Wurzel und nicht mehr.

§. 11. Aus dem Fourier'schen Lehrsatze ergiebt sich mit Leichtigkeit der Lehrsatz von Descartes.

Es sei gegeben die Gleichung

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3}$$
$$\ldots . + A_{n-3} x^3 + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n,$$

wo zunächst keiner der Coëfficienten $A_1 \ldots A_n$ fehlen oder den Werth Null haben soll. Nehmen wir die Ableitungen

$$f_1 x = n x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} \ldots . + A_{n-1}$$
$$f_2 x = n(n-1) x^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 x^{n-3} \ldots + 1.2 A_{n-2}$$
$$f_3 x = n(n-1)(n-2) x^{n-3} \ldots + 1.2.3 A_{n-3}$$
$$\ldots \ldots$$
$$f_{n-1} x = n(n-1)(n-2) \ldots 2x + (n-1)! A_1$$
$$f_n x = n!$$

Die Reihe $f\ f_1\ f_2\ \ldots\ f_n$ gestaltet sich dann in Beziehung auf die Vorzeichen folgendermassen:

1) für $x = -\infty$

$$\pm \mp \pm \mp \ldots + \qquad \text{nWechsel;}$$

2) für $x = 0$

$$A_n\ A_{n-1}\ A_{n-2}\ A_{n-3}\ \ldots\ A_1\ 1,$$

die Coëfficienten der Gleichung, diese mögen pWechsel bilden und qFolgen, so dass $p + q = n$;

3) für $x = +\infty$

$$+ + + + \ldots + \qquad \text{nFolgen.}$$

Nach dem Fourier'schen Satze beträgt dann die Zahl der negativen Wurzeln höchstens $n - p = q$, die Zahl der positiven Wurzeln höchstens p, und diess ist der Lehrsatz von Descartes.

Wenn von den Coëfficienten $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$ irgend welche, einzeln oder gruppenweise, fehlen, so ist folgendermassen zu verfahren. Es sei z. B. $A_5\ A_6\ A_7\ A_8$ eine fehlende Gruppe, wogegen A_4 vorhanden ist. Dann hat man für $x = -0$ diese Gruppe so zu ersetzen:

$$A_4\ -A_4\ A_4\ -A_4 \mid A_4$$

und für $x = +0$ so:

$$A_4\ A_4\ A_4\ A_4 \mid A_4,$$

weshalb man für $x = +0$ die fehlenden Glieder gar nicht zu ersetzen braucht.

§. 12. Wenn man zwei ganze Functionen hat

$$ax^m + bx^n + cx^p \ldots$$
$$\alpha x^\mu + \beta x^\nu + \gamma x^\pi \ldots,$$

beide fallend geordnet, und wenn $\mu \overline{\overline{<}}\, m$, so kann man die erste dividiren durch die zweite, bis als Rest eine ganze Function kommt, deren Grad $< \mu$ ist. Mit diesem Reste kann man wieder den Divisor dividiren, und so kann man fortfahren.

Bezeichnen wir die erste ganze Function mit X, die zweite mit X_1, den Quotienten mit Q_1 und den Rest mit X_2, und bedienen wir uns ähnlicher Bezeichnungen bei den folgenden Divisionen. Dann haben wir folgende Kette von Gleichungen:

$$X\ = X_1\ Q_1 + X_2$$
$$X_1 = X_2\ Q_2 + X_3$$
$$X_2 = X_3\ Q_3 + X_4$$

u. s. f. Da der Grad von X_2 höchstens $\mu - 1$, von X_3 höchstens $\mu - 2$ u. s. w. ist, so wird diese Kette nothwendig ein Ende haben.

Die Bildungsweise dieser Gleichungen zeigt, dass wenn von den Grössen $X\ X_1\ X_2\ \ldots$ irgend zwei nächst auf einander folgende einen Factor gemein haben, auch alle übrigen, vorhergehende wie nachfolgende, denselben haben müssen.

Wenn daher eine von diesen Grössen nicht als ganze Function sondern als blosser Zahlenwerth sich ergeben sollte, so können wir behaupten, dass irgend zwei nächst auf einander folgende dieser Grössen keinen Factor gemein haben, der x enthält.

Soll aber keine der Grössen $X\ X_1\ X_2\ \ldots$ ein blosser Zahlenwerth sein, so muss eine derselben, die noch nicht von x frei ist, in die vorhergehende aufgehen, z. B. X_8 in X_7. Da jetzt X_8 gemeinschaftlicher Factor von X_8 und X_7 ist, so müssen auch alle vorhergehenden Grössen $X\ X_1\ \ldots\ X_6$ den Factor X_8 haben oder durch X_8 ohne Rest theilbar sein. Und umgekehrt, wenn irgend zwei nächst folgende dieser Grössen einen Factor gemein haben, so muss auch X_8 denselben Factor haben.

Man nennt deshalb X_8 den grössten gemeinschaftlichen Factor oder Theiler für irgend zwei nächst folgende der Grössen $X\ X_1\ \ldots\ X_8$.

In der Reihe

$$\frac{X}{X_8}\ \frac{X_1}{X_8}\ \frac{X_2}{X_8}\ \ldots\ \frac{X_7}{X_8}\ 1,$$

wo wir uns (wie auch im nächsten Paragraphen) die sämmtlich ohne Rest möglichen Divisionen ausgeführt denken wollen, sind dagegen irgend zwei nächst folgende Grössen ohne gemeinschaftlichen Factor, und können daher auch niemals für irgend einen Werth von x gleichzeitig Null sein (§. 3. 2).

Wenn für einen besondern Werth von x irgend eine der mittleren Grössen dieser Reihe Null ist, so zeigen die vorstehenden Gleichungen, dass für denselben Werth die nächst vorhergehende und nachfolgende gleich werden.

Da X_1 eine beliebige ganze Function ist, und nur ihr Grad nicht den Grad von X übersteigen soll, so können wir für X_1 die Ableitung von X nehmen.

§. 13. Wenn α eine n-fache Wurzel (n kann auch 1 sein) der Gleichung $X=0$ ist, so hat X den Factor $(x-\alpha)^n$ und die Ableitung X_1 den Factor $(x-\alpha)^{n-1}$ (§. 4). Es muss daher auch der grösste gemeinschaftliche Theiler X_8 von X und X_1 den Factor $(x-\alpha)^{n-1}$ haben.

Die Grösse $\frac{X_1}{X_8}$ kann durch $x-\alpha$ nicht mehr theilbar sein, weil sonst nothwendig X_1 eine höhere Potenz als $(x-\alpha)^{n-1}$ zum Factor haben müsste. Demnach bietet diese Grösse in einem unendlich kleinen Intervall von $x=\alpha-h$ bis $x=\alpha+h$ nur endliche Werthe von demselben Vorzeichen dar.

Wir wissen aber (§. 4), dass X und X_1 für $x=\alpha-h$ einen Wechsel, für $x=\alpha+h$ dagegen eine Folge der Vorzeichen darbieten. Dasselbe muss der Fall sein mit $\frac{X}{X_8}$ und $\frac{X_1}{X_8}$, woraus wir sehen, dass $\frac{X}{X_8}$ beim Durchgange von x durch α sein Zeichen ändert, also für $x=\alpha$ Null wird. Es wäre auch auf andere Art leicht zu zeigen, dass $\frac{X}{X_8}$ noch den Factor $x-\alpha$ (aber in keiner Potenz mehr) hat.

Die Grösse $\frac{X}{X_8}$ kann nur gleichzeitig mit x Null werden, und immer verhält sich dann die Sache so, dass unmittelbar vor dem Nullwerden $\frac{X}{X_8}$ und $\frac{X_1}{X_8}$ einen Wechsel, nachher aber eine Folge der Vorzeichen darbieten, während $\frac{X_1}{X_8}$ inzwischen nicht Null wird.

Sobald für irgend einen Werth von x eine oder mehrere der mittleren Grössen $\frac{X_1}{X_8} \cdot \cdot \frac{X_7}{X_8}$ verschwinden, so sind für diesen Werth immer die beiden Grössen gleich, zwischen welchen eine verschwindet (§. 12), aber in der neuen Reihe

$$\frac{X}{X_8}\ \frac{X_1}{X_8} - \frac{X_2}{X_8} - \frac{X_3}{X_8}\ \frac{X_4}{X_8}\ \frac{X_5}{X_8} - \frac{X_6}{X_8} - \frac{X_7}{X_8}\ 1$$

(in derselben Weise d. h. mit Zeichenänderung des 11. und 12., des 15. und 16. Gliedes etc. wäre bei einer grösseren Anzahl Glieder zu verfahren) sind sie gleich und entgegengesetzt.

Nun bieten drei Vorzeichen, wenn die beiden äusseren verschieden sind, immer eine Folge und einen Wechsel dar, wie auch das mittlere sein mag. Es ist daher klar, dass das Verschwinden einer oder mehrerer der mittleren Grössen die Anzahl der Zeichenfolgen und Wechsel in der letzten Reihe nicht ändern kann.

Dagegen bewirkt das Verschwinden des ersten Gliedes $\frac{X}{X_8}$ immer den Uebergang eines Zeichenwechsels für $x - h$ in eine Folge für $x + h$. Die Reihe wird also für $x = b$ genau so viel Wechsel weniger darbieten als für $x = a$, wenn algebraisch $a < b$, als die Gleichung $X = 0$ verschiedene Wurzeln zwischen diesen Grenzen hat.

Diess ist der Lehrsatz von Sturm.

Die Division mit X_8 war nur zum Beweise nöthig. Offenbar leistet die Reihe

$$X\ X_1 - X_2 - X_3\ X_4\ X_5 - X_6 - X_7\ X_8$$

ganz dieselben Dienste.

Der Fall, dass X und die Ableitung X_1 keine ganze Function zum gemeinschaftlichen Theiler haben, in welchem Falle X nur einfache Wurzeln darbieten kann, ist einbegriffen, denn man darf sich nur X_8 als Zahlenwerth denken.

§. 14. Wenn X_1 nicht die Ableitung ist, so wird der positive oder negative Ueberschuss an Wechseln in der Reihe

$$X\ X_1 - X_2 - X_3\ X_4\ X_5 - X_6 - X_7 \text{ etc.}$$

für $x = a$ über die Wechsel in derselben Reihe für $x = b$, gleichgiltig ob $a < b$ oder nicht, anzeigen, wie vielmal öfter oder weniger oft der Quotient $\frac{X_1}{X}$ zwischen $x = a$ und $x = b$ von $-\infty$ zu $+\infty$ springt als von $+\infty$ zu $-\infty$, während die Variable x sich stetig von $x = a$ bis zu $x = b$ hinbewegt.

Wenn X_1 von gleichem oder höherem Grade als X ist und es sich um Bestimmung dieser letztern Anzahl handelt, so dividire man X_1 durch X bis der Rest X^1_1 von niedrigerem Grade wird als X. Die gesuchte Anzahl wird für den Quotienten $\frac{X_1}{X}$ und für den ächt gebrochenen Quotienten $\frac{X^1_1}{X}$ eine und dieselbe sein. Denn die Gleichung

$$\frac{X_1}{X} = Q + \frac{X^1_1}{X}$$

zeigt, da die ganze Function Q endlich bleibt, dass beide Quotienten gleichzeitig unendlich werden und gleichzeitig von $-\infty$ zu $+\infty$ springen, sowie von $+\infty$ zu $-\infty$.

