Erste Fortsetzung

der

Sammlung

stufenmässig geordneter und vollständig berechneter Aufgaben aus der reinen Differenzialrechnung

von

H. G. Doerk,
Königl. Professor.

---

§ 42. Beispiele zur Differenziation der impliciten Functionen.

1) Gegeben sei die Gleichung (implicite Function)

$$0 = y^3 + x^3 - 3\,a\,x\,y,$$

so ist, wenn man in Bezug auf x differenzirt,

$$\text{I)}\ 0 = 3\,y^2\,\frac{\partial y}{\partial x} + 3\,x^2 - 3\,a\,x\,\frac{\partial y}{\partial x} - 3\,a\,y$$

$$\text{II)}\ 3\,a\,y - 3\,x^2 = (3\,y^2 - 3\,a\,x)\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{III)}\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3\,a\,y - 3\,x^2}{3\,y^2 - 3\,a\,x} = \frac{a\,y - x^2}{y^2 - a\,x}.$$

2) Gegeben sei die Gleichung (implicite Function)

$$x^4 + 2\,x^2\,y^2 + y^4 - 8\,a\,x\,y^2 = 0,$$

so ist, wenn man in Bezug auf x differenzirt,

$$\text{I)}\ 4\,x^3 + 4\,x\,y^2 + 4\,x^2\,y\,\frac{\partial y}{\partial x} + 4\,y^3\,\frac{\partial y}{\partial x} - 8\,a\,y^2 - 16\,a\,x\,y\,\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\text{II)}\ (x^2\,y + y^3 - 4\,a\,x\,y)\,\frac{\partial y}{\partial x} = -\,(x^3 + x\,y^2 - 2\,a\,y^2)$$

$$\text{III)}\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\,\frac{(x^3 + x\,y^2 - 2\,a\,y^2)}{y^3 + x^2\,y - 4\,a\,x\,y}.$$

3) Gegeben sei die Gleichung (implicite Function)

$$y^x - x^y = 0,$$

so ist, wenn man in Bezug auf x differenzirt,

$$\text{I)}\ x y^{x-1} \frac{\partial y}{\partial x} + y^x \log nat\, y - y x^{y-1} - x^y \log nat\, x \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\text{II)}\ (x y^{x-1} - x^y \log nat\, x) \frac{\partial y}{\partial x} = y x^{y-1} - y^x \log nat\, y$$

$$\text{III)}\qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(y x^{y-1} - y^x \log nat\, y)}{x y^{x-1} - x^y \log nat\, x}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner des Bruches rechter Hand mit $x y$, so ist

$$\text{IV)}\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2 x^y - x y \,.\, y^x \log nat\, y}{x^2 y^x - x y \,.\, x^y \log nat\, x}.$$

Da aus der Bedingungsgleichung

$$y^x - x^y = 0$$

folgt, dass

$$y^x = x^y \qquad \text{ist, so ist}$$

$$\text{V)}\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2 x^y - x y \,.\, x^y \log nat\, y}{x^2 x^y - x y \,.\, x^y \log nat\, x} = \frac{y^2 - x y \log nat\, y}{x^2 - x y \log nat\, x}.$$

4) Gegeben sei die Gleichung (implicite Function)

$$y^2 - 2 m x y + x^2 - a^2 = 0,$$

so ist, wenn man in Bezug auf x differenzirt,

$$\text{I)}\ 2 y \frac{\partial y}{\partial x} - 2 m y - 2 m x \frac{\partial y}{\partial x} + 2 x = 0$$

$$\text{II)}\ (y - m x) \frac{\partial y}{\partial x} = m y - x$$

$$\text{III)}\qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m y - x}{y - m x}.$$

5) Gegeben sei die Gleichung (implicite Function)

$$m = x y + \log nat\, x y,$$

so ist, wenn man in Bezug auf x differenzirt,

$$\text{I)}\ 0 = y + x \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \,.\, \frac{\partial y}{\partial x},$$

indem man auf *log nat* $x y$ den § 28 Zusatz anwendet (oder Arithmetik § 188 zuerst, und dann § 27 Zusatz 1).

$$\text{II)}\ \left(x + \frac{1}{y}\right) \frac{\partial y}{\partial x} = - y - \frac{1}{x}$$

$$\text{III)}\qquad \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}} = - \frac{(x y + 1)\, y}{(x y + 1)\, x} = - \frac{y}{x}.$$

§ 45. Aufgaben über das Maximum und Minimum der Functionen.

1. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y = x^4 - 8\,x^3 + 22\,x^2 - 24\,x + 12,$$

man soll die Bedingungen angeben, unter denen y ein Maximum oder ein Minimum wird.

Auflösung. Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4\,x^3 - 24\,x^2 + 44\,x - 24$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12\,x^2 - 48\,x + 44.$$

Setzt man den Werth des ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so ist

$$x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6 = 0,$$

aus welcher Gleichung sich die Werthe $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ ergeben.

Für $x = 1$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +\,8$

„ $x = 2$ „ „ $= -\,4$

„ $x = 3$ „ „ $= +\,8.$

Also findet für $x = 1$ ein Minimum statt, nämlich $y = 3$

„ $x = 2$ „ Maximum „ „ $y = 4$

„ $x = 3$ „ Minimum „ „ $y = 3.$

Anmerkung. Es soll hiebei nicht gesagt sein, der möglich grösste Werth von y sei 4, welches eine ganz falsche Behauptung wäre, denn setzt man $x = 4$, so wird schon $y = 16$, während y, wenn man $x = \infty$ setzen würde, auch $= \infty$ werden müsste. Aber dennoch findet weder für $x = 4$, noch für $x = \infty$ ein Maximum statt, weil das nächstvorhergehende y zwar kleiner, aber nicht das nächstfolgende y auch kleiner, sondern grösser als dasjenige y ist, von dem jetzt die Rede ist.

2. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y = x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 1,$$

man soll die Bedingungen angeben, unter denen y ein Maximum oder ein Minimum wird.

Auflösung. Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2$$
$$= 5\,x^2\,(x^2 - 4\,x + 3)$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 20\,x^3 - 60\,x^2 + 30\,x$$
$$= 10\,x\,(2\,x^2 - 6\,x + 3).$$

Setzt man den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so ist

$$5\,x^2\,(x^2 - 4\,x + 3) = 0$$

oder

$$x^2\,(x^2 - 4\,x + 3) = 0,$$

aus welcher nachfolgende Werthe von x hervorgehen:

$$x = 0\,,\; x = 0\,,\; x = 1\,,\; x = 3.$$

Für $x = 0$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$,

weshalb es hiernach auch unentschieden bleibt, ob für $x = 0$ die Function y ein Maximum oder Minimum hat.

Für $x = 1$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -10$

„ $x = 3$ „ „ $= +90$.

Also findet für $x = 1$ ein Maximum, nämlich $y = 2$

„ $x = 3$ „ Minimum, „ $y = -26$

statt.

Es ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 60\, x^2 - 120\, x + 30$

und $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 120\, x - 120$.

Da der dritte Differenzial-Quotient, wenn man darin den obigen Werth von x, nämlich $x = 0$, setzt, nicht gleich Null, sondern $= 30$ wird, so findet für $x = 0$ weder ein Maximum, noch ein Minimum statt.

3. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y = 3\, x^4 - 28\, a x^3 + 84\, a^2 x^2 - 96\, a^3 x + 48\, a^4,$$

man soll die Bedingungen aufsuchen, unter denen y ein Maximum oder ein Minimum wird.

