



I. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie.

II. Zur Potenzialität der Kreise.



# Vorwort

Das Buch, das Sie hier in den Händen halten, ist das Ergebnis einer langen und mühsamen Arbeit. Es ist das Ergebnis der Zusammenarbeit vieler Menschen, die sich für die Förderung der Wissenschaften und der Künste eingesetzt haben. Die Arbeit an diesem Buch hat mich sehr bereichert und hat mir viele neue Erkenntnisse gebracht. Ich hoffe, dass Sie durch die Lektüre dieses Buches ebenfalls neue Erkenntnisse gewinnen werden. Die Arbeit an diesem Buch hat mich sehr bereichert und hat mir viele neue Erkenntnisse gebracht. Ich hoffe, dass Sie durch die Lektüre dieses Buches ebenfalls neue Erkenntnisse gewinnen werden.

Geht

## Grundzüge der sphärischen Trigonometrie.

Die sphärische Trigonometrie berechnet aus drei in Zahlen gegebenen Stücken des sphärischen Dreiecks, von welchem jede Seite kleiner als  $180^\circ$  ist, die übrigen Stücke desselben. Sie hat vor Allem die Grundgleichungen aufzustellen, welche den arithmetischen Zusammenhang der Dreiecksstücke unter einander ausdrücken. Da immer aus drei Stücken die drei übrigen gesucht werden, so sind offenbar drei Gleichungen mit diesen drei Unbekannten nothwendig. Hierbei werden die Winkel des Dreiecks durch  $A, B, C$  und ihre Gegenseiten durch  $a, b, c$  bezeichnet. Der Anfang aber ist mit dem rechtwinkligem Dreiecke zu machen, in welchem mit Ausschluss des rechten Winkels immer zwei Stücke ein drittes bestimmen; dies Dreieck muss offenbar einfachere Grundgleichungen geben.

### 1.

#### Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Das sphärische Dreieck  $ABC$  (Fig. I.) sei bei  $A$  rechtwinklig,  $M$  sei der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel, deren Halbmesser  $MA=MB=MC=1$ . Es sei  $CE$  senkrecht auf  $MB$ ,  $CF$  senkrecht auf  $MA$ , also auch  $EF$  senkrecht auf  $MB$ , weshalb Winkel  $E=B$ . Da im  $\triangle CEF$  Winkel  $F=R$  ist, so ist  $CF=CE \sin E=CE \sin B$ , aber  $CF$  auch  $=\sin b$ ,  $CE=\sin a$ , folglich

$$\text{I. } \sin b = \sin a \sin B.$$

Ferner ist  $\frac{EF}{CE} = \cos B$ ; aber im rechtwinkligen  $\triangle MEF$  ist  $EF = MF \sin c = \cos b \sin c$ , und  $CE = \sin a$ , also ist  $\cos b \frac{\sin c}{\sin a} = \cos B$  oder, weil nach I.  $\frac{\sin c}{\sin a} = \sin C$ ,

$$\text{II. } \cos B = \cos b \sin C.$$

Weiter ist  $ME = \cos a$ , aber  $ME$  auch  $= MF \cos c$ , und  $MF = \cos b$ , folglich ist

$$\text{III. } \cos a = \cos b \cos c.$$

Dies sind die Fundamentalgleichungen für das rechtwinklige sphärische Dreieck; mit ihrer Hilfe lassen sich, so oft zwei Dreiecksstücke gegeben sind, die drei übrigen finden, wie folgt.

1) Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus den beiden Katheten zu berechnen.

Gegeben  $b, c$ , gesucht  $a, B, C$ .

Zuerst ist

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Weiter ist nach I.  $\sin b = \sin a \sin B$ , und aus II. folgt  $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$ , daher ist  $\tan b = \tan B \sin a \sin C$  d. i. nach I.

$$\text{IV. } \tan b = \tan B \sin c,$$

woraus sich

$$\tan B = \frac{\tan b}{\sin c}.$$

ergibt, und eben so ist

$$\tan C = \frac{\tan c}{\sin b}.$$

Hierzu die folgenden Bemerkungen. 1) Da  $\cos a = \cos b \cos c$ , so müssen entweder alle drei Cosinus oder nur ein einziger positiv sein. Also sind in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke entweder alle drei Seiten kleiner als  $90^\circ$ , oder es sind zwei Seiten grösser und die dritte ist kleiner als  $90^\circ$ . 2) Die Gleichung IV. aber gibt den Satz: Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist jede Kathete mit ihrem Gegenwinkel gleichartig, d. h. beide Stücke sind zugleich kleiner oder grösser als  $90^\circ$ .

