Sammlung

stufenmässig geordneter und vollständig berechneter Aufgaben aus der reinen Differenzialrechnung

von

H. G. Doerk,
Königl. Professor.

Vorwort.

Nachstehenden Blättern bin ich gewissermassen gezwungen einige Zeilen voranzuschicken, da sie so vereinzelt zur Herausgabe durch den Druck nicht bestimmt waren. Habent sua fata libelli. Für die wissenschaftliche Abhandlung zu dem diesjährigen Programme hatte ich nämlich ein Manuscript der reinen Differenzialrechnung übergeben, bei deren Bearbeitung die Absicht vorwaltete, sie so darzustellen, dass sie sich unmittelbar an den im Gymnasium ertheilten mathematischen Unterricht anreihe und so eine Uebergangsstufe zu den Vorlesungen bilde, welche auf Universitäten, Akademien und Fachschulen über diesen Gegenstand gehalten werden, dass sie ferner geeignet sei, von Jünglingen, welche nach beendigtem Cursus das Gymnasium verlassen haben und sie erlernen wollen, ohne einen mündlichen Vortrag gefasst und verstanden zu werden, und dass sie endlich bei ihnen auch einige Sicherheit im Differenziren selbst hervorrufe. Diesen Zweck zu erreichen schien es mir nicht nur rathsam, sondern sogar nothwendig zu sein, eine grosse Menge von Beispielen (gegen 200) zu sammeln und zu ordnen, die Aufgaben nicht nackt hinzustellen und höchstens das Resultat beizufügen, sondern sie vollständig zu berechnen, denn nur durch vielfache Uebung in der Anwendung der allgemeinen Lehrsätze auf specielle Fälle gelangt man zur technischen Fertigkeit im Rechnen; um sie zu erreichen, müssen sehr viele Aufgaben behandelt werden; giebt man sie nackt, nur höchstens noch dabei das Resultat, so kann es oft selbst dem strebsamen Jünglinge ergehen, dass er viele kostbare Zeit unnütz verschwende, weil hier und da doch leicht ein Fehler gemacht werden kann. Liegt nun keine ausführliche Berechnung zur Seite, nach welcher der Lernende die Aufsuchung des Fehlers in seiner eigenen Rechnung anstellen kann, ist keine Persönlichkeit vorhanden, an welche er sich um Belehrung im speciellen Falle wenden kann und wenden mag, so kann für ihn ausser dem Verluste an Zeit auch noch ein grösserer Nachtheil hervorgehen, dass die für dieses Studium so nothwendige Lust verloren geht.

Durch die Behandlungsweise der Differenzialrechnung von diesem Gesichtspunkte aus wuchs das Manuscript zu einer solchen Bogenzahl heran, dsss es die Grenzen einer Programm-Abhandlung weit überschritt und da keine Zeit mehr mir übrig war, einen anderen Gegenstand für dieselbe zu wählen, so erachtete ich es für gemessen, aus jenem Manuscripte die §§ 14 und 39 auszuwählen, welche die Beispielsammlung enthalten, und hoffe bei einzelnen Jünglingen, welche sich mit der Differenzialrechnung zu beschäftigen anfangen, meinen Zweck zu erreichen.

D.

§ 14. Beispiele zur Differenziation der algebraischen Functionen.

1) Gegeben sei $f(x) = ax \pm b$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = a.$$

2) Gegeben sei $f(x) = ax + b(c \pm ex)$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = a \pm be.$$

3) Gegeben sei $f(x) = ax - b(c - ex)$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = a + be.$$

4) Gegeben sei $f(x) = 3x + 7$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = 3.$$

5) Gegeben ist $f(x) = 5x + 3(4 \pm 2x)$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = 5 \pm 6 = \begin{cases} +11 \\ -1 \end{cases}.$$

6) Wenn $f(x) = x^2$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = 2x$$

7) Ist $f(x) = 3x^7$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = 21x^6.$$

8) Ist $f(x) = ax^n$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = anx^{n-1}.$$

9) Wenn $f(x) = a^2 x + b^2 x^2$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = a^2 + 2b^2 x.$$

10) Wenn $f(x) = a^2 + bx - cx^2 + ex^3$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = b - 2cx + 3ex^2.$$

11) Wenn $f(x) = 6 - 3x + 4x^2 - 5x^4$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = -3 + 8x - 20x^3.$$

12) Ist $f(x) = \frac{ax^4}{b}$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{4ax^3}{b}.$$

13) Ist $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = -1 \,.\, x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

14) Wenn $f(x) = \frac{a}{b x^4} = \frac{a}{b} \,.\, x^{-4}$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = -4 \,.\, \frac{a}{b}\, x^{-5} = -\frac{4a}{b x^5}.$$

15) Ist $f(x) = \frac{a}{b x^n} = \frac{a}{b} \,.\, x^{-n}$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = -n \,.\, \frac{a}{b} \,.\, x^{-n-1} = -\frac{n a}{b x^{n+1}}.$$

16) Wenn $f(x) = (1 + x)(1 - x)$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = (1 - x) \,.\, 1 + (1 + x)(-1) = 1 - x - 1 - x = -2x$$

oder $f(x) = 1 - x^2$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -2x.$$

17) $f(x) = (2 + 3x - 4x^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2\right)$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2\right)(3 - 8x) + (2 + 3x - 4x^2)\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \frac{3}{2} - 5x + \frac{41}{12}x^2 - 2x^3 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{17}{6}x^2 - 2x^3\right)$$
$$= \frac{5}{6} - 5x + \frac{25}{4}x^2 - 4x^3,$$

oder $f(x) = 1 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{12}x^3 - x^4$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{5}{6} - 5x + \frac{25}{4}x^2 - 4x^3.$$

18) Ist $f(x) = (a + bx - cx^2)(e - gx^2 + hx^4)$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = (e - gx^2 + hx^4)(b - 2cx) + (a + bx - cx^2)(-2gx + 4hx^3)$$
$$= be - 2cex - bgx^2 + 2cgx^3 + bhx^4 - 2chx^5$$
$$- 2agx - 2bgx^2 + (2cg + 4ah)x^3 + 4bhx^4 - 4chx^5$$
$$= be - 2(ag + ce)x - 3bgx^2 + 4(ah + cg)x^3 + 5bhx^4 - bchx^5$$

oder $f(x) = ae + bex - (ag + ce)x^2 - bgx^3 + (ah + cg)x^4 + bhx^5 - chx^6$

mithin $\frac{d f(x)}{d x} = be - 2(ag + ce)x - 3bgx^3 + 4(ah + cg)x^3 + 5bhx^4 - 6chx^5.$

19) Wenn $f(x) = \frac{a + bx - cx^2}{e - gx^2 + hx^4}$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(e - gx^2 + hx^4)(b - 2cx) - (a + bx - cx^2)(-2gx^2 + 4hx^3)}{(e - gx^2 + hx^4)^2}$$
$$= \frac{be - 2(ce - ag)x + bgx^2 - 4ahx^3 - 3bhx^3 + 2chx^5}{(e - gx^2 + hx^4)^2}$$

20) Ist $f(x) = \frac{3 + 7x - 4x^3}{5 + 4x^4}$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(5 + 4x^4)(7 - 12x^2) - (3 + 7x - 4x^3)\,16x^3}{(5 + 4x^4)^2}$$
$$= \frac{35 - 60x^2 + 28x^4 - 48x^6 - (48x^3 + 112x^4 - 64x^6)}{(5 + 4x^4)^2}$$
$$= \frac{35 - 60x^2 - 48x^3 - 84x^4 + 16x^6}{(5 + 4x^4)^2}.$$

21) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(1 + x)(-1) - (1 - x)}{(1 + x)^2} = \frac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} = \frac{-2}{(1 + x)^2}.$$

22) Wenn $f(x) = \frac{a + b x + e x^2}{m - n x^p}$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(m - n x^p)(b + 2 c x) - (a + b x + e x^2)(- n p x^{p-1})}{(m - n x^p)^2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} b m + 2 c m x - b n x^p - 2 c n x^{p+1} \\ + a n p x^{p-1} + b n p x^p + c n p x^{p+1} \end{array} \right\} : (m - n x^p)^2$$

$$= \frac{b m + 2 c m x + a n p x^{p-1} + b n (p - 1) x^p + c n (p - 2) x^{p+1}}{(m - n x^p)^2}$$

