Ueber die Brechung der Lichtstrahlen im Prisma.

Befindet sich in einem durchsichtigen Medium ein anderes von verschiedener brechender Kraft, welches von zwei einander parallelen Ebenen begränzt wird, so werden, wie bekannt, Lichtstrahlen, welche von einem leuchtenden Punkte in dem erstern Medium ausgehen, bei ihrem Durchgange durch das andere zweimal gebrochen. Der ausfahrende Strahl bleibt aber dem einfallenden immer parallel. Auch kommt es auf die Entfernung des strahlenden Punktes von dem so begränzten Medium gar nicht an, da die Richtung des ausfahrenden Strahls ungeändert bleibt, wenn man auch das Mittel, parallel mit sich selbst, dem Punkte nähert oder von demselben entfernt.

Anders verhält sich aber bekanntlich die Sache, wenn die von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen auf ein Mittel von verschiedener brechender Kraft treffen, welches nicht von zwei einander parallelen, sondern von zwei unter einem gewissen Winkel zusammenstoßenden Ebenen begränzt wird, wenn die Strahlen also auf ein Prisma auffallen. Die Gesetze dieser Brechung wollen wir mit Hilfe der analytischen Geometrie darstellen.

I.

Zu dem Ende wollen wir uns durch den leuchtenden Punkt und senkrecht auf die Kante des Prisma's eine Ebene gelegt denken. Der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Prisma ist somit ein Hauptschnitt. In dieser Ebene werden nach bekannten dioptrischen Gesetzen die Brechungen aller der in ihr befindlichen Strahlen vor sich gehen, von welchen wir einen als gegeben annehmen wollen. Die so gelegte Ebene selbst sei die Ebene der xy eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfang der leuchtende Punkt ist. Die Axe der x sei senkrecht auf der dem Punkte zunächst liegenden brechenden Fläche, und zwar sei ihr positiver Theil dieser Fläche zugekehrt; die Axe der y ist somit dieser Fläche parallel, ihr positiver Theil aber liege mit dem als gegeben angenommenen Strahle jederzeit in demselben Coordinatenwinkel. Ferner sei die Entfernung der dem strahlenden Punkte zunächst liegenden brechenden Fläche $= e$. Von den Coordinaten des Scheitels des brechenden Winkels ist somit die eine e, die andere sei f. Der brechende Winkel selbst aber werde durch w bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, sind die Gleichungen der Durchschnittslinien der Ebene der xy mit den beiden brechenden Flächen.

$$1.\ \begin{cases} x = e, \\ y - f = -(x - e)\cot w. \end{cases}$$

Ist nun i der 90° nicht übersteigende Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem positiven Theile der Axe der x macht, so ist

$$2.\quad y = x \operatorname{tang} i$$

die Gleichung dieses Strahls. Offenbar ist aber auch i gleich dem Einfallswinkel des Strahls. Bezeichnen wir daher das Brechungsverhältniß zwischen dem erstern Mittel und dem des Prisma's allgemein durch m : n, so ist, wenn der Brechungswinkel bei der ersten brechenden Fläche r ist,

$$\sin r = \frac{n}{m}\sin i$$

und somit

$$\operatorname{tang} r = \frac{n \sin i}{\sqrt{m^2 - n^2 \sin i^2}}$$

Da nun die Coordinaten des Einfallspunktes c und e tang i sind, so ist

$$3.\quad y - e \operatorname{tang} i = (x - e)\operatorname{tang} r$$

die Gleichung des gebrochenen Strahls. Die Coordinaten des Einfallspunktes auf der zweiten brechenden Fläche sind somit nach 1. und 3.

$$\frac{f - e \operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r + \cot w} + e,\quad \frac{f \operatorname{tang} r + e \operatorname{tang} i \cot w}{\operatorname{tang} r + \cot w}.$$

Daher ist die Gleichung des Einfallslothes für diesen Punkt

$$4,\ y - \frac{f \operatorname{tang} r + e \operatorname{tang} i \cot w}{\operatorname{tang} r + \cot w} = \left\{x - \frac{f - e \operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r + \cot w} - e\right\}\operatorname{tang} w.$$

