Über die Bewegung

eines

sich von einem horizontalen Cylinder abwickelnden Pendels an einem völlig biegsamen Faden.

Fortsetzung: enthaltend §. 3 und 4.

Von dem

Director Doerk.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 3. Bei der Integrirung dieser Differenzialgleichung für t werde ich die Bedingung feststellen, daß man die Annäherung nicht über die erste Potenz der Winkelfunctionen hinaustreibe. Die gefundene Gleichung für die Zeit war:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi^2\lambda}{\varrho}}} \cdot \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{a}{\varrho}u\right)du}{\left\{\cos.u + \frac{a}{\varrho}(u\cos.u - \sin.u) - \cos.u' + \frac{a}{\varrho}(u'\cos.u' - \sin.u')\right\}}}.$$

Um diese Gleichung bequemer integriren zu können, setze ich

$$\cos.\, u + \frac{a}{\varrho}(u \cos.\, u - \sin.\, u) = \cos.\, \varphi,$$

d. h. $\varrho \cos.\, u + a \,.\, u \cos.\, u - a \sin.\, u = \varrho \cos.\, \varphi$,

welche Substitution, wie aus der Figur hervorgeht, immer möglich ist. Denn man beschreibe aus dem Punkte F der Bahn des sich bewegenden Pendels einen Kreisbogen mit dem Radius ϱ, so daß $Fb = \varrho$ ist, so ist $FN = \varrho \cos.\, NFb = \varrho \cos.\, \varphi = \varrho \cos.\, u + au \cos.\, u - a \sin.\, u$, in welchem Ausdrucke ebenfalls $\varphi = o$ wird, wenn $u = o$ ist, und umgekehrt. Aus der Construction geht hervor, daß φ größer als u ist, so daß also $u = \varphi - \psi$ zu setzen ist. Setze ich nun diesen Werth von u in die Bedingungsgleichung, so ist

$$\varrho \cos.\, (\varphi - \psi) + a(\varphi - \psi) \cos.(\varphi - \psi) - a \sin.(\varphi - \psi) = \varrho \cos.\, \varphi,$$

d. h.

$$\left.\begin{array}{l} \varrho \cos.\, \varphi \,.\, \cos.\, \psi + \varrho \sin.\, \varphi \,.\, \sin.\, \psi \\ + a\, \varphi \cos.\, \varphi \,.\, \cos.\, \psi + a\, \varphi \sin.\, \varphi \,.\, \sin.\, \psi \\ - a\, \psi \cos.\, \varphi \,.\, \cos.\, \psi - a\, \psi \sin.\, \varphi \,.\, \sin.\, \psi \\ - a \sin.\, \varphi \,.\, \cos.\, \psi + a \cos.\, \varphi \,.\, \sin.\, \psi \end{array}\right\} = \varrho \cos.\, \varphi.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin.\psi = \psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} - + \text{etc.}$$

und $$\cos.\psi = 1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} - + \text{etc.}$$

Substituire ich diese Werthe in die Gleichung für $\varrho \cos.\Phi$, so erhalte ich:

$$\left.\begin{array}{l}(\varrho \cos.\varphi + a\varphi \cos.\varphi - a\psi \cos.\varphi - a \sin.\varphi)\left(1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} - + \text{etc.}\right) \\ + (\varrho \sin.\varphi + a\varphi \sin.\varphi - a\psi \sin.\varphi + a \cos.\varphi)\left(\psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} - + \text{etc.}\right)\end{array}\right\}$$
$$= \varrho \cos.\Phi.$$