§. 15. Wir wollen die Anwendung der Sätze von Descartes, Fourier und Sturm an einigen Beispielen zeigen.

Es sei zunächst gegeben die Gleichung:

$$x^3 - 2x - 4 = 0.$$

Die Zeichenreihe 1 A_1 A_2 . . ., welche die Zahl der negativen Wurzeln limitirt, ist

$$+ - - - \qquad 2\ F,$$

so dass die Gleichung höchstens 2 negative Wurzeln hat. Die Zeichenreihe für die positiven Wurzeln ist

$$+ - - \qquad 1\ W;$$

die Gleichung hat also höchstens eine positive Wurzel.

Um den Fourier'schen Satz anzuwenden muss man die Ableitungen bilden

$$f_1 = 3x^2 - 2x, \quad f_2 = 6x - 2, \quad f_3 = 6.$$

Die Zeichenreihe $f\ f_1\ f_2\ f_3$ wird also für

$$\begin{array}{lll} x = -\infty & - + - + & 3\ W, \\ x = -0 & - - - + & 1\ W. \end{array}$$

Demnach hat die Gleichung 2 negative Wurzeln oder gar keine. Für

$$\begin{array}{lll} x = +0 & - - + + & 1\ W \\ x = +\infty & + + + + & 0\ W, \end{array}$$

also ist eine positive Wurzel vorhanden. Die Reihe für

$$x = +3 \qquad + + + +$$

zeigt, dass diese zwischen 0 und 3 liegt.

Bei dem Sturm'schen Satze sucht man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zu $x^3 - 2x - 4$ und der Ableitung $3x^2 - 2$. Als Reste bei der Division ergeben sich mit Vermeidung der Brüche $-4x - 12$ und 100, die Sturm'sche Reihe ist also

$$\begin{array}{lll} x^3 - 2x - 4, & 3x^2 - 2, & 4x + 12, - \\ \text{für } x = -\infty & - + - - & 2\ W \\ x = +\infty & + + + - & 1\ W \\ x = 0 & - - + - & 2\ W \\ x = 3 & + + + - & 1\ W, \end{array}$$

woraus man erkennt, dass die einzige reelle Wurzel der Gleichung zwischen 0 und 3 liegt. In der That ist

$$\begin{aligned} x^3 - 2x - 4 &= (x - 2)(x^2 + 2x + 2) \\ &= (x - 2)(x + 1 + i)(x + 1 - i). \end{aligned}$$

Als zweites Beispiel mag die Gleichung dienen

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0,$$

welche nach dem Satze von Descartes gewiss keine negative Wurzel hat, aber 4 positive Wurzeln haben kann.

Zur Anwendung des Fourier'schen Satzes bilden wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} f_1 &= 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 \\ f_2 &= 12x^2 - 42x + 34 \\ f_3 &= 24x - 42 \\ f_4 &= 24. \end{aligned}$$

Die Reihe $f\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ bietet folgende Vorzeichen dar:

$$x = -\infty, \qquad + - + - + \qquad 4\ \mathrm{W}$$
$$x = 0, \qquad + - + - + \qquad 4\ \mathrm{W},$$

also giebt es keine negative Wurzel;

$$x = +4, \qquad + + + + + \qquad 0\ \mathrm{W},$$

demnach 4 oder 2 oder keine positive Wurzel;

$$x = +1,5, \qquad + + - - + \qquad 2\ \mathrm{W},$$

daher zwei Wurzeln zwischen 0 und 1, 5 oder keine;

$$x = +2,5 \qquad - - + + + \qquad 1\ \mathrm{W},$$

also eine Wurzel zwischen 1, 5 und 2, 5;

$$x = +4 \qquad + + + + + \qquad 0\ \mathrm{W},$$

eine Wurzel zwischen 2, 5 und 4.

Indem wir, um den Sturm'schen Satz anzuwenden, den grössten gemeinschaftlichen Theiler zu der Function f und ihrer Ableitung f_1 suchen, ergiebt die Division folgende Reste, bei Vermeidung der Brüche durch Multiplication mit schicklichen positiven Factoren, $-11x^2 + 34x - 23$ und $-x + 1$.

Die Sturm'sche Reihe ist also

$$\begin{aligned} &x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 \\ &4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 \\ &11x^2 - 34x + 23 \\ &x - 1. \end{aligned}$$

Die Reihe der Vorzeichen wird für

$$x = -\infty, \qquad + - + - \qquad 3\ \mathrm{W}$$
$$x = +\infty, \qquad + + + + \qquad 0\ \mathrm{W},$$

drei reelle ungleiche Wurzeln, von denen eine doppelte Wurzel sein muss;

$$x = 0, \qquad - + - + \qquad 3\ \mathrm{W},$$

keine negative Wurzel, was schon oben feststand;

$$x = 4, \qquad + + + + \qquad 0\ \mathrm{W},$$

drei positive Wurzeln;

$$x = 1,5 \qquad + + - + \qquad 2\ \mathrm{W},$$

eine Wurzel zwischen 0 und 1, 5, welche nach dem Obigen die doppelte sein muss. In der That ist

$$\begin{aligned} &x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 \\ &= (x - 1)^2 (x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Als drittes Beispiel nehmen wir die Gleichung

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$

Die Zeichenreihe $1\ A_1\ A_2 \ldots$ für den Satz von Descartes ist für die negativen Wurzeln

$$+ - - + + + \qquad 3\ \mathrm{F},$$

also höchstens drei negative Wurzeln. Für die positiven Wurzeln

$$+ - + + \qquad 2\ \mathrm{W},$$

höchstens zwei positive Wurzeln.

Die Ableitungen sind:

$$5x^4 - 30x^2 + 6$$
$$20x^3 - 60x$$
$$60x^2 - 60$$
$$120x$$
$$120.$$

Die Fourier'sche Zeichenreihe wird demnach

für $x = -\infty$, $- + - + - +$ 5 W

für $x = -0$, $+ + + - - +$ 2 W,

die Gleichung hat folglich sicher eine negative Wurzel und höchstens drei negative Wurzeln;

$x = +\infty$, $+ + + + + +$ 0 W,

zwei positive Wurzeln oder keine;

$x = -10$, $- + - + - +$ 5 W,

keine Wurzel zwischen $-\infty$ und -10;

$x = -1$, $+ - + \mp - +$ 4 W,

eine Wurzel zwischen -10 und -1;

$x = -\frac{1}{2}$, $- - + - - +$ 3 W,

eine Wurzel;

$x = 0$, $+ + \pm - - +$ 2 W,

eine Wurzel;

$x = 1$, $- - - + + +$ 1 W,

eine Wurzel;

$x = 10$, $+ + + + + +$ 0 W,

eine Wurzel.

Die Division für den Sturm'schen Satz giebt die Reste

$$-20x^3 + 24x + 5$$
$$-96x^2 + 5x + 24$$
$$43651x + 10920$$
$$+$$

Der erste und zweite Rest müssen in der Sturm'schen Reihe mit den entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden.

Die Zeichenreihe wird dann für

$x = -\infty$, $- + - + - +$ 5 W

$x = +\infty$, $+ + + + + +$ 0 W,

5 reelle Wurzeln;

$x = -10$,	$- + - + - +$	keine Wurzel,
$x = -1$,	$+ - - + - +$	1 Wurzel,
$x = -\frac{1}{2}$,	$- - + + - +$	1 Wurzel,
$x = 0$,	$+ + - - + +$	1 Wurzel,
$x = 1$,	$- - - - + +$	1 Wurzel,
$x = 10$,	$+ + + + + +$	1 Wurzel.

Wir stellen hier noch die Divisionen zusammen, welche die Sturm'schen Reste ergeben:

1. Beispiel.

$$f = x^3 - 2x - 4 \qquad f_1 = 3x^2 - 2$$

$$\begin{array}{r}
3x^2 - 2 : 3x^3 - 6x - 12 = x \\
- 2x \\
\hline
- 4x - 12 \\
-4x - 12 : 12x^2 - 8 = -3x + 9 \\
+ 36x \\
\hline
- 36x - 8 \\
- 108 \\
\hline
100
\end{array}$$

2. Beispiel.

$$f = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

$$f_1 = 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17$$

$$\begin{array}{r}
4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 : 4^2x^4 - 4^2.7x^3 + 4^2.17x^2 - 4^2.17x + 4^2.6 = 4x - 7 \\
- 4.21x^3 + 4.34x^2 - 4.17x \\
\hline
- 4.7x^3 + 4.34x^2 - 4.3.17x + 4^2.6 \\
+ 7.21x^2 - 7.34x + 7.17 \\
\hline
- 11x^2 + 34x - 23 \\
-11x^2 + 34x - 23 : 11^2.4x^3 - 11^2.21x^2 + 11^2.34x - 11^2.17 = -11.4x + 95 \\
- 11.4.34x^2 + 11.4.23x \\
\hline
- 11.95x^2 + 11.282x - 11^2.17 \\
+ 34.95x - 23.95 \\
\hline
- 128x + 128 \\
-x + 1 : -11x^2 + 34x - 23 = 11x - 23 \\
+ 11x \\
\hline
23x - 23
\end{array}$$

3. Beispiel.

$$f = x^5 - 10x^3 + 6x + 1$$

$$f_1 = 5x^4 - 30x^2 + 6$$

$$\begin{array}{r}
5x^4 - 30x^2 + 6 : 5x^5 - 50x^3 + 30x + 5 = x \\
- 30x^3 + 6x \\
\hline
- 20x^3 + 24x + 5 \\
-20x^3 + 24x + 5 : 20x^4 - 120x^2 + 24 = -x \\
- 24x^2 - 5x \\
\hline
- 96x^2 + 5x + 24
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
-96x^2+5x+24 : -96.24.20x^3+96.24^2x+96.24.5 = 24.20x+25 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 96.25x^2+24^2.20x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -96.25x^2+76.24^2x+96.24.5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5.25x\;+24.25 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 43651x\;+10920
\end{array}
$$

Bei der letzten Division schreiben wir zur Abkürzung $43651 = a$ und $10920 = b$.

$$
\begin{array}{l}
ax+b : -96a^2x^2+5a^2x+24a^2 = -96ax+5a+96\,b \\
\qquad\qquad\quad -96abx \\
\hline
\qquad\qquad\quad (5a^2+96ab)x+24a^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5ab+96b^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 24a^2-5ab-96b^2
\end{array}
$$

Dieser Rest wird positiv.

§. 16. Es bleibt noch zu bestimmen, wenn $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, der Grad ihrer Vielfachheit d. i. die Zahl n in

$$f(x) = (x-\alpha)^n\,\varphi(x),$$

wo $\varphi(\alpha)$ nicht Null ist.