Bezeichnen wir nun den Einfallswinkel, unter welchem der gebrochene Strahl die zweite brechende Fläche trifft, mit i', so ist nach bekannten Prinzipien der analytischem Geometrie

$$\sin i'^2 = \frac{(\operatorname{tang} w - \operatorname{tang} r)^2}{(1 + \operatorname{tang} w^2)(1 + \operatorname{tg} r^2)}$$

oder, da aus trigonometrischen Gründen

$$1 + \operatorname{tang} w^2 = \frac{1}{\cos w^2},\ 1 + \operatorname{tang} r^2 = \frac{1}{\cos r^2}$$

und

$$\text{tang } w - \text{tang } r = \frac{\text{Sin }(w - r)}{\cos w \cos r}$$

ist,

$$\sin i'^2 = \sin (w - r)^2,$$

mithin offenbar

$$5.\quad \text{Sin } i' = \sin (w - r),$$

woraus unzweideutig $i' = w - r$ oder

$$6.\quad w = r + i'$$

folgt.

Bei der zweiten Brechung ist nun das Brechungsverhältniß $n : m$. Mithin ist, wenn wir den Brechungswinkel bei dieser Brechung durch r' bezeichnen,

$$7.\quad \text{Sin } r' = \frac{m}{n} \text{ Sin } (w - r).$$

Ferner ist, wie man durch eine einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle findet, die trigonometrische Tangente des 180° nicht übersteigenden Winkels, welchen der ausfahrende Strahl mit der Richtung der positiven x einschließt, gleich

$$\text{tang } (w - r').$$

Somit ist

$$8.\quad y - \frac{f \text{ tang } r + e \text{ tang } i \text{ tang } w}{\text{tang } r + \cot w} = \left\{ x - \frac{f - e \text{ tang } i}{\text{tang } r + \cot w} - e \right\} \text{tang } (w - r')$$

die Gleichung des ausfahrenden Strahls. Hieraus ersehen wir, daß, da der Winkel r' eine Funktion des Einfallswinkels und des Brechungsexponenten ist, die Richtung des ausfahrenden Strahls von der Größe des brechenden Winkels des Prisma's, von dem Einfallswinkel und von dem Brechungsexponenten abhängt. Da in dieser Gleichung die Größe e enthalten ist, so bleibt die Richtung des ausfahrenden Strahls offenbar nicht ungeändert, wenn das Prisma, parallel mit sich selbst, dem strahlenden Punkte genähert oder von demselben entfernt wird.

Bezeichnen wir endlich von den beiden 180° nicht übersteigenden Winkeln, welche die durch die Gleichungen 2. und 8. näher charakterisirten Strahlen mit einander bilden, den dem Auge zunächst liegenden durch a, so ist, wie man leicht findet,

$$\cos a = \frac{1 + \text{tang } i \text{ tang } (w - r')}{\sqrt{(1 + \text{tang } i^2)(1 + \text{tang } (w - r'^2)}} = \cos (i - w + r'),$$

woraus unzweideutig

$$9.\quad a = i - w + r'$$

oder, da nach 6. $w = r + i'$ ist,

$$9^*.\quad a = i - r + r' - i'$$

folgt. Der Winkel a gibt offenbar die Größe der Ablenkung des einfallenden Strahls an.

II.

Die drei Gleichungen:

$$\sin r = \frac{n}{m} \sin i,$$

$$\sin r' = \frac{m}{n} \sin (w - r) = \frac{m}{n} \sin i' \text{ und}$$

$$w = i' + r$$

reichen hin, sowohl den Winkel a oder die Größe der Ablenkung, als auch den Winkel r' zu berechnen wenn i und $\frac{n}{m}$ gegeben sind.

Die beiden Winkel i und r' stehen aber jederzeit in einem solchen Verhältniß zu einander, daß, wenn der eine zunimmt, der andere abnimmt und umgekehrt.