Treibe ich der obigen Bedingung gemäß die Annäherung nicht über die erste Potenz der Winkelfunctionen hinaus, so erhalte ich:

$$\left.\begin{array}{l}\varrho \cos.\Phi + a\Phi \cos.\Phi - a\psi \cos.\Phi - a \sin.\Phi \\ + \varrho\psi \sin.\Phi + a\Phi\psi \sin.\Phi - a\psi^2 \sin.\Phi + a\psi \cos.\Phi\end{array}\right\} = \varrho \cos.\Phi$$

$$a\Phi \cos.\Phi + \varrho\psi \sin.\Phi - a \sin.\Phi = 0$$

$$\psi = -\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Mithin ist $u = \Phi - \psi$

$$u = \Phi + \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Also ist

$$du = d\Phi + \frac{a}{\varrho} \cdot d\,\frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Substituire ich nun diese Werthe in die Differenzialgleichung, so erhalte ich:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{1 + \frac{a}{\varrho}\left(\Phi + \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}\right)\left(d\Phi + \frac{a}{\varrho}\, d\,\frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}\right)}{\sqrt{2 \cos.\varphi - 2 \cos.\varphi'}}.$$

Wird auch hier die Annäherung nicht über die erste Potenz der Winkelfunctionen hinaus fortgesetzt, so erhalte ich:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \left\{\frac{d\varphi}{\sqrt{2 \cos.\varphi - 2 \cos.\varphi'}} + \frac{\frac{a}{\varrho}\varphi d\varphi + d\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}}{\sqrt{2 \cos.\varphi - 2 \cos.\varphi'}}\right\},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \left\{ \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} + \frac{a}{\varrho} \int \frac{\varphi d\varphi + d\frac{\varphi \cos.\varphi - \sin.\varphi}{\sin.\varphi}}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} \right\}.$$

Zuerst wollen wir nun $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}}$ bestimmen.

Es ist $$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}\varphi - 1 + 2\sin.^2\frac{1}{2}\varphi'}}$$
$$= \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin.^2\frac{1}{2}\varphi' - \sin.^2\frac{1}{2}\varphi}}.$$

Nun setze ich:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \sin.\tfrac{1}{2}\varphi' \cos.\omega$$
$$\tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{1}{2}\varphi d\varphi = -\sin.\tfrac{1}{2}\varphi' \sin.\omega d\omega$$
$$d\varphi = -\frac{2\sin.\frac{1}{2}\varphi' \sin.\omega d\omega}{\sqrt{1 - \sin.^2\frac{1}{2}\varphi' \cos.^2\omega}}, \text{ also}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} = \int \frac{-2\sin.\frac{1}{2}\varphi' \sin.\omega d\omega}{2\sqrt{1 - \sin.^2\frac{1}{2}\varphi' \cos.^2\omega} \cdot \sqrt{1 - \cos.^2\omega} \cdot \sin.\frac{1}{2}\varphi'}$$
$$= \int \frac{-d\omega}{\sqrt{1 - \sin.^2\frac{1}{2}\varphi' \cos.^2\omega}},$$

welches Integral zwischen den gehörigen Grenzen $\cos.\omega = 1$ und $\cos.\omega = \frac{\sin.\frac{1}{2}\varphi}{\sin.\frac{1}{2}\varphi'}$ genommen werden muß. Ich will zuerst die Zeit suchen, welche das Pendel braucht, um vom Winkel $\cos.\omega = 1$ bis $\cos.\omega = 0$ zu schwingen, d. h. von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$. Also

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} = \int \frac{-d\omega}{\sqrt{1 - \sin.^2\frac{1}{2}\varphi' \cos.^2\omega}}$$
$$= \int - d\omega \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi' \cos.^2\omega + \frac{1.3}{2.4} \cdot \sin.^4\tfrac{1}{2}\varphi' \cos.^4\omega + \text{etc.} \right\}.$$

Jetzt drücke ich die Potenzen des Cosinus von ω durch die Cosinusse des Vielfachen von ω aus, dann kommen nach der Integration goniometrische Functionen der gerad-vielfachen Winkel in die Rechnung, welche für beide