Die Ableitung wird

$$f_1(x) = n\,(x-\alpha)^{n-1}\,\varphi(x) + (x-\alpha)^n\,\varphi_1(x),$$

folglich

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{n + (x-\alpha)\,\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}}{x-\alpha}.$$

Nennen wir T den grössten gemeinschaftlichen Theiler für $f(x)$ und $f_1(x)$ und setzen wir

$$\frac{f(x)}{T} = X \qquad \frac{f_1(x)}{T} = X_1,$$

so ist natürlich auch

$$\frac{X_1}{X} = \frac{n + (x-\alpha)\,\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}}{x-\alpha}$$

Es ist aber (§. 12)

$$X = (x-\alpha)\,\psi(x),$$

wo $\psi(\alpha)$ nicht Null. Davon die Ableitung

$$X' = \psi(x) + (x-\alpha)\,\psi_1(x),$$

folglich

$$\frac{X}{X'} = \frac{x-\alpha}{1 + (x-\alpha)\,\dfrac{\psi_1(x)}{\psi(x)}}.$$

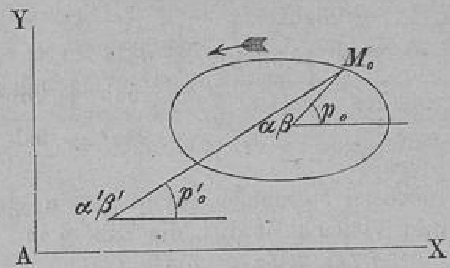
Durch Multiplication von $\dfrac{X_1}{X}$ und $\dfrac{X}{X'}$ erhält man

$$\frac{X_1}{X'} = \frac{n + (x-\alpha)\,\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}}{1 + (x-\alpha)\,\dfrac{\psi_1(x)}{\psi(x)}}.$$

Demnach ist n der Werth, welchen die Grösse $\dfrac{X_1}{X'}$ für $x = \alpha$ annimmt.

§. 17. Es seien $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta'$ . . . die sämmtlichen gleichen und verschiedenen Wurzeln der algebraischen Gleichung $F(z) = 0$, ihre Anzahl also gleich dem Grade; die reellen Wurzeln sind darunter einbegriffen für $\beta = 0$, $\beta' = 0$ . . . Man hat dann die Identität

$$\begin{aligned} F(z) &= F(x + iy) \\ &= (x - \alpha + i[y - \beta])(x - \alpha' + i[y - \beta']) \dots \\ &= \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y). \end{aligned}$$



Nehmen wir nun einen Anfangspunkt A und rechtwinklige Coordinaten-Axen A X, A Y. Dann werden die Wurzeln $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta'$ . . . repräsentirt sein durch die Coordinaten $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$, $\begin{matrix} x = \alpha' \\ y = \beta' \end{matrix}$ . . . einer Anzahl bestimmter Punkte. Ziehen wir jetzt eine beliebige geschlossene Curve, innerhalb welcher alle Punkte $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta'$ . . . oder irgend eine Anzahl derselben liegen. Jedoch machen wir ausdrücklich die im Folgenden festzuhaltende Bedingung, dass keiner von den Punkten $\alpha + i\beta$ . . . zusammenfällt mit einem Punkte der Curve selbst. Denken wir uns ferner einen beweglichen Punkt M, welcher von einer Anfangslage M_0 aus die Curve in der Richtung des Pfeils d. h. in der Richtung von $+ x$ zu $+ y$ hin durchläuft bis zur Rückkehr in seine Anfangslage M_0. Die rechtwinkligen Coordinaten des beweglichen Punktes M seien x und y, und es sollen in der obigen Identität

$$\begin{aligned} (x - \alpha + i[y - \beta])(x - \alpha' + i[y - \beta']) \dots \\ = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) \end{aligned}$$

die Grössen x y der Reihe nach diese und keine anderen Werthe durchlaufen.

Setzen wir

$$x - \alpha = r \cos p, \qquad y - \beta = r \sin p,$$

so dass r und p die Polarcoordinaten des Punktes M bezogen auf den Pol $\alpha\ \beta$ und auf eine zu AX parallele Axe sind.

Setzen wir ebenso

$$x - \alpha' = r' \cos p' \qquad y - \beta' = r' \sin p',$$

wo r' p' die Polarcoordinaten des Punktes M für den Pol α' β' sind, etc. Es ist evident, dass durch den ganzen Umlauf des Punktes M der Winkel p den Zuwachs 360^0 oder 2π erhält in Beziehung auf einen jeden Punkt $\alpha\ \beta$, welcher innerhalb der Curve liegt, dass dagegen der Winkel p' durch den vollen Umlauf gar keinen Zuwachs erhält in Beziehung auf jeden Punkt α' β', der ausserhalb der Curve liegt. Bezeichnen wir die Endwerthe resp. mit p_1 p'_1 . . ., sowie die Anfangswerthe mit p_0 p'_0 . ., so ist also

$p_1 - p_0 = 2\pi$, wenn $\alpha\ \beta$ innerhalb der Curve, dagegen $p'_1 - p'_0 = 0$ wenn $\alpha'\ \beta'$ ausserhalb der Curve. Setzen wir ferner

$$\varphi\,(x, y) = R \cos P \qquad \psi\,(x, y) = R \sin P$$

und unterwerfen wir auch P und R den Bedingungen der stetigen Aenderung mit x und y während der Bewegung des Punktes M; φ und ψ sind als ganze Functionen von selbst stetig. Da nun

$$\varphi\,(x, y) + i\,\psi\,(x, y)$$
$$= (x - \alpha + i\,[y - \beta])\,(x - \alpha' + i\,[y - \beta'])\,\ldots,$$

so ist $R = r r' r'' \ldots$ und wegen der stetigen Aenderung von P

$$P - P_0 = p - p_0 + p' - p'_0 + p'' - p''_0 + \ldots,$$

wo $P_0\ p_0\ p'_0 \ldots$ die Anfangswerthe, $P\ p\ p' \ldots$ die veränderlichen Werthe während der Bewegung bezeichnen. Bedeutet nun P_1 den Endwerth von P nach dem vollen Umlaufe von M, so ist also

$$P_1 - P_0 = p_1 - p_0 + p'_1 - p'_0 + p''_1 - p''_0 + \ldots,$$

also

$$P_1 - P_0 = 2n\pi,$$

wenn n die Anzahl der gleichen und verschiedenen Wurzeln ist, deren repräsentirende Punkte in der von der Curve umschlossenen Fläche enthalten sind.

Den Werth der Differenz $P_1 - P_0$ können wir noch auf eine zweite Art ermitteln. Es ist $\frac{\varphi\,(x, y)}{\psi\,(x, y)} = \operatorname{cotg} P$. Verstehen wir nun unter arc cotg P den einzigen Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen $\operatorname{cotg} = \frac{\varphi}{\psi}$ ist, so wird der allgemeinste, für P zulässige Werth $P = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\varphi}{\psi} \pm m\pi$ sein, wo m jede gerade Zahl oder Null bedeuten kann, wenn φ positiv ist, jede ungerade, wenn φ negativ ist. Es wird nun darauf ankommen, diesen allgemeinsten Werth so zu bestimmen, dass die Stetigkeit von P trotz der Unstetigkeit des Gliedes $\operatorname{arc\,cotg} \frac{\varphi}{\psi}$ gewahrt bleibt. Dieses Glied bietet nämlich die Unstetigkeit dar, dass es, so oft $\frac{\varphi}{\psi}$ von -0 zu $+0$ übergeht, von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ also um $+\pi$ springt, dagegen von $+\frac{\pi}{2}$ zu $-\frac{\pi}{2}$ oder um $-\pi$ springt, so oft $\frac{\varphi}{\psi}$ von $+0$ zu -0 übergeht. Beim Durchgange von $\frac{\varphi}{\psi}$ durch ∞ bleibt arc cotg stetig. Die Form $\frac{0}{0}$ kann, nach der Voraussetzung, $\frac{\varphi}{\psi}$ beim Durchlaufen der Curve nicht annehmen. Der Uebergang des Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ von ∓ 0 zu ± 0 ist daher stets mit einem Zeichenwechsel von φ und darum mit einer Werthänderung von m verbunden. Der Sprung von $\mp \infty$ zu $\pm \infty$ ist mit einem Zeichenwechsel von ψ verbunden.

So lange der bewegliche Punkt M sich nur unendlich wenig von seiner Anfangslage M_0 entfernt, so ist wegen der Stetigkeit von P die Differenz $P - P_0$ unendlich klein und darum $P - P_0 = \text{arc cotg}\,\frac{\varphi}{\psi} - \text{arc cotg}\,\frac{\varphi_0}{\psi_0}$. Wir denken uns nämlich eine Anfangslage M_0, wo nicht $\varphi_0 = 0$ ist. Indem sich nun der Punkt M weiter bewegt, werden die Unstetigkeiten von arc cotg. $\frac{\varphi}{\psi}$ bei den Uebergängen des Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ von ∓ 0 zu ± 0 der Reihe nach eintreten. Um aber diese Unstetigkeiten für den Gesammtwerth von P jedesmal auszugleichen, so wird bei einem jeden Sprunge des arc cotg $\frac{\varphi}{\psi}$ um $\pm \pi$ die entgegengesetzte Grösse $\mp \pi$ hinzutreten müssen und nach dem oben über die Werthänderungen von m Gesagten hinzutreten können. Wäre z. B. in der Anfangslage $\frac{\varphi_0}{\psi_0} = +1$ und φ_0 positiv, so würde man $P_0 = \text{arc cotg}\,(+1) = \frac{\pi}{4}$ nehmen können. Wenn nun zuerst φ verschwindet, so wird für $\varphi = +0$, $P = \frac{\pi}{2}$ sein, aber für $\varphi = -0$ wird $P = \text{arc cotg}\,\frac{\varphi}{\psi} + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi$ zu nehmen sein und so durch den hinzutretenden Summanden π die Stetigkeit von P gewahrt bleiben. Wäre dagegen der Anfangswerth $\frac{\varphi_0}{\psi_0} = -1$ und φ_0 negativ, so würde man $P_0 = \text{arc cotg}\,(-1) + \pi = \frac{3}{4}\pi$ nehmen und für $\varphi = -0$, $P = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$; für $\varphi = +0$ dagegen $P = \text{arc cotg}\,(+0) = \frac{\pi}{2}$, so dass die Stetigkeit durch plötzliches Wegfallen des Summanden π gewahrt wird, etc. Findet nun der Sprung um $+\pi$ μmal, der um $-\pi$ νmal statt, indem der Quotient $\frac{\varphi}{\psi}$ μmal von -0 zu $+0$ und νmal von $+0$ zu -0 übergeht, beträgt also die unstetige Werthänderung des arc cotg $\frac{\varphi}{\psi}$ im Ganzen $\mu\pi - \nu\pi$, so wird auch die Summe der ausgleichenden, die Stetigkeit von P herstellenden Grössen den gleichen aber entgegengesetzten Werth $\nu\pi - \mu\pi$ haben müssen, und man wird folglich haben

$$P_1 - P_0 = \text{arc cotg}\,\frac{\varphi_1}{\psi_1} - \text{arc cotg}\,\frac{\varphi_0}{\psi_0} + \nu\pi - \mu\pi.$$

Es ist aber nach dem vollen Umlaufe

$$\begin{array}{l} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \end{array}, \text{ also auch } \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_0 \\ \psi_1 = \psi_0 \end{array}, \text{ folglich}$$

$$\text{arc cotg}\,\frac{\varphi_1}{\psi_1} = \text{arc cotg}\,\frac{\varphi}{\psi}, \text{ und demnach}$$

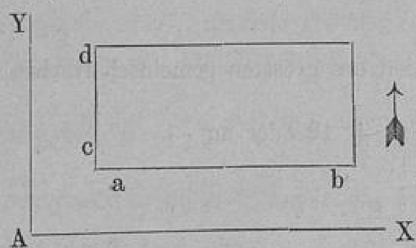
$$P_1 - P_0 = (\nu - \mu)\,\pi.$$

Wir haben demnach die Gleichung

$$n = \frac{\nu - \mu}{2}.$$

Dabei war ν die Anzahl der Uebergänge des Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ von $+ 0$ zu $- 0$, μ dagegen die Anzahl seiner Uebergänge von $- 0$ zu $+ 0$. Da nun aber $\frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{\varphi_0}{\psi_0}$, der Quotient $\frac{\varphi}{\psi}$ also gleich viel Uebergänge von $+$ zu $-$ und von $-$ zu $+$ machen muss, und er, weil φ und ψ ganze Functionen sind, ausser durch 0 nur beim Durchgange durch ∞ sein Zeichen ändern kann, so ist klar, dass derselbe $(\nu - \mu)$mal öfter von $- \infty$ zu $+ \infty$ überspringen muss, als von $+ \infty$ zu $- \infty$.

