Über die Bewegung

eines

ſich von einem horizontalen Cylinder abwickelnden Pendels an einem völlig biegſamen Faden.

Von dem

Director Doerk.

An einem horizontalen Cylinder ist ein Pendel an einem völlig biegsamen Faden befestigt, bei den Schwingungen des Pendels wickelt sich der Faden von dem Cylinder ab, oder auf denselben auf, die Bewegung dieses Pendels zu bestimmen.

§. 1. Es sei ABCD der horizontale Cylinder, an welchem das Pendel GH befestigt ist, H sei der schwere Punkt, so wird der Faden GH senkrecht gegen die Axe des Cylinders gespannt werden. Es ist also die Durchschnittsebene, um welche das Pendel schwingt, eine Kreisebene. Um zuerst die Curve zu bestimmen, in welcher das Pendel schwingt, kann ich auch so die Aufgabe ausdrücken: es sei ein Kreis gegeben, um welchen sich ein Faden so bewegt, daß er sich von der Peripherie desselben entweder abwickelt oder auf dieselbe aufwickelt, so daß der nicht aufgewickelte Theil des Fadens Tangente an die Curve für den Ablösungspunkt ist, zuerst die Abwickelungslinie zu bestimmen.

Um bei der Auflösung dieser Aufgabe nichts vorauszusetzen, werde ich alle dazu erforderlichen Sätze in den Anmerkungen erläutern.

Die Polargleichung des Kreises ist im Allgemeinen

$$y = a \cos. (\alpha - x) \pm \sqrt{r^2 - a^2 \sin.^2(\alpha - x)} \quad \text{(Anm. 1)}$$

wo a die Entfernung des Pols vom Mittelpunkte des Kreises, r der Halbmesser des letztern; a der Winkel der Entfernung des Mittelpunktes vom Pole mit der Polarabsciffe, y irgend eine beliebige Polarordinate für den Winkel x bedeutet.

Setzen wir nun den Pol in den Mittelpunkt des Kreises, so daß also $a = o$ wird, so ist die Polargleichung des Kreises aus dem Mittelpunkte

$$y = \pm r.$$

Kennen wir die Polargleichung irgend einer Curve, so können wir auch die Curve rectificiren; ist z. B. $y = \varphi x$ die Gleichung aus dem Pole für irgend eine Curve, so ist der zu dem Winkel x gehörige Bogen v eine Function von x, und bezeichnen wir sie durch Fx, so ist

$$v = Fx = \int \sqrt{(\varphi x)^2 + (\varphi' x)^2} \, . \, dx \quad \text{s. Anmerk. 2}$$

Wende ich dieses auf den Kreis an, so ist

$$\varphi x = y = r$$

$$\varphi' x = \frac{dy}{dx} = o;$$

mithin ist der zu dem Winkel x gehörige Bogen v

$$v = \int \sqrt{r^2}\, dx = r\int dx = rx.$$

Kennen wir den Bogen der Evolute des Kreises, so können wir auch den zugehörigen Bogen der Evolvente bestimmen. Ist v' der Bogen der Evolvente $= Fx$ und der zugehörige Bogen der Evolute fx, so ist

$$Fx = \int fx \quad \text{s. Anmerk. 3.}$$

Also hier für den Kreis ist der Bogen der Evolvente

$$v' = \int rxdx = r\int xdx = r\frac{x^2}{2}.$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig die Gleichung für die Evolvente, die Abwickelungslinie selbst, zu bestimmen. Es sei (Fig. 5) die Curve BH in Beziehung auf den Punkt A, als Polarecke, und auf die Polarabscissenlinie AB durch die Polargleichung $y = \varphi x$ gegeben, und die Länge des zum Winkel x gehörigen Bogens der Evolute sei rectificirt, so daß

$$BC = \int \sqrt{y^2 + (dy)^2} \, . \, dx = v$$

$$= \int \sqrt{(\varphi x)^2 + (\varphi' x)^2} \, . \, dx = v \text{ ist.}$$

An irgend einer Stelle H der Curve sei der Faden befestigt und von H bis B aufgelegt, die Abwickelung dieses Fadens, so daß sein gerade gewordener Theil Tangente der Evolute für den Ablösungspunkt wird, sei so weit erfolgt, daß derselbe sich im Punkte