23) Ist gegeben $f(x) = (a + x)^n$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = n (a + x)^{n-1} \frac{d (a + x)}{d x} = n (a + x)^{n-1}.$$

24) $f(x) = (a^2 - x^2)^4$

$$\frac{d f(x)}{d x} = 4 (a^2 - x^2)^3 \frac{d (a^2 - x^2)}{d x} = 4 (a^2 - x^2)^3 (-2x)$$

$$= -8x (a^2 - x^2)^3.$$

25) Wenn $f(x) = \frac{a x}{a - x} - \frac{a^2}{a + x}$ gegeben ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(a - x) a + a x}{(a - x)^2} + \frac{a^2}{(a + x)^2}$$

$$= \frac{a^2}{(a - x)^2} + \frac{a^2}{(a + x)^2}$$

$$= a^2 \left\{ \frac{1}{(a - x)^2} + \frac{1}{(a + x)^2} \right\}$$

$$= a^2 \left\{ \frac{a^2 + 2 a x + x^2 + a^2 - 2 a x + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{2 a^2 (a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^2}$$

oder $f(x) = \frac{-a^3 + 2 a^2 x + a x^2}{a^2 - x^2}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(a^2 - x^2)(2 a^2 + 2 a x) - (-a^3 + 2 a^2 x + a x^2)(-2x)}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 a^4 + 2 a^3 x - 2 a^2 x^2 - 2 a x^3 - 2 a^3 x + 4 a^2 x^2 + 2 a x^3}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 a^4 + 2 a^2 x^2}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 a^2 (a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^2}$$

26) $f(x) = \frac{(a^2 + x^2)^3}{(a^2 - x^2)^4}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(a^2 - x^2)^4 . 3 (a^2 + x^2)^2 . 2x - (a^2 + x^2)^3 . 4 (a^2 - x^2)^3 . (-2x)}{(a^2 - x^2)^8}$$

$$= \frac{6x (a^2 + x^2)^2 (a^2 - x^2)^4 + 8x (a^2 + x^2)^3 (a^2 - x^2)^3}{(a^2 - x^2)^8}$$

$$= \frac{2x (a^2 + x^2)^2 (a^2 - x^2)^3 \{3 (a^2 - x^2) + 4 (a^2 + x^2)\}}{(a^2 - x^2)^8}$$

$$= \frac{2x(a^2+x^2)^2(3a^2-3x^2+4a^2+4x^2)}{(a^2-x^2)^3}$$
$$= \frac{2x(a^2+x^2)^2(7a^2+x^2)}{(a^2-x^2)^3}.$$

27) $f(x) = \frac{(a^2-x^2)^3}{a^4+a^2x^2-x^4}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(a^4+a^2x^2-x^4)\,.\,3(a^2-x^2)^2\frac{d(a^2-x^2)}{dx} - (a^2-x^2)^3(2a^2x-4x^3)}{(a^4+a^2x^2-x^4)^2}$$
$$= (a^2-x^2)^2\left\{\frac{3(a^4+a^2x^2-x^4)(-2x)-(a^2-x^2)(a^2-2x^2)2x}{(a^4+a^2x^2-x^4)^2}\right\}$$
$$= \frac{(a^2-x^2)^2(-2x)\{3a^4+3a^2x^2-3x^4+a^4-3a^2x^2+2x^4\}}{(a^4+a^2x^2-x^4)^2}$$
$$= \frac{(a^2-x^2)^2(-2x)(4a^4-x^4)}{(a^4+a^2x^2-x^4)^2}$$
$$= \frac{(2x(a^2-x^2)^2(x^4-4a^4)}{(a^4+a^2x^2-x^4)^2}.$$

28) Es sei gegeben: $f(x) = (a+x)(b-x)(x-c)$, so ist

$$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{a+x}\cdot\frac{d(a+x)}{dx} + \frac{1}{b-x}\cdot\frac{d(b-x)}{dx} + \frac{1}{x-c}\cdot\frac{d(x-c)}{dx}$$
$$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{a+x} - \frac{1}{b-x} + \frac{1}{x-c}$$
$$\frac{df(x)}{dx} = (a+x)(b-x)(x-c)\left\{\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b-x}+\frac{1}{x-c}\right\}$$
$$= (b-x)(x-c) - (a+x)(x-c) + (a+x)(b-x)$$
$$\begin{aligned} = &-bc+(b+c)x-x^2 \\ &+ac+(c-a)x-x^2 \\ &+ab+(b-a)x-x^2 \end{aligned}$$
$$= ab+ac-bc+2(b+c-a)x-3x^2$$

oder $f(x) = (a+x)(b-x)(x-c)$
$$= -abc+(ab+ac-bc)x+(b+c-a)x^2-x^3,$$

also $\frac{df(x)}{dx} = ab+ac-bc+2(b+c-a)x-3x^2.$

29) $f(x) = mx^{-n}$

$$\frac{df(x)}{dx} = -mnx^{-n-1} = \frac{-mn}{x^{n+1}}.$$

30) $f(x) = (a+bx^{-n})^p$

$$\frac{df(x)}{dx} = p(a+bx^{-n})^{p-1}\frac{d(a+bx^{-n})}{dx}$$
$$= p(a+bx^{-n})^{p-1}(-bnx^{-n-1})$$
$$= \frac{-bnp(a+bx^{-n})^{p-1}}{x^{n+1}}.$$

31) Gegeben sei $f(x) = a\sqrt[n]{x^p} = ax^{\frac{p}{n}}$, so ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{p}{n}ax^{\frac{p}{n}-1}$$
$$= \frac{ap}{n}x^{\frac{p-n}{n}}$$

$$= \frac{a\,p}{n} \sqrt[n]{x^{p-n}}.$$

32) $f(x) = \sqrt{x^n} = x^{\frac{n}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{n}{2}\, x^{\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{2} \sqrt{x^{n-2}}.$$

33) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

34) $f(x) = \sqrt{a + b\,x^n} = (a + b\,x^n)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,(a + b\,x^n)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\,(a + b\,x^n)}{d\,x}$$

$$= \frac{1}{2}\,(a + b\,x^n)^{-\frac{1}{2}} .\, n\,b\,x^{n-1}$$

$$= \frac{b\,n\,x^{n-1}}{2\sqrt{a + b\,x^n}}.$$

35) $f(x) = x^4 \sqrt[3]{x^2} = x^4 .\, x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{14}{3}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{14}{3}\, x^{\frac{11}{3}} = \frac{14}{3} \sqrt[3]{x^{11}} = \frac{14}{3}\, x^3 \sqrt[3]{x^2}$$

36) $f(x) = x + \sqrt{a^2 + x^2} = x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = 1 + \frac{1}{2}\,(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} .\, 2\,x$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

37) $f(x) = (x + 4) \sqrt[3]{3\,x^2 - 6} = (x + 4)\,(3\,x^2 - 6)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (3x^2 - 6)^{\frac{1}{3}} + (x + 4) .\, \frac{1}{3} .\, (3\,x^2 - 6)^{-\frac{2}{3}} .\, 6\,x$$

$$= \sqrt[3]{3\,x^2 - 6} + \frac{(x + 4)\,2\,x}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3\,x^2 - 6}\,\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2} + 2\,x\,(x + 4)}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}$$

$$= \frac{3\,x^2 - 6 + 2\,x^2 + 8\,x}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}$$

$$= \frac{5\,x^2 + 8\,x - 6}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}.$$

38) $f(x) = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x} = a + b\,x^{\frac{1}{2}} - c\,x^{-1}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,b\,x^{-\frac{1}{2}} + c\,x^{-2}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

39) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{d x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}}{(1-x)\,(1+x)^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)\,(1+x)^2}$$

$$\text{oder} = \frac{-\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\,\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}} = -\frac{(1+x)}{(1-x)^2\,\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)\,\sqrt{1-x^2}}.$$