Nach 7 ist nämlich

$$\sin r' = \frac{m}{n} \sin w \cos r - \frac{m}{n} \cos w \sin r$$

oder, da $\sin r = \frac{n}{m} \sin i$, mithin $\cos r = \frac{n}{m} \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - \sin i^2}$,

$$10.\quad \sin r' = \sin w \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - \sin i^2} - \cos w \sin i.$$

Ferner ist $\sin r = \frac{n}{m} \sin i$, daher

$$\sin i = \frac{m}{n} \sin r$$

oder, weil nach 6. $r = w - i'$ ist,

$$\sin i = \frac{m}{n} \sin w \cos i' - \frac{m}{n} \cos w \sin i'.$$

Nun ist aber, weil $\sin i' = \frac{n}{m} \sin r'$ ist, $\cos i' = \sqrt{1 - \frac{n^2}{m} \sin r'^2}$

$= \frac{n}{m} \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - \sin r'^2}$. Daher ist

$$11.\quad \sin i = \sin w \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - \sin r'^2} - \cos w \sin r'.$$

Erreicht nun i seinen größten Werth, ist $i = 90°$, also $\sin i = 1$, so ist nach 10.

$$\sin r' = \sin w \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - 1} - \cos w,$$

welcher Werth des Winkels r' offenbar ein Kleinstes ist.

Erlangt dagegen i seinen kleinsten Werth, ist $i = o$, also $\sin i = o$, so ist nach 10.

$$\sin r' = \frac{m}{n} \sin w,$$

welcher Werth offenbar der größte ist, den r' bekommen kann.

Umgekehrt ist für den größten Werth von r', für $r' = 90°$, $\sin r' = 1$, nach 11:

$$\sin i = \sin w \sqrt{\frac{m}{n^2} - 1} - \cos w.$$

und für den kleinsten Werth von r', für $r^1 = o$, $\sin r^1 = o$,

$$\sin i = \frac{m}{n} \sin w.$$

Der erste der beiden Werthe von $\sin i$ ist offenbar ein Minimum, der zweite ein Maximum. Wodurch die obige Behauptung bewiesen ist. Zugleich geht hieraus noch folgender Satz hervor:

Für irgend einen brechenden Winkel w eines Prisma ist der dem Einfallswinkel von 90° entsprechende kleinste Brechungswinkel eben so groß, als der dem Brechungswinkel von 90° entsprechende Einfallswinkel; und ebenso der dem Einfallswinkel von 0° entsprechende Brechungswinkel von derselben Größe, als der zum Brechungswinkel von 0° gehörige Einfallswinkel.

Außerdem aber, daß die beiden Winkel i und r' in einem solchen Verhältnisse stehen, hängen sie offenbar auch noch von der Größe des brechenden Winkels w ab. Denn soll an der Hinterfläche des Prismas noch eine Brechung stattfinden, und keine Totalreflexion eintreten, so darf der größte Werth von $\sin r'$ nicht größer als die Einheit sein d. i.

$$\frac{m}{n} \sin w \text{ nicht } > 1.$$

$$\text{oder } \sin w \text{ nicht } > \frac{n}{m}.$$

III.

Was nun den Winkel a, die Größe der Ablenkung, betrifft, so ist derselbe wegen 9. offenbar eine Funktion von i und r'. Weil nun nach II. r' zunimmt, wenn i abnimmt und umgekehrt, so kann man für kleine, der Null nahe kommende Werthe von i nahe zu

$$a = r' - w$$

setzen. Es wird somit in diesem Fall der Winkel a zu- oder abnehmen, wenn r′ zu- oder abnimmt. Da nun aber r′ zu- oder abnimmt, wenn i ab- oder zunimmt, so wird auch der Winkel a zu- oder abnehmen, wenn i ab- oder zunimmt, immer unter der Voraussetzung kleiner i.

Nimmt ferner der Winkel i mehr und mehr zu, so nimmt der Winkel r′ ab und nähert sich der Null mehr und mehr. In diesem Fall ist es daher verstattet

$$a = i - w$$

zu setzen. Woraus folgt, daß der Winkel a für wachsende Winkel i, wenn sie nur erst eine gewisse Größe erreicht haben, mit dem Winkel i zu- oder abnimmt.