Werthe von ω gleich Null werden. Aber außerdem enthält die Entwikkelung noch ein von ω selbst unabhängiges Glied, denn es ist:

$$2\cos.^2\omega = 1 + \cos.2\omega$$

$$2^3\cos.^4\omega = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4.3}{1.2} + 4\cos.2\omega + \cos.4\omega$$

$$2^5\cos.^6\omega = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{6.5}{1.2}\cos.2\omega + 6\cos.4\omega + \cos.6\omega$$

und allgemein:

$$2^{2n-1}\cos.^{2n}\omega = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2n.2n-1.2n-2....n+1}{1.\ 2.\ 3\ ...\ n} + \frac{2n.2n-1.....n+3}{1.\ 2....n-1}\cos.2\omega + \text{etc.}$$

$$2^{2n}\cos.^{2n}\omega = \frac{2n.2n-1.2n-2.....n+1}{1.\ 2.\ 3\ ....\ n} + \text{etc.}$$

$$\cos.^{2n}\omega = \frac{2n.2n-1.2n-2....n+1}{1.\ 2.\ 3\ ....\ n.2^n.2^n} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2n.2n-1.2n-2.....n+1}{1.\ 2.\ 3\ ....\ n}\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{2}.\frac{3}{2}...\frac{n}{2}\right)2^n + \text{etc.}$$

$$= \frac{2n\ .\ 2n-1.2n-2.....n+1}{2.\ 4.\ 6\ ....\ 2n\ .\ 2^n} + \text{etc.};$$

also ist

$$\int\cos.^{2n}\omega d\omega = \int\frac{2n.2n-1.2n-2....n+1}{2.\ 4.\ 6....2n.2^n}d\omega$$

$$+\int\frac{2n.2n-1.2n-2....n+3}{1.\ 2.\ 3\ ...\ n-1.2^{2n-1}}\cos.2\omega d\omega$$

$$+ \text{etc.}$$

Wird dieses Integral zwischen den Grenzen $\omega = o$ und $\omega = \frac{1}{2}\pi$ genommen, so ist

$$\int\cos.^{2n}\omega d\omega = \frac{2n.2n-1.2n-2....n+1}{2.\ 4.\ 6\ ....\ 2n.2^n}\omega.$$

Mithin ist dann

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi-2\cos.\varphi'}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\Big\{\int d\omega + \tfrac{1}{2}\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi'\int\cos.^2\omega d\omega$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\sin.^4\tfrac{1}{2}\varphi'\int\cos.^4\omega d\omega + ... + \frac{1.3.5....2n-1}{2.4.6...2n}\sin.^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi'\int\cos.^{2n}\omega d\omega\Big\}.$$

Entwickele ich nun die ersten Glieder der Integrale, indem die übrigen Glieder zwischen den angegebenen Grenzen verschwinden, so erhalte ich das Integral $= \omega$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi' . \tfrac{1}{2}\omega + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi' . \frac{1.3}{2.4}\omega + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.^6 \tfrac{1}{2}\varphi' . \frac{1.3.5}{2.4.6}\omega + \text{etc.}$$
$$+ \vdots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\sin.^{2n} \tfrac{1}{2}\varphi' . \frac{2n.\,2n-1\,\ldots\ldots n+1}{2.\;\;4.\;\;6\ldots 2n} . \frac{1}{2^n} . \omega + \text{etc.}$$

Nun ist

$$\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n} . \frac{2n.\,2n-1.\,2n-2\ldots.n+1}{2.\;\;4.\;\;6\;.\;.\;.\;2n} . \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} . \frac{2n.2n-1.2n-2\ldots.2n-(n-1)}{2.\;\;4.\;\;6\;\;.\;.\;.\;\;2n} . \frac{2n-n.2n-(n+1)\ldots..2n-(2n-1)}{1.\;\;2\;\;.\;.\;.\;.\;\;n} . \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} . \frac{2n.2n-1.2n-2\ldots.2n-(n-1)}{2.\;\;4.\;\;6\;.\;.\;.\;.\;2n} . \frac{n.(n-1)\ldots.1}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;n} . \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\;\ldots\;2n} . \frac{2n-1.\,2n-3\ldots.1}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;n} . \frac{2n.\,2n-2\ldots.2}{2.\;\;4\;.\;.\;2n} . \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\;\ldots\;2n} . \frac{2n-1.\,2n-3\ldots 1}{1.\;\;2\ldots.\,n} . \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots.\,2n} . \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\;\ldots\;2n}$$
$$= \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\;\ldots.\;2n}\right)^2.$$