40) $f(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{e + g x^n} - m x$

$$= a x^{-\frac{1}{2}} + b + c\,(e + g x^n)^{\frac{1}{2}} - m x$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -\frac{1}{2}\,a x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\,c\,(e + g x^n)^{-\frac{1}{2}} \,.\, n g x^{n-1} - m$$

$$= -\frac{\frac{1}{2} a}{\sqrt{x^3}} + \frac{\frac{1}{2} c g n x^{n-1}}{\sqrt{e + g x^n}} - m$$

$$= -\frac{a}{2 x \sqrt{x}} + \frac{c g n x^{n-1}}{2\sqrt{e + g x^n}} - m.$$

41) $f(x) = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} - \frac{g}{x x}$

$$= a + b x^{-\frac{2}{3}} - c x^{-\frac{4}{3}} - g x^{-2}$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -\frac{2}{3}\,b x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}\,c x^{-\frac{7}{3}} + 2 g x^{-3}$$

$$= -\frac{2 b}{3 x \sqrt[3]{x^2}} + \frac{4 c}{3 x^2 \sqrt[3]{x}} + \frac{2 g}{x^3}.$$

42) $f(x) = \sqrt{a - b x + 2 c x^2}$

$$= (a - b x + 2 c x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{2}\,(a - b x + 2 c x^2)^{-\frac{1}{2}}(-b + 4 c x)$$

$$= \frac{-b + 4 c x}{2\sqrt{a - b x + 2 c x^2}}.$$

43) $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = a\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -\frac{1}{2}\,a\,(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (-2x)$$

$$= \frac{a x}{(1-x^2)\,\sqrt{1-x^2}}.$$

44) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{a x^2 - b}{x^5}} = (a x^2 - b)^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{5}{3}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{3}\,(a x^2 - b)^{-\frac{2}{3}} \,.\, 2 a x - \frac{5}{3}\,(a x^2 - b)^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{2 a x}{3\sqrt[3]{x^5}\,\sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}} - \frac{5\sqrt[3]{a x^2 - b}}{3\sqrt[3]{x^8}}.$$

$$= \frac{2 a x^2}{3 x^2 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}} - \frac{5 \sqrt[3]{a x^2 - b} \sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}}{3 x^2 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}}$$

$$= \frac{2 a x^2 - 5 (a x^2 - b)}{3 x^2 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{(a x^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{- 3 a x^2 + 5 b}{3 x^2 \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}}$$

$$= \frac{(5 b - 3 a x^2) \sqrt[3]{x}}{3 x^3 \sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}}$$

45) $f(x) = \sqrt[3]{\left(a - x \sqrt{x} + \frac{b}{x^2 \sqrt{x}}\right)^2} = (a - x^{\frac{3}{2}} + b x^{-\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{2}{3} (a - x^{\frac{3}{2}} + b x^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{3}} \left(- \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} b x^{-\frac{7}{2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \left(- \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{\frac{5}{2} b}{x^3 \sqrt{x}}\right)}{\sqrt[3]{a - x^{\frac{3}{2}} + b x^{-\frac{5}{2}}}} = \frac{- x^4 - \frac{5}{3} b}{x^3 \sqrt{x} \sqrt[3]{a - x \sqrt{x} + \frac{b}{x^2 \sqrt{x}}}}$$

$$= - \frac{3 x^4 + 5 b}{3 x^3 \sqrt{x} \sqrt[3]{a - x \sqrt{x} + \frac{b}{x^2 \sqrt{x}}}}.$$

46) $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = (x + \sqrt{a^2 - x^2})^{-1}$

$$= \{x + (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-1}$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = - 1 \{x + (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-2} \{1 + \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} . (- 2 x)\}$$

$$= - (x + \sqrt{a^2 - x^2})^{-2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{- 1}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2} + \frac{x}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2} (x + \sqrt{a^2 - x^2})^2}.$$

47) $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x \{1 + \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} . 2 x\}}{(x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$= \frac{x + \sqrt{1 + x^2} - x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$$

$$= \frac{x + \sqrt{1 + x^2} - x \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$$

$$= \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})\left\}1 - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right\{}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} - x}{(\sqrt{1 + x^2} + x)\,\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)^2}{(\sqrt{1 + x^2} + x)\,(\sqrt{1 + x^2} - x)\,\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 2\,x\,\sqrt{1 + x^2} + x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1 + 2\,x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - 2\,x.$$

oder $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \dfrac{x\,(\sqrt{1 + x^2} - x)}{(\sqrt{1 + x^2} + x)\,(\sqrt{1 + x^2} - x)}$

$$= x\sqrt{1 - x^2} - x^2 = x\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2$$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x \,.\, \frac{1}{2}\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} . 2x - 2\,x$$

$$= \sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - 2\,x$$

$$= \frac{1 + 2\,x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - 2\,x.$$

48) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt[3]{x^3}}{a - a\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x - x\,\sqrt[3]{x^2}}{a - a\,\sqrt[3]{x}}$

$$= \frac{x}{a}\left(\frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{1 - \sqrt[3]{x}}\right) = \frac{x}{x}\,\frac{(1 + \sqrt[3]{x})\,(1 - \sqrt[3]{x})}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{x}{a}\,(1 + \sqrt[3]{x}) = \frac{x}{a} + \frac{x\,\sqrt[3]{x}}{a} = \frac{x}{a} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{a}$$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{a} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{a}$$

$$= \frac{3 + 4\,\sqrt[3]{x}}{3\,a}.$$

49) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1 - x^2 + \sqrt{1 + x}}}{\sqrt[3]{1 + x^2 + \sqrt{1 - x}}}.$

Man setze I) $1 - x^2 + \sqrt{1 + x} = v = 1 - x^2 + (1 + x)^{\frac{1}{2}}$

und II) $1 + x^2 + \sqrt{1 - x} = w = 1 + x^2 + (1 - x)^{\frac{1}{2}}$,

so ist III) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[3]{w}} = v^{\frac{1}{3}} . w^{-\frac{1}{3}}$

also IV) $\dfrac{d\,f(x)}{d\,x} = \dfrac{1}{3}\,w^{-\frac{1}{3}} . v^{-\frac{2}{3}}\,\dfrac{d\,v}{d\,x} + v^{\frac{1}{3}}\left(-\dfrac{1}{3}\,w^{-\frac{4}{3}}\right)\dfrac{d\,w}{d\,x}.$

Aus I folgt V) $\frac{d\,v}{d\,x} = -\,2\,x + \frac{1}{2}\,(1 + x)^{-\frac{1}{2}}$

„ II „ VI) $\frac{d\,w}{d\,x} = 2\,x + \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}}.(-\,1) = 2\,x - \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}}.$

Substituirt man die Werthe von v, w, $\frac{d\,v}{d\,x}$ und $\frac{d\,w}{d\,x}$ in Gleichung IV, so erhält man:

$$\text{VII)}\ \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{3}\,(1 + x^2 + (1 - x)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\,(1 - x^2 + (1 + x)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}\,(-\,2\,x + \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}})$$

$$-\,\frac{1}{3}\,(1 - x^2 + (1 + x)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}\,(1 + x^2 + (1 - x)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}}\,(2\,x - \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{-\,2\,x + \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 + x}}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}} - \frac{\left(2\,x - \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 - x}}\right)(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{1}{3}}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{\left(-\,2\,x + \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 + x}}\right)(1 + x^2 + \sqrt{1 - x}) - \left(2\,x - \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 - x}}\right)(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\,2\,x - 2\,x^3 - 2\,x\sqrt{1 - x} + \dfrac{1 + x^2}{2\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \\ -\,2\,x + 2\,x^3 - 2\,x\sqrt{1 + x} + \dfrac{1 - x^2}{2\sqrt{1 - x}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} \end{matrix}\right\} : \begin{matrix} 3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}} \\ (1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

$$= \frac{-\,4\,x - 2\,x\,(\sqrt{1 - x}) + \sqrt{1 + x} + \dfrac{1 + x^2 + \sqrt{1 - x}}{2\,\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1 - x^2 + \sqrt{1 + x}}{2\,\sqrt{1 - x}}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-\,4\,x\sqrt{1 - x^2} - 2\,x\,|\,(1 - x)\sqrt{1 + x} + (1 + x)\sqrt{1 - x}\,| + \dfrac{1 + x^2}{2}\sqrt{1 - x} + \dfrac{1 - x^2}{2}\sqrt{1 + x} + \dfrac{1 + x}{2} + \dfrac{1 - x}{2}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - 4\,x\sqrt{1 - x^2} - 2\,x\,(1 - x)\sqrt{1 + x} + \left(\dfrac{1 - x^2}{2}\right)\sqrt{1 + x} - 2\,x\,(1 + x)\sqrt{1 - x} + \left(\dfrac{1 + x^2}{2}\right)\sqrt{1 - x}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - 4\,x\,\sqrt{1 - x^2} + (-\,2\,x + 2x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,x^2)\sqrt{1 + x} + (-\,2\,x - 2\,x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x^2)\sqrt{1 - x}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - 4\,x\,\sqrt{1 - x^2} + (\frac{1}{2} - 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2)\sqrt{1 + x} + (\frac{1}{2} - 2\,x - \frac{3}{2}\,x^2)\sqrt{1 - x}}{3\,\sqrt[3]{(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^4}\,\sqrt[3]{(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^2}\,\sqrt{1 - x}}.$$