2) Ein rechth. sphär. Dreieck aus der Hypotenuse und einer Kathete zu berechnen.

Gegeben  $a$  und  $b$ , gesucht  $c, B, C$ .

$$\text{Es ist } \cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \text{ und } \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Ferner ist nach I.  $\sin b = \sin a \sin B$  und aus III. folgt  $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$ . Die Division dieser beiden Gleichungen giebt  $\tan b = \tan a \cos c \sin B$  d. i. nach II.

$$\text{V. } \tan b = \tan a \cos C,$$

woraus

$$\cos C = \frac{\tan b}{\tan a}$$

folgt.

3) Ein rechth. sphär. Dreieck aus der Hypotenuse und einem Winkel zu berechnen.

Gegeben  $a, B$ , gesucht  $b, c, C$ .



Es ist nach I.

$$\sin b = \sin a \sin B$$

und nach V.

$$\text{tang } c = \text{tang } a \cos B.$$

Ferner ist  $\cos a = \cos b \cos c$ , aber  $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$ ,  $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$ , folglich

$$\text{VI. } \cos a = \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \cot B \cot C,$$

woraus

$$\cot C = \cos a \text{ tang } B$$

folgt. Sonst hat man nach V. auch  $\cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}$ .

4) Ein rechth. sphär. Dreieck zu berechnen aus einer Kathete und ihrem Gegenwinkel.

Gegeben  $b, B$ , gesucht  $a, c, C$ .

Es ist

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

In diesem Falle sind aber die gesuchten Stücke durch ihre Sinus bestimmt, also sind, wenn nicht  $b = B$ , immer zwei Dreiecke möglich, vorausgesetzt, dass die Sinus nicht grösser als 1 sind.

5) Ein rechth. sphär. Dreieck zu berechnen aus einer Kathete und ihrem anliegenden Winkel.

Gegeben  $b, C$ , gesucht  $a, c, B$ .

Es ist

$$\text{tang } a = \frac{\text{tang } b}{\cos C}, \quad \text{tang } c = \text{tang } C \sin b, \quad \cos B = \cos b \sin C.$$

6) Ein rechth. sphär. Dreieck aus den beiden Winkeln zu berechnen.

Gegeben  $B, C$ , gesucht  $a, b, c$ .

Es ist

$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

### 3.

#### Das beliebige sphärische Dreieck.

Die Grundgleichungen I., II., III. lassen sich auf ein beliebiges sphärisches Dreieck anwenden, wenn man dasselbe durch einen senkrechten Bogen eines Hauptkreises in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

1) Sei ABC (Fig. II.) ein beliebiges sphärisches Dreieck, Bogen CD senkrecht auf AB. Dann ist im rechth.  $\triangle BCD$

$$\sin CD = \sin a \sin B,$$

und im rechth.  $\triangle ACD$  für beide Lagen von CD

$$\sin CD = \sin b \sin A$$

folglich ist

$$\text{VII. I}^*. \sin a \sin B = \sin A \sin b.$$

Diese Gleichung, der Sinussatz, drückt die Bezeichnung zweier Seiten zu ihren Gegenwinkeln aus.

2) Sei Fig. II. in dem beliebigen sphär. Dreieck ABC der Bogen CD senkrecht auf AB. Dann ist in dem rechtwinkligen  $\triangle BCD$  nach III.

$$\cos a = \cos CD \cos BD$$

$$= \cos CD \cos (c \mp AD)$$

$$= \cos CD \cos c \cos AD \pm \cos CD \sin c \sin AD.$$

Es ist aber im  $\triangle ACD$  nach III.

$$\cos CD \cos AD = \cos b,$$

nach I.

$$\sin AD = \sin b \sin ACD$$

und nach II.

$$\cos CD \sin ACD = \pm \cos A,$$

wo das obere Zeichen für die erste, das untere für die zweite Lage von CD gilt; folglich ist

$$\cos CD \sin AD = \pm \sin b \cos A;$$

und somit

$$\text{VII. II}^*. \cos a = \cos b \cos c \mp \sin b \sin c \cos A.$$

Dies ist die zweite Grundgleichung; sie gibt die Beziehung der drei Seiten zu einem Winkel an.