Somit ist der berühmte Lehrsatz von Cauchy bewiesen, dass innerhalb der geschlossenen Curve genau halb so viel gleiche oder verschiedene Wurzeln liegen, als der Quotient $\frac{\varphi\,(x\,,\,y)}{\psi\,(x\,,\,y)}$ beim vollen Durchlaufen der Curve mehr Sprünge von $- \infty$ zu $+ \infty$ macht als von $+ \infty$ zu $- \infty$. Jedoch bleibt der Fall ausgeschlossen, wo auf der Curve selbst der Repräsentant einer Wurzel liegt. Die Gestalt der Curve ist gleichgültig.



Am bequemsten wird man sich statt der Curve eines Rechtecks mit Seiten, welche zu den Coordinaten-Axen parallel sind, bedienen. Sind $a < x < b$ und $c < y < d$ die Grenz-Coordinaten, so wird man dann für folgende 4 Quotienten den Ueberschuss der Sprünge von $- \infty$ zu $+ \infty$ über die Sprünge von $+ \infty$ zu $- \infty$ nach §. 14 zu bestimmen und diese 4 Ueberschüsse zu addiren haben:

1) $\frac{\varphi\,(x\,,\,y = c)}{\psi\,(x\,,\,y = c)}$ zwischen $x = a$ und $x = b$.

2) $\frac{\varphi\,(x = b\,,\,y)}{\psi\,(x = b\,,\,y)}$ zwischen $y = c$ und $y = d$.

3) $\frac{\varphi\,(x\,,\,y = d)}{\psi\,(x\,,\,y = d)}$ zwichen $x = b$ und $x = a$.

4) $\frac{\varphi\,(x = a\,,\,y)}{\psi\,(x = a\,,\,y)}$ zwischen $y = d$ und $y = c$.

Sobald man die Curve, also das Rechteck, in der Drehrichtung von $+ x$ zu $+ y$ hin durchläuft, so kann die Summe von allen vier Ueberschüssen keinen negativen Werth annehmen. Auch kann ihr Werth nur Null oder eine gerade Zahl sein.

Der Grad der Vielfachheit einer imaginären Wurzel, wenn diese ihrem Werthe nach schon bekannt ist, wird nach §. 16 ganz in derselben Weise bestimmt wie für eine reelle Wurzel.

§. 18. Wir wollen den Lehrsatz von Cauchy auf folgendes einfache Beispiel anwenden. Gegeben sei die schon in §. 15 behandelte cubische Gleichung

$$F\,(z) = z^3 - 2z - 4 = 0;$$

bestimmen wir die Anzahl der Wurzeln $x + iy$, für welche $-2 < x < +3$ und $-2 < y < +2$. Durch Einsetzen von $z = x + iy$ wird $F(z) = \varphi + i\psi$, wo

$$\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x - 4$$
$$\psi(x, y) = 3x^2 y - y^3 - 2y.$$

1) $\begin{matrix} y = -2 \\ x = -2 \,..\, +3 \end{matrix}$ $\qquad \begin{matrix} \varphi = x^3 - 14x - 4 \\ \psi = -6x^2 + 12. \end{matrix}$

2) $\begin{matrix} x = +3 \\ y = -2 \,..\, +2 \end{matrix}$ $\qquad \begin{matrix} \varphi = -9y^2 + 17 \\ \psi = -y^3 + 25y. \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} y = +2 \\ x = +3 \,...\, -2 \end{matrix}$ $\qquad \begin{matrix} \varphi = x^3 - 14x - 4 \\ \psi = 6x^2 - 12. \end{matrix}$

4) $\begin{matrix} x = -2 \\ y = +2 \,..\, -2 \end{matrix}$ $\qquad \begin{matrix} \varphi = 6y^2 - 8 \\ \psi = -y^3 + 10y. \end{matrix}$

1) Da der Grad von φ höher als der von ψ, so nehmen wir nach §. 14 statt φ den Rest, welcher bei der Division mit ψ bleibt.

$$-6x^2 + 12 : x^3 - 14x - 4 = -\tfrac{1}{6}x$$
$$\mp 2x$$
$$\overline{-12x - 4}$$

Dieser ist $-12x - 4$. Wir wenden nun die Operation des grössten gemeinschaftlichen Theilers an auf

$$\varphi^1 = -12x - 4 \text{ und } \psi = -6x^2 + 12 \text{ oder auf}$$
$$12x + 4 \text{ und } 6x^2 - 12.$$

$$12x + 4 : 6x^2 - 12 = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}$$
$$\pm 2x$$
$$\overline{-2x - 12}$$
$$\mp \tfrac{4}{6}$$
$$\overline{-11\tfrac{1}{3}}$$

Die Reihe $X\ X_1\ X_2$ . . ist also

$$6x^2 - 12, \qquad 12x + 4, \qquad -11\tfrac{1}{3}$$

und die Reihe $X\ X_1\ -X_2\ -X_3$ . . ist

$$6x^2 - 12, \qquad 12x + 4, \qquad +11\tfrac{1}{3}.$$

Für $x = -2$ haben wir

$+ - +$ 2 Zeichenwechsel;

für $x = +3$

$+ + +$ 0 Zeichenwechsel.

Somit beträgt der Ueberschuss für den ersten Quotienten 2.

2) Indem wir das Zeichen von φ und von ψ ändern, haben wir

$$\psi = y^3 - 25y \text{ und } \varphi = 9y^2 - 17$$
$$9y^2 - 17 : y^3 - 25y = \tfrac{1}{9}y$$
$$\mp \frac{17}{9} y$$
$$\overline{-23\tfrac{1}{9}y : 9y^2 - 17 = \frac{-9}{23\tfrac{1}{9}} y}$$
$$\overline{-17}$$

Die Reihe der Functionen ist also

$$y^3 - 25y,\quad 9y^2 - 17,\quad -23\tfrac{1}{9}y,\ -17$$

und mit den veränderten Zeichen

$$y^3 - 25y,\quad 9y^2 - 17,\quad 23\tfrac{1}{9}y,\quad 17.$$

Für $y = -2$ hat man

$$+ + - + \qquad 2 \text{ Wechsel,}$$

für $y = +2$

$$- + + + \qquad 1 \text{ Wechsel.}$$

Für den zweiten Quotienten ist der Ueberschuss also 1.

3) Der dritte Quotient ist von dem ersten nur durch das Vorzeichen verschieden. Da nun auch das Intervall $x = +3 \,..\, -2$ das umgekehrte von dem des ersten $x = -2 \,...\, +3$ ist, so muss sich genau derselbe Ueberschuss 2 ergeben wie beim ersten Quotienten.

4) $6y^2 - 8 : -y^3 + 10y = -\tfrac{1}{6}y$

$$\underline{\pm \tfrac{8}{6}y}$$

$$8\tfrac{2}{3}y : 6y^2 \underline{-8} = \frac{6}{8\tfrac{2}{3}}\,y.$$
$$-8$$

Die Reihe der Functionen ist also

$$-y^3 + 10y,\quad 6y^2 - 8,\quad 8\tfrac{2}{3}y,\quad -8$$

und mit den veränderten Vorzeichen

$$-y^3 + 10y,\quad 6y^2 - 8,\quad -8\tfrac{2}{3}y,\quad +8.$$

Für $y = +2$ hat man

$$+ + - + \qquad 2 \text{ Wechsel;}$$

für $y = -2$

$$- + + + \qquad 1 \text{ Wechsel.}$$

Ueberschuss 1.

Die 4 Ueberschüsse zusammen betragen $2 + 1 + 2 + 1 = 6$, die Hälfte davon ist 3. Es liegen also alle 3 Wurzeln unserer Gleichung in dem Rechteck $x = -2 \,..\, +3$, $y = -2 \,..\, +2$. In der That hat die Gleichung die Wurzeln

$$z_1 = 2;\quad z_2 = -1 + i;\quad z_3 = -1 - i.$$

II. Ueber die approximative Berechnung der Wurzeln.

§. 1. Lagrange hat in der Résolution des équations numériques die Newton'sche Näherungsmethode in Beziehung auf ihre Genauigkeit untersucht. Er hat sich aber die Aufgabe zu allgemein gestellt und ist deshalb nicht zu einem befriedigenden Resultate gekommen. Ihm war es nämlich um ein Kennzeichen zu thun, welches für einen jeden beliebigen Näherungswerth entscheiden sollte, ob der durch die Newton'sche Methode gegebene neue Näherungswerth auch wirklich der Wurzel näher komme als der alte, oder sich im Gegentheil weiter von ihr entferne.

Wenn man sich dagegen die Aufgabe enger stellt, nämlich nach Bedingungen sucht, unter welchen eine Annäherung an die Wurzel zuverlässig stattfindet, ohne alle möglichen Bedingungen erschöpfen zu wollen, und für diese Bedingungen den der Newton'schen Methode eigenthümlichen Grad der Approximation untersucht, so wird diese doppelte Aufgabe durch Inbetrachtnahme des dritten Gliedes der Taylor'schen Reihe mit Leichtigkeit gelöst. Und die Bedingungen, auf welche man hierbei kommt, lassen sich in jedem gegebenen Falle herbeiführen.

Fourier hat sich in seinem Werke Analyse des équations des dritten Gliedes der Taylor'schen Reihe in diesem Sinne bedient und hat mittels desselben Bedingungen für die Zuverlässigkeit der Approximation, sowie ein Gesetz dieser letzteren aufgestellt. Ein grosses Verdienst dieses Werkes besteht ferner in der darin gezeigten Reduction der arithmetischen Operationen, welche bei Berechnung der Wurzeln auszuführen sind, auf die unumgänglich nothwendigen. Der mehr algebraische Theil dieses Werkes, welcher die Trennung der Wurzeln behandelt und den nach Fourier benannten Lehrsatz über die Anzahl der zwischen zwei Grenzen fallenden Wurzeln enthält, ist freilich jetzt in wissenschaftlicher Hinsicht durch den Lehrsatz von Sturm antiquirt. Doch kann der Fourier'sche Satz wegen der viel grösseren Einfachheit der bei ihm erforderlichen Rechnungen, obgleich er nicht die Allgemeinheit des Sturm'schen Satzes darbietet, in vielen Fällen mit Vortheil angewandt werden.