50) $f(x) = \sqrt[4]{\left|a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right|^3}.$

Man setze $y = \frac{b}{\sqrt{x}} = b\,x^{-\frac{1}{2}}$

also $\frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{1}{2}\,b\,x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-\,b}{2\,\sqrt{x^3}}$

und $z = \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2} = (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

folglich $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{2}{3}\,(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}}.(-\,2\,x)$

$$= \frac{-\,4\,x}{3\,\sqrt[3]{c^2 - x^2}},$$

dann ist $f(x) = \sqrt[4]{(a - y + z)^3} = (a - y + z)^{\frac{3}{4}}$

$$\text{also } \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{3}{4}\,(a - y + z)^{-\frac{1}{4}}\left(-\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{d\,z}{d\,x}\right)$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\left(-\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{d\,z}{d\,x}\right)}{(a - y + z)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{3\,b}{2\sqrt{x^3}} - \frac{4\,x}{\sqrt[3]{c^2 - x^2}}}{4\sqrt[4]{\left\{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right\}^3}}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\,b\,\sqrt[3]{c^2 - x^2} - x^2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}\,\sqrt[3]{c^2 - x^2}\,\sqrt[4]{\left\{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right\}^3}}.$$

---

§ 39. Beispiele zur Differenziation der transcendenten Functionen.

a) Logarithmische und Exponential-Functionen.

1) $y = log\ nat\ x^p = p\,.\,log\ nat\ x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = p\,.\,\frac{1}{x}.$$

2) $y = log\ nat\ \sqrt[n]{x^p} = log\ nat\ x^{\frac{p}{n}} = \frac{p}{n}\ log\ nat\,.\,x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{p}{n}\,.\,\frac{1}{x}.$$

3) $y = log\ nat\ (a + b\,x + c\,x^2)$. Anwendung des § 28

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{b + 2\,c\,x}{a + b\,x + c\,x^2}$$

4) $y = log\ nat\ (a^2 \quad x^2)$. Anwendung der § 28

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{a^2 - x^2}\,.\,(-2\,x) = -\frac{2\,x}{a^2 - x^2}.$$

5) $y = log\ nat\ \sqrt{a + b\,x - c\,x^2} = log\ nat\ (a + b\,x - c\,x^2)^{\frac{1}{2}}$

Anwendung des § 28 und § 12

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a + b\,x - c\,x^2}}\,.\,\frac{1}{2}\,(a + b\,x - c\,x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(b - 2\,c\,x)$$

$$= \frac{b - 2\,c\,x}{2\,(a + b\,x - c\,x^2)}.$$

6) $y = log\ nat\ (x + \sqrt{1 + x^2}) = log\ nat\ \left\{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$

Anwendung des § 28

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\,.\,\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

7) $y = log\ nat\ \frac{1 + x}{1 - x}$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1 - x}{1 + x}\left\{\frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x^2)}\right\} = 2\,.\,\frac{1}{1 - x^2}.$$

6) $y = \log nat\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})$

Man setze $x + \sqrt{a^2 + x^2} = z = x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, so ist nach § 21, da

$y = \log nat\, z$ und $z = x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist,

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist nun $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$ und $\frac{d\,z}{d\,x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right);$$

mithin $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

7) Gegeben sei I) $y = \log nat\, \frac{a\,x}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}}$, man soll $\frac{d\,y}{d\,x}$ berechnen.

Man setze II) $\frac{a\,x}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}} = z = a\,x\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)^{-\frac{1}{2}}$, so ist

III) $y = \log nat\, z$ und IV) $z = \varphi\,(x)$.

Also ist nach § 21

$$\text{V)}\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Ferner ist VI) $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}}{a\,x}$

und nach § 13. 8 ist

$$\text{VII)}\ \frac{d\,z}{d\,x} = a\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)^{-\frac{1}{2}} + a\,x \,.\, -\frac{1}{2}\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)^{-\frac{3}{2}}\,(2\,c\,x - 3\,g\,x^2)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}} - \frac{a\,x\,(2\,c\,x - 3\,g\,x^2)}{2\,\sqrt{(b + c\,x^2 - g\,x^3)^3}}$$

also VIII) $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}}{a\,x}\left\{\frac{a}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}} - \frac{a\,x\,(2\,c\,x - 3\,g\,x^2)}{2\,\sqrt{(b + c\,x^3 - g\,x^3)^3}}\right\}$

$$= \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{2\,c\,x^2 - 3\,g\,x^3}{2\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\frac{2\,b + 2\,c\,x^2 - 2\,g\,x^3 - 2\,c\,x^2 + 3\,g\,x^3}{2\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)}\right\}$$

$$= \frac{2\,b + g\,x^3}{2\,x\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)}.$$

8) $y = \log nat\, \frac{x}{b - c\,x} = \log nat\, x - \log nat\,(b - c\,x)$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x} + \frac{c}{b - c\,x} = \frac{b - c\,x + c\,x}{x\,(b - c\,x)}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{b}{x\,(b - c\,x)}.$$

9) $y = \log nat\, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \log nat\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log nat\,(1 - x^2)$.

Man setze $1 - x^2 = z$, so ist

$$y = -\frac{1}{2}\log nat\, z.$$

Da y also eine Function von z, und z wieder eine Function von x ist, so ist nach § 21

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$ und $\frac{dz}{dx} = -2x$,

mithin $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2z} \cdot -2x = \frac{x}{z} = \frac{x}{1-x^2}$.

10) $y = log\ nat\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Man setze $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = z$, so ist

$$y = log\ nat\ z.$$

Mithin y eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} x \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

$$= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

11) $y = \frac{a}{\sqrt{b}}\ log\ nat\ \frac{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}}$.

Man setze $\frac{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}} = z$,

dann ist $y = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot log\ nat\ z$,

also y eine Function von z, und z wieder eine Function von x, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Nun ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}}$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b+cx}} - (\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b+cx}}}{(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$

$$= \frac{c\,[\sqrt{b+cx} + \sqrt{b} - \sqrt{b+cx} + \sqrt{b}]}{2\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{b}}\ \frac{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}} \cdot \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$

$$= \frac{ac}{(\sqrt{b+cx} - \sqrt{b})\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{a}{x\sqrt{b+cx}}.$$

12) $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log nat\, (x \sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})$

Man setze $x \sqrt{-1} = z$

also $-x^2 = z^2$, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log nat\, (z + \sqrt{1 + z^2})$$

Nach § 28 Zus. oder § 38, 7 ist:

$$\frac{d \log nat\, \varphi(x)}{d x} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{d\, \varphi(x)}{d x},$$

$$\text{also } \frac{d y}{d z} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{1 + z^2}} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{1 + z^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + z^2} + z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$\text{und } \frac{d z}{d x} = \sqrt{-1}.$$

Da y eine Function von z, und z eine Function von x, also y auch eine Function von x ist, so ist

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d z} \cdot \frac{d z}{d x}.$$

$$\text{Also } \frac{d y}{d x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

13) Ist $y = \log nat \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$ gegeben, so ist

$$y = \log nat \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}. \text{ Warum?}$$

Nun setze man $\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} = z$, so ist

$y = \log nat\, z$,

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d z} \cdot \frac{d z}{d x}.$$

Es ist aber $\frac{d y}{d z} = \frac{1}{z} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$

$$\text{und } \frac{d z}{d x} = \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}} - (1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 - (\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= -\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{und also } \frac{d y}{d x} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{-(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

14) $y = log\ nat \sqrt{\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+a^2}-x}\right\}}$

$$y = log\ nat \left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\ log\ nat \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}.$$