3) Es sei Fig. III. in dem beliebigen sphär. Dreieck ABC der Bogen CD senkrecht auf AD. Dann ist im  $\triangle ACD$  nach II.

$$\cos A = \cos CD \sin ACD$$

$$= \cos CD \sin (C \mp BCD)$$

$$= \cos CD \sin C \cos BCD \mp \cos CD \cos C \sin BCD.$$

Im  $\triangle BCD$  ist nun für beide Lagen von  $CD$  nach II.

$$\cos BCD = \cos BD \sin B,$$

aber

$$\cos CD \sin BCD = \pm \cos B,$$

wo das obere Zeichen für die erste, das untere für die zweite Lage gilt, daher ist für beide Lagen

$$\cos A = \cos CD \cos BD \sin B \sin C - \cos B \cos C,$$

aber wegen III ist im  $\triangle BCD$

$$\cos CD \cos BD = \cos a;$$

mithin ist

$$\text{IX. III}^*, \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Dies ist die dritte Grundgleichung; sie drückt die Beziehung der drei Winkel zu einer Seite aus. In Verbindung mit VIII. II.\* zeigt sie, dass zu jedem sphärischen Dreieck ein anderes gehört, dessen Seiten die Supplemente der Winkel und dessen Winkel die Supplemente der Seite von jenem sind; dies ist das geometrisch nachweisbare Polardreieck.

Die Gleichungen I.\* II.\*\* III.\*\*\*, aber enthalten alle Stücke eines beliebigen sphärischen Dreiecks; daher können aus denselben, so oft drei Stücke gegeben sind, die drei übrigen gefunden werden. Diese Gleichungen sind somit die Fundamentalgleichungen zur Auflösung eines beliebigen sphärischen Dreiecks, zu welcher nunmehr geschritten werden kann.

#### 4.

#### Dreiecksberechnung aus den drei Seiten.

Gegeben seien  $a, b, c$ ; gesucht wird  $A, B, C$ .

Nach der zweiten Fundamentalgleichung für das beliebige sphärische Dreieck ist

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

und können die Cosinus dieser Winkel mit Hilfe der Gaussischen Logarithmen ohne alle Zweideutigkeit gefunden werden. Um die Gleichungen zur Rechnung mit gewöhnlichen Logarithmen bequem zu machen, so addire man beide Seiten zu Eins, so erhält man, indem man  $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$  setzt,



$$X. \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}}, \end{array} \right.$$

und ist in diesen Formeln das Wurzelzeichen positiv zu nehmen, da der Cosinus eines Winkels, der kleiner als  $90^\circ$  ist, positiv ist. Subtrahirt man aber beide Seiten der obigen Gleichungen von Eins, so erhält man

$$XI. \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}}, \end{array} \right.$$

Diese Formeln für die Cosinus und Sinus der halben Winkel müssen immer zugleich angewendet werden. Denn ist ein spitzer Winkel kleiner als  $45^\circ$ , so wird er genauer durch den Sinus als durch den Cosinus gefunden; übersteigt er aber  $45^\circ$ , so wird er genauer durch den Cosinus als durch den Sinus erhalten. Die Division der Gleichungen X. und XI. gibt

$$XII. \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}}, \\ \text{tang } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-b)}}, \\ \text{tang } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin s \sin (s-c)}}, \end{array} \right.$$

welche Gleichungen das genaueste Resultat geben und nur ein siebenmaliges Aufschlagen der Tafel nöthig machen.