§. 2. Eine von den Bedingungen, unter welchen der Grad der Approximation sicher beurtheilt werden kann, ist, dass eine gewisse ganze Function in einem gewissen Intervall der Variablen nicht verschwindet. Diess lässt sich zwar allgemein nur durch den Sturm'schen Satz erkennen; jedoch ist in diesem Falle das folgende viel einfachere Mittel ausreichend. Die ganze Function sei $f(x)$ und die Variable x bewege sich zwischen den Grenzen a und b, welche beide positiv sein mögen und von denen $a < b$ sei. Man fasse nun die Terme mit positiven Coëfficienten zusammen in $\varphi(x)$ und diejenigen mit negativen Coëfficienten zusammen in $-\psi(x)$, so dass $f x = \varphi x - \psi x$ ist und in φ und ψ nur positive Coëfficienten vorkommen. Es ist klar, dass man dann haben wird

$$\varphi a - \psi b < f x < \varphi b - \psi a,$$

dass also $f x$ in dem Intervall $x = a \ldots x = b$ nicht verschwinden kann, wenn $\varphi a - \psi b$ und $\varphi b - \psi a$ beide positiv oder beide negativ ausfallen.

Umgekehrt, wenn $f(x)$ für einen gewissen Werth α von x, der zwischen a und b liegt, nicht verschwindet, so werden auch nothwendig $\varphi a - \psi b$ und $\varphi b - \psi a$ beide positiv oder beide negativ ausfallen müssen, wenn nur das den Werth α einschliessende Intervall $a \ldots b$ hinlänglich enge ist.

Sind a und b beide negativ, so betrachte man die Function $f(-x)$, in welcher die Variable x nur positive Werthe zwischen den Grenzen $-a$ und $-b$ annimmt.

Der Fall, dass a und b verschiedene Vorzeichen haben, ist auch leicht zu beurtheilen, hat aber hier kein Interesse.

Auch abgesehen von der Frage, ob $f x$ verschwindet oder nicht, haben die Werthe $\varphi a - \psi b$ und $\varphi b - \psi a$ im Folgenden für uns grosses Interesse als zwei Grenzen, innerhalb welcher die Function $f x$ für das Intervall $a \ldots b$ der Variablen sicher eingeengt bleibt, ohne diese Grenzen selbst zu erreichen.

Bei der Anwendung der Newton'schen Methode auf Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten kommen ganze Functionen mehrerer Variablen in Betracht. Dort handelt es sich bei Beurtheilung der Approximation zunächst wieder darum, dass gewisse ganze Functionen von mehreren Variablen für gewisse Grenzen dieser Variablen nicht verschwinden. Es sei f (xyz . .) eine solche ganze Function, es seien ferner a und b die Grenzen für x, c und d die Grenzen für y, e und f die Grenzen für z u. s. w., wo wir wieder zunächst a und b, c und d, e und f . . sämmtlich als positiv voraussetzen. Indem man auch hier die Terme mit positiven Coëfficienten zusammenfasst in φ (xyz . .) und die anderen mit negativen Coëfficienten in $-\psi$ (x y z . .), so dass φ und ψ nur positive Coëfficienten haben und

$$f\,(xyz\,.\,.) = \varphi\,(xyz\,.\,.) - \psi\,(xyz\,.\,.)$$

wird, so ist sicher wieder für $a < b$, $c < d$, $e < f$ . .

$$\varphi\,(ace\,.\,.) - \psi\,(bdf\,.\,.) < f\,(xyz\,.\,.)$$
$$< \varphi\,(bdf\,.\,.) - \psi\,(ace\,.\,.),$$

und es kann f (xyz . .) innerhalb der assignirten Grenzen der Variablen nicht verschwinden, wenn die beiden äusseren Glieder dieser Ungleichung Werthe von demselben Vorzeichen erhalten.

Umgekehrt, wenn f (xyz . .) für $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ . . . nicht verschwindet und $\alpha\ \beta\ \gamma$ . . resp. zwischen a und b, c und d, e und f liegen, so werden auch nothwendig

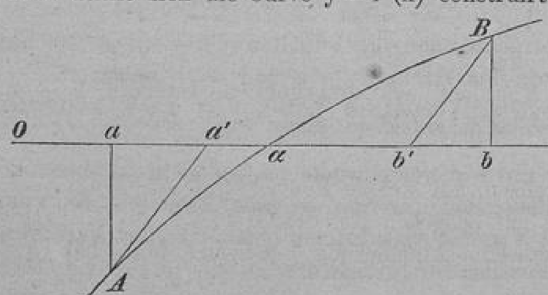
$$\varphi\,(ace\,.\,.) - \psi\,(bdf\,.\,.) \text{ und}$$
$$\varphi\,(bdf\,.\,.) - \psi\,(ace\,.\,.)$$

Werthe von demselben Vorzeichen annehmen, wenn nur die Intervalle a . . b, c . . d, e . . f etc. hinreichend enge sind.

In jedem Falle aber, mag die Function verschwinden oder nicht, sind uns diese beiden Grössen wichtig, weil f (xyz . .) für die assignirten Grenzen der Variablen nothwendig zwischen ihnen eingeengt bleibt, ohne sie selbst zu erreichen.

Wenn eine der Variablen z. B. x, oder mehrere, sich in einem Intervall negativer Werthe bewegt, so wird dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt, indem man f (— x, . .) betrachtet, wo nun die Variable x das positive Intervall — a . . — b hat.

§. 3. Fourier's Beurtheilung der Newton'schen Approximation, im Hinblick auf die geometrische Bedeutung derselben, ist folgende. Die aufzulösende Gleichung sei f (x) = 0 und a der Anfangswerth, von dem man ausgeht um die Wurzel α zu berechnen. Man denke sich die Curve y = f (x) construirt und an diese eine Tangente gelegt in dem



zur Abscisse x = a gehörenden Punkte A. Trifft die Tangente die Axe in a', so repräsentirt das Stück $aa' = \frac{-\,fa}{f'a}$ die Newton'sche Annäherung, welche in dem Falle der Figur eine wirkliche Annäherung ist. Fourier verlangt nun, dass man diesen Fall immer herbeiführe, indem man zuerst durch Trennung der

Wurzeln zwei Grenzen a und b für α sich verschaffen soll, innerhalb welcher die Curve weder höchste und tiefste Punkte noch Wendepunkte hat, innerhalb welcher also die erste und zweite Ableitung nicht verschwindet, und dann ausgehen soll bei der Annäherung von derjenigen Grenze, wo die Curve der Axe ihre Convexität zukehrt. Er sagt ausdrücklich, wie klein der Abstand der Grenzen immer sei, so könne doch das Approximationsverfahren nur auf diese eine Grenze mit Zuverlässigkeit angewandt werden, und nicht auf die andere.

Wenn man durch den Punkt B der Curve, welcher zu der Abscisse $x = b$ gehört, eine Parallele zu der Tangente Aa′ zieht, so schneidet diese Parallele die Axe in einem Punkte b′, der nothwendig zwischen b und α liegt. Somit bieten die Werthe $a' = a - \frac{fa}{f'a}$ und $b' = b - \frac{fb}{f'a}$ zwei engere Grenzen der Wurzel α dar als die anfänglichen a und b waren. Da

$$fb = fa + (b - a)\, f'a + \frac{(b - a)^2}{2}\, f''\,(a\,.\,.\,b),$$

so wird

$$b' - a' = \frac{-\,f''\,(a\,.\,.\,b)}{2\,f'a}\,(b - a)^2,$$

und der Newton'sche Näherungswerth $a' = a - \frac{fa}{f'a}$ entfernt sich somit von der Wurzel um weniger als

$$\frac{-\,f''\,(a\,.\,.\,b)}{2\,f'\,a}\,(b - a)^2$$

und a fortiori um weniger als

$$\frac{-\,m}{2n}\,(b - a)^2,$$

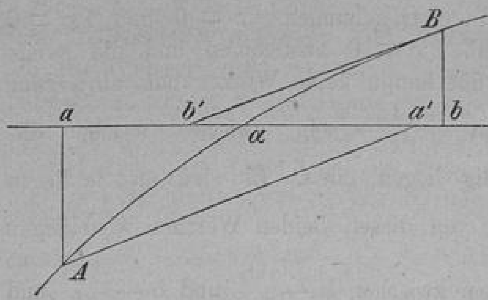
wenn man mit m den numerisch grössten Werth von f'' für das Intervall $a\,.\,.\,b$ der Variablen und mit n den numerisch kleinsten Werth von f' für dasselbe Intervall bezeichnet. Dass die erste und zweite Ableitung in diesem Intervall keine Wurzel haben, ist schon oben vorausgesetzt; Fourier verlangt zur Berechnung von m, dass auch die dritte Ableitung keine Wurzel darin hat.

Statt der neuen Grenzen a′ und b′ kann man also auch nehmen

$$a' \text{ und } a' - \frac{m}{2\,n}\,(b - a)^2,$$

und man sieht, dass deren Intervall an Kleinheit das ursprüngliche Intervall $b - a$ bedeutend übertreffen wird, wenn $b - a$ selbst schon klein genug war.

Die Unterscheidung der beiden Grenzen, auf welche Fourier grossen Werth legt, ist jedoch nicht nöthig. Man kann ebenso gut ausgehen von der Grenze b, wo die Curve gegen die Axe concav ist, und wird zu derselben Annäherung gelangen. Man hat jetzt



$b' = b - \frac{fb}{f'b}$ und $a' = a - \frac{fa}{f'b}$; $fa = fb + (a - b)\ f'b + \frac{(a-b)^2}{2}\ f''\ (b\ .\ .\ a)$,

folglich

$$a' - b' = \frac{- f''\ (b\ .\ .\ a)}{2f'b}\ (b - a)^2,$$

so dass wieder

$$b' \text{ und } b' - \frac{m}{2n}\ (b - a)^2$$

zwei Grenzen der Wurzel sein werden, deren Intervall dem obigen genau gleich kommt.

§. 4. Die Anwendung der Newton'schen Methode auf Gleichungen mit zwei Unbekannten besteht in Folgendem. Sind $f\ (xy) = 0$ und $\varphi\ (xy) = 0$ die beiden aufzulösenden Gleichungen, α und β das zu berechnende Wurzelpaar, ferner a und b bekannte Näherungswerthe dieser Wurzeln, so zieht man Annäherungen h und k aus den beiden linearen Gleichungen

$$fab + h\ f'ab + k\ f_{,}ab = 0$$
$$\varphi ab + h\ \varphi' ab + k\ \varphi_{,} ab = 0.$$

Die Werthe $a + h$ und $b + k$ sind dann die neuen Näherungswerthe für α und β, und die Frage ist, ob sie und um wie viel sie genauer sein werden als a und b.