Nun setze man: $\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} = z$, so ist

$$y = \frac{1}{2}\ log\ nat\ z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{}{d\,x}.$$

Ferner ist $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\, \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$

und $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - (\sqrt{1+x^2}+x)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x) + (\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$$

Mithin $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

15) $y = log\,nat\,(e^x + e^{-x})$

Man setze $e^x + e^{-x} = u$,

so ist $y = log\ nat\ u$

und also y eine Function von u, und u eine Function von x, und folglich ist nach § 21

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,u} \cdot \frac{d\,u}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{d\,y}{d\,u} = \frac{1}{u} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ (§ 27)

und $\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{d\,e^x}{d\,x} + \frac{d\,e^{-x}}{d\,x}$ (§ 4)

$= e^x + e^{-x} \,.\, (-1)$ (§ 25 Zus. 5 und § 26 Zus. 1)

$= e^x - e^{-x}.$

Mithin ist $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \,.\, (e^x - e^{-x})$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

16) $y = x - a \; log \; nat \; x + x \, . \, e^x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 1 - \frac{a}{x} + \frac{d\,x\,.\,e^x}{d\,x} \text{ (§ 4 und § 27).}$$

Man setze $x \, . \, e^x = u$, so ist nach § 6 nur § 25 Zus. 5

$$\frac{d\,u}{d\,x} = e^x + x \, . \, e^x \, ,$$

$$\text{also } \frac{d\,y}{d\,x} = 1 - \frac{a}{x} + e^x + x \, . \, e^x .$$

17) $$y = \frac{x^3 - 6\,a^2\,x - \frac{8}{2}\,a^3}{(a+x)^2} - 3\,a \; log \; nat \; (a + x)$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{(a+x)^2\,(3\,x^2 - 6\,a^2) - (x^3 - 6\,a^2\,x - \frac{8}{2}\,a^3) \, . \, 2\,(a+x)}{(a+x)^4} - \frac{3\,a}{a+x}$$

$$= \frac{(a+x)\,(3\,x^2 - 6\,a^2) - 2\,(x^3 - 6\,a^2\,x - \frac{8}{2}\,a^3) - 3\,a\,(a+x)^2}{(a+x)^3}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{3\,a\,x^2 + 3\,x^3 - 6\,a^3 - 6\,a^2\,x - 2\,x^3 + 12\,a^2\,x + 9\,a^3 - 3\,a^3 - 6\,a^2\,x - 3\,a\,x^2}{(a+x)^3}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x^3}{(a+x)^3}$$

$$= \left(\frac{x}{a+x}\right)^3 .$$

18) Gegeben sei $y = \sqrt{1 - x^2} \, . \, log \; nat \; x + \sqrt{1 - e^x} \, . \, log \; nat \; x^2$, man soll $\frac{d\,y}{d\,x}$ berechnen. Es ist

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \; log \; nat \; x + 2\,(1 - e^x)^{\frac{1}{2}} \; log \; nat \; x .$$

Anwendung von § 4, § 6, § 12, § 27

$$\frac{d\,y}{d\,x} = log \; nat \; x \, . \, \frac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \, . \, (-2\,x) + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \, . \, \frac{1}{x}$$

$$+ 2 \; log \; nat \; x \, . \, \frac{1}{2}\,(1 - e^x)^{-\frac{1}{2}} \, . \, (e^x) + 2\,(1 - e^x)^{\frac{1}{2}} \, . \, \frac{1}{x}$$

$$= \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} - x\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \; log \; nat \; x$$

$$+ \frac{2\,(1 - e^x)^{\frac{1}{2}}}{x} - e^x \; log \; nat \; x \, . \, (1 - e^x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \frac{x \; lag \; nat \; x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2\,\sqrt{1 - e^x}}{x} - \frac{e^x \; log \; nat \; x}{\sqrt{1 - e^x}}$$

19) $$y = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \, . \, log \; nat \; \frac{\sqrt{a} + x\,\sqrt{c}}{\sqrt{a} - x\,\sqrt{c}} .$$

Man setze $\frac{\sqrt{a} + x\,\sqrt{c}}{\sqrt{a} - x\,\sqrt{c}} = u$,

so ist $y = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \, . \, log \; nat \; u .$

Nun ist $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,u} \, . \, \frac{d\,u}{d\,x}$

$$\frac{d\,y}{d\,u} = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \, . \, \frac{1}{u} = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \, . \, \frac{\sqrt{a} - x\,\sqrt{c}}{\sqrt{a} + x\,\sqrt{c}}$$

$$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{(\sqrt{a} - x\,\sqrt{c})\,\sqrt{c} + (\sqrt{a} + x\,\sqrt{c})\,\sqrt{c}}{(\sqrt{a} - x\,\sqrt{c})^2} = \frac{2\,\sqrt{a\,c}}{(\sqrt{a} - x\,\sqrt{c})^2}$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{\sqrt{a} - x\sqrt{c}}{\sqrt{a} + x\sqrt{c}} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - x\sqrt{c})^2}$$
$$= \frac{1}{a - c\,x^2}.$$

20). $y = (log\ nat\ x)^m$

Man setze $log\ nat\ x = z$,

so ist $y = z^m$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \frac{d\,z^m}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$
$$= m\,z^{m-1}\frac{dz}{dx}.$$

Da nun $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$ ist,

$$\text{so ist } \frac{dy}{dx} = \frac{m\,(log\ nat\ x)^{m-1}}{x}.$$

21) $y = \left\{log\ nat\ (x + \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{3}\ x^3\right\}^m.$

Man setze $log\ nat\ (x + \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{3}\ x^3) = z$,

$y = z^m$,

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = m\,z^{m-1}\frac{dz}{dx}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3} \cdot (1 + x + x^2),$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = m\,\left\{log\ nat\ (x + \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{3}\ x^3)\right\}^{m-1} \cdot \frac{1 + x + x^2}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}$$

22) $y = x^m\ (log\ nat\ x)^n$

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}(log\ nat\ x)^n + \frac{n\,(log\ nat\ x)^{n-1}}{x} \cdot x^m$$
$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1}\left\{m\,(log\ nat\ x)^n + n\,(log\ nat\ x)^{n-1}\right\}$$
$$= x^{m-1}\,(log\ nat\ x)^{n-1}\,(m\ log\ nat\ x + n)$$

23) $y = e^{e^x}.$

Man setze $e^x = z$, so ist

$y = e^z$.

$$\text{Dann ist } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$
$$\frac{dy}{dz} = e^z \text{ und } \frac{dz}{dx} = e^x,$$
$$\text{also } \frac{dy}{dx} = e^z \cdot e^x = e^x \cdot e^{e^x}$$
$$= e^{(x + e^x)}.$$

24) $y = e^{e^{\sqrt{1 + x}}}.$

Man setze $e^{\sqrt{1+x}} = z$ und $\sqrt{1 + x} = u$,

so ist $y = e^z$, $z = e^u$ und $u = (1 + x)^{\frac{1}{2}}$,

also y eine Function von z, z eine Function von u und u eine Function von x, mithin ist nach § 21 Zusatz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Nun ist $\frac{dy}{dz} = e^z$

$$\frac{dz}{du} = e^u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

also $\frac{dy}{dx} = e^z \cdot e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{\sqrt{1+x}}} \cdot \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+x}}$$

25) $y = \log nat\,(\log nat\, x)$.

Man setze $\log nat\, x = z$,

so ist $y = \log nat\, z$,

also $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\log nat\, x}$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$,

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log nat\, x}$.

26) $y = \log nat\, \{\log nat\,(\log nat\, x)\}$

Man setze $\log nat\,(\log nat\, x) = u$, $\log nat\, x = z$, also

$u = \log nat\, z$,

so ist $y = \log nat\, u$.

Es ist mithin $y = F(u)$, $u = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Nun ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}$, $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$.

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{\log nat\,(\log nat\, x)} \cdot \frac{1}{\log nat\, x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \log nat\, x \,.\, \log nat\,(\log nat\, x)}.$$

27) $y = x^x$, folglich

$$\log nat\, y = x \log nat\, x.$$

Mithin $\frac{d \log nat\, y}{dx} = \log nat\, x + x \cdot \frac{d \log nat\, x}{dx}$

$$\frac{d \log nat\, y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \log nat\, x + 1$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \log nat\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,(1 + \log nat\, x)$$

$$\frac{d x^x}{dx} = x^x\,(1 + \log nat\, x).$$

28) $y = (a + b\,x - c\,x^2)^{\alpha x^n + \beta x^{n-1} - \gamma x^{n-2}}$.