## 5.

Die Gleichungen X. und XI. lassen sich aber zu neuen Gleichungen von der grössten Wichtigkeit verbinden. Nämlich durch Multiplikation von  $\cos \frac{1}{2} A$  mit  $\cos \frac{1}{2} B$  und von  $\sin \frac{1}{2} A$  mit  $\sin \frac{1}{2} B$ , das andere Mal von  $\sin \frac{1}{2} A$  mit  $\cos \frac{1}{2} B$ , von  $\cos \frac{1}{2} A$  mit  $\sin \frac{1}{2} B$  und durch Addition und Subtraction der Producte findet man unter Anwendung bekannter Formeln



$$\text{XIII.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}, \\ \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}, \\ \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C}, \\ \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C}, \end{array} \right.$$

welche Gleichungen die Gaussischen Gleichungen heissen; sie drücken die Beziehung der halben Summe oder Differenz zweier Seiten und der halben Differenz oder Summe ihrer Gegenwinkel zu den halben dritten Stücken des Dreiecks aus.

Die zweite und dritte dieser Gleichungen führen zugleich auf Sätze, die in der Dreiecksberechnung von der grössten Wichtigkeit sind. Da nämlich  $\sin \frac{1}{2}c$  und  $\cos \frac{1}{2}C$ , so wie  $\cos \frac{1}{2}c$  und  $\sin \frac{1}{2}C$  immer positiv sind, so müssen offenbar  $a-b$  und  $A-B$  jederzeit von einerlei Vorzeichen, d. h. gleichzeitig gleich, grösser oder kleiner als Null sein. Das gibt den Satz: Gleiche Seiten haben gleiche Gegenwinkel, die grössere Seite hat grössern Gegenwinkel; und umgekehrt. Nach der dritten Gleichung müssen nun auch  $\cos \frac{1}{2}(a+b)$  und  $\cos \frac{1}{2}(A+B)$  jederzeit einerlei Vorzeichen haben; daraus folgt der Satz: Wenn die Summe zweier Seiten gleich grösser oder kleiner als  $180^\circ$  ist, so ist auch die Summe der Gegenwinkel gleich, grösser oder kleiner als  $180^\circ$ ; und umgekehrt.

Durch Division der Gaussischen Gleichungen durch einander erhält man

$$\text{XIV.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang } \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}, \\ \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang } \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}, \\ \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}, \\ \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}. \end{array} \right.$$

Dies sind die Neper'schen Gleichungen. Durch Division der beiden letztern ergibt sich die bemerkenswerthe Gleichung

$$\frac{\text{tang } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{tang } \frac{1}{2} (A - B)} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{tang } \frac{1}{2} (a - b)}.$$

6.

Dreiecksberechnung aus den drei Winkeln.

Gegeben A, B, C; gesucht a, b, c.

Nach der dritten Fundamentalgleichung III\* ist

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

welche Gleichungen mit Hilfe der Gaussischen Logarithmen berechnet werden können. Um gewöhnliche Logarithmen anzuwenden, muss man sie dazu bequem machen. Leicht erhält man, indem man  $\frac{1}{2}(A+B+C)=S$  setzt,

$$\text{XV. } \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}}, \\ \sin \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C}}, \\ \sin \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\sin A \sin B}}; \end{array} \right.$$

sowie

$$\text{XVI. } \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-C)}{\sin A \sin C}}, \\ \cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-B)}{\sin A \sin B}}, \end{array} \right.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit einander auf ähnliche Weise, wie die Gleichungen

X und XI, so erhält man auch die Gaussischen Gleichungen\*). Ihre Division durch einander aber gibt

$$\text{XVII.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}}, \\ \text{tang } \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\cos (S-A) \cos (S-C)}}, \\ \text{tang } \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\cos (S-A) \cos (S-B)}}. \end{array} \right.$$

7.

Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel.