Die geometrische Bedeutung dieses Verfahrens ist folgende. Man denke sich die Flächen $z = fxy$ und $z = \varphi xy$ construirt und Tangentialebenen an dieselben gelegt in den Punkten, welche zu $x = a$, $y = b$ gehören. Der Punkt $x = a + h$, $y = b + k$ ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser beiden Tangentialebenen und der Ebene xy. Es lässt sich aber im Allgemeinen aus der geometrischen Darstellung nicht erkennen, ob $a + h$ oder $b + k$ resp. zwischen a und α, b und β liegen werden oder nicht.

Fourier hat eine Ausdehnung seiner Verbesserung der Newton'schen Methode auf Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten weder gelehrt, noch in dem sehr ausführlichen Plane seines unvollendet gebliebenen Werkes überhaupt davon geredet. Wir wollen die Fourier'sche Verbesserung jetzt rein analytisch betrachten um nachher zu sehen, in wiefern sich dieselbe auf solche Gleichungen übertragen lässt.

Es sei wieder α die gesuchte Wurzel der Gleichung $fx = 0$ und a ein bekannter Näherungswerth. Da $f\alpha = 0$ werden soll, so hat man durch Entwicklung von $f\ (a + \alpha - a)$:

$$fa + (\alpha - a)\ f'\ (a\ .\ .\ \alpha) = 0,$$

$$\alpha - a = \frac{- fa}{f'\ (a\ .\ .\ \alpha)}$$

Es ist demnach $\alpha - a$ ein specieller Werth der Function $\frac{- fa}{f'x}$, in welcher die Variable x von a bis zu einer zweiten Grenze b der Wurzel α geht. Diese Function verschwindet nicht, und sie wird immer endlich und entweder durchweg positiv oder durchweg negativ sein, wenn $f'x$ zwischen $x = a$ und $x = b$ keine Wurzel hat. Diess lässt sich durch Zusammenziehen der Grenzen a und b immer erreichen, den besonderen

Fall ausgenommen, wo die gesuchte Wurzel α den Gleichungen $fx = 0$ und $f'x = 0$ gemeinschaftlich ist. Wenn wir noch den Fall $f''\alpha = 0$ ausnehmen und die zweite Ableitung $f''x$ innerhalb der Grenzen a und b überhaupt keine Wurzel hat, so werden $\frac{-fa}{f'a}$ und $\frac{-fa}{f'b}$ die extremen Werthe von $\frac{-fa}{f'x}$ sein, zwischen welchen die unbekannte genaue Ergänzung $\alpha - a$ nothwendig liegen muss. Es wird also α liegen zwischen $a - \frac{fa}{f'a}$ und $a - \frac{fa}{f'b}$, und der eine von diesen beiden Werthen wird liegen zwischen α und a. Ebenso wird α liegen müssen zwischen $b - \frac{fb}{f'b}$ und $b - \frac{fb}{f'a}$, und wieder wird der eine von diesen beiden Werthen liegen zwischen α und b, und zwar so, dass auch α zwischen $a - \frac{fa}{f'a}$ und $b - \frac{fb}{f'a}$ fällt, wie auch zwischen $b - \frac{fb}{f'b}$ und $a - \frac{fa}{f'b}$. Das Intervall dieser beiden letzteren Paare von Grenzen ist, wie wir gesehen haben, kleiner als $\frac{m}{2n}(b-a)^2$.

Für Gleichungen mit zwei Unbekannten zeigt die Entwicklung von

$$f(a + \alpha - a,\ b + \beta - b) = 0$$
$$\varphi(a + \alpha - a,\ b + \beta - b) = 0,$$

dass $\alpha - a$ ein specieller Werth ist von

$$H_{ab} = \frac{\varphi\, ab\, f_{,}\, xy - f\, ab\, \varphi_{,}\, \xi\eta}{f'\, xy\, \varphi_{,}\, \xi\eta - f_{,}\, xy\, \varphi'\, \xi\eta},$$

$\beta - b$ ein specieller Werth von

$$K_{ab} = \frac{f\, ab\, \varphi'\, \xi\eta - \varphi\, ab\, f'\, xy}{f'\, xy\, \varphi_{,}\, \xi\eta - f_{,}\, xy\, \varphi'\, \xi\eta}.$$

In den Grössen H und K müssen x und ξ, y und η als unabhängige Variablen betrachtet werden, erstere beiden zwischen a und einer zweiten Grenze c für α, letztere beiden zwischen b und einer zweiten Grenze d für β. Die nach x oder ξ genommenen Ableitungen sind mit f' oder φ' bezeichnet, die nach y oder η genommenen mit $f_{,}$ oder $\varphi_{,}$.

Es würde sich nun um die extremen Werthe der Grössen H und K innerhalb der assignirten Grenzen der Variablen handeln. Mit Ausschliessung des besonderen Falles, wo

$$f'\, \alpha\beta\, \varphi_{,}\, \alpha\beta - f_{,}\, \alpha\beta\, \varphi'\, \alpha\beta = 0$$

ist, wird es sich durch Zusammenziehen der Grenzen a und c, b und d immer erreichen lassen, dass der gemeinschaftliche Nenner für H und K innerhalb dieser Grenzen nicht verschwindet. Bilden wir die Quotienten $\frac{f_{,}\, xy}{\varphi_{,}\, \xi\eta}$ und $\frac{f'\, xy}{\varphi'\, \xi\eta}$. Es seien m und n, p und q die extremen Werthe derselben innerhalb der vorliegenden Grenzen der Variablen, die wir resp. von gleichen Vorzeichen voraussetzen können, so nämlich, dass $mn > 0$ $pq > 0$. Der Zähler von H wird dann nicht verschwinden können sobald $\frac{fab}{\varphi ab}$ ausserhalb m ... n liegt, und der Zähler von K nicht, wenn $\frac{fab}{\varphi ab}$ ausserhalb p . . q liegt. Mit Ausnahme dieses Falles bietet also die Function H eine stetige Reihe endlicher Werthe dar, die entweder nur positiv oder nur negativ sind, ebenso die Function K. Sollen nun die extremen Werthe dieser Functionen ermittelt werden, so ist die Bildung ihrer 4 ersten Ableitungen nöthig und die Untersuchung, ob keine von diesen Ableitungen innerhalb der assignirten Grenzen der Variablen verschwindet. Hierbei stellen sich 4 neue Intervalle heraus, ausserhalb welcher $\frac{fab}{\varphi ab}$ liegen muss, wenn keine der Ableitungen verschwinden soll. Wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, so werden sich die extremen Werthe für H oder K angeben lassen. Ist z. B. die nach x genommene Ableitung von H positiv, und sind die drei anderen negativ, so wird

$$h_{ab} = \frac{\varphi\ ab\ f,\ ad - f\ ab\ \varphi,\ cd}{f'\ ad\ \varphi,\ cd - f,\ ad\ \varphi'\ cd}$$

der kleinste Werth der positiven Function H_{ab} (für a $<$ α) sein.

Der Werth a + h_{ab} hat folgende geometrische Bedeutung. Denkt man sich durch den Punkt x = a, y = b, z = fab eine Ebene gelegt parallel zu der Tangentialebene der Fläche z = fxy in dem Punkte a, d, f (ad), ferner durch den Punkt a, b, φab eine Ebene parallel zu der Tangentialebene in dem Punkte c, d, φcd der Fläche z = φxy, so hat der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser beiden Ebenen mit der Ebene xy die Coordinate x = a + h_{ab}.

Nun würden auch die zu den Anfangswerthen c und d gehörigen Functionen H_{cd} und K_{cd} zu betrachten und deren extreme Werthe zu ermitteln sein. Hätte man so für beide Wurzeln α und β die neuen Grenzen a + h_{ab} und c + h_{cd}, b + k_{ab} und d + k_{cd} ausgedrückt, so würde es sich darum handeln ihre Intervalle durch die anfänglichen c — a und d — b auszudrücken, um die Genauigkeit von a + h_{ab} oder b + k_{ab} ohne Berechnung der zweiten Grenze beurtheilen zu können. Statt der Functionen H_{cd} K_{cd} könnte man auch resp. H_{cb} K_{ad} nehmen.

Man sieht, dass man auf diese Ausdehnung der Fourier'schen Verbesserung verzichten muss wegen ihrer viel zu grossen Beschwerlichkeit.

§. 5. Viel einfacher wäre es, sich der in §. 2 bezeichneten Grenzwerthe zu bedienen, die durch Verkleinerung der positiven und Vergrösserung der negativen, dann umgekehrt durch Vergrösserung der positiven und Verkleinerung der negativen Terme erhalten werden, und im Falle die Functionen H oder K nicht verschwinden, den numerisch kleinsten Werth des Zählers zu dividiren durch den numerisch grössten Werth des Nenners.

Dieses Verfahrens kann man sich auch bedienen bei einer Gleichung. Diese sei fx = 0, die zu berechnende Wurzel sei α. Wir können α als positiv voraussetzen, da wir andernfalls nur die Gleichung f (— x) = 0 nehmen dürfen. Von den positiven Grenzen a und b für α sei a $<$ b. Zerlegen wir fx in φx — ψx, so dass φ und ψ nur positive Coëfficienten enthalten. Die Grenzen a und b seien hinlänglich enge, damit die Grenzwerthe $\varphi' a - \psi' b$ und $\varphi' b - \psi' a$ einerlei Vorzeichen haben. Dieses sei z. B. $+$, also $\varphi' b - \psi' a$ der grössere Werth. Es werden dann

$$a - \frac{fa}{\varphi' b - \psi' a} \text{ und } b - \frac{fb}{\varphi' b - \psi' a}$$

zwei engere Grenzen der Wurzel α sein. Ihr Intervall, welches sich als

$$\frac{\varphi''(a\,.\,.\,b) - \frac{1}{2} f''(a\,.\,.\,b)}{\varphi' b - \psi' a} (b - a)^2$$

ergiebt, ist kleiner als

$$\frac{\varphi'' b + \frac{1}{2}\psi'' b - \frac{1}{2}\varphi'' a}{\varphi' a - \psi' b} (b - a)^2.$$

Ein ganz ähnliches Intervall ergiebt sich für

$$b - \frac{fb}{\varphi' a - \psi' b} \text{ und } a - \frac{fa}{\varphi' a - \psi' b}$$

Bei zwei Gleichungen $fxy = 0$ $\varphi xy = 0$ können wir die zu berechnenden Wurzeln α β und somit auch ihre bekannten Grenzen a und c, b und d ebenfalls als positiv voraussetzen, und es sei wieder $a < c$, $b < d$. Es sei

$$f(xy) = \lambda(xy) - \mu(xy)$$
$$\varphi(xy) = \nu(xy) - \pi(xy),$$

wo λ μ ν π nur positive Coëfficienten enthalten. Der gemeinschaftliche Nenner der Functionen H und K hat dann die Grenzwerthe

$$P(ab) - Q(cd) \text{ und } P(cd) - Q(ab),$$
$$\text{wo } P = \lambda' \nu_, + \lambda_, \pi' + \mu_, \nu' + \mu' \pi_,$$
$$Q = \lambda' \pi_, + \lambda_, \nu' + \mu_, \pi' + \mu' \nu_,.$$

Diese werden für Intervalle a . . c, b . . d, die hinlänglich enge sind, was wir hier voraussetzen, einerlei Zeichen haben. Dasselbe sei z. B. $+$, so ist

$$P(cd) - Q(ab)$$

der numerisch grösste Werth des Nenners.