Auflösung. Aus der gegebenen Function folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 12\, x^3 - 84\, a x^2 + 168\, a^2 x - 96\, a^3$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 36\, x^2 - 168\, a x + 168\, a^2.$$

Setzt man den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$12\, x^3 - 84\, a x^2 + 168\, a^2 x - 96\, a^3 = 0$$

oder $$x^3 - 7\, a x + 14\, a^2 x - 8\, a^3 = 0,$$

aus welcher Gleichung sich die Werthe $x = a$, $x = 2\, a$ und $x = 4\, a$ ergeben.

Für $x = a$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +36\, a^2$

„ $x = 2\, a$ „ $= -24\, a^2$

„ $x = 4\, a$ „ $= +72\, a^2$.

Also findet für $x = a$ ein Minimum statt, nämlich $y = 11\, a^4$

„ $x = 2\, a$ „ Maximum „ „ $y = 16\, a^4$

„ $x = 4\, a$ „ Minimum „ „ $y = -16\, a^4$.

4. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y = 2\, x^3 - 3\, x^2 - 36\, x,$$

man soll die Bedingungen aufsuchen, unter denen y ein Maximum oder ein Minimum wird.

Auflösung. Aus der gegebenen Function folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6\, x^2 - 6\, x - 36$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12\, x - 6.$$

Setzt man den Werth des ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so folgt die Gleichung: $6x^2 - 6x - 36 = 0,$
oder $x^2 - x - 6 = 0,$
aus welcher Gleichung die Werthe $x = 3$ und $x = -2$ folgen.

Für $x = 3$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +30$

„ $x = -2$ „ $= -30.$

Also findet für $x = -2$ ein Maximum statt, nämlich $y = +44$
und „ $x = +3$ „ Minimum „ „ $y = -81.$

5. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20,$$

man soll die Bedingungen aufstellen, unter denen für y ein Maximum oder ein Minimum stattfindet.

Auflösung. Aus der gegebenen Function folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 60x^5 - 60x^4 - 60x^3 - 60x^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 300x^4 - 240x^3 + 180x^2 - 120x.$$

Setzt man den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so folgt die Gleichung:

$$60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2 = 0,$$

oder $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = 0,$

oder $x^2(x^3 - x^2 + x - 1) = 0,$

oder $x^2(x-1)(x^2+1) = 0,$

aus welcher Gleichung sich folgende Werthe von x ergeben:

$$x = 0,\ x = 0,\ x = 1,\ x = +\sqrt{-1} \text{ und } x = -\sqrt{-1}.$$

Offenbar findet für $x = \pm\sqrt{-1}$, weder ein Maximum, noch ein Minimum statt; also handelt es sich hier nur um die Feststellung für die drei ersten Werthe von x. Für $x = 1$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +120$. Mithin findet für $x = 1$ ein Minimum statt, nämlich $y = +13$.

Für $x = 0$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$.

Da für diesen Werth von x der zweite Differenzial-Quotient aus der Rechnung verschwindet, so muss man den dritten und vierten Differenzial-Quotienten bilden.

Es ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 1200x^3 - 720x^2 + 360x - 120$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 3600x^2 - 1440x + 360$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 7200x - 1440.$$

Da der dritte und ebenso der fünfte Differenzial-Quotient für den oben angegebenen Werth von $x = 0$ nicht verschwindet, so findet für $x = 0$ weder ein Maximum, noch ein Minimum statt.

6. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y - \frac{x^2 - x}{x^2 + 1},$$

man soll die Bedingungen aufstellen, unter denen ein Maximum oder Minimum derselben stattfindet.