C ablöst, so daß also sein gerade gewordener Theil CE $=$ arc. CB $= v$ ist, und sein Endpunkt E die Curve BE beschrieben hat. Man fälle EG $\perp$ AB, setze EG $= \eta'$, die Abscisse AG $= \xi$ und denke sich aus C eine Linie CM senkrecht auf AB und auf CM aus E eine Linie EN senkrecht, so ist für den Punkt E der Abwickelungscurve

$$EG = MN = MC - NC = \eta = y \sin. x - v \cos. x$$

$$AG = AM + MG = AM + NE = \xi = y \cos. x + v \sin. x:$$

Gleichungen der Abwickelungscurve in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten, welche Gleichungen, da y und v bekannte Functionen des Winkels x sind, also für jede Curve bestimmt werden können.

Für den Kreis als Evolute ist die Polargleichung aus dem Mittelpunkt

$$y = r \text{ und } v = rx,$$

also sind die rechtwinkligen Coordinatengleichungen der Evolvente des Kreises:

$$1)\ \xi = r \cos. x + rx \sin. x$$

$$2)\ \eta = r \sin. x - rx \cos. x.$$

Da aber bei der Bewegung eines Pendels an einem beweglichen Faden, nicht der ganze Faden, sondern nur ein Theil desselben auf den Cylinder aufgewickelt sein wird, so wollen wir eine andere Ansicht, welche in den Abhandlungen der Akademie zu Berlin für das Jahr 1826 von dem Herrn Geheimen Regirungsrath Prof. Dr. Bessel enthalten ist, zur Auffindung der Schwingungscurve hier aufstellen.

Denken wir uns durch die Axe des Cylinders eine horizontale und eine verticale Ebene gelegt, welche Ebenen den Kreisdurchschnitt des Cylinders, um welchen das Pendel schwingt, in zwei senkrecht auf einander stehenden Linien schneiden; es sei nämlich (Fig. 6) DG die Durchschnittslinie der horizontalen Ebene mit der Kreisebene, und ML die Durchschnittslinie der Verticalebene mit jener Kreisebene. Im Punkte D sei der Faden auf den Cylinder aufgelegt, so daß bei der Ruhe, wo also der Polarwinkel, welcher dem Winkel des verlängerten, gerade gewordenen Fadens mit der verticalen Ebene gleich ist, und den wir durch u bezeichnen wollen, gleich Null ist, die Länge des Pendelfadens $= \varrho$ ist. Bei der Bewegung des Pendels wickele sich der Faden vom Cylinder ab, so daß, wenn der Ablösungspunkt in C ist, $BC = \text{arc.}\, DC$ und $PF = DE = \varrho$ ist. Da Winkel $CAD = u$ und $CA = a$ gesetzt ist, so ist wie oben gezeigt $CE = a \cdot u$ und folglich $CF = \varrho + au$. Bezeichnen wir die gerade Linie, welche von einem beliebigen Punkte der beschriebenen Curve senkrecht auf die horizontale Ebene gezogen wird, also FN durch x, so ist

$$FN = KH = CH - CK$$
$$= FC \cdot \cos. FCH - CA \cdot \sin. CAD$$
$$x = (\varrho + au) \cos. u - a \sin. u.$$

Bezeichnen wir die gerade Linie, welche von demselben beliebigen Punkte der beschriebenen Curve, für welchen also ebenfalls der Winkel, den der geradgewordene verlängerte Faden mit der Verticalebene macht oder der zum abgelösten Bogen zugehörige Winkel gleich u ist, also FB durch y, so ist

$$y = FB = FH + HB$$
$$= FH + KA$$
$$y = (\varrho + au) \sin. u + a \cos. u.$$

Es sind also die Gleichungen der Abwickelungscurve, in welcher das gegebene Pendel schwingt, wenn man u nach der Richtung, nach welcher der Faden sich abwickelt, positiv nimmt und also r die Länge des abgewickelten Fadens $= \varrho + au$ ist,

$$\text{I)}\quad x = (\varrho + au) \cos. - a \sin. u$$
$$\text{II)}\quad y = (\varrho + au) \sin. u + a \cos. u.$$