Wenn $\frac{fab}{\varphi ab}$ nicht in dem in §. 4 durch m . . n bezeichneten Intervalle liegt, so wird die Function H_{ab} nicht verschwinden, sondern sie wird durchweg positiv sein. Ihr Zähler

$$\varphi ab\; f_,xy - fab\; \varphi_,\xi\eta$$

wird also auch positiv sein, da der Nenner positiv ist. Folglich kann nicht gleichzeitig φab entgegengesetztes Vorzeichen mit $f_,xy$ haben und fab gleiches mit $\varphi_,\xi\eta$. Sonach bleiben für die Vorzeichen von φab und fab nur 3 Möglichkeiten. Von dem Eintreten dieser Möglichkeiten wird aber der Ausdruck des numerisch kleinsten Werthes für den Zähler abhängen. Sind z. B. φab und fab beide $+$, so ist

$$\varphi ab\; \lambda_,ab + fab\; \pi_,ab - \varphi ab\; \mu_,cd - fab\; \nu_,cd$$

dieser Werth. Ist dagegen fab $-$, so wird derselbe

$$\varphi ab\; \lambda_,ab - fab\; \nu_,ab - \varphi ab\; \mu_,cd + fab\; \pi_,cd.$$

Es sind also 3 verschiedene Ausdrücke möglich für den numerisch kleinsten Werth h_{ab} von H_{ab}. Ebenso werden 3 verschiedene Ausdrücke möglich sein für den numerisch kleinsten Werth von H_{cd} oder H_{cb}. Durch Combination dieser Möglichkeiten entstehen 9 Fälle, für welche die Differenz

$$c + h_{cd} - a - h_{ab}$$

durch $c - a$ und $d - b$ auszudrücken wäre, um immer a priori zu wissen, auf welche Genauigkeit man bei Berechnung von $a + h_{ab}$ zu rechnen hat. Diese Differenz würde sich durch $c - a$ und $d - b$ quadratisch ausdrücken.

Man sieht, dass auch dieser Weg viel zu beschwerlich ist und dass man besser thun würde, beide Werthe $a + h_{ab}$ und $c + h_{cd}$ oder $c + h_{cb}$ zu berechnen, die nothwendig zwei Grenzen für α bilden und deren gemeinschaftliche Ziffern also der Wurzel α selbst angehören.

An Stelle von h_{cd} könnte man auch den numerisch grössten Werth von H_{ab} berechnen, sowie man bei einer Gleichung als Grenzen für α nehmen kann

$$a - \frac{fa}{\varphi'b - \psi'a} \text{ und } a - \frac{fa}{\varphi'a - \psi'b}.$$

§. 6. In 4 und 5 war es uns um die Berechnung der extremen Werthe für die Functionen H und K zu thun und um Ermittelung ihrer Genauigkeit. Da wir nicht zu befriedigenden Resultaten gelangt sind, so wollen wir jetzt noch einmal die Untersuchung der Genauigkeit der Newton'schen Methode für eine Gleichung aufnehmen und dabei zwei andere Wege betreten, die uns zu Resultaten führen werden, welche einander ergänzen und die Aufgabe erledigen. Diese Wege werden auch bei zwei Gleichungen zu dem erwünschten Ziele führen.

Wir haben den Anfangswerth a; wir ziehen die Newton'sche Annäherung h aus der Gleichung $fa + h\,f'a = 0$ und stellen uns die Frage: wie gross wird $\alpha - a - h$ sein, d. h. zwischen welchen Grenzen wird $\alpha - a - h$ liegen? Die Entwicklung von $f(a + h + \alpha - a - h) = 0$ giebt

$$\alpha - a - h = \frac{-f(a+h)}{f'(a+h\ldots\alpha)};$$

es ist aber

$$f(a+h) = \frac{h^2}{2} f''(a\ldots a+h),$$

also

$$\alpha - a - h = \frac{-f''(a\ldots a+h)}{2\,f'(a+h\ldots\alpha)}\,h^2.$$

Wenn also $a + h$ innerhalb der anfänglichen Grenzen a und b für α fällt, so ist $\alpha - a - h$ ein specieller Werth der Grösse

$$\frac{-f''y}{2\,f'x}\,h^2,$$

in welcher die unabhängigen Variablen x und y zwischen a und b bleiben.

Es handelt sich also jetzt um die extremen Werthe dieser Grösse. Mit Ausschliessung des Falles, dass $f'\alpha = 0$ ist, setzen wir die Grenzen a und b so enge voraus, dass $f'x$ nicht verschwindet und dass die Grenzwerthe $\varphi'a - \psi'b$ und $\varphi'b - \psi'a$ dasselbe Vorzeichen haben. Für die zweite Ableitung f'' ist keine Bedingung zu machen nöthig.

Der Nenner eines Bruches liege zwischen den Grenzen p und q, und es sei $p < q$; beide mögen positiv sein, da man den nicht verschwindenden Nenner immer positiv machen kann. Der Zähler liege zwischen den Grenzen m und n, und es sei algebraisch $m < n$. Die Grenzwerthe des Bruches sind dann

$$\frac{m}{p} < \frac{n}{q}, \text{ wenn m und n negativ sind;}$$
$$\frac{m}{p} < \frac{n}{p}, \text{ wenn m — und n + ist;}$$
$$\frac{m}{q} < \frac{n}{p}, \text{ wenn m und n + sind.}$$

Hiernach sind die Grenzwerthe M und N von $\frac{-f''y}{2\,f'x}$ zu berechnen, von denen wieder algebraisch $M < N$ sei. Es ist dann

$$Mh^2 < \alpha - a - h < Nh^2,$$

also wenn $h_1{}^2 < h^2 < h_2{}^2$,

$$1)\ Mh_2{}^2 < \alpha - a - h < Nh_1{}^2$$
für M und N —;
$$2)\ Mh_2{}^2 < \alpha - a - h < Nh_2{}^2$$
für M — und N +;
$$3)\ Mh_1{}^2 < \alpha - a - h < Nh_2{}^2$$
für M und N +.

Wir finden somit durch den Werth $a + h$ zwei neue Grenzen der Wurzel, deren Intervall im ersten Falle $Nh_1{}^2 - Mh_2{}^2$ beträgt; ihr Intervall beträgt dagegen im zweiten Falle $(N - M)\,h_2{}^2$, und ferner im dritten Falle $Nh_2{}^2 - Mh_1{}^2$. Doch vergrössert sich das Intervall noch um eine Einheit derjenigen Decimalstelle, mit welcher man den Werth von h abbricht.

Fiele $a + h$ ausserhalb des Intervalls $a\,.\,.\,b$, so könnte man die Untersuchung von $\frac{-f''y}{2\,f'x}$ in dem bis zu $a + h$ erweiterten Intervalle vornehmen. Jedoch wird man in diesem Falle lieber das folgende Verfahren anwenden, das übrigens auch allgemein ist.

Die Entwicklung von $f\,(a + \alpha - a) = 0$ giebt

$$fa + (\alpha - a)\,f'a + \frac{(\alpha - a)^2}{2}\,f''\,(a\,.\,.\,\alpha) = 0,$$

$$\alpha - a - h = \frac{-f''\,(a\,.\,.\,\alpha)}{2\,f'a}\,(\alpha - a)^2.$$

Man hat also, indem M und N ganz ihre obigen Bedeutungen und Werthe behalten:

$$1)\ M\,(b - a)^2 < \alpha - a - h < 0;$$
$$2)\ M\,(b - a)^2 < \alpha - a - h < N\,(b - a)^2;$$
$$3)\ 0 < \alpha - a - h < N\,(b - a)^2.$$

Als Beispiel wenden wir das Vorhergehende an auf die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

welche auch von Fourier aufgelöst worden ist. Die einzige reelle Wurzel derselben liegt zwischen 2 und 2, 1. Man findet für dieses Intervall

$$M = -\,0,\,63 \qquad N = -\,0,\,53.$$

Für a = 2 erhält man a + h genau gleich 2, 1, folglich ist

$$-0{,}\ 0063 < \alpha - a - h < -0{,}\ 0053$$

und

$$2{,}\ 0937 < \alpha < 2{,}\ 0947.$$

Hätte man als Grenzen 2 und 2, 095 genommen, so läge der Fall vor, dass die Approximation mit a = 2 über die andere Grenze hinausführt. Man würde sich nun der Correction bedienen

$$-0{,}\ 63\ .\ 0{,}\ 095^2 < \alpha - 2{,}\ 1$$

d. i.

$$-0{,}\ 0057 < \alpha - 2{,}\ 1,$$

so dass

$$2{,}\ 0943 < \alpha < 2{,}\ 095.$$

Wir wünschen eine Vergleichung der Genauigkeit, welche durch die oben angegebene Correction erreicht wird, mit der von Fourier erreichten, und gehen deshalb jetzt nicht von einer der schon gefundenen engeren Grenzen 2, 0943 und 2, 0947 aus, sondern wie Fourier von 2, 1. Es wird

$$-0{,}\ 006 < h < -0{,}\ 005,$$
$$-0{,}\ 0000\ 23 < \alpha - a - h < -0{,}\ 0000\ 1.$$

Da nun

$$a + h = 2{,}\ 094568\ ..,$$

so ist

$$2{,}\ 09454 < \alpha < 2{,}\ 09456.$$

Bei der zweiten Approximation wird für a = 2, 09454

$$0{,}\ 0000\ 11 < h < 0{,}\ 0000\ 12,$$
$$-0{,}\ 0^{10}91 < \alpha - a - h < -0{,}\ 0^{10}64.$$

Nun wird

$$a + h = 2{,}\ 09455\ 14816\ 16\ ..,$$

also liegt α zwischen

$$2{,}\ 09455\ 14815\ 2$$
$$\text{und}\ 2{,}\ 09455\ 14815\ 6.$$

Durch die dritte Approximation würden wir die Wurzel auf mehr als 20, durch die vierte auf mehr als 40, durch die fünfte auf mehr als 80 Decimalstellen genau finden, während Fourier durch seine Correction mittels fünfmaliger Approximation nur 32 genaue Stellen findet.

Uebrigens können wir die Convergenz der Approximation noch bedeutend erhöhen indem wir die Werthe M und N nicht constant = — 0, 63 und — 0, 53 lassen, sondern sie jedesmal für das engere Grenzenintervall neu berechnen. Es sind zu diesem Zwecke nur solche Rechnungen erforderlich, die ohnehin zur Bestimmung von h gemacht werden.

Für das zweite Intervall 2, 09454 . . . 2, 09456 wird

$$M = -0{,}\ 56299$$
$$N = -0{,}\ 56297,$$

daher

$$(N - M)\ h^2 < 0{,}\ 0000\ 2\ h^2$$
$$< 0{,}\ 0000\ 2\ .\ 0{,}\ 0^9 144 < 0{,}\ 0^{14}3.$$

Hieraus sieht man, dass, indem man die Division, welche den Werth von $a + h$ ergiebt und die oben mit der zwölften Stelle abgebrochen wurde, bis zur 15ten incl. fortsetzt, man mittels der Correctionen

$$-0,56299\, h_2^2 \text{ und } -0,56297\, h_1^2$$

zwei Grenzen der Wurzel erhalten wird, deren Intervall 4 Einheiten der 15ten Decimalstelle beträgt. Doch darf man zu diesem Zwecke nicht nehmen

$$h_1 = 0,0000\,11 \quad h_2 = 0,0000\,12,$$

also

$$h_1^2 = 0,0^9121 \quad h_2^2 = 0,0^9144,$$

sondern h_1^2 und h_2^2 müssen mittels so vieler Stellen von h berechnet werden, dass sie sich erst in der 16ten oder 17ten Stelle unterscheiden.