Folglich ist das Integral zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \tfrac{1}{2}\pi$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} . \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi' + \ldots.. \right.$$
$$\left. \ldots.. + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \sin.^{2n} \tfrac{1}{2}\varphi' + \ldots \right\}.$$

Integrirt man nun noch einmal von 0 bis $-\varphi'$ d. h. von $\cos.\ \omega = 0$ bis $\cos.\ \omega = +1$ d. h. von $\omega = \tfrac{1}{2}\pi$ bis $\omega = \pi$, so werden ebenfalls alle Glieder, welche von den goniometrischen Functionen abhängen, verschwinden, und die von ω selbst abhängigen Glieder übrig bleiben;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kurz man wird ganz dasselbe Integral erhalten. Mithin ist das Integral $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}}$ zwischen den Grenzen $+\varphi'$ bis $-\varphi'$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int_{-\varphi'}^{+\varphi'}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\Big\{1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi' + \ldots.$$

$$\ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \sin.^{2n} \tfrac{1}{2}\varphi' + \ldots\Big\}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}.F\Phi.$$

Dieses Integral ist nun durch den Schwingungswinkel u' auszudrücken.

Es ist $\varrho\cos.\varphi = \varrho\cos.u + au\cos.u - a\sin.u$

also $\varphi = u + \psi$,

mithin $\varrho\cos.u\cos.\psi - \varrho\sin.u\sin.\psi = \varrho\cos.u + au\cos.u - a\sin.u$

und $\cos.\psi = 1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \text{etc.}$

$\sin.\psi = \psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

Wird die Annäherung auch hier nicht über die erste Potenz der Winkel hinausgetrieben, so erhält man

$$\varrho\cos.u - \varrho\psi\sin.u = \varrho\cos.u + au\cos.u - a\sin.u$$

$$\psi = -\frac{a}{\varrho}.\frac{u\cos.u - \sin.u}{\sin.u}$$

$$\varphi = u - \frac{a}{\varrho}.\frac{u\cos.u - \sin.u}{\sin.u}$$

daher $\varphi' = u' - \frac{a}{\varrho}.\frac{u'\cos.u' - \sin.u'}{\sin.u'}$

$$= u' + \frac{a}{\varrho}.\frac{\sin.u' - u'\cos.u'}{\sin.u'}$$

$$-\varphi' = -u' + \frac{a}{\varrho}\,\frac{\sin.u' - u'\cos.u'}{\sin.u'}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da ferner $\cos.\varphi = \cos.u + \frac{a}{\varrho}(u \cos.u - \sin u)$ ist,

so ist $1 - \cos.\varphi = 1 - \cos.u - \frac{a}{\varrho}(u \cos.u - \sin.u)$

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u - \frac{a}{\varrho}(u \cos.u - \sin.u)$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \sin.^2 \tfrac{1}{2}u - \frac{a}{\varrho}\left(\frac{u \cos.u - \sin.u}{2}\right)$$

$$= \sin.^2 \tfrac{1}{2}u + A,$$

wo $A = \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{\sin.u - u \cos.u}{2}$ ist.