Fassen wir nun beide Fälle zusammen, so ergiebt sich, **daß der Winkel a bei einem kleinen Einfallswinkel mehr und mehr abnimmt, wenn dieser zunimmt; daß er für einen gewissen Werth von i aufhört abzunehmen, mithin sein Minimum für diesen Werth erreicht, und daß er nunmehr mit i wächst, bis i die Gränze des Wachsens erreicht hat.**

Es bliebe nun noch die Bestimmung des Minimum des Winkels a übrig, welche in bekannter Weise, der Vollständigkeit wegen, hier ihren Platz finden mag. Nach 9. ist a eine Funktion von i und r′, wo i offenbar die unabhängige Veränderliche ist; daher hat man

$$\frac{da}{di} = 1 + \frac{dr'}{di}.$$

Für den Fall eines Minimum ist aber $da = o$; mithin ist

$$o = 1 + \frac{dr}{di}$$

oder

$$di = - dr'.$$

Differentiirt man nun die Gleichungen

$$\sin i = \frac{m}{n} \sin r, \ \sin r' = \frac{m}{n} \sin (w - r)$$

und setzt

$$\cos i = \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2} \sin r^2}, \ \cos r' = \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2} \sin (w - r)^2},$$

so ist nach geschehener Elimination der Differentiale

$$\frac{\cos r}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2} \sin r^2}} = \frac{\cos (w - r)}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2} \sin (w - r)^2}},$$

welche Gleichung nur erfüllt wird durch $w = 2r$, also $r = \frac{1}{2} w$. Da nun aber $w = i' + r$ ist, so ist auch $i' = \frac{1}{2} w$. Mithin ist

$$12. \quad r = i' = \tfrac{1}{2} w.$$

Es erreicht somit der Winkel a seinen kleinsten Werth, wenn r = i' ist, d. h. wenn der Strahl mit den beiden Durchschnittslinien der brechenden Flächen des Prisma's gleiche Winkel macht.

Weil nun

$$\sin i = \frac{m}{n} \sin r$$

und

$$\sin r' = \frac{m}{n} \sin (w - r)$$

so ist, wenn $r = \frac{1}{2} w$, offenbar $\sin i = \sin r'$ oder

$$i = r',$$

d. h. **der Winkel a oder die Größe der Ablenkung des Strahls erreicht seinen kleinsten Werth, wenn der Einfallswinkel und der Brechungswinkel gleich sind.** Mithin ist nach 9. für den Fall der kleinsten Brechung allgemein

$$\begin{aligned} a &= 2\,i - w \\ &= 2\,r' - w. \end{aligned}$$

Was nun die Gränze der kleinsten Brechung für irgend einen gegebenen brechenden Winkel w anlangt, so ist diese offenbar

$$\sin i = \sin r' = \frac{m}{n} \sin \tfrac{1}{2} w \text{ nicht} > 1,$$

woraus man für ein bestimmtes w und für einen bestimmten Werth von $\frac{m}{n}$ den Gränzwerth von i oder r' finden kann.

IV.

Nach I. sind die Coordinaten des Scheitels des brechenden Winkels e, f; ferner sind die Coordinaten des Einfallspunktes des einfallenden Strahls e, e tg i; daher ist, wenn wir mit ϱ die Entfernung dieser beiden Punkte bezeichnen,

$$\varrho^2 = (f - e \operatorname{tg} i)^2$$

Die Coordinaten des Einfallspunktes auf der zweiten brechenden Fläche sind

$$\frac{f - e \operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r + \cot w} + e, \quad \frac{f \operatorname{tang} r + e \operatorname{tang} i \cot w}{\operatorname{tang} r + \cot w}.$$