§. 2. Es seien nun zu der Zeit t die drei Coordinaten eines Punktes x, y, z und die auf ihn wirkenden Kräfte seien P', P'', P''', P'''' etc. Die Richtungen dieser Kräfte will ich durch die Winkel mit den 3 Axen, durch α', β', γ'; α'', β'', γ''; α''', β''', γ''' etc. respective bezeichnen. Hat nun der Punkt zur Zeit t die Coordinaten x, y, z, so hat er in der Zeit $t + dt$ den Ort, welcher durch die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ bestimmt wird. Es sind dann also dx, dy, dz die Veränderungen der Coordinaten des Ortes in der Zeit dt, folglich sind die Geschwindigkeiten in Bezug auf die Coordinaten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Wenn ich die Kräfte allein betrachte, so ist in Bezug auf die Kraft P' das Differenzial der Geschwindigkeit $2gP'dt$, wenn ich die Schwerkraft, welche in einer mittlern Secunde die Geschwindigkeit $2g$ erzeugt, wo $g = 15{,}0518 + 0{,}08113 \sin.\varphi$ bedeutet, und φ die Polhöhe des Beobachtungsortes ist, als Maaß der Kräfte annehme. In Bezug auf die Kraft P'' ist das Differenzial der Geschwindigkeit $2gP''dt$ und ebenso für die andern Kräfte. Die Veränderung des Punktes muß ich auch nun durch diese Kräfte erhalten. Es ist also die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ zusammengesetzt aus $2gP'dt$, $2gP''dt$, $2gP'''dt$ etc. Im ersten Zeitmoment ist die Geschwindigkeit in Bezug auf die Axe der x $\frac{dx}{dt}$, also ist sie im zweiten Zeitmoment $\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$; ebenso in Bezug auf die Axe der y, $\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}$ und in Beziehung auf die Axe der z, $\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt}$. Im zweiten Zeitmoment hat also der Punkt die Geschwindigkeiten $d.\frac{dx}{dt}, d.\frac{dy}{dt}, d.\frac{dz}{dt}$ vermöge der Beharrlichkeit gewonnen. Man kann also annehmen, daß der Punkt die Geschwindigkeiten, welche durch die Kräfte entstanden, verloren, dagegen aber die Geschwindigkeiten, welche durch die Beharrlichkeit hervorgebracht werden, gewonnen hat.

Denken wir uns nun 3 Kräfte p, q, r parallel den Coordinaten so genommen, daß die Geschwindigkeiten, welche durch die Kräfte p, q, r entstehen, denen gleich sind, welche der Punkt wirklich erhalten hat, so muß

$$2g.p.dt = d.\frac{dx}{dt}$$

$$2g.q.dt = d.\frac{dy}{dt}$$

$$2g.r.dt = d.\frac{dz}{dt}$$

sein. Hieraus folgt nun, daß

$$p = \frac{d.\frac{dx}{dt}}{2gdt} = \frac{1}{2g}.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$q = \frac{d.\frac{dy}{dt}}{2g.dt} = \frac{1}{2g}.\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$r = \frac{d.\frac{dz}{dt}}{2g.dt} = \frac{1}{2g}.\frac{d^2z}{dt^2}$$

sein muß. Die Kräfte p, q, r müssen aber den Kräften P′, P″, P‴ etc. das Gleichgewicht halten, weil die Bewegung durch die Kräfte P′, P″, P‴ etc. verschwindet. Ich habe nun also die Bedingungen des Gleichgewichts für diese Kräfte zu suchen. Die Kräfte P′, P″, P‴ etc. lassen sich in drei Kräfte nach den Coordinatenaxen X, Y, Z in P, Q, R zerlegen, wo

P die Summe der Kräfte nach der Richtung der x
Q „ „ „ „ „ „ „ „ y
R „ „ „ „ „ „ „ „ z

bedeutet. Dann müssen offenbar P, Q, R und p, q, r sich das Gleichgewicht halten. Es ist also

$$P + p = o$$
$$Q + q = o$$
$$R + r = o$$

oder wenn wir die gefundenen Werthe für p, q, r setzen, so ist

$$o = \frac{1}{2g}.\frac{d^2x}{dt^2} + P = \frac{d^2x}{dt^2} + 2gP$$

$$o = \frac{1}{2g}.\frac{d^2y}{dt^2} + Q = \frac{d^2y}{dt^2} + 2gQ$$

$$o = \frac{1}{2g}.\frac{d^2z}{dt^2} + R = \frac{d^2z}{dt^2} + 2gR.$$

Nun bleiben noch die Kräfte P, Q, R zu bestimmen übrig. Es sollte der Annahme nach

die Kraft P′ mit den Coordinatenaxen die Winkel α', β', γ'
„ „ P″ „ „ „ „ „ „ α'', β'', γ''
„ „ P‴ „ „ „ „ „ „ α''', β''', γ'''
etc. etc.