Substituirt man diesen Werth in das gefundene Integral so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} =$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2(\sin.^2 \tfrac{1}{2}u + A) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2(\sin.^2 \tfrac{1}{2}u + A)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2(\sin.^2 \tfrac{1}{2}u + A)^n + \ldots\right]$$

Wird die Annäherung nicht über die erste Potenz von A hinausgetrieben, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} =$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\left[\begin{array}{l} 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}u' + \text{etc.} \\ + A\left\{(\tfrac{1}{2})^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' + \ldots\ldots\right\} \end{array}\right].$$

Setzt man nun analog:

$$Fu' = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}u' + \ldots\ldots$$

so ist, wenn ich $\sin.^2 \tfrac{1}{2}u' = x$ setze,

$$Fu' = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^3 + \ldots.$$

$$\frac{dFu'}{dx} = (\tfrac{1}{2})^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 2x + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 3x^2 + \ldots.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist aber $dx = 2 \sin. \frac{1}{2}u' \cos. \frac{1}{2}u' \cdot \frac{1}{2}du' = \frac{\sin. u'}{2} \cdot du'$, also

$$\frac{dFu'}{dx} = \frac{2dFu'}{\sin. u'du'} = (\tfrac{1}{2})^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot 2x + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 3x^2 + \ldots.$$

Mithin ist:

$$\left\{(\tfrac{1}{2})^2 + \left(\frac{1.3}{1.4}\right)^2 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' + \ldots\right\} A = \frac{2dFu'}{\sin. u'du'} \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{\sin. u' - u' \cos. u'}{2}$$

$$= \frac{dFu'}{du'} \cdot -\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{u' \cos. u' - \sin. u'}{\sin. u'}.$$

Folglich ist das gefundene Integral durch u' ausgedrückt:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos.\varphi - 2\cos.\varphi'}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \cdot \left\{Fu' + \frac{dFu'}{du'} \cdot -\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{u'\cos.u' - \sin.u'}{\sin. u'}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \left\{Fu' - \frac{dFu'}{du'} \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{u'\cos.u' - \sin.u'}{\sin. u'}\right\}.$$

Folglich ist das Integral von dt, wenn ich in dem zweiten Theile u für φ schreibe:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \left\{Fu' - \frac{dFu'}{du'} \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{u' \cos. u' - \sin. u'}{\sin. u'}\right\}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \int \frac{\frac{a}{\varrho}\, udu + d \cdot \frac{fu}{\sin.u}}{\sqrt{2\cos.u - 2\cos.u'}}$$

$$\left[= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \left\{Fu' - \frac{dFu'}{du'} \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{u' \cos. u' - \sin. u'}{\sin. u'}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \int \frac{\frac{a}{\varrho}\, udu + d \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{u \cos. u - \sin. u}{\sin. u}}{\sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}}\right].$$

Das Glied, welches unter dem Integralzeichen steht

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \int \frac{\frac{a}{\varrho} \cdot udu + \frac{a}{\varrho}\, d\frac{u \cos. u - \sin. u}{\sin. u}}{\sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}} \text{ ist}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{u + \frac{\sin. u \cos. u - u}{\sin.^2 u}}{\sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{\frac{u \sin.^2 u + \sin. u \cos. u - u}{\sin.^2 u}}{\sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{\frac{\sin. u \cos. u - u \cos.^2 u}{\sin.^2 u}}{\sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}} . du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{\cos. udu}{\sin. u \sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{u \cos.^2 udu}{\sin.^2 u \sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}} .$$

Treibe ich auch hier die Annäherung nicht über die erste Potenz der Winkelfunctionen hinaus, so habe ich nur den ersten Theil, also

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{\cos. udu}{\sin. u \sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}}$$ zu finden.