Bezeichnet nun $\varrho_{,}$ die Entfernung dieses Punktes von dem Scheitel des brechenden Winkels, so ist

$$\begin{aligned} \varrho_{,}^2 &= \frac{(f - e \operatorname{tang} i)^2}{(\operatorname{tang} r + \cot w)^2} + \left(\frac{f \operatorname{tang} r + e \operatorname{tg} i \cot w}{\operatorname{tang} r + \cot w} - f\right)^2 \\ &= \frac{(1 + \cot w^2)\,(f - e \operatorname{tang} i)^2}{(\operatorname{tang} r + \cot w)^2} = \frac{(f - e \operatorname{tang} i)^2}{(\operatorname{tang} r + \cot w)^2 \sin w^2} \end{aligned}$$

oder, da $(f - e \tang i)^2 = \varrho^2$ ist,

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_,}\right)^2 = (\tang r + \cot w)^2 \sin w^2$$

mithin

$$\frac{\varrho}{\varrho_,} = (\tang r + \cot w) \sin w.$$

Nun ist aber

$$\tang r + \cot w = \frac{\cos(w - r)}{\sin w \cos r}.$$

Daher ist

$$13. \quad \frac{\varrho}{\varrho_,} = \frac{\cos(w - r)}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r}$$

oder

$$\varrho : \varrho_, = \cos(w - r) : \cos r = \cos i' : \cos r.$$

Für $r = \frac{1}{2} w$ ist also

$$\varrho = \varrho_,,$$

wie es auch sein muß.

V.

Nehmen wir noch einen zweiten Strahl, der von dem in II. als Anfang der Coordinaten angenommenen leuchtenden Punkte ausgeht, als gegeben an. Es sei $i_,$ sein Einfallswinkel, welches zugleich der 90° nicht übersteigende Winkel ist, welchen der Strahl mit den positiven x macht, wobei wir die Bedingung machen wollen, daß $i_, > i$ ist. Die Gleichung dieses einfallenden Strahls ist sonach

$$y = x \tang i_,.$$

Wenn nun $r_,$ den zu $i_,$ gehörigen Brechungswinkel bezeichnet, so ist

$$y - e \tang i_, = (x - e) \tang r_,$$

die Gleichung des gebrochenen Strahls, so wie, wenn $r_,'$ der Brechungswinkel an der Hinterfläche ist,

$$14. \quad y - \frac{f \tang r_, + e \tang i_, \tang w}{\tang r_, + \cot w} = \left\{x - \frac{f - e \tang i_,}{\tang r_, + \cot w} - e\right\} \tang (w - r_,')$$

die Gleichung des austretenden Strahls. Weil nun nach der gemachten Voraussetzung $i_, > i$ ist, so ist nach II. offenbar $r_,' < r'$, mithin $\tang(w - r_,') > \tang(w - r')$, woraus offenbar folgt, daß die durch die beiden Gleichungen 8. und 14. dargestellten austretenden Strahle divergiren.

Betrachten wir ferner die beiden austretenden Strahlen als einfallende und umgekehrt, haben wir also den Fall, daß zwei einfallende Strahlen convergent sind, so ergiebt sich sofort, daß diese nach der Brechung ebenfalls convergent sind.

Es bleiben somit divergirende Strahlen auch nach der Brechung divergent, sowie convergirende convergent.

Nehmen wir endlich in der Axe der y einen zweiten strahlenden Punkt an. Die eine Coordinaten desselben sei h, die andere ist natürlich gleich Null. Von diesem Punkte gehe ein dem durch die Gleichung $y = x \operatorname{tang} i$ näher bezeichneten Strahle paralleler Strahl aus. Seine Gleichung ist

$$y - h = x \operatorname{tang} i,$$

die Coordinate des Einfallspunktes sind somit

$$e,\ h + e \operatorname{tang} i,$$

die Gleichung des gebrochenen Strahls daher

$$y - h - e \operatorname{tang} i = (x - e) \operatorname{tang} r,$$

so wie die Gleichung des austretenden Strahls

$$y - \frac{f \operatorname{tang} r + (h + e \operatorname{tg} i) \operatorname{tang} w}{\operatorname{tang} r + \cot w} = \left\{x - \frac{f - h - e \operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r + \cot w} - e\right\} \operatorname{tang} (w - r_,').$$

Dieser Strahl bleibt somit dem erstern auf seinem ganzen Wege parallel.

Daher bleiben parallele Strahlen offenbar auch nach der Brechung einander parallel.