Auflösung. Aus der gegebenen Function

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(x^2 + 1)(2x - 1) - (x^2 - x) 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - x^2 - 1 - 2x^3 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 (2x + 2) - (x^2 + 2x - 1) . 2(x^2 + 1) 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2 + 1)^2 (x + 1) - 4(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2 + 1)(x + 1) - 4(x^2 + 2x - 1) x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x + 2x^2 + 2 - 4x^3 - 8x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

Setzt man den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so geht die Gleichung:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

hervor. Mithin ist

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = -1 + \sqrt{2} \text{ und } x = -1 - \sqrt{2}.$$

Demnach ist, für $x = -1 + \sqrt{2}$,

$$x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$x^3 = (3 - 2\sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = -3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 5\sqrt{2} - 7$$

und also:

$$-2x^3 = +14 - 10\sqrt{2}$$

$$-6x^2 = -18 + 12\sqrt{2}$$

$$+6x = -6 + 6\sqrt{2}$$

$$+2 = +2$$

mithin $-2x^3 - 6x^2 + 6x + 2 = -8 + 8\sqrt{2} = 8(-1 + \sqrt{2})$

und $x^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2})$

also $(x^2 + 1)^3 = 2^3 (2 - \sqrt{2})^3$.

Folglich ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{8(-1 + \sqrt{2})}{2^3 (2 - \sqrt{2})^3} = \frac{(-1 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})^2 (2 - \sqrt{2})}$

$$= \frac{(-1+\sqrt{2})\,(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})^2\,(2-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2}{(4-2)\,(2-\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\,(2-\sqrt{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4-4\sqrt{2}+2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2\,(3-2\sqrt{2})}$$

$$= \tfrac{1}{4}\;\frac{\sqrt{2}\,(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})\,(3+2\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}+4}{4}$$

$$= 1 + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$= 2{,}0606602\ldots\ldots$$

Mithin findet für $x = -1 + \sqrt{2}$ ein Minimum statt, nämlich:

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{3-2\sqrt{2}-(-1+\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}+1} = \frac{3-2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{(4-3\sqrt{2})\,(4+2\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2})\,(4+2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{16-12\sqrt{2}+8\sqrt{2}-12}{16-8} = \frac{4-4\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\,0{,}2071068\ldots\ldots$$

Ferner ist, für $x = -1 - \sqrt{2}$

$$x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x^3 = -\;7 - 5\sqrt{2}$$

und also $-2x^3 = +14 + 10\sqrt{2}$

$$-6x^2 = -18 - 12\sqrt{2}$$

$$+6x = -\;6 - 6\sqrt{2}$$

$$+2 \quad = +\;2$$

mithin $-2x^3 - 6x^2 + 6x + 2 = -8 - 8\sqrt{2} = -8\,(1+\sqrt{2})$

und $x^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2} = 2\,(2+\sqrt{2})$

also $(x^2+1)^3 = 2^3\,(2+\sqrt{2})^3$

Folglich ist $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{-8\,(1+\sqrt{2})}{2^3\,(2+\sqrt{2})^3} = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^3}$

$$= -\frac{(1+\sqrt{2})\,(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2\,(2+\sqrt{2})\,(2-\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{2\,(2+2\sqrt{2})^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{6+4\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{4}\;\frac{\sqrt{2}\,(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})\,(3-2\sqrt{2})}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\,\frac{3\sqrt{2}-4}{9-8} = -\tfrac{3}{4}\sqrt{2}+1$$
$$= -0{,}0606602\ \ldots\ldots$$

Da für $x = -1 - \sqrt{2}$ der zweite Differenzial-Quotient negativ ist, so findet für diesen Werth von x ein Maximum statt, nämlich

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{(4 + 3\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})}$$
$$= \frac{16 + 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 12}{16 - 8} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{8}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$
$$= +1{,}2071068\ \ldots\ldots$$

7. Aufgabe. Gegeben sei die Function

$$y = x^2 (a - x)^3,$$

man soll die Bedingungen aufsuchen, unter denen ein Maximum oder ein Minimum für y stattfindet.