bilden, dann kann man die Kraft P′ zerlegen in die 3 Kräfte

$P' \cos. \alpha'$ nach der Richtung der x
$P' \cos. \beta'$ „ „ „ „ y
$P' \cos. \gamma'$ „ „ „ „ z
die Kraft P'' in $P'' \cos. \alpha''$ „ „ „ „ x
$P'' \cos. \beta''$ „ „ „ „ y
$P'' \cos. \gamma''$ „ „ „ „ z
u. s. f.

Dann ist also

$$P = P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' + \text{etc.}$$
$$Q = P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta''' + P''' \cos. \beta''' + \text{etc.}$$
$$R = P' \cos. \gamma' + P'' \cos. \gamma''' + P''' \cos. \gamma''' + \text{etc.}$$

Substituirt man diese Werthe in die letzten Gleichungen, so erhält man die Bedingungen für jede krummlinige Bewegung im Allgemeinen

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + 2g \left\{ P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' + \text{etc.} \right\}$$
$$o = \frac{d^2y}{dt^2} + 2g \left\{ P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta'' + P''' \cos. \beta''' + \text{etc.} \right\}$$
$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + 2g \left\{ P' \cos. \gamma' + P'' \cos. \gamma'' + P''' \cos. \gamma''' + \text{etc.} \right\}$$

Ist nun der Punkt gezwungen sich auf einer vorgeschriebenen Curve zu bewegen, so ist der Widerstand, welchen diese Curve seiner Bewegung entgegengesetzt, einer Kraft gleich, welche immerwährend auf den Körper in der Richtung wirkt, welche senkrecht auf der Bahn ist, so daß, wenn man zu den gegebenen Kräften P', P'', P''' etc. in jedem besondern Falle eine neue beschleunigende Kraft zusetzt, um diesen Widerstand darzustellen, die Curve außer Acht gelassen und der Punkt als ein freier Punkt betrachtet werden kann. Denn zerlegt man jede der gegebenen beschleunigenden Kräfte, die auf den Punkt oder Körper wirken, in zwei andere, von denen die eine nach der Tangente der Bahn, die andere senkrecht auf die Bahn wirkt, so werden die berührenden oder Tangentialkräfte allein ihre Wirkung thun, und die senkrechten oder Normalkräfte durch den Widerstand der Curve aufgehoben werden. Nennt man nun die Winkel, welche die Normalkraft N mit den 3 Coordinatenaxen macht, α, β, γ, so kann diese Normalkraft in 3 Kräfte N cos. α, N cos. β, N cos. γ zerlegt werden und es kommen zu jenen Kräften P, Q, R diese 3 Kräfte respective hinzu, so daß wir also folgende Gleichungen erhalten:

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + 2g\{P + N\cos.\alpha\}$$

$$o = \frac{d^2y}{dt^2} + 2g\{Q + N\cos.\beta\}$$

$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + 2g\{R + N\cos.\gamma\}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen respective mit dx, dy, dz und addiren sie dann, so erhalten wir

$$o = dx.\frac{d^2x}{dt^2} + 2gPdx + 2gN\cos.\alpha\, dx$$

$$o = dy.\frac{d^2y}{dt^2} + 2gQdy + 2gN\cos.\beta\, dy$$

$$o = dz.\frac{d^2z}{dt^2} + 2gRdz + 2gN\cos.\gamma\, dz$$

also

$$o = dx.\frac{d^2x}{dt^2} + dy.\frac{d^2y}{dt^2} + dz.\frac{d^2z}{dt^2} + 2g\{Pdx + Qdy + Rdz\}$$
$$+ 2gN\{\cos.\alpha\, dx + \cos.\beta.dy + \cos..\gamma\, dz\}$$

Es ist hierin noch $\cos.\alpha.dx + \cos.\beta.dy + \cos.\gamma.dz$ zu bestimmen.