Gegeben  $a, b, C$ ; gesucht  $c, A$  und  $B$ . Nach I\* ist

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

\*) Es ist

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b &= \frac{\cos (S-A) + \cos (S-B)}{\sin C} \sin \frac{1}{2} c \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (A-B)}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} \sin \frac{1}{2} c, \end{aligned}$$

also

$$\sin \frac{1}{2} (a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} \sin \frac{1}{2} c$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b &= \frac{\cos (S-A) - \cos (S-B)}{\sin C} \sin \frac{1}{2} c, \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (A-B)}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} \sin \frac{1}{2} c, \end{aligned}$$

d. i.

$$\sin \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} \sin \frac{1}{2} c,$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b &= \frac{\cos (S-C) + \cos S}{\sin C} \cos \frac{1}{2} c \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} \cos \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

oder

$$\cos \frac{1}{2} (a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} \cos \frac{1}{2} c$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b &= \frac{\cos (S-C) - \cos S}{\sin C} \cos \frac{1}{2} c \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (A+B) \sin \frac{1}{2} C}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} \cos \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

folglich

$$\cos \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} \cos \frac{1}{2} c.$$

In den beiden letzten Fällen ist nicht zu vergessen, dass  $\cos S$  jederzeit negativ ist.



Die Rechnung lässt sich mit den Gaussischen Logarithmen leicht führen. Um gewöhnliche Logarithmen anzuwenden, setze man  $\text{tang } b \cos C = \text{tang } \varphi$ . Dann ist

$$\cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Ferner ist nach den Neperschen Gleichungen

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C,$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C.$$

Zur Probe hat man nach denselben Gleichungen

$$\begin{aligned} \cot \frac{1}{2} c &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \cot \frac{1}{2} (a - b) \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \cot \frac{1}{2} (a + b), \end{aligned}$$

oder man berechnet  $c$  nach einer der Gaussischen Gleichungen.

## 8.

Dreiecksberechnung aus zwei Winkeln und der Zwischenseite.

Gegeben  $A, B, c$ ; gesucht  $a, b, C$ .

Nach den Neperschen Gleichungen ist

$$\text{tang } \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \text{tang } \frac{1}{2} c,$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \text{tang } \frac{1}{2} c.$$

wodurch  $a$  und  $b$  gefunden werden. Ferner ist nach denselben Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2} C &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A - B), \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A + B). \end{aligned}$$

Zur Probe hat man nach IX., wenn  $\cos c \text{ tang } B = \cot \varphi$  gesetzt wird,

$$\cos C = \frac{\cos B \sin (A - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

## 9.

Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen.

Gegeben  $a, b, A$ ; gesucht  $c, B, C$ : Der Sinussatz VII. I\* gibt

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Weiter ist nach den Neperschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A - B) \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A + B) \\ \cot \frac{1}{2} c &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \cot \frac{1}{2} (a + b) \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \cot \frac{1}{2} (a - b). \end{aligned}$$

Es ist aber  $B$  durch seinen Sinus gefunden und kann daher spitz oder stumpf sein. Welcher von beiden Werthen zulässig sei, entscheiden die Sätze in 5. Sind beide Werthe statthaft, so hat man einen zweideutigen Fall, indem man auf zwei Dreiecke mit den gegebenen Stücken kommt. Nie darf aber  $\sin B > 1$ , d. i.  $\sin A \sin b > \sin a$  sein.

## 10.

Dreiecksberechnung aus zwei Winkeln und der Gegenseite des einen.

Gegeben  $A, B, a$ ; gesucht  $b, c, C$ . Aehnlich wie im vorigen Falle hat man

$$\begin{aligned} \sin b &= \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} c &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} (A - B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b) \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b), \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} C &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A - B) \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A + B). \end{aligned}$$

Auch hier geben die Sätze in 5. die näheren Bestimmungen.

## 11.

Was endlich den Flächeninhalt eines beliebigen sphärischen Dreiecks anlangt, so

kommt die Berechnung desselben, wie die Stereometrie zeigt, auf die Berechnung des Ueberschusses der Summe der drei Dreieckswinkel über  $180^\circ$  zurück. Dieser Ueberschuss

$$A + B + C - 180^\circ$$

heisst der sphärische Excess. Denselben kann man goniometrisch finden, wie folgt. Es ist nämlich nach XIII.

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c};$$

folglich ist

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B) - \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) - \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}c}$$

und

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B) + \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

Diese beiden Gleichungen geben unter Anwendung bekannter Formeln resp. die beiden folgenden Gleichungen

$$\frac{\sin \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ) \sin \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ) \cos \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{4}(a+b+c) \cos \frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

durch deren Division durch einander man die Gleichung

$$1) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) = \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+b+c) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+b-c)$$

erhält.