Man setze $a + b\,x - c\,x^2 = f(x)$ und $\alpha\,x^n + \beta\,x^{n-1} - \gamma\,x^{n-2} = \varphi(x)$,

so ist $y = f(x)^{\varphi(x)}$

Nach § 29 ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = (f(x))^{\varphi(x)} \left\{ \log nat\, f(x) \,.\, \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} = \alpha\,n\,x^{n-1} + \beta\,(n-1)\,x^{n-2} - \gamma\,(n-2)\,x^{n-3}$$

und $\dfrac{d\,f(x)}{d\,x} = b - 2\,c\,x$,

also $\dfrac{d\,y}{d\,x} = (a + b\,x - c\,x^2)^{\alpha x^n + \beta x^{n-1} - \gamma x^{n-2}}$

$$\Big\{ \log nat\,(a + b\,x - c\,x^2)\,[\alpha\,n\,x^{n-1} + \beta\,(n-1)\,x^{n-2} - \gamma\,(n-2)\,x^{n-3}]$$
$$+ \frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} - \gamma x^{n-2}}{a + b x - c x^2}\,(b + 2\,c\,x) \Big\}$$

29) $y = (\sqrt{1 - x^2})^{\sqrt{1 + x^2}}$

Man setze $\sqrt{1 - x^2} = f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

und $\sqrt{1 + x^2} = \varphi(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$,

so ist $y = f(x)^{\varphi(x)}$.

Nach § 29 ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{ \log nat\; f(x) \,.\, \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,2\,x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und $\dfrac{d\,f(x)}{d\,x} = \dfrac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-2\,x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

und folglich

$$\frac{d\,y}{d\,x} = (\sqrt{1 - x^2})^{\sqrt{1 + x^2}} \left\{ \log nat\, \sqrt{1 - x^2} \,.\, \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right\}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,(\sqrt{1 - x^2})^{\sqrt{1 + x^2}} \left\{ \log nat\, \sqrt{1 - x^2} - \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \right\}.$$

30) $y = a^{b^x}$.

Man setze $b^x = z = f(x)$, so ist $y = a^z$, also

$\log nat\; y = z \log nat\; a$

und $\log nat\; z = x \log nat\; b$.

Da y eine Function von z, und z eine Function von x ist, so ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,x} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist aber $\dfrac{d \log nat\; y}{d\,z} = \dfrac{d \log nat\; y}{d\,y} \cdot \dfrac{d\,y}{d\,z} = \log nat\; a$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d\,y}{d\,z} = y \log nat\; a$$

$$\frac{d\,y}{d\,z} = y \; log \; nat \; a$$
$$= a^{b^x} \; log \; nat \; a.$$

Ferner ist

$$\frac{d \; log \; nat \; z}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = log \; nat \; b$$
$$\frac{d\,z}{d\,x} = z \; log \; nat \; b = b^x \; log \; nat \; b \cdot$$

und folglich

$$\frac{d\,y}{d\,x} = a^{b^x} \; log \; nat \; a \,.\, b^x \; log \; nat \; b$$
$$= a^{b^x} \,.\, b^x \; log \; nat \; a \,.\, log \; nat \; b$$

31) $y = F(x)^{f(x)^{\varphi x}}$

Man setze $f(x)^{\varphi(x)} = \mathrm{F}(x)$, also

$$y = F(x)^{\mathrm{F}(x)},$$

so ist nach § 29

$$\frac{d\,y}{d\,x} = F(x)^{\mathrm{F}(x)} \left\{ log \; nat \; F(x) \,.\, \frac{d\,\mathrm{F}(x)}{d\,x} + \frac{\mathrm{F}(x)}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x} \right\}.$$

Es ist jedoch

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{ log \; nat \, f(x) \,.\, \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right\}.$$

Mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = F(x)^{f(x)^{\varphi(x)}} \left\{ log \; nat \; F(x) \,.\, f(x)^{\varphi(x)} \left[log \; nat \, f(x) \,.\, \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d f(x)}{d\,x} \right] + \frac{f(x)^{\varphi(x)}}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x} \right\}$$
$$= F(x)^{f(x)^{\varphi(x)}} \left\{ f(x)^{\varphi(x)} \; log \; nat \; F(x) \,.\, log \; nat \, f(x) \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + f(x)^{\varphi(x)} \,.\, \frac{\varphi(x)}{f(x)} \; log \; nat \; F(x) \,.\, \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right.$$
$$\left. + \frac{f(x)^{\varphi(x)}}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x} \right\}$$
$$= F(x)^{f(x)^{\varphi(x)}} . f(x)^{\varphi(x)} \left\{ log \; nat \; F(x) \,.\, log \; nat \, f(x) \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + log \; nat \; F(x) \,.\, \frac{\varphi(x)}{f(x)} \frac{d f(x)}{d\,x} + \frac{1}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x} \right\}.$$

b. Goniometrische Functionen.

32) $y = sin \; x + tang \; x$

$$\frac{d\,x}{d\,x} = cos \; x + sec^2 \; x$$
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{cos^3 \; x + 1}{cos^2 \; x}.$$

33) $y = cos \; x + sec \; x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\, sin \; x + tang \; x \,.\, sec \; x$$
$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\, sin \; x + \frac{sin \; x}{cos^2 \; x}$$
$$= sin \; x \left(\frac{1}{cos^2 \; x} - 1 \right)$$
$$= sin \; x \,.\, tang^2 \; x.$$

34) $y = \sin x + \operatorname{cosec} x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \cos g x \,.\, \operatorname{cosec} x$$
$$= \cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$
$$= -\cos x \left\{\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right\}$$
$$= -\cos x \,.\, \operatorname{cotg}^2 x.$$

35) $y = x - \sin x \,.\, \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x$$
$$= \sin^2 x + \sin^2 x$$
$$= 2 \sin^2 x.$$

36) $y = \frac{1}{8} (x - \sin x \,.\, \cos x + 2 \sin^3 x \,.\, \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} (1 - \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \,.\, 3 \sin^2 x \,.\, \cos x - 2 \sin^3 x \,.\, \sin x)$$
$$= \frac{1}{8} (2 \sin^2 x + 6 \sin^2 x \,.\, \cos^2 x - 2 \sin^4 x)$$
$$= \frac{1}{8} (2 \sin^2 x + 6 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - 2 \sin^4 x)$$
$$= \frac{1}{8} (8 \sin^2 x - 8 \sin^4 x)$$
$$= \sin^2 x (1 - \sin^2 x)$$
$$= \sin^2 x \,.\, \cos^2 x.$$

37) $y = 1 + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tang} x} + \sin 2x$

$$y = 1 + (1 + 2 \operatorname{tang} x)^{\frac{1}{2}} + \sin 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + 2 \operatorname{tang} x)^{-\frac{1}{2}} \,.\, 2 \sec^2 x + 2 \cos 2x$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + 2 \operatorname{tang} x}} + 2 \cos 2x.$$

38) $y = \sin x^{\cos x}.$

Setzt man $\sin x = f(x)$ und $\cos x = \varphi(x)$, so ist

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

also $\frac{dy}{dx} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{\log nat\, f(x) \,.\, \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \,.\, \frac{df(x)}{dx}\right\}.$

Es ist nun $\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\sin x$ und $\frac{df(x)}{dx} = \cos x$, also

$$\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x} \left\{\log nat\, (\sin x) \,.\, (-\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} \,.\, \cos x\right\}$$
$$\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x} \left\{\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x} \log nat\, (\sin x)\right\}$$
$$= \sin x^{\cos x - 1} \left\{\cos^2 x - \sin^2 x \log nat\, (\sin x)\right\}.$$

Da nach § 14. XXX der Ebenen Trigonometrie

$$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \,.\, \log nat\, (\sin x)}{\sin x^{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}}.$$

39) $y = \cos x^{\sin x}$.

Setzt man wieder $\cos x = f(x)$ und $\sin x = \varphi(x)$, so ist

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

und also

$$\frac{dy}{dx} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{ \log nat\, f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \right\}$$

und $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \cos x$, $\frac{df(x)}{dx} = -\sin x$.