Es sei in der Richtung der Kraft N ein Punkt, dessen Coordinaten a, b, c sind, so ist die Entfernung beider Punkte

$$e^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

also $$ede = (x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz$$

$$de = \frac{x-a}{e}.dx + \frac{y-b}{e}dy + \frac{z-c}{e}dz$$

$$de = \cos.\alpha\, dx + \cos.\beta\, dy + \cos.\gamma\, dz.$$

Da nun die Kraft N senkrecht auf der Curve steht, so ist das Differenzial ihrer Richtung gleich Null, folglich

$$\cos.\alpha.dx + \cos.\beta.dy + \cos.\gamma.dz = o$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung, so erhalten wir

$$o = dx.\frac{d^2x}{dt^2} + dy.\frac{d^2y}{dt^2} + dz.\frac{d^2z}{dt^2} + 2g\{Pdx + Qdy + Rdz\}$$

Nun ist $d.\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}=\frac{dx\,d^2x+dy.d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}$ also

$$o=d.\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2}+2g\{Pdx+Qdy+Rdz\}$$

Liegt die Curve in einer Ebene, so daß wir die Ebene der Curve für die Ebene der z annehmen, so ist $z=o$, und unsere Gleichung geht in folgende über:

$$o=d.\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2}+2g\{Pdx+Qdy\};$$

also integrirt

$$c=\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2}+2g\int\{Pdx+Qdy\}$$

die Bedingungsgleichung für die Bewegung eines Punktes in einer vorgeschriebenen Curve, welche in einer Ebene liegt; wo also x und y die Coordinaten des Punktes, P die Summe der nach der Richtung der x, Q die Summe der nach der Richtung der y zerlegten Kräfte, welche auf den Punkt wirken, bedeutet.

Es wirkt hier nur die Schwerkraft auf den Punkt oder das Pendel, deren Richtung gegen die Erdoberfläche senkrecht angenommen werden kann, weil die Entfernung des Erdmittelpunkts von der Erdoberfläche in Vergleich mit der Länge des Pendels als unendlich und mithin die Richtung des Fadens als parallel mit der senkrechten Axe betrachtet werden kann. Bei dieser Aufgabe haben wir nun nicht mehr die auf den Punkt wirkenden Kräfte in andere Kräfte, welche den Coordinatenaxen parallel sind, zu zerlegen, weil die Schwerkraft hier parallel mit der Axe der x wirkt. Da sie aber hier in Bezug auf die Coordinaten in entgegensetzter Richtung wirkt, so ist sie hier negativ zu setzen; nach der Richtung der y wirkt hier keine Kraft, folglich ist für unsern Fall

$$P=-1$$
$$Q=0$$

da die Schwerkraft, als Maaß der Kräfte, $=1$ gesetzt wird. Daher erhalten wir die Gleichung

$$c = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2(dt)^2} + 2g\int - dx$$

$$= \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2(dt)^2} - 2gx$$

$$c' = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} - 4gx$$

Bedeutet λ die Länge des einfachen Sekundenpendels, so kann man g den Fallraum in der ersten Sekunde des freien Falls bestimmen. Es ist nämlich $g = \frac{\lambda \cdot \pi^2}{2}$ Denn für das gewöhnliche einfache Pendel ist die Dauer einer ganzen Schwingung

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2g}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi' + \text{etc.} \right\}$$

wo φ' den Schwingungswinkel bedeutet. Ist φ' sehr klein, so ist

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2g}}$$

und wenn τ' die Zeit der Pendelschwingung für den Schwingungswinkel φ'' ist, so ist

$$\tau' = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2g}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi'' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi'' + \text{etc.} \right\}$$

$$= \tau \cdot \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi'' + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi'' + \text{etc.} \right.$$

Nun ist $\frac{\lambda}{2g} = \frac{\tau^2}{\pi^2} = \frac{\tau'^2}{\tau^2 \left\{ 1 + (\frac{1}{2})^2 \sin.^2 \frac{1}{2}\varphi'' + \text{etc.} \right\}}$

$$g = \frac{\lambda\pi^2 \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi'' + \text{etc.} \right\}^2}{2\tau'^2}$$

Für $\tau' = 1''$, wo φ'' sehr klein ist, ist also

$$g = \frac{\lambda\pi^2}{2},$$

in welchem Ausdrucke also λ die Länge des einfachen Secundenpendels bedeutet.