Auflösung. Aus der gegebenen Function folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (a - x)^3 . 2x + x^2 . 3 (a - x)^2 (-1)$$
$$= 2x (a - x)^3 - 3x^2 (a - x)^2$$
$$= x (a - x)^2 [2 (a - x) - 3x]$$
$$= x (a - x)^2 (2a - 2x - 3x)$$
$$= x (a - x)^2 (2a - 5x)$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (a-x)^2 (2a-5x) + x (2a-5x) . 2 (a-x) (-1) + x (a-x)^2 . (-5)$$
$$= (a-x)^2 (2a-5x) - 2x (a-x)(2a-5x) - 5x (a-x)^2$$
$$= (a-x)^2 (2a - 10x) - 2x (a-x)(2a-5x)$$
$$= 2(a-x)[(a-x)(a-5x) - x(2a-5x)]$$
$$= 2(a-x)[a^2 - ax - 5ax + 5x^2 - 2ax + 5x^2]$$
$$= 2(a-x)(10x^2 - 8ax + a^2).$$

Setzt man den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so geht die Gleichung

$$x (a - x)^2 (2a - 5x) = 0$$

hervor, aus welcher Gleichung sich folgende Werthe für x ergeben, nämlich:

$$x = 0\,,\ x = a\,,\ x = a\,,\ x = \tfrac{2}{5}a\,.$$

Substituirt man diese Werthe in den zweiten Differenzial-Quotienten, so ist

$$\text{für } x = 0 \ \ldots\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +2a^3$$
$$\text{„ } x = a \ \ldots\ \ldots = 0$$
$$\text{„ } x = \tfrac{2}{5}a \ \ldots\ = 2 . \tfrac{3}{5} a \left(\tfrac{40}{25} a^2 - \tfrac{16}{5} a^2 + a^2\right)$$
$$= 2 . \tfrac{3}{5} a \left(-\tfrac{3}{5} a^2\right)$$
$$= -\tfrac{18}{25} a^3.$$

Also findet für $x = 0$ ein Minimum statt, nämlich $y = 0$
„ $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum
„ $x = \frac{2}{5} a$ ein Maximum statt, nämlich $y = \frac{108}{3125} a^5$.

8. Aufgabe. Gegeben sei die Function:

$$y = \frac{x}{log\ nat\ x},$$

man soll die Bedingungen aufsuchen, unter denen ein Maximum oder ein Minimum der Function stattfindet.

Auflösung. Aus der gegebenen Function folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{log\ nat\ x - x \cdot \frac{1}{x}}{(log\ nat\ x)^2}$$

$$= \frac{log\ nat\ x - 1}{(log\ nat\ x)^2} = \frac{1}{log\ nat\ x} - \left(\frac{1}{log\ nat\ x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{1}{x}\ (log\ nat\ x)^2 - (log\ nat\ x - 1)\ 2\ log\ nat\ x \cdot \frac{1}{x}}{(log\ nat\ x)^4}$$

$$= \frac{log\ nat\ x - 2\ (log\ nat\ x - 1)}{x\ (log\ nat\ x)^3}$$

$$= \frac{2 - log\ nat\ x}{x\ (log\ nat\ x)^3}.$$

Setzt man nun den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so folgt die Gleichung:

$$\frac{log\ nat\ x - 1}{(log\ nat\ x)^2} = 0$$

$$log\ nat\ x - 1 = 0$$

$$log\ nat\ x = 1$$

$$x = e$$

9. Aufgabe. Gegeben sei die Function

$$y = sin\ x,$$

man soll die Bedingungen aufstellen, für welche ein Maximum und ein Minimum der Function stattfindet.

Auflösung. Aus der gegebenen Function folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = cos\ x$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\ sin\ x.$$

Setzt man den ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so folgt die Gleichung:

$$cos\ x = 0,$$

also $x = 1\ R, = 3\ R, = 5\ R, \ldots = (2\ n + 1)\ R$.

Für $x = 1\ R$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -1$
„ $x = 3\ R$ „ „ $= +1$
„ $x = 5\ R$ „ „ $= -1$
„ $x = 7\ R$ „ „ $= +1$
„ $x = (4n+1)\ R$ „ $= -1$
„ $x = (4n+3)\ R$ „ $= +1$

Also findet für $x = (4\,n + 1)\,R$ ein Maximum, nämlich $y = 1$
„ $x = (4\,n + 3)\,R$ „ Minimum, „ $y = -1$
statt.