Nehmen wir

$$h_1^2 = 0,0^9 13182751$$
$$h_2^2 = 0,0^9 13182754,$$

dann wird

$$-0,0^{10}\,74218 < \alpha - a - h$$
$$< -0,0^{10}74215.$$

Aus

$$a + h = 2,09455\;\;14816\;\;16542\,..$$

folgt also, dass α zwischen

$$2,09455\;\;14815\;\;42324$$
$$\text{und } 2,09455\;\;14815\;\;42328$$

liegt.

Mit Benutzung dieser Correction würde nach der dritten Approximation erst etwa die 45te, nach der vierten die 135te, nach der fünften die 405te Stelle ungenau sein.

Sie gewährt also den grossen Vortheil, dass man, beinahe ohne neue Rechnung, eine eben so starke Approximation erhält, als ob man die Annäherung aus der quadratischen Gleichung

$$fa + hf'a + \frac{h^2}{2} f''a = 0$$

gezogen hätte.

§. 7. Das in 6 gezeigte Verfahren überträgt sich ohne Schwierigkeit auf Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Die bekannten Näherungswerthe der Wurzeln α und β seien a und b. Man zieht die Newton'schen Annäherungen h und k aus den Gleichungen

$$fab + hf'ab + kf_{,}ab = 0$$
$$\varphi ab + h\varphi' ab + k\varphi_{,}ab = 0.$$

Beurtheilt werden soll die Genauigkeit von $a + h = a_1$ und $b + k = b_1$ d. i. die Grösse von $\alpha - a - h$ und $\beta - b - k$.

Durch Entwicklung der Gleichungen

$$f\,(a_1 + \alpha - a_1,\, b_1 + \beta - b_1) = 0$$
$$\varphi\,(a_1 + \alpha - a_1,\, b_1 + \beta - b_1) = 0$$

erhält man

$$\alpha - a - h = \frac{\varphi a_1 b_1 \; f_{\prime}xy - fa_1 b_1 \; \varphi_{\prime}\xi\eta}{f'xy \; \varphi_{\prime}\xi\eta - f_{\prime}xy \; \varphi'\xi\eta}$$

$$\beta - b - k = \frac{fa_1 b_1 \; \varphi'\xi\eta - \varphi a_1 b_1 \; f'xy}{f'xy \; \varphi_{\prime}\xi\eta - f_{\prime}xy \; \varphi'\xi\eta}.$$

Hier bezeichnen x und ξ unbekannte Werthe zwischen $a + h$ und α, ebenso y und η unbekannte Werthe zwischen $b + k$ und β. Ferner hat man

$$fa_1 b_1 = \frac{h^2}{2} f''x_1 y_1 + hk \; f'_{\prime}x_1 y_1 + \frac{k^2}{2} f_{\prime\prime}x_1 y_1$$

$$\varphi a_1 b_1 = \frac{h^2}{2} \varphi''\xi_1\eta_1 + hk \; \varphi'_{\prime}\xi_1\eta_1 + \frac{k^2}{2} \varphi_{\prime\prime}\xi_1\eta_1.$$

Hier sind x_1 ξ_1 neue unbekannte Werthe zwischen a und $a + h$, ebenso y_1 und η_1 neue unbekannte Werthe zwischen b und $b + k$. Durch Einsetzen von $fa_1 b_1$ und $\varphi a_1 b_1$ in $\alpha - a - h$ und $\beta - b - k$ erhält man

$$\alpha - a - h = Ah^2 + Bhk + Ck^2$$

$$\beta - b - k = Dh^2 + Ehk + Fk^2.$$

Die Coëfficienten A B C D E F sind gebrochene Functionen der 8 Variablen x y x_1 y_1 ξ η ξ_1 η_1 mit dem gemeinschaftlichen Nenner

$$f'xy \; \varphi_{\prime}\xi\eta - f_{\prime}xy \; \varphi'\xi\eta.$$

Der Zähler von A ist z. B.

$$\tfrac{1}{2} \varphi''\xi_1\eta_1 \; f_{\prime}xy - \tfrac{1}{2} f''x_1 y_1 \; \varphi_{\prime}\xi\eta.$$

Wenn $a + h$ zwischen die Grenzen a und c für α fällt, $b + k$ zwischen die Grenzen b und d für β, so sind also $\alpha - a - h$ und $\beta - b - k$ specielle Werthe der Grössen

$$Ah^2 + Bhk + Ck^2$$

$$Dh^2 + Ehk + Fk^2,$$

während die Variablen x x_1 ξ ξ_1 zwischen a und c bleiben, die Variablen y y_1 η η_1 zwischen b und d.

Den Fall, dass

$$f'\alpha\beta \; \varphi_{\prime}\alpha\beta - f_{\prime}\alpha\beta \; \varphi'\alpha\beta = 0$$

ist, schliessen wir aus, und die Grenzen a und c, b und d müssen enge genug sein, damit der gemeinschaftliche Nenner nicht verschwindet.

Man hat nun in der Weise, wie diess in 2 und 6 näher angedeutet ist, die Grenzwerthe von A B C D E F zu berechnen. Aus ihnen und h_1 h_2 k_1 k_2 ergeben sich unmittelbar die Grenzen für $\alpha - a - h$ und $\beta - b - k$ und mittels derselben aus $a + h$ und $b + k$ die neuen engeren Grenzen für α und β.

Zum Behufe der zweiten Approximation ist es dann vortheilhaft, dass man die Grenzwerthe von A B C D E F für die engeren Intervalle berechnet, welche das Resultat der ersten Approximation sind.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass wenn die Grenzen a und c, b und d hinlänglich enge sind, entweder $\alpha - a - h$ nothwendig von höherer Decimalordnung ausfällt als h oder $\beta - b - k$ nothwendig von höherer Ordnung als k. Es hängt diess von dem mit a und b sehr variablen Werthe des Quotienten $\frac{h}{k}$ ab.

Auch das zweite in 6 gezeigte Verfahren überträgt sich mit Leichtigkeit auf den Fall zweier Gleichungen.

Die Entwicklung von

$$f(a + \alpha - a, b + \beta - b) = 0$$
$$\varphi(a + \alpha - a, b + \beta - b) = 0$$

bis zum zweiten Grade giebt

$$0 = fab + (\alpha - a) f'ab + \frac{(\alpha - a)^2}{2} f''xy$$
$$+ (\beta - b) f_{,}ab + (\alpha - a)(\beta - b) f'_{,}xy$$
$$+ \frac{(\beta - b)^2}{2} f_{,,}xy$$

$$0 = \varphi ab + (\alpha - a) \varphi' ab + \frac{(\alpha - a)^2}{2} \varphi'' \xi\eta$$
$$+ (\beta - b) \varphi_{,} ab + (\alpha - a)(\beta - b) \varphi'_{,} \xi\eta$$
$$+ \frac{(\beta - b)^2}{2} \varphi_{,,} \xi\eta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\alpha - a - h =$$
$$\mathfrak{A}(\alpha - a)^2 + \mathfrak{B}(\alpha - a)(\beta - b) + \mathfrak{C}(\beta - b)^2$$
$$\beta - b - k =$$
$$\mathfrak{D}(\alpha - a)^2 + \mathfrak{E}(\alpha - a)(\beta - b) + \mathfrak{F}(\beta - b)^2.$$

$\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{E}\ \mathfrak{F}$ sind gebrochene Functionen mit dem gemeinschaftlichen Nenner

$$f'ab\ \varphi_{,}ab - f_{,}ab\ \varphi'ab.$$

Der Zähler von $\mathfrak{A}$ z. B. ist

$$\tfrac{1}{2} \varphi'' \xi\eta\ f_{,}ab - \tfrac{1}{2} f''xy\ \varphi_{,}ab.$$

Diese Functionen mit den Variablen $x\ \xi$ zwischen a und c, $y\ \eta$ zwischen b und d sind aber nur specielle Fälle der obigen allgemeineren Functionen A B C D E F mit 8 Variablen. Es bedarf also auch nur der obigen Grenzwerthe um aus diesen und den Grenzen 0 und $c - a$ für $\alpha - a$, 0 und $d - b$ für $\beta - b$ die Grenzen für $\alpha - a - h$ und $\beta - b - k$ zu berechnen, deren wir uns in jedem Falle bedienen können, aber besonders dann mit Vortheil bedienen werden, wenn $a + h$ ausserhalb a . . c oder $b + k$ ausserhalb b . . d fallen sollte.

Wäre die eine Wurzel in sehr viel engere Grenzen eingeschlossen als die andere, so würde die Annäherung an letztere stattfinden. Diess folgt aus den obigen Ausdrücken für $\alpha - a - h$ und $\beta - b - k$ durch $(c - a)^2$, $(c - a)(d - b)$, $(d - b)^2$.

Als Beispiel mögen berechnet werden die beiden Auflösungen α und β der Gleichungen

$$x^3 - y^3 - 2x^2 + 4xy = 0$$
$$xy^2 + x^2 - y^2 = 0,$$

welche liegen resp. zwischen

0, 77 und 0, 78 1, 62 und 1, 63.

Die Grenzwerthe für A B C, D E F werden in diesen Intervallen der Variablen resp.

$-0,33$ nnd $-0,24$; $-0,88$ und $-0,69$;
$-0,20$ und $-0,11$;
$-0,28$ und $-0,20$; $-0,04$ und $+0,02$;
$-1,31$ und $-1,06$.

Bei der ersten Approximation wird nun für $a = 0,77$ und $b = 1,62$

$$0,003 < h < 0,004$$
$$0,005 < k < 0,006,$$

daher

$$-0,00004 < \alpha - a_1 < -0,00001$$
$$-0,00006 < \beta - b_1 < -0,00002.$$

Da sich ergiebt

$$a_1 = 0,77359 \ldots$$
$$b_1 = 1,62572 \ldots,$$

so ist

$$0,77355 < \alpha < 0,77359$$
$$1,62566 < \beta < 1,62571.$$

Bei der zweiten Approximation wird, indem man von den kleinsten Werthen ausgeht,

$$0,000021 < h < 0,000022$$
$$0,000021 < k < 0,000022,$$

deshalb

$$-0,0^97 < \alpha - a_1 < -0,0^94$$
$$-0,0^98 < \beta - b_1 < -0,0^95.$$

Es ergeben sich

$$a_1 = 0,77357\ 17770 \ldots$$
$$b_1 = 1,62568\ 10257 \ldots,$$

daher

$$0,77357\ 17763 < \alpha < 0,77357\ 17767$$
$$1,62568\ 10249 < \beta < 1,62568\ 10253.$$

Eine grössere Genauigkeit würde man mittels der zweiten Approximation erreichen, wenn man wie bei dem früheren Beispiel die Grenzwerthe für A B C D E F für die durch die erste Approximation erhaltenen engeren Intervalle neu berechnete.