Mithin

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^{\sin x} \left\{ \log nat\,(\cos x) \cdot \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x \right\}$$

$$= \cos x^{\sin x - 1} \left\{ \cos^2 x \cdot \log nat\,(\cos x) - \sin^2 x \right\}.$$

40) $y = \log nat\,(\tan g\, x)$.

Man setze $\tan g\, x = z$, so ist

$$y = \log nat\, z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist jedoch

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} \text{ und } \frac{dz}{dx} = \sec^2 x,$$

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan g\, x} \cdot \sec^2 x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{2}{\sin 2x}.$$

41) $y = \log nat \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

Man setze $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = z = f(x) = \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \sin x)^{\frac{1}{2}}}$, so ist

$$y = \log nat\, z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}}$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{(1 - \sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x - (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 - \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\cos x)}{1 - \sin x}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x}{1 - \sin x} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}} + \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x}{1 - \sin x} \left\{ \frac{1 - \sin x + 1 + \sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \right\}$$

$$= \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}} \cdot \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}\,\sqrt{1 - \sin x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$
$$= sec\ x.$$

42) $y = log\ nat \sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}}$.

Man setze $\sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}} = z = f(x) = \frac{(1 - \cos n x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \cos n x)^{\frac{1}{2}}}$, so ist

$$y = log\ nat\ z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1 + \cos n x}}{\sqrt{1 - \cos n x}}$.

Ferner ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(1 + \cos n x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos n x)^{-\frac{1}{2}}\, n \sin n x + (1 - \cos n x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos n x)^{-\frac{1}{2}} \cdot n \sin n x}{1 + \cos n x}$$
$$= \frac{n \sin n x}{2(1 + \cos n x)} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \cos n x}}{\sqrt{1 - \cos n x}} + \frac{\sqrt{1 - \cos n x}}{\sqrt{1 + \cos n x}} \right\}$$
$$= \frac{n \sin n x}{2(1 + \cos n x)} \left\{ \frac{1 + \cos n x + 1 - \cos n x}{\sqrt{1 - \cos^2 n x}} \right\}$$
$$= \frac{n \sin n x}{2(1 + \cos n x)} \cdot \frac{2}{\sin n x}$$
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{n}{\sin n x}.$$

Zweite Auflösung. $y = log\ nat \sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}}$.

Nach § 14 XXXIII der Ebenen Trigonometrie ist

$$\sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}} = tang\ \frac{1}{2} n x,$$

also $y = log\ nat\ (tang\ \frac{1}{2} n x)$.

Nun setze man $tang\ \frac{1}{2} n x = z$, so ist

$$y = log\ nat\ z;$$

da $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}$

$\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z}$ und $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{2} n\ sec^2 \frac{1}{2} n x$

ist, so ist $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{tang\ \frac{1}{2} n x} \cdot \frac{1}{2} n\ sec^2 \frac{1}{2} n x$

$$= \frac{1}{2} n \frac{\cos \frac{1}{2} n x}{\sin \frac{1}{2} n x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} n x}$$
$$= n \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} n x \cdot \cos \frac{1}{2} n x}$$
$$= \frac{n}{\sin n x}.$$

43) $y = log\ nat \sqrt{\frac{\cos n x - i \sin n x}{\cos n x + i \sin n x}}$.

Erste Auflösung. Man setze $\sqrt{\frac{\cos n x - i \sin n x}{\cos n x + i \sin n x}} = z = \frac{(\cos n x - i \sin n x)^{\frac{1}{2}}}{(\cos n x + i \sin n x)^{\frac{1}{2}}}$.

Dann ist $y = log\ nat\ z = f(z)$ und $z = \varphi(x)$,

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{\cos nx + i \sin nx}{\cos nx - i \sin nx}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \left\{\begin{matrix}(\cos nx + i \sin nx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(\cos nx - i \sin nx)^{-\frac{1}{2}}(-n \sin nx - i n \cos nx) \\ -(\cos nx - i \sin nx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(\cos nx + i \sin nx)^{-\frac{1}{2}}(-n \sin nx + i n \cos nx)\end{matrix}\right\} : (\cos nx + i \sin nx)$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} n \frac{\sqrt{\cos nx + i \sin nx}}{\sqrt{\cos nx - i \sin nx}}(\sin nx + i \cos nx) + \frac{1}{2} n \frac{\sqrt{\cos nx - i \sin nx}}{\sqrt{\cos nx + i \sin nx}}(\sin nx - i \cos nx)}{\cos nx + i \sin nx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} n [(\sin nx + i \cos nx)(\cos nx + i \sin nx) - (\sin nx - i \cos nx)(\cos nx - i \sin nx)]}{(\cos nx + i \sin nx) \sqrt{\cos nx - i \sin nx} \sqrt{\cos nx + i \sin nx}}.$$

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\cos nx + i \sin nx}}{\sqrt{\cos nx - i \sin nx}} \cdot \frac{-\frac{1}{2} n [(\sin nx + i \cos nx)(\cos nx + i \sin nx) - (\sin nx - i \cos nx)(\cos nx - i \sin nx)]}{(\cos nx + i \sin nx) \sqrt{\cos nx - i \sin nx} \sqrt{\cos nx + i \sin nx}}$

$$= -\frac{1}{2}\left[\begin{matrix}\sin nx . \cos nx + i \cos^2 nx + i \sin^2 nx - \sin nx . \cos nx \\ -(\sin nx . \cos nx - i \cos^2 nx - \sin^2 nx - \sin nx . \cos nx)\end{matrix}\right] : \cos^2 nx + \sin^2 nx$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} n \{i(\cos^2 nx + \sin^2 nx + i(\cos^2 nx + \sin^2 nx)\}}{\cos^2 nx + \sin^2 nx}$$

$$= -\frac{1}{2} n (i + i)$$

$$= -ni.$$

Zweite Auflösung. $y = log\ nxt \sqrt{\frac{\cos nx - i \sin nx}{\cos nx + i \sin nx}}$

oder $y = log\ nat \sqrt{\frac{1 - i\ tang\ nx}{1 + i\ tang\ nx}}$.

Nun setze man $\sqrt{\frac{1 - i\ tang\ nx}{1 + i\ tang\ nx}} = z = \frac{(1 - i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}}}{(1 + i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}}}$, so ist

$y = log\ nat\ z$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Es ist $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}}$

und $\frac{dz}{dx} = \left\{\begin{matrix}(1 + i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 - i\ tang\ nx)^{-\frac{1}{2}} . (-i n \sec^2 nx) \\ -(1 - i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2}(1 + i\ tang\ nx)^{-\frac{1}{2}} . (+ i n \sec^2 nx)\end{matrix}\right\} : (1 + i\ tang\ nx)$

$$= \frac{-\frac{1}{2} i n \sec^2 nx}{1 + i\ tang\ nx}\left\{\frac{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}} + \frac{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}\right\}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} i n \sec^2 nx}{1 + i\ tang\ nx}\left\{\frac{1 + i\ tang\ nx + 1 - i\ tang\ nx}{\sqrt{1 + tang^2 nx}}\right\}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} i n \sec^2 nx}{1 + i\ tang\ nx} \cdot \frac{2}{\sec nx} = -\frac{i n \sec nx}{1 + i\ tang\ nx}.$$

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}} \cdot -\frac{i n \sec nx}{1 + i\ tang\ nx}$

$$= -\frac{i n \sec nx}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx} \sqrt{1 + i\ tang\ nx}}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{-\,i\,n\,sec\,n\,x}{\sqrt{1 + tang^2\,n\,x}}$$
$$= -\,i\,n.$$

Dritte Auflösung. $y = log\ nat \sqrt{\frac{cos\,n\,x - i\,sin\,n\,x}{cos\,n\,x + i\,sin\,n\,x}}$

$y = log\ nat \sqrt{\left(\frac{cos\,x - i\,sin\,x}{cos\,x + i\,sin\,x}\right)^n}$. Ebene Trigonometrie § 25

$$y = \frac{n}{2}\ log\ nat\ \frac{cos\,x - i\,sin\,x}{cos\,x + i\,sin\,x}.$$

Anwendung des § 27 der Ebenen Trigonometrie

$$y = \frac{n}{2}\ log\ nat\ e^{-2\,i\,x}$$
$$y = \frac{n}{2}\,.\,-2\,i\,x = -\,n\,i\,x$$

also $\frac{d\,y}{d\,x} = -\,n\,i.$

44) $y = Ang\,(sin = 2\,x\sqrt{1 - x^2})$.