Hiezu setze ich nun, wie oben

$$\sin. \tfrac{1}{2}u = \sin. \tfrac{1}{2}u' \cos. \omega$$

$$\tfrac{1}{2} \cos. \tfrac{1}{2}udu = - \sin. \tfrac{1}{2}u' \sin. \omega d\omega$$

$$du = \frac{-2 \sin. \tfrac{1}{2}u' \sin. \omega d\omega}{\sqrt{1 - \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' \cos.^2 \omega}}.$$

Ferner ist $\cos. u = 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u = 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' \cos.^2 \omega$

$$\sin. u = 2 \sin. \tfrac{1}{2}u \cos. \tfrac{1}{2}u = 2 \sin. \tfrac{1}{2}u' \cos. \omega \sqrt{1 - \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' \cos.^2 \omega}$$

Substituire ich also diese Werthe in das zu findende Integral, so erhalte ich:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \frac{a}{\varrho} \int \frac{\cos. udu}{\sin. u \sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\int\frac{(1-2\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega)\,.-2\sin.\tfrac{1}{2}u'\sin.\omega d\omega}{2\sin.\tfrac{1}{2}u'\cos.\omega\sqrt{1-\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega}\,.\sqrt{1-\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega}\,.2\sin.\tfrac{1}{2}u'\sin.\omega}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\int\frac{-(1-2\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega)\,d\omega}{2\sin.\tfrac{1}{2}u'\cos.\omega\,(1-\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega)}.$$

Entwickele ich nun $\frac{1-2\sin.^2\frac{1}{2}u'\cos.^2\omega}{1-\sin.^2\frac{1}{2}u'\cos.^2\omega}$ in eine Reihe, so erhalte ich:

$$\frac{1-2\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega}{1-\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega}=1-\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega-\sin.^4\tfrac{1}{2}u'\cos.\;\omega-\text{etc.}$$

Daher wird das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\int\frac{\cos.u\,du}{\sin.u\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\int\frac{-d\omega}{2\sin.\tfrac{1}{2}u'\cos.\omega}\left\{1-\sin.^2\tfrac{1}{2}u'\cos.^2\omega-\sin.^4\tfrac{1}{2}u'\cos.^4\omega-\text{etc.}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\left\{\frac{1}{2\sin.\tfrac{1}{2}u'}\int\frac{-d\omega}{\cos.\omega}+\right.$$

$$\left.\tfrac{1}{2}\left(\sin.\tfrac{1}{2}u'\int\cos.\omega d\omega+\sin.^3\tfrac{1}{2}u'\int\cos.^3\omega d\omega+\text{etc.}\right)\right\}$$

Zuerst will ich die Integrale bestimmen, welche mit Potenzen des Cosinus von ω multiplicirt sind.

Es ist:

$$\sin.\tfrac{1}{2}u'\int\cos.\omega d\omega=\sin.\tfrac{1}{2}u'\sin.\omega$$

$$\sin.^3\tfrac{1}{2}u'\int\cos.^3\omega d\omega=\sin.^3\tfrac{1}{2}u'\left\{\frac{\cos.^2\omega\sin\omega}{3}+\tfrac{2}{3}\sin.\omega\right\}$$

$$\sin.^5\tfrac{1}{2}u'\int\cos.^5\omega d\omega=\sin.^5\tfrac{1}{2}u'\left\{\frac{\cos.^4\omega\sin.\omega}{5}+\frac{4}{5}\,\frac{\cos.^3\omega\sin.\omega}{3}+\frac{4.2}{5.3}\sin.\omega\right\}$$

$$\vdots$$

$$\sin.^{2n-1}\tfrac{1}{2}u'\int\cos.^{2n-1}\omega d\omega=\sin.^{2n-1}\tfrac{1}{2}u'\left\{\frac{\cos.^{2-2}\omega\sin.\omega}{2n-1}+\right.$$

$$\left.\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{\cos.^{2n-4}\omega\sin.\omega}{2n-3}+\ldots\ldots+\frac{2n-2.2n-4\ldots.2}{2n-1.2n-3\ldots.1}\sin.\omega\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alle diese Integrale sind zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen, woraus die Summe dieser Integrale hervorgeht