Substituiren wir diesen Werth in die gefundene Differenzialgleichung, so ist

$$c = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} - 2\lambda\pi^2 x.$$

Für die Curve, in welcher das gegebene Pendel schwingen soll, hatten wir folgende Gleichungen gefunden:

$$\text{I)}\ x = (\varrho + au)\cos. u - a \sin. u$$

$$\text{II)}\ y = (\varrho + au)\sin. u + a \cos. u.$$

Mithin ist

$$dx = -(\varrho + au)\sin. udu + a\cos. udu - a\cos. udu$$
$$= -(\varrho + au)\sin. udu$$
$$(dx)^2 = (\varrho + au)^2 \sin.^2 u(du)^2;$$
$$dy = (\varrho + au)\cos. udu + a\sin. udu - a\sin. udu$$
$$= (\varrho + au)\cos. udu$$
$$(dy)^2 = (\varrho + au)^2\cos.^2 u(du)^2;$$

also

$$c = \frac{(\varrho + au)^2 \sin.^2 u\,(du)^2 + (\varrho + au)^2 \cos.^2 u\,(du)^2}{(dt)^2}$$
$$- 2\pi^2\lambda \{ (\varrho + au)\cos. u - a\sin. u \}$$

$$c = (\varrho + au)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\{(\varrho + au)\cos. u - a\sin. u\}$$

Rechnen wir den Abwickelungswinkel von $-u'$ an, wo das Pendel aus der Ruhe fällt, so ist

$$c = -2\pi^2\lambda\{(\varrho - au')\cos.(-u') - a\sin.(-u')\}$$
$$= 2\pi^2\lambda\{(\varrho - au')\cos. u' + a\sin. u')\}$$

weil dann die Winkelgeschwindigkeit $\frac{du'}{dt} = o$ ist. Substituiren wir nun diesen Werth von c in die obige Differenzialgleichung, so erhalten wir

$$(\varrho + au)^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\pi^2\lambda\{(\varrho + au)\cos. u - a\sin. u -$$
$$(\varrho + au')\cos. u' - a\sin. u'\}$$

welche Gleichung für dt aufgelöst werden muß.

Es ist also

$$dt = \frac{(\varrho + au)\,du}{\sqrt{2\pi^2\lambda}\sqrt{\{\varrho\cos. u + a(u\cos. u - \sin. u) - \varrho\cos. u' + a(u'\cos. u' - \sin. u)\}}}$$

$c = \frac{(d}{}$

Für die Curve, in
hatten wir folgende

I) $x =$

II) $y =$

Mithin ist

$dx = -(\varrho +$

$= -(\varrho +$

$(dx)^2 = (\varrho + au)$

$dy = (\varrho + au)$

$= (\varrho + au)$

$(dy)^2 = (\varrho + au)$

also

$c = \frac{(\varrho + au)}{}$

$- 2\pi^2\lambda\sphericalangle$

$c = (\varrho + au)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)$

Rechnen wir den Abn
del aus der Ruhe fäl

$c = -2\pi^2\lambda\sphericalangle(\varrho$

$= 2\pi^2\lambda\sphericalangle(\varrho -$

weil dann die Winkelg

wir nun diesen Wert
so erhalten wir

$(\varrho + au)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 =$

welche Gleichung für
Es ist also

$dt = \frac{(\varrho +}{\sqrt{2\pi^2\lambda}\sqrt{}}$

$$= \frac{\left(1 + \frac{a}{\varrho} u\right) du}{\sqrt{\frac{2\pi^2\lambda}{\varrho}} \sqrt{\left\{ \cos. u + \frac{a}{\varrho}(u \cos. u - a \sin. u) - \cos. u' + \frac{a}{\varrho}(u' \cos. u' - \sin. u') \right\}}}$$

(Fortsetzung folgt.)

Anmerk. Der §. 3 wird die Integration dieser Differenzialgleichung für t, und der §. 4 die Integration für den Fall, wenn der Schwingungswinkel sehr klein ist; der Anhang aber die Anmerkungen enthalten.

Gedruckt bei F. W. Neumann - Hartmann in Elbing.