Man setze $2\,x\sqrt{1 - x^2} = z$, so ist

$$y = Ang\,(sin = z).$$

Also ist y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z}\cdot\frac{d\,z}{d\,x}.$$

Da $z = 2\,x\sqrt{1 - x^2}$ ist, so ist

$$z^2 = 4\,x^2\,(1 - x^2)$$
$$1 - z^2 = 1 - 4\,x^2 + 4\,x^4$$
$$\sqrt{1 - z^2} = 1 - 2\,x^2.$$

Nach § 34. 1 ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,Ang\,(sin = z)}{d\,z} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = 1 - 2\,x^2.$$

Ferner ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = 2\sqrt{1 - x^2} + \frac{2\,x\,.\,\frac{1}{2}\,(-2\,x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2\,(1 - x^2) - 2\,x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= \frac{2\,(1 - 2\,x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Folglich $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{1 - 2\,x^2}\cdot\frac{2\,(1 - 2\,x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

45) $y = \frac{1}{\sqrt{a\,b}}\,.\,Ang\,\left(tang = x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

Man setze $x\sqrt{\frac{b}{a}} = z$, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{a\,b}}\,.\,Ang\,(tang = z),$$

also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,x}\cdot\frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{1+z^2}$. (§ 35. 1).

Da $z = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ist, so ist

$$1 + z^2 = 1 + \frac{b x^2}{a} = \frac{a + b x^2}{a},$$

folglich $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{a}{a + b x^2}$

und $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{b}{a}}$,

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{a}{a+bx^2} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{b}}{a\sqrt{b}\,(a + b x^2)}$

$$= \frac{1}{a + b x^2}.$$

46) $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Ang\left(tang = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Man setze $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = z$, so ist $z^2 = \frac{4x^2 + 4x + 1}{3}$

$$1 + z^2 = \frac{4x^2 + 4x + 4}{3} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{3}$$

und $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Ang\,(tang = z)$.

Es ist also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Nach § 35. 1 ist

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4(x^2 + x + 1)}.$$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4(x^2+x+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

47) $y = Ang\left(cos = \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}\right)$

Man setze $z = \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$, so ist

$$y = Ang\,(cos = z).$$

Da y eine Function von z, und z eine Function von x ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Nach § 34. 2 ist

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Aus der Bedingungsgleichung für z folgt

$$z^2 = \frac{b^2 + 2ab \cos x + a^2 \cos^2 x}{a^2 + 2ab \cos x + b^2 \cos^2 x}$$

$$\text{also } 1 - z^2 = \frac{a^2 + 2\,a\,b\cos x + b^2\cos^2 x - b^2 - 2\,a\,b\cos x - a^2\cos^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(1 - \cos^2 x)}{(a + b\cos x)^2}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\sin^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$

und mithin

$$\sqrt{1 - z^2} = \frac{\sin x}{a + b\cos x} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{a + b\cos x}{\sin x \,.\, \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\frac{d\,y}{d\,z} = -\frac{a + b\cos x}{\sin x \,.\, \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Da $z = \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ ist, so ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(a + b\cos x)(-a \,.\, \sin x) - (b + a\cos x)(-b\sin x)}{(a + b\cos x)^2}$$

$$= \frac{b\,(b + a\cos x) - a\,(a + b\cos x)}{(a + b\cos x)^2} \,.\, \sin x$$

$$= \frac{b^2 + a\,b\cos x - a^2 - a\,b\cos x}{(a + b\cos x)^2} \,.\, \sin x$$

$$= \frac{(b^2 - a^2)\sin x}{(a + b\cos x)^2}.$$

$$\text{Folglich } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{a + b\cos x}{\sin x\,\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{(b^2 - a^2)\sin x}{(a + b\cos x)^2}$$

$$= \frac{-(b^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 - b^2}\,(a + b\cos x)}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}\,(a + b\cos x)}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}.$$

48) $y = 2\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, Ang\left(tang = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \,.\, tang\,\frac{x}{2}\right).$

Man setze $\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \,.\, tang\,\frac{x}{2} = z$, dann ist

$$y = 2\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, Ang\,(tang = z),$$

also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Nach § 35. 1 ist

$$\frac{d\,y}{d\,z} = 2\sqrt{x^2 - b^2} \cdot \frac{1}{1 + z^2}$$

und aus der Bedingungsgleichung für z folgt

$$1 + z^2 = 1 + \frac{a - b}{a + b} \cdot tang^2\,\frac{x}{2}$$

$$= \frac{(a + b) + (a - b)\,tang^2\,\frac{x}{2}}{a + b}$$

Ferner ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \text{ (§ 31 Zusatz 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \sqrt{a+b}}.$$

Mithin ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{2 \sqrt{a^2-b^2}\,(a+b)}{(a+b) + (a-b) \, tang \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a-b}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{2 \sqrt{a+b} \sqrt{a-b}\,(a+b) \sqrt{a-b}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \sqrt{a+b} \left\{(a+b) + (a-b) \, tang^2 \frac{x}{2}\right\}}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b) \cos^2 \frac{x}{2} + (a-b) \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a \cos^2 \frac{x}{2} + b \cos^2 \frac{x}{2} + a \sin^2 \frac{x}{2} - b \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a \left(\cos^2 \frac{x}{x} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a + b \cos x}.$$

49) $$y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot Ang \left(tang = \frac{\sin x \sqrt{a^2-b^2}}{b + a \cos x}\right).$$

Man setze $z = \dfrac{\sin x \sqrt{a^2-b^2}}{b + a \cos x}$, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot Ang\ (tang = z),$$

also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Nun ist $\dfrac{d\,y}{d\,z} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \dfrac{1}{1+z^2}$ (§ 35. 1)

Aus der Bedingungsgleichung für z folgt

$$z^2 = \frac{\sin^2 x\,(a^2-b^2)}{(b + a \cos x)^2}$$

$$1 + z^2 = \frac{b^2 + 2\,a\,b \cos x + a^2 \cos^2 x + a^2 \sin^2 x - b^2 \sin^2 x}{(b + a \cos x)^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + 2\,a\,b \cos x - b^2 \sin^2 x}{(b + a \cos x)^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 (1 - \sin^2 x) + 2\,a\,b \cos x}{(b + a \cos x)^2}$$

$$= \frac{a^2 + 2\,a\,b \cos x + b^2 \cos^2 x}{(b + a \cos x)^2}$$

$$= \frac{(a + b \cos x)^2}{(b + a \cos x)^2}.$$

Folglich $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{(b + a \cos x)^2}{(a + b \cos x)^2}$.

Ferner ist $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(b + a \cos x) \cos x \sqrt{a^2 - b^2} + \sin x \sqrt{a^2 - b^2} \, . \, a \sin x}{(b + a \cos x)^2}$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \left\{ b \cos x + a \cos^2 x + a \sin^2 x \right\}}{(b + a \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \, (b \cos x + a)}{(b + a \cos x)^2}.$$

Also $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{(b + a \cos x)^2}{(a + b \cos x)^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \, (b \cos x + a)}{(b + a \cos x)^2}$

$$= \frac{1}{a + b \cos x}.$$

50) $y = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \log nat \frac{\sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}$.

Man setze $z = \frac{\sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}$, so ist

$$y = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \log nat \, z.$$

Da y eine Function von z, und z eine Function von x ist, so ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right)}$

und $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{\cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right) . \frac{1}{2} \cos \left(\frac{x + \alpha}{2} \right) + \sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right) . \frac{1}{2} \sin \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{x + \alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right) + \sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{x - \alpha}{2} \right) \right\}}{\cos^2 \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}.$$

Anwendung von § 17. IV. der Ebenen Trigonometrie

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{\frac{1}{2} \cos \left(\frac{x + \alpha}{2} - \frac{x - \alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha}{\cos^2 \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}.$$

Folglich $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cos x}{\cos^2 \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}$

$$= \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x + \alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)}.$$

Anwendung von § 17. VI der Ebenen Trigonometrie

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sin x + \sin \alpha}.$$