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\sin.\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{2}{3}\sin.^3\tfrac{1}{2}u' + \frac{2.4}{3.5}\sin.^5\tfrac{1}{2}u' + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{2.4.6\ldots.2n-2}{3.5.7\ldots2n-1}\sin.^{2n-1}\tfrac{1}{2}u' + \text{etc.}\right\}.$$

Ganz dasselbe erhalte ich, wenn ich die Integrale von $\omega = \pi$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ nehme, so daß also alle Integrale, zwischen den gehörigen Grenzen genommen

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\left\{\sin.\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{2}{3}\sin.^3\tfrac{1}{2}u' + \ldots. + \frac{2.4.6\ldots2n-2}{3.5.7\,..\,2n-1}\sin.^{2n-1}\tfrac{1}{2}u'\,\text{etc.}\right\}$$

sind. Es bleibt mir nun nichts weiter übrig, als den ersten Theil obiger Integrale zu bestimmen, nämlich:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{1}{2\sin.\tfrac{1}{2}u'}\int\frac{d\omega}{\cos.\omega}.$$

Nun ist $\displaystyle\int\frac{d\omega}{\cos.\omega} = \int\frac{\cos.\omega d\omega}{\cos.^2\omega} = \int\frac{d\sin.\omega}{1-\sin.^2\omega}$

$$= \int\frac{\tfrac{1}{2}d\sin.\omega}{1-\sin.\omega} + \int\frac{\tfrac{1}{2}d\sin.\omega}{1+\sin.\omega}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log.(1+\sin.\omega) - \tfrac{1}{2}\log.(1-\sin.\omega)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log.\frac{1+\sin.\omega}{1-\sin.\omega}.$$

Nun ist aber

$$\log.\frac{1+u}{1-u} = 2\left\{u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \text{etc.}\right\},$$

also

$$\log.\frac{1+\sin.\omega}{1-\sin.\omega} = 2\left\{\sin.\omega + \tfrac{1}{3}\sin.^3\omega + \tfrac{1}{5}\sin.^5\omega + \text{etc.}\right\},$$

welches Integral ebenfalls zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, und dann übergeht in

$$2\left\{1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}\right\}.$$

Ganz dasselbe erhalte ich für die andere Grenze; mithin ist dieses Integral vollständig zwischen den gehörigen Grenzen genommen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$4\,\{1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\text{etc.}\}$$

Also ist:

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\,\frac{1}{2\sin.\frac{1}{2}u'}\int\frac{d\omega}{\cos.\omega}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{2}{\sin.\frac{1}{2}u'}\{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\text{etc.}\}$$

Folglich ist

$$t=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\left\{Fu'-\frac{dFu'}{du'}\cdot\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{u'\cos.u'-\sin.u'}{\sin.\,u'}\right\}-\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{2}{\sin.\frac{1}{2}u'}\,(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{a}{\varrho}\,(\sin.\,\tfrac{1}{2}u'+\tfrac{2}{3}\sin.^3\,\tfrac{1}{2}u'+\frac{2.4}{3.5}\sin.^5\,\tfrac{1}{2}u'+\text{etc.})$$

§. 4. Ist der Schwingungswinkel sehr klein, wie es bei der Anwendung dieses Pendels nur der Fall sein kann, so habe ich die Differenzialgleichung

$$dt=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{\left(1+\frac{a}{\varrho}\,u\right)du}{\sqrt{\left\{\cos.u+\frac{a}{\varrho}(u\cos.u-\sin.u)-\cos.u'+\frac{a}{\varrho}(u'\cos.u'-\sin.u')\right\}}}$$

dieser Bedingung gemäß einzurichten. Ist u sehr klein, so ist

$$\cos.\ u=1$$

und $\sin.\ u=u$

mithin $u\cos.u-\sin.\ u=u-u=o$

und ebenso $u'\cos.\ u'-\sin.\ u'=o.$

Daher verwandelt sich dann die Differenzialgleichung für die Zeit in folgende:

$$dt=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{\left(1+\frac{a}{\varrho}\,u\right)du}{\sqrt{(2\cos.\ u-2\cos.\ u')}}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{du}{\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}+\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{udu}{\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}$$