Behandelt man in ganz gleicher Weise die folgende Gleichung (XIII)

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

so erhält man

$$2) \cot \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) = \operatorname{tang} \frac{1}{4}(b+c-a) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+c-b).$$

Die Multiplication von 1) und 2) mit einander aber gibt

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)^2 = \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+b+c) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(b+c-a) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+c-b) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(a+b-c)$$

oder

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)^2 = \operatorname{tang} \frac{1}{2}s \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s-c);$$

mithin ist

$$\text{XVIII. } \operatorname{tang} \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{1}{2}s \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(s-c)},$$

wo die Quadratwurzel jederzeit positiv zu nehmen ist. Dies ist die Lhuilier'sche Gleichung, die zur unzweideutigen Berechnung des sphärischen Excesses eines Dreiecks aus den drei Seiten desselben äusserst bequem ist.



### Zur Potenzialität der Kreise.

1) Der Hauptsatz in der Potenzialität von Kreisen kann bloss mit Hilfe der Gleichförmigkeit, wie dies auch von Euclid gethan ist, folgendermassen bewiesen werden.

Es sei Fig. IV. P der feste Punkt in der Ebene des Kreises M, A und A' die Schnittpunkte der Graden durch P mit dem Kreise, und im Falle, dass P innerhalb des Kreises liegt, CC' die kürzeste Sehne durch P, im andern Falle CP die Tangente. Man ziehe MD senkrecht auf AA'. Dann ist im ersten Fall im  $\triangle AMP$ .

$$MA^2 = AP^2 + MP^2 + 2AP \cdot PD,$$

mithin auch

$$MC^2 = AP^2 + MP^2 + 2AP \cdot B,$$

also

$$MC^2 - MP^2 = AP^2 + 2AP \cdot PD,$$

oder

$$\begin{aligned} CP^2 &= AP (AP + 2PD) \\ &= AP (A'D + PD) \\ &= AP \cdot A'P; \end{aligned}$$

und im zweiten Fall im  $\triangle AMP$

$$MP^2 = AP^2 + AM^2 - 2AP \cdot AD,$$

mithin

$$MP^2 - AM^2 \text{ d. i. } MP^2 - CM^2 = AP^2 - 2AP \cdot AD$$

oder

$$\begin{aligned} CP^2 &= AP (AP - 2AD) \\ &= AP (AP - AA') \\ &= AP \cdot A'P. \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

2) Was der vorstehende Satz für die Potenzlinie ist, scheint mir der folgende Satz für die Linie äquidifferenten Potenzen von zwei Kreisen (s. Grunerts Archiv Theil 19) zu sein.

Errichtet man in der Ebene eines Kreises auf einem Halbmesser desselben im Mittelpunkte eine Senkrechte und zieht von dem Endpunkte des Radius eine Gerade, welche den Kreis und jene Senkrechte schneidet, so ist das Rechteck aus den Entfernungen des Endpunktes des Halbmessers von den beiden Schnittpunkten von unveränderlicher Grösse, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des Radius oder gleich dem Quadrat über der Quadrantensehne.

Sei Fig. V.  $MA = r$  ein Radius des Kreises  $M$ ,  $MP$  senkrecht auf  $MA$ , und  $PA$  gezogen, welche den Kreis in  $B$  schneide. Man projicire den Radius  $MA$  auf  $PA$ , dann ist die Projection  $= \frac{BA}{2}$ , und nach bekanntem Satze ist

$$PA \cdot \frac{BA}{2} = MA^2 = r^2, \text{ also}$$

$$PA \cdot BA = 2r^2, \text{ w. z. b. w.}$$

3) Es sei nun  $MP = e$ . Dann ist im Falle, dass  $P$  ausserhalb des Kreises liegt,

$$\begin{aligned} MP^2 + MA^2 \text{ oder } e^2 + r^2 &= (BA + PB)^2 = BA^2 + 2BA \cdot PB + PB^2 \\ &= BA(PB + BA) + PB(PB + BA) \\ &= BA \cdot PA + BP \cdot AP \\ &= 2r^2 + p, \end{aligned}$$

wo  $p$  die Potenz des Punktes  $P$  in Bezug auf den Kreis bezeichnet.

Im Falle dass  $P$  innerhalb des Kreises liegt, ist

$$\begin{aligned} e^2 + r^2 &= (BA - BP)^2 = BA^2 - 2BA \cdot BP + BP^2 \\ &= BA(BA - BP) - BP(BA - BP) \\ &= BA \cdot PA - BP \cdot AP \\ &= 2r^2 - p, \end{aligned}$$

wo  $p$  wieder die Potenz des Punktes  $P$  in Bezug auf den Kreis bedeutet.

3) Hat nun für irgend einen Punkt  $P$   $e^1, r^1, p^1$  in Bezug auf einen andern Kreis in derselben Ebene dieselbe Bedeutung wie vorhin  $e, r, p$ , so ist, wenn

$$e^2 + r^2 = e^1 + r^1$$

ist, offenbar

$$2r^2 \pm p = 2r^1 \pm p^1;$$

also für gleichartige Potenzen des Punktes  $P$

$$p - p^1 = \pm 2(r^2 - r^1)$$

und ebenso für ungleichartige Potenzen des Punktes  $P$

$$p + p^1 = \pm 2(r^2 - r^1).$$

Und umgekehrt, wenn für den Punkt  $P$  in Bezug auf beide Kreise

$$p + p^1 \text{ oder } p - p^1 = \pm 2(r^2 - r^1)$$

ist, so ist auch jederzeit

$$e^2 - e^1 = \pm (r^2 - r^1).$$

Dagegen ist für einen Punkt gleicher und gleichartiger Potenzen in Bezug auf beide Kreise immer

$$e^2 - e^1 = r^2 - r^1.$$

5) Der Gegensatz jenes Ortes von diesem, nämlich dem Orte des Punktes, für welchen die Quadratdifferenz von zwei festen Punkten einer constanten Grösse, der Grösse

$r^2 - r'^2$  gleich ist, tritt schon bei der Construction des letzteren Ortes auf. Man findet als solchen zwei Senkrechte auf der Entfernung der beiden festen Punkte von einander, welche von der Mitte dieser Strecke gleichweit entfernt sind, und zu einander im Gegensatz stehen. Sind die beiden festen Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise, so ist die eine der beiden Senkrechten die Potenzlinie, die andere die Linie des gleichen Potenzunterschiedes und der gleichen Potenzsumme. Der obige Lehrsatz führt unmittelbar zur Construction des letzteren Ortes in Bezug auf zwei Kreise. Hat man nämlich die Centrale gezogen, so errichte man in beiden Kreisen auf dieselbe senkrechte Radien. Nun kommt es nur darauf an, in der Centrale den Punkt zu suchen, welcher von den Endpunkten beider Radien gleichweit absteht; derselbe ist der Fusspunkt der Senkrechten.







*[Faint, illegible text from the reverse side of the page, likely bleed-through from the other side of the paper.]*

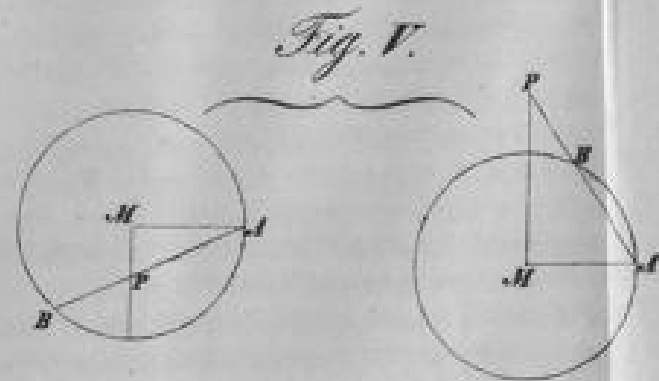
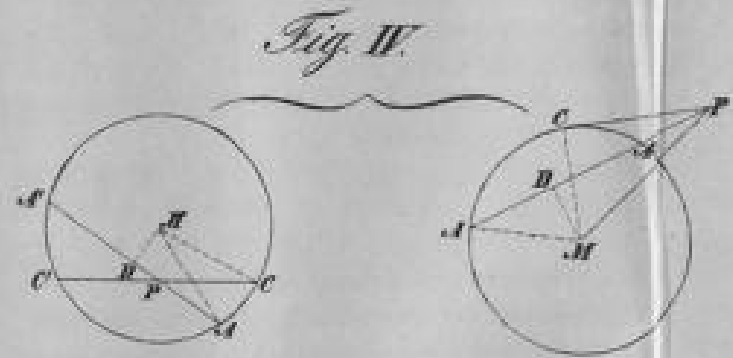
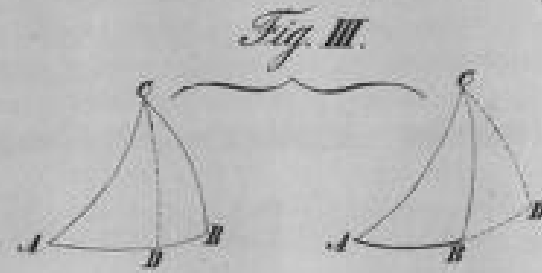
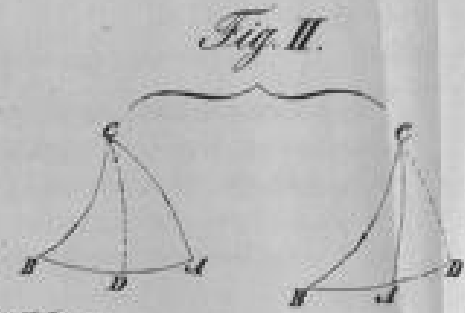
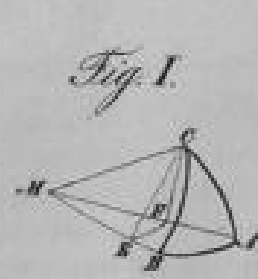




Fig. I.

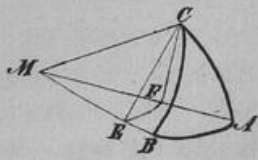


Fig. II.

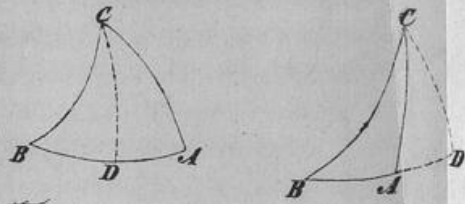


Fig. III.

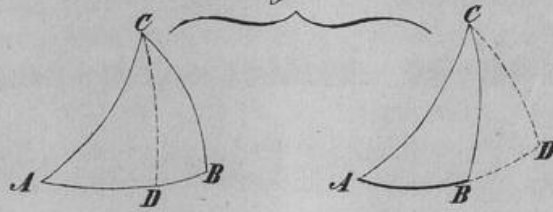


Fig. IV.

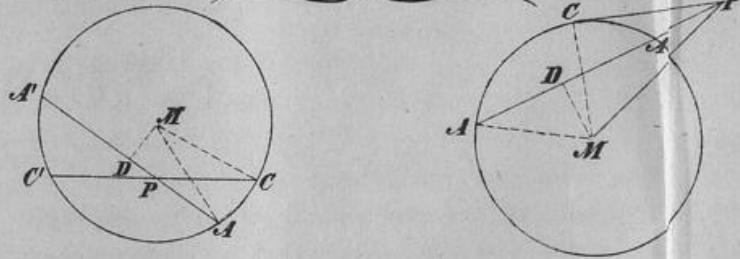
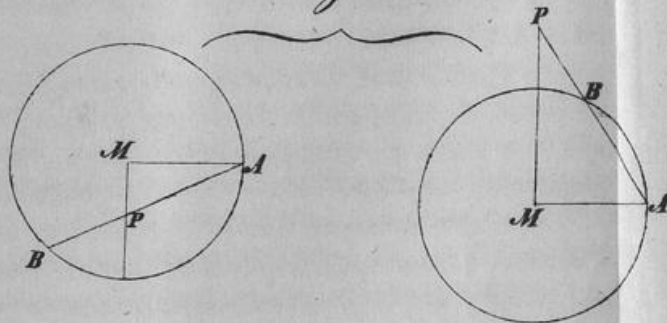


Fig. V.



Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.