10. Aufgabe. Zu untersuchen, welches das grösste unter allen Dreiecken ist, in denen zwei Seiten des einen einzeln gleich zweien Seiten jedes andern Dreiecks sind.

Auflösung. Die beiden Seiten der Dreiecke seien a und b, der zwischen ihnen liegende Winkel sei x, so ist der Flächeninhalt eines jeden solchen Dreiecks

$$y = \frac{a\,b\,\sin x}{2}$$

und es ist die Frage, für welchen Werth von x dieser Ausdruck ein Maximum ist. Aus der gefundenen Functions-Gleichung folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\,b}{2}\cos x$$

und $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a\,b}{2}\sin x\,.$$

Setzt man den Werth des ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{a\,b}{2}\cos x = 0$$
$$\cos x = 0$$
mithin „ $$x = 90^0 = 1\,R\,.$$

Substituirt man diesen Werth von x in den zweiten Differenzial-Quotienten, so ist

für $$x = 1\,R\;\; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a\,b}{2}\sin 1\,R = -\frac{a\,b}{2}\,.$$

Da für diesen Fall der Werth des zweiten Differenzial-Quotienten negativ ist, so findet also für $x = 1\,R$ d. h. wenn die beiden Seiten a und b rechtwinklig auf einander stehen, ein Maximum statt.

11. Aufgabe. Man soll untersuchen, welches unter allen Dreiecken von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Für sämmtliche, der Betrachtung unterworfene Dreiecke sei die Grundlinie g und die Höhe h. Theilt die Höhe h die Grundlinie g in die beiden Theile x und $g - x$, so ist die eine der beiden übrigen Seiten des Dreiecks $\sqrt{x^2 + h^2}$ und die andere $\sqrt{(g - x)^2 + h^2}$; folglich ist, wenn y den Umfang des Dreiecks bedeutet,

$$y = g + \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(y - x)^2 + h^2}$$
$$y = g + (x^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} + [(g - x)^2 + h^2]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Es bleibt also zu untersuchen, für welchen Werth von x diese Function y ein Minimum wird.

Man differenzire den obigen Ausdruck in Bezug auf x, so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{g - x}{\sqrt{(g - x)^2 + h^2}}$$
$$= x\,(x^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} - (g - x)\,[(g - x)^2 + h^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{und}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (x^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} (x^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}} . 2\,x$$
$$- \left\{ [(g-x)^2 + h^2]^{-\frac{1}{2}}(-1) + (g-x) . -\tfrac{1}{2}[(g-x)^2 + h^2]^{-\frac{3}{2}} . 2(g-x)(-1) \right\}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + h^2)\sqrt{x^2 + h^2}}$$
$$- \left\{ \frac{-1}{\sqrt{(g-x)^2 + h^2}} + \frac{(g-x)^2}{[(g-x)^2 + h^2]\sqrt{(g-x)^2 + h^2}} \right\}$$
$$= \frac{x^2 + h^2 - x^2}{(x^2 + h^2)\sqrt{x^2 + h^2}} - \left\{ \frac{-(g-x)^2 - h^2 + (g-x)^2}{[(g-x)^2 + h^2]\sqrt{(g-x)^2 + h^2}} \right\}$$
$$= \frac{h^2}{(x^2 + h^2)\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{h^2}{[(g-x)^2 + h^2]\sqrt{(g-x)^2 + h^2}} .$$

Setzt man den Werth des ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{g - x}{\sqrt{(g-x)^2 + h^2}} = 0$$
$$x\sqrt{(g-x)^2 + h^2} = (g-x)\sqrt{x^2 + h^2}$$
$$x^2\,[(g-x)^2 + h^2] = (g-x)^2\,(x^2 + h^2)$$
$$x^2\,(g-x)^2 + x^2\,h^2 = (g-x)^2\,x^2 + (g-x)^2\,h^2$$
$$x^2\,h^2 = (g-x)^2\,h^2$$
$$x\,h = (g-x)\,h$$
$$x = g - x$$
$$x = \tfrac{1}{2}\,g .$$

Setzt man diesen Werth von x in den zweiten Differenzial-Quotienten, so ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{h^2}{(\frac{1}{4}\,g^2 + h^2)\sqrt{\frac{1}{4}\,g^2 + h^2}} + \frac{h^2}{(\frac{1}{4}\,g^2 + h^2)\sqrt{\frac{1}{4}\,g^2 + h^2}}$$
$$= \frac{2\,h^2}{(\frac{1}{4}\,g^2 + h^2)\sqrt{\frac{1}{4}\,g^2 + h^2}} .$$

Da der Werth des zweiten Differenzial-Quotienten für den Fall, dass $x = \frac{1}{2}\,g$ gesetzt wird, positiv ist, so findet also in dem Ausdrucke von y für $x = \frac{1}{2}\,g$ ein Minimum statt.

Unter allen Dreiecken, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, hat dasjenige den **kleinsten** Umfang, dessen Höhe die Grundlinie halbirt, also das gleichschenklige.

12. Aufgabe. Wenn man in einem gegebenen Quadrate Rectangel zeichnet, deren Winkelspitzen in den Seiten des gegebenen Quadrats liegen, so ist die Frage, welches von diesen Rectangeln den grössten Flächeninhalt hat.

I. Auflösung. Die Seite des gegebenen Quadrats sei a. Ist ein Winkelpunkt des Rechtecks von der einen Winkelspitze des Quadrats um x entfernt, so ist dieselbe von der anderen Winkelspitze des Quadrats, die in derselben Seite liegt, um $(a - x)$ entfernt; demnach wird das Quadrat in ein Rectangel und vier rechtwinklige Dreiecke getheilt, von denen je zwei den Abschnitt x zu Katheten, und je zwei andere den Abschnitt $(a - x)$ zu Katheten haben. Die Flächeninhalte der beiden ersten Dreiecke sind zusammen $= x^2$, und die der beiden anderen Dreiecke zusammen $= (a - x)^2$, und folglich ist der Flächeninhalt des eingezeichneten Rectangels:

$$y = a^2 - x^2 - (a - x)^2$$
$$y = 2\,a\,x - 2\,x^2.$$

Differenzirt man diese Gleichung in Bezug auf x, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\,a - 4\,x$$

und $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\,4.$$

Setzt man nun den Werth des ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$2\,a - 4\,x = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}\,a.$$

Für den Werth von $x = \frac{1}{2}\,a$ ist aber der zweite Differenzial-Quotient stets negativ. Mithin findet für diesen Werth von $x = \frac{1}{2}\,a$ ein Maximum der Function y statt, nämlich $y = \frac{1}{2}\,a^2$.

II. Auflösung. Der Flächeninhalt des eingeschriebenen Rectangels ist ein Maximum, wenn der Flächeninhalt der vier rechtwinkligen Dreiecke ein Minimum ist. Es ist aber der Flächeninhalt der 4 Dreiecke

$$z = x^2 + (a - x)^2$$
$$z = a^2 - 2\,a x + 2\,x^2$$

und folglich $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\,2\,a + 4\,x$$

und $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +\,4.$$

Setzt man nun den Werth des ersten Differenzial-Quotienten gleich Null, so ist

$$-\,2\,a + 4\,x = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}\,a.$$

Für diesen Werth von $x = \frac{1}{2}\,a$ ist der zweite Differenzial-Quotient positiv, und mithin hat die Function z (für $x = \frac{1}{2}\,a$) ein Minimum, und also y für diesen Fall ein Maximum.

(Fortsetzung folgt.)