Das erste Integral ist schon oben gefunden worden und es ist

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{du}{\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}=$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}u' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}u' + \text{etc.}\right\}.$$

Es bleibt also nur das zweite Integral zu finden übrig, nämlich:

$$\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{udu}{\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}$$

Hierin kann ich, da u sehr klein ist, für u auch sin. u setzen, und erhalte also

$$\int\frac{udu}{\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin.udu}{\sqrt{\cos.u-\cos.u'}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\cos.u}{\sqrt{\cos.u-\cos.u'}}.$$

Setze ich nun cos. u = x und cos. u' = a, so erhalte ich

$$\int\frac{udu}{\sqrt{2}\sqrt{\cos.u-\cos.u'}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}}.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, setze ich

$$\sqrt{x-a}=z$$

$$x-a=z^2$$

$$dx=2zdz$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2zdz}{z}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot z$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{x-a}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos.u-\cos.u'}$$

also

$$\frac{a}{\varrho}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\int\frac{udu}{\sqrt{2\cos.u-2\cos.u'}}=-\frac{a}{\varrho}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos.u-\cos.u'},$$

welches Integral zwischen den Grenzen $u = u'$ und $u = -u'$ zu nehmen ist. Nehme ich dieses Integral zuerst von $u = u'$ bis $u = o$, so erhalte ich

$$-\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot 2 \sin. \tfrac{1}{2} u'$$

und nehme ich es von $u = -u'$ bis $u = o$, so erhalte ich ganz dasselbe, so daß also das zwischen den angegebenen Grenzen vollständige Intregral

$$\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \int_{u = -u'}^{u = u'} \frac{u du}{\sqrt{2 \cos. u - 2 \cos. u'}} = -4 \cdot \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \sin. \tfrac{1}{2} u'$$

ist. Daher ist für den Fall, daß der Schwingungswinkel sehr klein ist,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \left\{ 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} u' + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2} u' + \text{etc.} \right\}$$

$$- 4 \frac{a}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}}} \cdot \sin. \tfrac{1}{2} u'.$$

Da u' sehr klein ist, so können die goniometrischen Funktionen von $\frac{1}{2}u'$ und deren Potenzen vernachläßigt werden, und ich erhalte dann:

$$t = \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\varrho}{2g}} \cdot \pi.$$

Für ein einfaches Pendel, welches mit diesem gleichzeitig schwingt, ist

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \pi,$$

daher $\varrho = r$.

Dieses an einem horizontalen Cylinder schwingende Pendel vollendet also in derselben Zeit eine ganze Schwingung, in welcher ein einfaches, vom Mittelpunkte des Cylinderdurchschnittes herabhängendes Pendel vollenden würde.

(Schluß folgt.)

Anmerk. Im §. 5 werde ich die Differenzialgleichung für die Zeit für den Fall integriren, daß das Pendel ganze Rotationen um den Cylinder schwingt. Die Anmerkungen werden später beigegeben werden.

Druck von Neumann-Hartmann in Elbing.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welches Integral … — u' zu neh-
men ist. Nehme … o, so erhalte ich

und nehme ich … ch ganz dasselbe,
so daß also da… ndige Integral

$\frac{a}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \int$ … sin. $\frac{1}{2}u'$

ist. Daher ist … sehr klein ist,

$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2\lambda}{\varrho}}} \cdot$ … $\frac{1}{2}u' +$ etc.

Da u' sehr kle… tionen von $\frac{1}{2}u'$
und deren Poten… dann:

Für ein einfache… chwingt, ist

daher

Dieses an einem … vollendet also
in derselben Zeit … ches, vom Mit-
telpunkte des Cyl… ollenden würde.

Anmerk. Im … die Zeit für den
Fall … um den Cylin-
der … igegeben werden.

…rtmann in Elbing.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf