I.

Zur Methodik des praktischen Schnellrechnens.

Wir setzen eine wohlbegriffene und tüchtig eingeübte Bruchrechnung voraus und gehen sofort an die Lösung von einfachen Regeldetri-Aufgaben im Kopf und auf der Tafel. Wir üben erst den Bruchsatz und dann den Kettensatz, ohne eine Kenntniß der Proportion vorauszusetzen noch herbeizuführen; wir theilen daher die Regeldetri zunächst auch nicht ein in gerade und umgekehrte, noch in Multiplications- und Divisions-Regeldetri, üben aber natürlich zuerst die gerade und zwar die einfache Regeldetri ein; später die umgekehrte, und zwar a) die einfache, sowol im Kopf als auf der Tafel, b) die zusammengesetzte Regeldetri; endlich, wenn inzwischen die Theorie der Verhältnisse und Proportionen erläutert worden ist, lassen wir die 3te Lösung sowol der einfachen als auch der zusammengesetzten Regeldetri mittels des Proportions-Ansatzes folgen.

Wir wollen unser Verfahren an einzelnen Aufgaben in aller Kürze darlegen.

I. Stufe.

Die Aufgabe lautet: 6 Pfd. kosten 1 thl. 7 sg. 6 pf., was kosten 9 Pfd.? Wir scheiden Angabe und Frage.

Die Angabe ist: 6 Pfd. kosten 1 thl. 7 sg. 6 pf.

Die Frage: 9 Pfd. kosten? (wie viel) Thaler.

Wir führen 1 thl. 7 sg. 6 pf. auf einen (unächten) Thalerbruch zurück und setzen dann stets kurz so an:

6 Pfd. — $^5/_4$ Thlr.
9 Pfd. — ? Thlr.

Wir machen einen wagerechten Strich und setzen jedesmal, so auch hier, die Zahl, die über dem Fragezeichen steht, heraus und zwar so: $\frac{5}{4}$ thlr.

Wir wissen: 6 Pfd. kosten $^5/_4$ thlr., wir fragen: was kostet 1 Pfd.? 1 Pfd. ist der 6. Theil von 6 Pfd., folglich kostet 1 Pfd. auch nur den 6. Theil des Geldes, folglich haben wir den Bruch $^5/_4$ thl. durch 6 zu theilen. Nach der Bruchrechnung setzen wir die Zahl, wodurch wir theilen, als Factor in den Nenner; folglich setzen wir auch hier 6 in den Nenner; folglich kostet 1 Pfd. $\frac{5}{4.\ 6}$ Thlr., gelesen: 5, getheilt durch 4 $\times$ 6, Thaler. — Wir wissen, daß 1 Pfd. kostet $\frac{5}{4.\ 6}$ thl., wir fragen: was kosten 9 Pfd.? Offenbar 9mal so viel als 1 Pfd. Wir setzen nach der Bruchrechnung die Zahl, womit wir einen Bruch multipliciren, in den Zähler; folglich kosten 9 Pfd. $\frac{5.\ 9}{4.\ 6}$ thl. Wir heben 9 gegen 6 durch 3; folglich 9 Pfd. = $\frac{5.\ 3}{4.\ 2}$ thlr. = $^{15}/_8$ thl. = $1^7/_8$ thl. = 1 thl. $\frac{7.\ 30}{8}$ sg. = 1 thl. $\frac{7.\ 15}{4}$ sgr. = 1 thl. $^{105}/_4$ sgr. = 1 thl. $26^1/_4$ sgr. = 1 thl. 26 sgr. 3 pf.*)

Dasselbe Exempel wird jetzt im Kopf gerechnet. 6 Pfd. kosten 1 thl. 7 sgr. 6 pf., was kosten 9 Pfd. — 6 Pfd. = $1^1/_4$ thl. = $^5/_4$ thl.; folglich 1 Pfd. = $\frac{5}{4.\ 6}$ thl. = $^5/_{24}$ thl. = 5 ggr.; folglich kosten 9 Pfd. derselben Waare 5. 9 ggr. = 45 ggr. = 1 thl. 21 ggr. = 1 thl. (25 + $1^1/_4$) sgr. = 1 thl. 26 sgr. 3 pf.

Oder: wenn 6 Pfd. 1 thl. 7 sgr. 6 pf. kosten, so kostet 1 Pfd. den 6. Theil von 1 thl. + dem 6. Theil von 7 sgr. + dem 6. Theil von 6 pf. = 5 sgr. + 1 sgr. + $^{18}/_6$ pf. = 6 sgr. 3 pf.; folglich 9 Pfd. = 9. 6 sgr. + 9. 3 pf. = 54 sgr. + 27 pf. = 56 sgr. 3 pf. = 1 thl. 26 sg. 3 pf.

Oder: Wenn 6 Pfd. $^5/_4$ thl. kosten, so kosten 3 Pfd. halb so viel, also $^5/_8$ thl., und 9 Pfd. dreimal so viel = $\frac{3.\ 5}{8}$ thl. = $^{15}/_8$ thl. = rc.

Dasselbe Exempel nach dem Kettensatz. Man macht einen senkrechten Strich und beginnt mit der fraglichen Größe und zwar so:

$$\begin{array}{r|l} ?\ \text{thlr.} & 9\ \text{Pfd.} \\ 6\ \text{Pfd.} & ^5/_4\ \text{thl.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{d. h. wie viel Thaler kosten 9 Pfd.,} \\ \text{wenn 6 Pfd. } ^5/_4 \text{ thl. kosten?} \end{array} \right.$$

Oder, weil, wenn 6 Pfd. = $^5/_4$ thl. sind, offenbar 4. 6 Pfd. 5 ganze Thaler kosten, besser so**):

$$\begin{array}{r|l} ?\ \text{thlr.} & 9\ \text{Pfd.} \\ 4.\ 6\ \text{Pfd.} & 5\ \text{thlr.} \end{array}$$

Vergleicht man diesen Kettenansatz mit dem vorstehenden Bruchansatz, so ergiebt sich, daß die rechte Säule der Dividendus, die linke Säule der Divisor ist; folglich hebt man auch hier die Zahlen der einen Säule gegen die der andern, und das Endergebniß ist wie oben.

Oder man setzt gleich so an:

? sgr.	9 Pfd.	d. h.	? sgr	9 Pfd.	d. h.	? sgr.	9 Pfd.
6 Pfd.	$^5/_4$ thlr.		4. 6 Pfd.	5 thlr.	geho-	4.	5 thl.
1 thlr.	30 sgr.		1 thlr.	30 sgr.	ben	1 thl.	5 sgr.

*) Anmerkung. Daß die Nebenrechnungen hier, wie überall, im Kopf gemacht werden, versteht sich von selbst.

**) Daß der Lehrer beiläufig den Namen Kettensatz erklärt und die Regel finden läßt: man setzt die Nenner der einen Säule als Factoren in die andre Säule, ist hier als selbstverständlich nur zu erwähnen.

folglich kosten 9 Pfd. wie oben $\frac{9.5.5}{4}$ sgr. $= \frac{9.25}{4}$ sgr. $= \left(\frac{8.25 + 1.25}{4}\right)$ sgr. $= (2.25 + 6^1/_4)$ sgr. $= 56^1/_4$ sgr. $= 1$ thl. 26 sgr. 3 pf.

Die Sicherheit in der Lösung dieser Aufgaben muß durch viele Übung erzielt werden, ehe man übergeht zu den schwereren Aufgaben der

II. Stufe.

Wir zeigen unser Verfahren wieder an einer bestimmten Aufgabe; z. B. $6^2/_3$ Loth kosten 10 sgr. 6 pf., was kosten 3 Ctnr. 5 Pfd. 9 Lth? — Bevor wir den Ansatz machen, führen wir entweder 3 Ctnr. 5 Pfd. 9 Lth. auf Loth oder 5 Pfd. 9 Lth. auf einen Centnerbruch zurück; in beiden Fällen setzen wir für $6^2/_3$ Lth. ein $^{20}/_3$ Lth. und für 10 sg. 6 pf. oder $10^1/_2$ sg. $^{21}/_2$ sgr. Das Exempel würde also heißen: $^{20}/_3$ Lth. kosten $^{21}/_2$ sgr., was kosten 9159 Lth.? oder: wenn $^{20}/_3$ Lth. $= ^{21}/_2$ sg. sind, was kosten 3 Ctnr. $5^9/_{30}$ Pfd. $=$ 3 Ctnr. $5^3/_{10}$ Pfd. $=$ 3 Ctnr. $^{53}/_{10}$ Pfd. $= 3^{53}/_{1000}$ Ctnr. $= ^{3053}/_{1000}$ Cntr.? Wir lösen hier die Aufgabe nach der letzteren Fassung.

Angabe: $^{20}/_3$ Loth — $^{21}/_2$ sgr.
Frage: $^{3053}/_{1000}$ Ctnr. — ? thlr.

1. Lösung durch den Bruchsatz. Wir machen einen wagerechten Strich und setzen die Zahl über dem Fragezeichen heraus, also: $\frac{21}{2}$ sgr. Wir wissen, daß $^{20}/_3$ Loth kosten $^{21}/_2$ sgr., wir fragen: was kostet $^1/_3$ Loth? Offenbar den 20. Theil von $^{21}/_2$ sgr.; folglich setzen wir 20 in den Nenner. Wir wissen, daß $^1/_3$ Loth kostet $\frac{21}{2.\ 20}$ sg.; wir fragen: was kosten $^3/_3$ Lth. oder 1 ganzes Loth? Offenbar 3mal soviel als $^1/_3$ Loth, folglich $\frac{21.\ 3}{2.\ 20}$ sgr. Wir wissen, daß 1 Loth $\frac{21.\ 3}{2.\ 20}$ sgr. kostet, wir fragen: was kostet 1 Pfd.? Offenbar 30mal soviel als 1 Loth. Wir setzen 30 in den Zähler, folglich $\frac{21.\ 3.\ 30.}{2.\ 20}$ sgr. Wir wissen, daß 1 Pfd. kostet $\frac{21.\ 3.\ 30}{2.\ 20}$ sgr., wir fragen: was kostet 1 Ctnr.? Offenbar 100mal so viel, also $\frac{21.\ 3.\ 30.\ 100}{2.\ 20}$ sgr. Wir wissen, was 1 Ctnr. kostet und fragen, was $^1/_{1000}$ Ctnr. kostet; offenbar den 1000. Theil vom Centnerpreise, also $\frac{21.\ 3.\ 30.\ 100}{2.\ 20.\ 1000}$ sgr. Wir wissen, was $^1/_{1000}$ Ctnr. kostet und fragen: was kosten $^{3053}/_{1000}$ Ctnr.? Offenbar 3053mal so viel als $^1/_{1000}$ Ctnr., folglich kosten $^{3053}/_{1000}$ Ctnr. $\frac{21.\ 3.\ 30.\ 100.\ 3053}{2.\ 20.\ 1000}$ sgr. Wir wissen, wie viel sgr. $^{3053}/_{1000}$ Ctnr. kosten, wir fragen: wie viel Thaler sind $\frac{21.\ 3.\ 30.\ 100.\ 3053}{2.\ 20.\ 1000}$ sgr.? Ein sgr. ist $= ^1/_{30}$ thlr.; 2 sgr. $= ^2/_{30}$ thlr.; 3 sgr. $= ^3/_{30}$ thlr.; folglich n sgr. $= ^n/_{30}$ thlr., wo n die vorstehende Zahl von sgr. bedeutet; folglich sind $\frac{21.\ 3.\ 30.\ 100.\ 3053}{2.\ 20.\ 1000}$ sgr. $= \frac{21.3.30.100.3053}{2.\ 20.\ 1000.\ 30}$ thl. $= \frac{21.3.3053}{2.\ 20.\ 10}$ thl. $= \frac{7.9.3053}{2.2.10.10}$ thl. $= \frac{7.\ 27477}{4.\ 100}$ thl. $= \frac{1923{,}39}{4}$ thl. $= 480{,}8475$ thl. $=$ **480 thl.** $+ \left(\frac{8475.\ 30}{10000}\text{ fg.} = \frac{8475.\ 3}{1000}\text{ fg.} = 25{,}425\text{ fg.} =\right)$ **25 fg.** $+ \left(\frac{425}{1000}\text{ fg.} = \frac{425.\ 12}{1000}\text{ pf.} = \frac{5100}{1000}\text{ pf.} = \frac{51}{10}\text{ pf.} =\right)$ **$5^1/_{10}$ pf.**; folglich wenn $6^2/_3$ Loth 10 sgr. 6 pf. kosten, so kosten 3 Ctn. 5 Pfd. 9 Loth 480 thlr. 25 sgr. $5^1/_{10}$ pf.

2. Lösung durch den Kettensatz.

? thl.	3Ct. 5Pfd. 9Lth. = 9159Lth.	oder:	? thl.	9159Lt.
$^{20}/_3$Lt.	$^{21}/_2$ sgr.		2. 20Lth.	21.3 sg.
30 sg.	1 thlr.		30 sgr.	1 thl.

Oder nach vollzogener Hebung:

? thl.	9159	d. h. 3 Ctnr. 5 Pfd. 9 Loth kosten
2. 20	21	$\frac{9159.\ 21}{400}$ thl. $=$ 480 thl. 25 sg. $5^1/_{10}$ pf.
10	1	

Die Lösung durch Kopfrechnen hier und an ähnlichen Aufgaben wird kein Lehrer versuchen, da das Bedürfniß im prakt. Verkehr dieß nie erheischt. Ähnliche Aufgaben aber, wie sie jedes gute Rechenbuch bietet, sind hier so lange zu geben, bis die Lösung derselben vollständig geläufig geworden ist.

III. Stufe.

25 Arbeiter machen eine Feldarbeit in 8 Tagen, in wie viel Tagen thun dieß 16 Arbeiter?

Angabe: 25 Arb. — 8 Tage,
Frage: 16 — — ? —

1. Lösung: Wir machen einen wagerechten Strich und setzen die Zahl über dem Fragezeichen heraus: $\frac{8}{1}$ Tage. Wir wissen, daß 25 Arb. es in 8 Tagen verrichten, wir fragen: in wie viel Tagen thut es 1 Arbeiter? Offenbar braucht 1 Arb. 25mal so viel Tage. Wir setzen 25 in den Zähler, also: $\frac{8.\ 25}{1}$ Tage. Wir wissen: 1 Arb. braucht $\frac{8.\ 25}{1}$ Tage, wir fragen: in wie viel Tagen machen es 16 Arbeiter? Offenbar in einer 16 mal geringeren Zahl von Tagen, also setzen wir 16 in den Nenner; folglich machen es 16 Arb. in $\frac{8.\ 25}{16}$ Tagen $= ^{25}/_2$ Tagen $= 12^1/_2$ Tag.

2. Lösung durch Kopfrechnen. Wenn 25 Arb. das Werk in 8 Tagen verrichten, so besteht die Arbeit offenbar in 25. 8 Tagewerken, die auf 16 Arbeiter zu vertheilen sind; folglich kommt auf jeden Arbeiter der 16. Theil von 25. 8 Tagewerken, also $\frac{25.\ 8}{16}$ Tagewerke oder $^{25}/_2$ Tage. — Anmerkung. Die Lösung durch den Kettensatz ist hier nicht anzuwenden; der Grund davon ist in der Proportionslehre klar zu machen. Dagegen sind hier die verschiedensten Aufgaben, wie sie der tägl. Verkehr bringt, zu lösen, bis die Lösung vollständig geläu-

fig geworden ist. Z. B. Man braucht $3\frac{3}{4}$ Ellen zum Kleide, wenn das Zeug 2 Ellen breit ist; wie viel Ell. dagegen, wenn das Zeug nur $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist? Wir setzen an.

Angabe: $\frac{15}{4}$ Ellen lang — $\frac{8}{4}$ Ellen breit,
Frage: ? — — — $\frac{5}{4}$ — —

1. Lösung: Wir machen einen wagerechten Strich und setzen die Zahl über dem Fragezeichen heraus, also $\frac{15}{4}$ — Ellen lang. Wir wissen, daß das Zeug $\frac{8}{4}$ Ellen breit sein muß, wenn $\frac{15}{4}$ Ellen davon nöthig sind, wir fragen: wie viel Ellen Zeug sind erforderlich, wenn die Breite desselben nur $\frac{1}{4}$ Elle beträgt? Offenbar 8 mal so viel. Wir setzen 8 in den Zähler, also: $\frac{15.8}{4}$ Ellen lang. Wir wissen, daß $\frac{25.8}{4}$ Ell. Zeug nöthig sind, wenn das Zeug $\frac{1}{4}$ Elle breit ist, wir fragen, wie viel Ellen sind nöthig, wenn das Zeug $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist; offenbar nur der 5te Theil des Zeuges. Wir setzen 5 in den Nenner; folglich sind $\frac{15.8}{4.5}$ Ellen nöthig. Wir heben und erhalten das Endergebniß: 6 Ellen lang.

2. Lösung durch Kopfrechnen: Wenn $\frac{15}{4}$ Ellen langes und 2 Ellen breites Zeug gebraucht wird, so ist ein Stück Zeug nöthig, daß einen Flächeninhalt von $\frac{15.2}{4}$ Quadrat-Ellen hat. Wir heben und erhalten $\frac{15}{2}$ Quad.-Ellen. Man findet die Länge eines Rechtecks, wenn man die Zahl, welche den Flächeninhalt ausdrückt, durch die Zahl, welche die Breite angiebt, dividirt; hier also $\frac{15}{2}$ durch $\frac{5}{4}$; $\frac{15}{2} : \frac{5}{4} = \frac{15.\ 4.}{2.\ 5.} = 3.\ 2 = 6$ Ellen lang.

IV. Stufe.

Wir gehen zur zusammengesetzten Regeldetri über. Wir fangen auch hier mit den leichtesten Aufgaben an; z. B. Eine Mühle mit 3 Mahlgängen mahlt in 8 Stunden 11 Schffl. Korn; wie viel Schffl. werden auf 4 dergl. Gängen in 9 Stunden gemahlen werden? Wir setzen an.

Angabe: 3 Gänge — 8 Stunden — 11 Schffl.
Frage: 4 — 9 — ? —

1. Lösung: Wir machen einen wagerechten Strich und setzen die Zahl über dem Fragezeichen heraus, also $\frac{11}{1}$ — Schffl. Wir wissen: 3 Gänge machen in 8 Stunden 11 Schffl., wir fragen: wie viel Schffl. mahlt 1 Gang in 8 Stunden. Offenbar 3 mal weniger Scheffel. Wir setzen 3 in den Nenner. Wir wissen, daß 1 Gang in 8 St. $\frac{11}{3}$ Schffl. mahlt, wir fragen: wie viel Schffl. mahlen 4 Gänge in 8 St. Offenbar 4 mal mehr Schffl. Wir setzen 4 in den Zähler, also: $\frac{11.4}{3}$ Schffl. Wir wissen: 4 Gänge mahlen in 8 St. $\frac{11.4}{3}$ Schffl., wir fragen: wie viel Schffl. mahlen 4 Gänge in 1 St.? Offenbar 8 mal weniger Schffl.; wir setzen 8 in den Nenner, also $\frac{11.4}{3.8}$ Scheffel. Wir wissen: 4 Gänge mahlen in 1 St. $\frac{11.4}{3.8}$ Schffl., wir fragen: wie viel Schffl. mahlen 4 Gänge in 9 St.? Offenbar 9 mal mehr Schffl., wir setzen 9 in den Zähler. Wir wissen jetzt, daß 4 Gänge in 9 Stunden $\frac{11.4.9}{3.8}$ Schffl. $= \frac{11.3}{2}$ Schffl. $= 16\frac{1}{2}$ Schffl. mahlen.

2. Lösung durch Kopfrechnen. Wenn 3 Gänge in 8 St. 11 Schffl. mahlen, so mahlt 1 Gang in 1 St. $\frac{11}{3.8}$ Schffl. $= \frac{11}{24}$ Schffl.; folgl. 4 Gänge in 1 St. 4mal so viel, also $\frac{4.11}{24}$ Schffl. $= \frac{11}{6}$ Schffl. u. 4 Gänge in 9 St. $9 \times \frac{11}{6}$ Schffl. $= \frac{3.11}{2}$ Schffl. $= 16\frac{1}{2}$ Schfl.

Anmerkung: die 3te Lösung durch den Kettensatz ist in dieser Weise möglich: wenn 3 Gänge in 8 St. 11 Schffl. mahlen, so werden 11 Schffl. in 3.8 Mahlstunden vermahlen, wie viel Schffl. werden demnach in 4.9 Mahlstunden fertig werden. Also:

$$\begin{array}{r|l} ?\ \text{Schffl.} & 4.\,9\ \text{Mahlst.} \\ 3.\,8\ \text{Mahlst.} & 11\ \text{Schffl.} \end{array} \quad \text{Oder gehoben:} \quad \begin{array}{c|c} ?\ \text{Schffl.} & 3 \\ 2 & 11 \end{array}$$

Antwort: $\frac{3.11}{2}$ Schffl. $= 16\frac{1}{2}$ Schffl.

Diese Stufe muß durch Lösung der verschiedensten Aufgaben geläufig gemacht werden; es versteht sich von selbst, daß die Lösung durch Kopfrechnen nur bei kleinen Zahlen anwendbar ist. Es folge noch an einer zusammengesetzteren Aufgabe das abgekürzte Verfahren.

Z. B. 4 Schriftsetzer setzen in 9 Tagen 24 Bogen à 16 Seiten à 42 Zeilen à 60 Buchstaben, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wie viel Bogen werden 7 Setzer in 10 Tagen à 12 Stunden, den Bogen zu 12 Seiten à 35 Zeilen à 54 Buchstaben gerechnet, bei gleichem Fleiß liefern können?

Ang.: 4 Sz. 9 Tg. 10 St. tägl. 24 Bg. 16 S. 42 Zl. 60 Bchst.
Frg.: 7 „ 10 „ 12 „ „ ? „ 12 „ 35 „ 54 „

Lösung: Die Zahl über dem Fragezeichen setzen wir heraus, also: $\frac{24}{1}$ — Bogen. Wir wissen, daß 24 Bogen 4 Setzer erfordern, wir fragen, wie viel Bogen davon liefert 1 Setzer? — 4mal weniger; wir setzen 4 in den Nenner. Wir wissen, daß 1 Setz. $\frac{24}{4}$ Bogen liefert; wir fragen: wie viel Bogen liefern 7 dergl. Setzer? Offenbar 7mal mehr; folglich setzen wir 7 in den Zähler. Wir wissen, daß 7 Setzer $\frac{24.7}{4}$ Bogen liefern und zwar in 9 Tagen; wir fragen: wie viel Bogen werden 7 Setzer in 1 Tage liefern? Offenbar 9mal weniger, also $\frac{24.7}{4.9}$ Bogen. Wir wissen, daß 7 Setzer in 1 Tage $\frac{24.7}{4.9}$ Bog. liefern, wir fragen: wie viel Bogen werden 7 Setzer in 10 Tagen liefern? Offenbar 10mal mehr, also $\frac{24.\ 7.\ 10}{4.\ 9}$ Bogen. Wir wissen, wie viel Bogen 7 Setzer in 10 Tagen liefern, und zwar, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wir fragen: wie viel Bogen werden 7 Setz.

in 10 Tagen bei tägl. 1stündiger Arbeit liefern? Offenbar 10mal weniger, also $\frac{24.\ 7.\ 10}{4.\ 9.\ 10}$ Bog. Wir wissen, wie viele Bogen 7 Setzer in 10 Tagen bei 1stünd. Arbeit liefern, wir fragen: wie viel Bogen werden 7 Setzer in 10 Tagen bei täglich 12stünd. Arbeit liefern? Offenbar 12mal so viel, also $\frac{24.\ 7.\ 10.\ 12}{4.\ 9.\ 10}$ Bog. Wir wissen, wie viel Bogen 7 Setzer in 10 Tagen bei tägl. 12stünd. Arbeit liefern, und zwar, wenn der Bogen 16 Seiten hat; wir fragen: wie viel Bogen 7 Setzer in 10 Tg. à 12 Std. liefern, wenn nur 1 Seite gesetzt wird? Offenbar 16mal mehr, also $\frac{24.\ 7.\ 10.\ 12.\ 16}{4.\ 9.\ 10}$ Bogen; und wenn 12 Seiten gesetzt werden, 12mal weniger, also $\frac{24.\ 7.\ 10.\ 12.\ 16}{4.\ 9.\ 10.\ 12}$ Bogen, und zwar, wenn die Seite 42 Zeilen hat. Wir fragen: wie viel Bogen, wenn auf der Seite nur 1 Zeile gesetzt wird? Offenbar 42mal so viel. Wir wissen, daß 7 Setzer in 10 Tg. à 12 Std., wenn der Bogen 12 Seiten und die Seite 1 Zeile hat, $\frac{24.\ 7.\ 10.\ 12.\ 16.\ 42}{4.\ 9.\ 10.\ 12}$ Bog. setzen; wir fragen: wie viel Bogen, wenn auf die Seite 35 Zeilen kommen? Offenbar, 35 mal weniger, also: $\frac{24.\ 7.\ 10\ 12.\ 16.\ 42}{4.\ 9.\ 10.\ 12.\ 35}$ Bogen, und zwar, wenn die Zeile 60 Buchstaben enthält. Wtr fragen: wie viel Bogen, wenn die Zeile 1 Buchstaben enthält? Offenbar 60mal mehr, also: $\frac{24.\ 7.\ 10.\ 12.\ 16.\ 42.\ 60}{4.\ 9.\ 10.\ 12.\ 35}$ Bog. Wir wissen, wie viel Bogen 7 Setzer in 10 Tagen à 12 Stunden, den Bogen zu 12 Seiten à 35 Zeilen à 1 Buchst. setzen; wir fragen: wie viel Bogen, wenn die Zeile 54 Buchst. enthält? Offenbar 54mal weniger. Wir wissen jetzt, daß 7 Setzer in 10 Tg. à 12 Std., wenn der Bogen 12 Seiten à 35 Zeilen à 54 Buchstaben enthält, setzen: $\frac{24.\ 7.\ 10.\ 12.\ 16.\ 42.\ 60}{4.\ 9.\ 10.\ 12.\ 35.\ 54}$ Bogen $=$ $\frac{24.\ 7.\ 16.\ 42.\ 60}{4.\ 9.\ 35.\ 54}$ Bogen $= {}^{896}/_{9}$ Bog. $= 99\,{}^{5}/_{9}$ Bog.

Abgekürzteres Verfahren: Sobald wir 4 (Setzer) in den Nenner setzen, kommt 7 (Setzer) unmittelbar in den Zähler; ebenso, wenn 9 (Tage) in den Nenner kommt, setzen wir 10 (Tage) unmittelbar in den Zähler, und wenn 16 (Seiten) in den Zähler gehört, setzen wir 12 (Seit.) unmittelbar in den Nenner 2c.

V. Stufe.

Diese Stufe setzt das Verständniß der Proportionslehre voraus, also die Kenntniß der geraden und umgekehrten Verhältnisse oder der proportionalen und improportionalen Größen; sie kann aber füglich für alle die Schüler wegfallen, denen die Theorie der Proportion fremd bleibt. Es sind die einfachen und zusammengesetzten Regeldetri-Aufgaben mittels der Proportion zu lösen, und zwar, wie folgt:

1. Die einfache Regeldetri:

a) mit proportionalen Größen: z. B. wenn $4\,{}^{2}/_{3}$ Pfd. Waare 7 sgr. kostet, wie viel bekommt man für 12 sgr.?

Ang.: ${}^{14}/_{3}$ Pfd. — 7 sg.
Frg.: ? „ — 12 „

Anmk. Die Größen sind proportional; denn es heißt: je mehr Geld, desto mehr Waare.

Die Lösung nach dem Bruchsatz ergiebt: $\frac{14.\ 12}{3.\ 7}$ Pfd. $= 8$ Pfd. Die Lösung mittels der Proportion ist: 7 sgr. : 12 sgr. $=$ ${}^{14}/_{3}$ Pfd. : x Pfd., oder $7 : 12 = {}^{14}/_{3} : x$; folglich $x = \frac{14.\ 12}{3.\ 7}$; folgl. wenn $4\,{}^{2}/_{3}$ Pfd 7 sgr. kosten, so erhält man für 12 sgr. 8 Pfd.

b) mit improportionalen Größen: z. B. 4 Pferde reichen mit einem Futter-Vorrath 15 Wochen; wie lange werden 7 Pferde damit auskommen?

Ang.: 4 Pf. — 15 W.
Frg.: 7 „ — ? „

Anm.: Die Größen stehen im umgekehrten Verhältniß; denn es heißt: je mehr Pferde, desto weniger Wochen haben sie bei gleicher Futtermenge Vorrath.

Die Lösung nach dem Bruchsatz ergiebt: $\frac{15.\ 4}{7}$ Wochen $= 8\,{}^{4}/_{7}$ Wochen. — Die Lösung mittels der Proportion ist folgende: 7 Pf. : 4 Pf. $=$ 15 W. : x W., oder: $7 : 4 = 15 : x$; folglich $x = \frac{4.\ 15}{7}$ Wochen $= 8\,{}^{4}/_{7}$ Wochen $=$ 8 Wochen 4 Tage. (Es muß hier nämlich das eine Verhältniß umgekehrt werden, damit es dem andern gleich werde und beide so eine richtige Proportion bilden; setzen wir also das Hinterverhältniß: $15 : x$ an, so muß das Vorderverhältniß nicht heißen: $4 : 7$, wie bei den proportionalen Größen, sondern umgekehrt: $7 : 4$.)

2. Die zusammengesetzte Regeldetri.

Z. B. 40 Spinnmaschinen haben in 9 Tagen à 12 Stunden 15 Ctnr. Garn gesponnen, wie viel Tage brauchen 24 Maschinen, um bei täglich 9stündiger Arbeit 25 Ctnr Garn zu spinnen?

Angabe: 40 Masch. — 9 Tge. à 12 Std. — 15 Ctnr.
Frage: 24 „ — ? „ à 9 „ — 25 „

Lösung mittels Proportion: Wir setzen zuerst das Hinterverhältniß an: $9 : x$. Wir untersuchen, ob die einzelnen Verhältnisse gerade oder umgekehrt sind. Je mehr Maschinen, desto weniger Tage haben sie zu arbeiten. Dies ist ein umgekehrtes Verhältniß, folglich setzen wir an: $24 : 40$. Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Tage sind zur ganzen Arbeit nöthig. Dies ist ebenfalls ein umgekehrtes Verhältniß; wir setzen an: $9 : 12$. Je mehr Ctnr. Garn gesponnen werden sollen, desto mehr Tage sind erforderlich; dies ist ein gerades Verhältniß, wir setzen also an: $15 : 25$; folglich heißt die zusammengesetzte Proportion:

$$\left.\begin{array}{r} 24 : 40 \\ 9 : 12 \\ 15 : 25 \end{array}\right) = 9 : x;$$

oder wenn man die Verhältnisse sogleich mit den möglich kleinsten Zahlen ansetzt: $\left.\begin{array}{r} 3 : 5 \\ 3 : 4 \\ 3 : 5 \end{array}\right) = 9 : x$; folglich

$$x = \frac{5.\ 4.\ 5.\ 9}{3.\ 3.\ 3.} = \frac{5.\ 4.\ 5}{3} = {}^{100}/_{3} = 33\,{}^{1}/_{3}\ \text{Tage.}$$

Damit stimmt die Lösung nach dem Bruchsatz überein:

$$\frac{9.\ 40.\ 12.\ 25}{24.\ 9.\ 15} = \frac{5.\ 4.\ 25}{3.\ 5} = \frac{4.\ 25}{3} = {}^{100}/_{3} = 33\,{}^{1}/_{2}\ \text{Tage.}$$

VI. Stufe.

Zins-Rechnung.*)

Kapital ist jede Summe Geldes, welche man ausleiht oder selbst anlegt, so daß sie (einen möglichst großen) Nutzen abwirft, wie der Scheffel Korn, den man aussäet, nicht zum Verlust ausgestreut wird, sondern um davon, wo möglich, mehrere Scheffel wieder zu erhalten. Der Nutzen, den das Kapital abwirft, heißt **Zinsen** (Interessen). Wer ausleiht, ist der **Gläubiger**, (**Creditor**); wer borgt, der **Schuldner** (**Debitor**). Der Ertrag des ausgeliehenen Kapitals wird gewöhnlich nach der Zahl 100 und für die Zeit von 1 Jahre festgestellt. Erhält man z. B. für jede 100 thl., 100 fl. 2c. am Schluß des Jahres bezüglich 3 thl., 3 fl. 2c., so sagt man: das Kapital ist zu 3 Procent, (geschrieben 3 %) ausgeliehen. Hier ist also 3 die **Procentzahl**.**)

Wir werden **Kapital** mit k, **Zinsen** mit z, **Jahre** mit i und **Prozentzahl** mit p bezeichnen. Nach der Regeldetri ist jedesmal, wenn 3 Größen gegeben sind, die 4. zu berechnen möglich; folglich ist k zu berechnen, wenn z, i, p gegeben sind; z, wenn k, i, p gegeben sind 2c. Es giebt also hier nothwendig 4 verschiedene Aufgaben. Wir berechnen z. B. zuerst z in folgender Aufgabe:

750 thl. Kapital (k) sind 9 Jahre (i) hindurch zu 4 % (p) ausgeliehen gewesen, wie viel beträgt die Gesammtsumme der Zinsen (z)?

Angabe: 100 thl. Kapital — 4 thl. Zins. (p) — auf 1 Jahr,
Frage: 750 „ (k) — ? „ „ (z) — „ 9 „

Lösung: $\frac{4.\,750.\,9}{100}$ thl. Zins. $= \left(\frac{750.\,9}{25} = 30.\,9. = \right)$ 270 thlr. Zinsen.

Allgemeine Lösung: k thlr. Kapital sind i Jahre hindurch zu p % ausgeliehen, wie viel betragen die Zinsen (z)?

Angabe: 100 thl. Kap. — 1 Jahr — p thl. Zinsen,
Frage: k „ „ — i „ — ?(z) „

Lösung: $\frac{p.\,i.\,k}{100}$; folglich $\mathbf{z = \frac{kip}{100}}$ Wir bilden daraus das Gedächtnißwort Kip-hundertel und lösen darnach, ohne Ansatz, jede Aufgabe, wo k, i und p gegeben sind und z gesucht wird; z. B.: Wenn 1920 thl. Kapital $6\frac{2}{3}$ Jahre hindurch zu $4\frac{4}{5}$ % benutzt werden, wie hoch beläuft sich da der Gesammtbetrag? Antwort: $z = \frac{kip}{100} = \frac{1920.\,20.\,24}{100.\,3.\,5}$ thl. $= \left(\frac{192.\,2.\,24}{3.\,5} = \frac{192.\,2.\,8}{5} = \right)$ $614\frac{2}{5}$ thlr. —

Aus dieser Gleichung: $z = \frac{kip}{100}$ kann man durch leichte Umformung sowohl k, als auch i u. p berechnen. So ist z. B.

$$\mathbf{k = \frac{100\,z}{ip}}$$

$$\mathbf{i = \frac{100\,z}{kp}}$$

$$\mathbf{p = \frac{100\,z}{ik}}$$ ***)

Beispiele. Ich habe einmal von einem Grundstück einen Gesammtertrag von 1190 thlr. gehabt in 5 Jahr 3 Monat bei $6\frac{4}{5}$ %; wie groß war die Kauf-Summe?

Angabe: 100 thlr. Kap. — 1 J. — $\frac{34}{5}$ thl. Zinsen.
Frage: ? „ „ $\frac{21}{4}$ „ — 1190 „ „

Lösung: $\frac{100.\,5.\,1190.\,4}{34.\,21.}$, eine Summe, welche die Formel: $k = \frac{100.\,z}{ip} = \frac{100.\,1190}{\frac{21}{4}.\,\frac{34}{5}} = \frac{100.\,1190.\,4.\,5}{21.\,\,34} = \frac{2000.\,17.\,70}{3.\,7.\,17.\,2} = 3333\frac{1}{3}$ thl. sofort ergiebt. —

Oder; ein Kapital von 1500 thlr., zu $3\frac{1}{3}$ % ausgeliehen, brachte einen Gesammtnutzen von 100 thlr., wie lange war es ausgeliehen:

Angabe: 100 thl. Kap. — 1 Jahr — $\frac{10}{3}$ thl. Zinsen.
Frage: 1500 „ „ — ? „ — 100 „ „

Lösung: $\frac{1.\,100.\,3.\,100}{1500.\,10}$ Jahr. Die Lösung ergiebt sich unmittelbar nach der betreffenden Formel: $i = \frac{100.\,z}{kp} = \frac{100.\,100}{1500.\,\frac{10}{3}} = \frac{100.\,3}{15.\,10} = \frac{10}{5} = 2$ Jahr.

Oder: Ein Kapital von 2300 thlr. trug in 4 Jahren 460 thlr. Zinsen, zu wie viel Procent war es ausgeliehen?

Angabe: 2300 thl. Kap. — 4 Jahr — 460 thl. Zinsen,
Frage: 100 „ „ — 1 „ — ? „ „

Lösung: $\frac{460.\,100}{2300.\,4}$ thtr. Zinsen. Dieß Ergebniß bringt die Formel: $p = \frac{100.\,z.}{ik}$ sofort, wenn man die gegebenen Werthe einsetzt. Also $p = \frac{100.\,460}{2300.\,4} = 5$ %.

Es liegt nun in der Hand des Lehrers, die Formeln der Zinsrechnung auf die mannigfaltigste Weise anzuwenden und auszubeuten. Eine solche Anwendung ist z. B. die **Louisd'or-Rechnung.**

Wenn 100 thlr. Gold an Werth $= 113\frac{1}{3}$ thlr. Silber sind, so nennt man die $13\frac{1}{3}$ thlr. Silber, welche, zu 100 thl. Silber hinzugelegt, erst den Werth von 100 thlr. Gold ergeben, das Aufgeld (Agio). Es fragt sich nun, wie viel das Aufgeld bei den Goldmünzen von 5 thlr. Goldwerth, den sogenannten Pistolen, die unter verschiedenen Namen, als Friedrichs-, oder Louis-, oder Mard'or 2c., im Handel vorkommen, in **jedem** Falle

---

*) Anmerkung: Es folgt jetzt die Anwendung der ersten 5 Stufen, als Zins-, Diskonto-, (Rabatt-), Termin-, Gewinn- und Verlust-Rechnung.

) Anmerkung: Was **Zinsfuß ist, siehe bei der Zinseszins-Rechnung.

***) Der Schnellrechner darf für die einfache Zinsrechnung in der That sich nur die Formel $z = \frac{kip}{100}$ merken, um so fort jede der hierhergehörigen Formeln zu finden.

beträgt. Setzen wir hier in der Formel: $z = \frac{kip}{100}$, $k = 5$ thl., $i = 1$, $p = 13\frac{1}{3}$, so ist z, (d. h. hier das Agio auf die Pistole) $= \frac{5.1.40}{3.100}$ thl. $= \frac{2}{3}$ thl. $= 20$ sg.; folglich wenn $k = 5$ thl. Gold, $z = A$ (Agio) ist, so ist $A = \frac{5\,p}{100}$ thlr. $= \frac{5\,p.30}{100}$ sgr. $= \frac{3p}{2}$ sg.; d. h. man findet das Agio des Friedrichsd'ors in Silbergroschen ausgedrückt, wenn man die Procentzahl, um die das Gold höher steht, als das Silber, mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt. Steht also z. B. das Gold um 12 % höher als das Silber, d. h. bezahlt man 100 thl. Gold mit 112 thlr. Silber: so ist das Agio auf 1 Louisd'or $= \frac{3.\,12}{2}$ sgr. $= 18$ sgr. — Und umgekehrt, wird der Frd'or mit einem Aufgeld von $22\frac{1}{2}$ sg. angenommen, und will man wissen, um wie viel das Gold höher steht, als das Silber, so wendet man die Formel an: $p = \frac{100\,z}{ik}$, wo $z = A = 22\frac{1}{2}$ sg., $k = 5$ thl. $= 5.30$ sg., $i = 1$ ist; folgl. $p = \frac{100.\,45}{5.\,30.\,2} = \frac{45}{3} = 15$; folglich allgemein, A sg. = z gesetzt, $p = \frac{100\text{ A sgr.}}{5.\,30\text{ sgr.}} = \frac{2}{3}A$; d. h. man findet den Procentsatz, um welchen das Gold höher steht, als das Silber, wenn man das Agio des Louisd'ors, **in Silbergroschen ausgedrückt,** mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt; z. B. das Agio des Louisd'ors sei 15 sg., so steht das Gold um $\frac{2.\,15}{3}$ % = 10 % höher als das Silber.

VII. Stufe.

Disconto- oder Rabatt-Rechnung.

Den Übergang von der einfachen Zinsrechnung zur Disconto-Rechnung machen Aufgaben dieser Art: Wie groß ist a) das Kapital, b) bezüglich die Zinsen dieses Kapitals, das, zu 4 % ausgeliehen, nach 9 Jahren, einschließlich der gesammten Zinsen, mit 68136 thl. zurückbezahlt wird?

a) Ang.: 100 thl. Kap. geben 136 thl. Kap. u. Zins.,*)
Frg: ? — — — 68136 — — —

Lösung: $\frac{100.\,68136}{136}$ thl. Kapital $= (100.501 =)$ 50100 thl. Kap.; folglich betragen die Zinsen für sich allein 68136 thl. — 50100 thl. = 18036 thl.

b) Angabe: 136 thl. Kap. u. Zins. enthalten 36 thl. Zins.
Frage: 68136 — — — — ? —

Lösung: $\frac{36.\,68136}{136}$ thl. Zinsen $= \left(\frac{36.\,8517}{17} = 36.\,501 = 4.9.501 = 4.\,4509 = \right)$ 18036 thl. Zins.; folglich beträgt das Kapital für sich allein 68136 thlr. — 18036 thlr. = 50100 thlr.

*) Versteht sich, nach 9 Jahren zu 4 %.

Oder allgemein: Wie groß ist das Kapital, k, das, nach i Jahren zu p % mit sammt den Zinsen ($C = k + z$) zurückbezahlt, eben C thlr. beträgt?
Ang.: 100 thl. Kap. —— (100 + ip) thl. Kap. u. Zins.,
Frg.: ? (k) — C (= k + z) — —

Lösung: $\frac{100\,C}{100+ip}$ thlr. Kapital = k.

Und wie groß sind die Zinsen des Kapitals k, das, nach i Jahren zu p % sammt den Zinsen mit C thl. zurückbezahlt wird?
Ang.: (100 + ip) thl. Kap. u. Zins. —— ip thl. Zins.
Frg.: C — — — ? — —

Lösung: $\frac{ip.\,C}{(100+ip)}$ thlr. Zinsen = z.

Zur Anwendung der Formel: $k = \frac{100\,C}{100+ip}$, folgendes Beispiel. Wie groß ist das Kapital, das, zu $3\frac{3}{4}$ % 5 Jahre hindurch ausgeliehen, mit Einschluß der Zinsen 11752 thl. 8 sg. 9 pf. = $11752\frac{7}{24}$ thl. = $\frac{282055}{24}$ thl. betrug?

Lösung: $k = \frac{100.\,282055}{24.(100+5.3\frac{3}{4})}$ thl. $= \left(\frac{100.\,282055}{24.\,\frac{475}{4}} = \frac{100.\,282055}{6.\,475} = \frac{4.\,282055}{6.\,19} = \frac{2.\,282055}{3.\,19} = \frac{564110}{57} = \right)$ $9896\frac{2}{3}$ thlr.

Zur Anwendung der Formel: $z = \frac{ip\,C}{100+ip}$ folgendes Beispiel. Wie groß sind die Zinsen des Kapitals, das, zu 5 % und $3\frac{3}{4}$ Jahre hindurch ausgeliehen, sammt den Zinsen mit 11752 thl. 8 sg. 9 pf. zurückbezahlt wurde?

Lösung: $z = \frac{15.\,5.\,282055}{4.24.\left(100+\frac{15.5}{4}\right)}$ thl. $= \left(\frac{15.5.282055}{4.\,24.\,\frac{475}{4}} = \frac{15.\,5.\,282055}{24.\,475} = \frac{3.\,25.\,282055}{24.\,475} = \frac{282055}{8.\,19} = \frac{14845}{8} = \right)$ $1855\frac{5}{8}$ thlr.

Daß hier auch, wenn k, i, p gegeben sind, nach C, und, wenn C, k, i gegeben sind, nach p, und wenn C, k, p gegeben sind, nach i gefragt und demgemäß Aufgaben gestellt werden können, versteht sich von selbst; ebenso daß man die Zeit auch nach dem Datum giebt oder daraus erst finden läßt, wobei zu merken ist, daß jeder Monat zu 30 Tagen gerechnet wird. Z. B. Wie groß ist das Capital, welches, vom 8. März 1850 bis zum 28. November 1859 zu $5\frac{1}{7}$ % ausgeliehen, an Zinsen und Capital zusammen 8575 thl. betrug? — Hier sind vom 8. März 1850 bis zum 8. März 1859 verflossen 9 Jahr; und vom 8. März 1859 bis zum 8. November 1859 weitere 8 Monate, und vom 8. Novmbr. bis zum 28. Novmbr. noch 20 Tage; folglich ist $i =$ 9 Jahr $8\frac{2}{3}$ Monat $= 116\frac{2}{3}$ Monat $= \frac{350}{3}$ Monat $= \frac{350}{3.\,12}$ Jahr; folgl. $k = \frac{100\,C}{100+ip} = \frac{100.\,8575}{100+\frac{350.36}{3.12.7}}$ thl.

$=\left(\frac{100.\ 8575}{150}=\frac{2.\ 8575}{3}={}^{17150}/_{3}=\right)5716\,{}^{2}/_{3}$ thlr.

Wir gehen zur eigentlichen Disconto-Rechnung über. Der Krämer, der seine Waaren von dem Großhändler nimmt, stellt sehr oft die Bedingung, daß er sie erst bezahlen dürfe, nachdem er sie im Kleinhandel verkauft und so das Geld dafür erst selber gewonnen habe. Der Großhändler rechnet die Zinsen für die gestellte Zahlungsfrist zu dem Preise der Waaren hinzu; z. B. verkauft er dem Krämer für 500 thlr. Waare, wofür der Kaufpreis erst nach 6 Monaten gezahlt wird, so schlägt der Verkäufer dem Preise der Waare die 6monatl. Zinsen hinzu; er wird also bei 5% die Waare nicht zu 500 thl., sondern zu 512½ thl. geben. Natürlich beansprucht der Großhändler, wenn die Waare sofort bezahlt wird, auch die Zinsen nicht, er wird also von dem obengestellten Kaufpreis 12½ thlr. fallen lassen oder rabattiren; daher Rabatt (Disconto). — Oder es kauft Jemand ein Grundstück für 2600 thlr. unter der Bedingung, daß er diese 2600 thlr. erst nach 1 Jahre zahle, ohne sie bis dahin zu verzinsen, und er kommt in die Lage, die Schuld sogleich tilgen zu können, und zwar nach Vereinbarung mit dem Verkäufer in 4 procentigen Staatspapieren, d. h. mit 4% Disconto, so zahlt er nur eine solche Summe baar, die nach Zuschlag der Zinsen auf 1 Jahr und zu 4% volle 2600 thlr. ergiebt, d. h. nur 2500 thlr.; denn werden diese 2500 thlr. auf 1 Jahr zu 4% ausgeliehen, so tragen sie 100 thlr. Zinsen. Bezeichnet man diese 2600 thlr. als den zukünftigen Werth mit C, die 2500 thlr. als den baaren Werth mit k, und die Differenz der 2600 thl. und 2500 thlr. oder obige 100 thlr. als das Disconto mit D, so ist $C=k+\frac{kip}{100}$, d. h. der zukünftige Werth ist = dem baaren Werth, vermehrt um die Zinsen des baaren Werthes. Durch eine einfache Rechnung wird die der Disconto-Rechnung zum Grunde liegende Formel umgewandelt in folgende:

1) $C=\frac{(100+ip)\,k}{100}$;

folglich, wenn der baare Werth der Schuld, die Zeit und die Procente bekannt sind, so kann man daraus auch den zukünftigen Werth finden. — Aus dieser Grundformel entwickeln sich durch eine leichte Rechnung die Formeln für k, i, p und zwar ist:

2) $k=\frac{100\,C}{100+ip}$, zu welcher Formel man von der einfachen Zinsrechnung aus kommt, siehe oben.

3) $i=\frac{100\,(C-k)}{kp}=\frac{100\,D}{kp}$;

4) $p=\frac{100\,D.}{ki}$

Nach diesen Formeln sind nun alle hierher gehörigen Aufgaben zu rechnen. Z. B. I. Welches Kapital, jetzt baar bezahlt, vertritt ein Kapital von 4060 thlr., das erst nach 5 Jahren, bis dahin aber unverzinst, fällig ist, wenn zu 3⅕ % discontirt wird? — Antwort: $k=\frac{100.\ 4060}{100+\frac{5.\ 16}{5}}$ thl. $=\left(\frac{100.\ 4060}{116}=\frac{100.\ 1015}{29}=100.35\right.$

$=\left.\right)3500$ thlr.

Oder: zu wie viel Procent wird ein Kapital von 2480 thlr., das nach 4 Jahren, ohne Zinsen zu tragen, zahlbar ist, discontirt, wofür jetzt baar 2000 thlr. zu zahlen sind? $p=\frac{100\ (2480-2000)}{2000.\ 4}\,\%=\left(\frac{100.\ 480}{2000.\ 4}\right.$ $=\left.\frac{48}{2.4}=\right)6\,\%$.

Oder: Nach wie vielen Jahren sind 3675 thl. zu bezahlen, deren baarer Werth jetzt 2450 thlr. ausmacht, wenn zu 3½ % discontirt wird? — $i=\frac{100.\ 1225}{2450.\ {}^{10}/_{3}}$ Jahr $=\left(\frac{1225.\ 3}{245}=\frac{245.\ 3}{49}=\frac{35.\ 3}{7}=5.\ 3=\right)15$ Jahren.*)

---

*) Es versteht sich von selbst, daß die Formeln für k, i u. p auch, ohne daß man sie aus der Grundformel ableitet, selbstständig durch Rechnung gesucht werden. Z. B. Obige Aufgaben lösen sich nach dem Bruchsatze, wie folgt: (Siehe oben Aufg. I.)

Angabe: 100 thlr. baarer Werth — (100 + 5. 3⅕) thlr. zukünft. Werth,
Frage: ? — — — — 4060 thlr. — —

Lösung: $\frac{100.\ 4060}{100+\frac{5.\ 16}{5}}$ thlr. baarer Werth $=\left(\frac{100.\ 4060}{116}=\right)$ 3500 thlr.

2. Wenn 4060 thl. zukünft. Werth eine baare Zahlung von 3500 thl. voraussetzen, sobald zu 3⅕ % diskontirt wird, nach wie vielen Jahren ist jenes Kapital fällig?

Angabe: 100 thlr. Kap. — 1 Jahr — ${}^{16}/_{5}$ thlr. Zinsen.
Frage: 3500 — — — ? — — 560 — —

Auflösung: $\frac{1.\ 100.\ 5.\ 560}{3500.\ 16}$ Jahr; denn wenn 100 thlr. Kap. 1 Jahr stehen müssen, um die angegebenen Zinsen zu bringen, so müßte 1 thlr. Kap. 100mal 1 Jahr stehen, um dieselben Zinsen zu bringen, und 3500 thlr. Kap. 3500mal weniger als 100 × 1 Jahr und zwar, wenn sie ${}^{16}/_{5}$ thlr. Zinsen bringen sollen; wenn aber 3500 thlr. Kapital nur ⅕ thlr. Zinsen bringen sollen, so brauchen sie auch nur den 16. Theil der Jahre zu

Anmerkung 1. Zur Disconto-Rechnung konnte auch fortgeschritten werden von der im Anfang dieser Stufe besprochenen Aufgabe, in welcher, wenn Kap. u. Zinsen zusammen zurückgezahlt werden, entweder nach dem Kapital oder nach den Zinsen allein gefragt wird, und zwar durch folgende Betrachtung. Der zukünftige Werth eines Kapitals oder einer Schuldsumme ist nichts anderes, als eine Zurückzahlung des Kapitals sammt den Zinsen, das eine Reihe von Jahren zu einem bestimmten Procentsatz ausgeliehen war, ohne daß die Zinsen gezahlt wurden. Die Frage: wie groß ist dabei das ausgeliehene Kapital? wurde mit der Formel beantwortet: $k = \frac{100\ C}{100 + ip}$, wo $C = k + z$ war; z aber ist das Disconto, wie sich auch aus voranstehenden Formeln 3) und 4) ergiebt, wonach $D = \frac{kip}{100}$ ist. — Von dieser Formel: $k = \frac{100\ C}{100 + ip}$ aus kann nun zu den obigen Formeln leicht fortgeschritten werden.

Anmerkung 2. Man unterscheidet Rabatt in oder von 100 und Rabatt auf 100. In Deutschland rechnet man in der Regel mit Rabatt in 100. Z. B. ein Buchhändler bewilligt einem Kunden 10 % Rabatt in 100 auf eine Rechnung von 86 thl. 20 sgr., wie viel beträgt die Baarzahlung?

Angabe: 100 thl. Waare werden bezahlt mit 90 thl.,
Frage: $86\frac{2}{3} = {}^{260}/_{3}$ thlr. — — ? —

Auflösung: $\frac{90.\ 260}{100.\ 3}$ thlr. baare Zahlung = (3. 26 =) 78 thlr.

Wie viel würde die Baarzahlung betragen, wenn 10 % Rabatt auf 100 bewilligt worden wären?

Angabe: 110 thlr. Waare — 100 thlr. baar,
Frage: ${}^{260}/_{3}$ — — — ? — —

Auflösung: $\frac{100.\ 260}{110.\ 3}$ Thaler baare Zahluug = $78\,{}^{26}/_{33}$ thlr. Bei dem Rabatt auf 100 kann natürlich auch die Formel $k = \frac{100\ C}{100 + ip}$, angewandt werden; also $k = \frac{100.\ 260}{3\,(100 + 1.\ 10)}$ thlr. $= \left(\frac{100.\ 260}{3.\ 110} = {}^{2600}/_{33} =\right)$ $78\,{}^{26}/_{33}$ thlr. baar; bei dem Rabatt in 100 ist die Formel zu finden aus folgendem Ansatz:

Ang. 100 thl. Waare fordern eine Baarzahl. v. (100-ip) thl.
Frg. C — — — — — ?

Auflösuug: $k = \frac{(100 - ip)\ C}{100}$ thl. baare Zahlung; in beiden Formeln ist i natürlich = 1.

Wie gehen jetzt zu der zusammengesetzten Disconto-Rechnung über, die nichts anderes als eine wiederholte Anwendung der Formeln der einfachen erfordert; z. B. Jemand kauft ein Grundstück unter folgenden Bedingungen: Er zahlt nach 2 Jahren 500 thl., nach 5 Jahren von jetzt ab gerechnet 700 thl., ebenso 8 Jahre später als jetzt 800 thlr., ohne Zinsen. Wie viel beträgt die baare Zahlung, wenn man zu 5 % discontirt?

Auflösung: $k = \frac{100.\ 500}{100 + 2.\ 5} + \frac{100.\ 700}{100 + 5.\ 5} + \frac{100.\ 800}{100. + 8.\ 5} = 100\ ({}^{500}/_{110} + {}^{700}/_{125} + {}^{800}/_{140}) = 100\ ({}^{50}/_{11} + {}^{28}/_{5} + {}^{40}/_{7}) = 100\,\frac{(50.\ 5.\ 7 + 28.\ 7.\ 11 + 40.\ 5.\ 11)}{5.\ 7.\ 11}$ $= 100\,\frac{(1750 + 2156 + 2200)}{385} = \frac{100.\ 6106}{385} = 1585\,{}^{75}/_{77}$ thlr. (anstatt der 2000 thlr.) — Zur vollständigen Einübung dieser Stufe bietet jedes gute Rechenbuch zweckmäßige Beispiele.

VIII. Stufe.

Termin-Rechnung.

Es giebt noch einen andern Weg, wie Gläubiger und Schuldner (siehe vorige Aufgabe) sich einigen können, ohne daß dem Einen oder dem Andern dabei Unrecht geschieht. Wenn Letzterer ohne Zinsen nach 2 Jahren 500 thlr., nach 5 Jahren 700 thlr. und nach 8 Jahren 800 thlr., also im Ganzen 2000 thlr. zu zahlen hat, so kann er offenbar die ersten 500 thl. noch 2 Jahre nutzen, die 700 thlr. noch 5 Jahre und die 800 thlr. noch 8

---

stehen, also nur $\frac{1.\ 100}{3500.\ 16}$ Jahre; wenn sie aber 1 thlr. Zinsen bringen sollen, müssen sie 5mal mehr Jahre stehen, also: $\frac{1.\ 100.\ 5}{3500.\ 16}$ Jahr; wenn aber 3500 thlr. Kap. 560 thlr. Zinsen bringen sollen, so müssen sie 560mal mehr Jahre ausgeliehen sein, also 3550 thlr. müssen, um 560 thlr. Zinsen zu bringen, $\frac{1.\ 100.\ 5.\ 560.}{3500.\ 16}$ Jahre = 5 Jahr stehen.

Oder: bei 3500 thlr. baarer Zahlung müßten nach 5 Jahren 4060 thlr. gezahlt werden, zu wie viel Procent wurde diese Schuldsumme discontirt?

Angabe: 3500 thlr. Kap. bringen in 5 Jahren 560 thlr. Zinsen,
Frage: 100 — — — 1 — ? — —

Aufl.: $\frac{560.\ 100}{3500.\ 5}$ thlr. Zinsen. Denn, wenn 3500 thlr. Kap. 560 thlr. Zinsen bringen, so bringt 1 thlr. Kapital den 3500sten Theil der Zinsen, und 100 thlr. Kapital 100mal so viel, also 100 thlr. Kapital bringen $\frac{560.\ 100}{3500}$ thlr. Zinsen, und zwar in 5 Jahren; folglich in 1 Jahr den 5. Theil der Zinsen, oder $\frac{560.\ 100}{3500.\ 5}$ thlr. Zinsen $(= {}^{16}/_{5}) = 3\,{}^{1}/_{5}$ thl. Zinsen auf 100 thl. und 1 Jahr, also wurde zu $3\,{}^{1}/_{5}$ % discontirt.

Jahre. Kommen Gläubiger und Schuldner darin überein, daß sie die Rückzahlung zu 5 % berechnen wollen, so bringen jene 500 thlr. dem Schuldner noch 50 thlr., jene 700 thlr. nach 5 Jahren noch 175 thlr. und jene 800 thlr. nach 8 Jahren noch 320 thlr. Zinsen, im Ganzen also noch 545 thlr. Zinsen, ehe er sie zahlt. Es wird nun die Frage sein: nach wie viel Jahren, von jetzt ab gerechnet, wird der Schuldner die 2000 thl. auf einmal zu bezahlen haben? — Offenbar, sobald er von diesen 2000 thl. an Zinsen 545 thl. sich berechnen kann. Die Formel: $i = \frac{100\,z}{kp}$ giebt die Zeit, in der dies geschieht, $= \frac{100.545}{2000.5} = {}^{109}/_{20} = 5\,{}^{9}/_{20}$ Jahr. Der Gläubiger bekommt also die Gesammtsumme um $2\,{}^{11}/_{20}$ Jahre früher, als es sonst der Fall sein würde. Letzteres wird als richtig auch durch folgende Betrachtung nachgewiesen: Die ersten 500 thlr. soll der Gläubiger nach 2 Jahren, also 6 Jahre früher, als die letzte Summe, 800 thl., bezahlt werden, erhalten; er kann die Zinsen dieser 500 thlr. also sich zu Gute rechnen mit 150 thl.; die 700 thlr., noch 3 Jahre verzinst, bringen 105 thlr.; die letzten 800 thlr. kommen hier natürlich nicht in Betracht; der Gläubiger darf also rechtlich 255 thlr. Zinsen zu ziehen beanspruchen. 2000 thlr. bringen aber in den $2\,{}^{11}/_{20}$ Jahren, die sie früher gezahlt werden, zu 5% $\frac{2000.\ 51.\ 5}{20.\ 100}$ thlr. $= (51.5. =)$ 255 thlr. Zinsen. Demnach ist auch dem Gläubiger sein volles Recht geschehen, wenn er die Gesammtsumme zu dem früheren Termin erhält. Diesen früheren Termin lehrt die **Terminrechnung** finden. Obige Aufgabe kann nun einfach mit folgender Gleichung gelöst werden, die sich auf die vorangehende Betrachtung stützt: Die Summe der Zinsen, die dem Schuldner von den einzelnen Kapitalien zu den festgesetzten Procenten zufallen, müssen gleich sein den Zinsen des Gesammt-Kapitals zu demselben Procentsatz und dem entsprechenden mittleren Zahlungstermin, den wir einstweilen mit x in Rechnung stellen. Nach der Formel: $z = \frac{kip}{100}$, ist also: $\frac{500.\ 2.5}{100} + \frac{700.\ 5.5.}{100} + \frac{800.\ 8.5}{100} = \left(\frac{800 + 700 + 800}{100}\right) x.\ 5$; oder $500.\ 2 + 700.\ 5 + 800.8 = 2000\,x$; oder: $5.\ 2 + 7.5 + 8.\ 8 = 20\,x$; oder: $10 + 35 + 64 = 109 = 20\,x$; folgl. $x = {}^{109}/_{20} = 5\,{}^{9}/_{20}$ J.

Wenn also k' thlr. nach i' Jahren,
ferner k'' thlr. nach i'' Jahren,
endlich k''' thlr. nach i''' Jahren,

und zwar bis dahin unverzinst, gezahlt werden sollen und Gläubiger und Schuldner vereinigen sich bei der Vollzahlung an einem mittlern Zahlungstermin zu p %, so ist: $\frac{k'\,i'\,p}{100} + \frac{k''\,i''\,p}{100} + \frac{k'''\,i'''\,p}{100} = \frac{(k' + k'' + k''')\,px}{100}$; oder: $k'\,i' + k''\,i'' + k'''\,i''' = (k' + k'' + k''')\,x$; folgl. $x = \frac{k'\,i' + k''\,i'' + k'''\,i'''}{k' + k'' + k'''}$; oder setzt man ein für alle Mal die Vollzahlung, also hier $k' + k'' + k''' = k$, so ist **die Formel für die Terminzahlung für den Fall, daß die Kapitalien (Abschlagszahlungen) verschieden, der Zinsfuß für alle aber gleich ist:**

$$T = \frac{k'\,i' + k''\,i'' + k'''\,i'''}{k}.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich für den Fall, daß nicht bloß der Zinsfuß, sondern auch die Kapitalien (Abschlags- oder Terminal-Zahlungen) dieselben sind, die einfachere Formel:

$$T = \frac{k'i' + k'i'' + k'i'''}{k' + k' + k'} = \frac{k'(i' + i'' + i''')}{3\,k'} = \frac{i' + i'' + i'''}{3}$$

d. h. in diesem Falle addirt man die Jahre, bezüglich Monate oder Tage, und theilt diese Summe durch die Anzahl der Termine; z. B. Jemand hat für ein Grundstück bezüglich noch 2, 3, 5, 6 Jahren, jedesmal 1000 thl. zu bezahlen, so würde er die Vollzahlung von 4000 thl. nach $\left(\frac{2 + 3 + 5 + 6}{4} = {}^{16}/_{4} =\right) 4$ Jahren machen. **Probe:** 4000 thlr. bringen in 4 Jahren z. B. zu 5 % dem Schuldner 800 thlr. Zinsen; diese Zinsensumme hätte er aber auch erhalten, wenn er 1000 thlr. auf 2, andere 1000 thlr. auf 3, noch andere tausend thlr. auf 5 und endlich 1000 thlr. auf 6 Jahre zu 5 % benutzt hätte; denn $\frac{1000.\ 2.\ 5}{100} + \frac{1000.\ 3.\ 5}{100} + \frac{1000.\ 5\ \ 5}{100} + \frac{1000.\ 6.\ 5}{100}$ thlr. $= (10.\ 2.5 + 10.\ 3.5 + 10.5.5 + 10.6.5 = 100 + 150 + 250 + 300 =)$ 800 thlr. — Die Anwendung der Formel bleibt, wie angedeutet, auch dieselbe, wenn die Zahlungstermine nach Monaten oder Tagen bestimmt sind; z. B. am 10. März wird der Verkauf eines Grundstücks so abgeschlossen, daß der Käufer, von diesem Tage an gerechnet, je 250 thlr. zu $3\,{}^{4}/_{5}$ % in 5 folgenden Terminen bezahlen will, ohne daß er die ganze Schuld von 1250 thlr. zu verzinsen braucht, und zwar den 1. April, den 16. Mai, den 27. Juni, den 8. Aug. und 15. Septbr.

Vom 10. März bis zum 1. April sind 20 Tage verflossen,
— — — — 16. Mai — 65 — —
— — — — 27. Juni —106 — —
— — — — 8. Aug. —147 — —
— — — — 15. Sptr. —184 — --

zusammen 522 Tage; folglich ist $T = \left(\frac{522}{5} =\right) 104\,{}^{1}/_{5}$ Tag; folglich ist der mittlere Zahlungstermin am 105. Tage nach dem 10. März, d. h. am 25. Juni.

Zur Anwendung der Formel: $T = \frac{k'i' + k''i'' + k'''i'''}{k\,(= k' + k'' + k''')}$ noch folgende Aufgabe: Es sind 500 thlr. nach 3 Monaten, 600 thl. nach $4\,{}^{1}/_{3}$ Monaten und 900 thlr. nach 6 Monaten, zu $5\,{}^{2}/_{3}$ %, zu zahlen, wann ist der mittlere Verfallstag der ganzen Schuldsumme?

Antwort: $T = \left(\frac{500.\ 3 + \frac{600.\ 13}{3} + 900.\ 6}{2000} = \frac{1500 + 2600 + 5400}{2000} = {}^{95}/_{20} = {}^{19}/_{4} =\right) 4\,{}^{3}/_{4}$ Monat.

Es kann nun auch der Fall eintreten, daß Kapitalien und Procente verschieden sind; z. B. k' thlr. Kapital sind nach i' Jahren zu p' %, k'' thl. nach i'' Jahren zu p'' %, ferner k''' thlr. nach i''' Jahren zu

p''' % zu zahlen: wann ist der mtttlere Zahlungstermin? — In diesem Falle ist: $\frac{k'i'p' + k''i''p'' + k'''i'''p'''}{100} = \frac{(k' + k'' + k''')\,P\,x}{100}$, wo P das mittlere Procent und x die gesuchte Zeit bedeutet. — Wir wollen erst P bestimmen, und zwar zuerst an einer Aufgabe mit bestimmten Zahlen. Sie lautet: Wenn 500 thl. zu 3%, 600 thlr. zn $4\frac{1}{2}$ % und 900 thlr. zu 5 % für eine und dieselbe Zeit ausgeliehen sind, zu welchem mittleren Procent würde die Gesammtsumme von 2000 thlr. ebenso lange auszuleihen sein, um gleich viel Zinsen zu geben?

Auflösung: 500 thlr. zu 3 % bringen ebenso viel Zinsen als . . . 500 × 3 thl. = 1500 thl. zu 1%,
ferner: 600 thl. zu $4\frac{1}{2}$ % = 600. $\frac{9}{2}$ thl. = 2700 „ „ 1%,
endlich: 900 thl. zu 5 % = 900. 5 thl. = 4500 „ „ 1%,
folglich bringen 2000 thl. zu x % so viel Zinsen als 8700 thlr. zu 1 %.

Angabe: 8700 thlr — 1 %,
Frage: 2000 „ — ? „

Lösung: $\frac{1.\,8700}{2000}$ % = $\frac{87}{20}$ % = $4\frac{7}{20}$ % mittleres Procent.

Demnach ergiebt sich auf dieselbe Weise, daß
k' thl. zu p' % ebenso viel Zins. bringen als $k'p'$ thl. zu 1%,
k'' „ „ p'' % „ „ „ „ „ $k''p''$ „ „ 1%,
k''' „ „ p''' % „ „ „ „ „ $k'''p'''$ „ „ 1%,
folgl. sind $(k' + k'' + k''')$ thlr. zu x % = $k'p' + k''p'' + k'''p'''$ zu 1 %.

Angabe: $k'p' + k''p'' + k'''p'''$ — 1 %,
Frage: $k' + k'' + k'''$ — ?

Lösung: $P = \frac{1.\,k'p' + k''p'' + k'''p'''}{k' + k'' + k'''}$, d. h. man findet den mittleren Procentsatz, wenn man die Summe der Producte der einzelnen Terminalzahlungen und der zugehörigen Procente theilt durch die Gesammtsumme der Kapitalien. Setzt man nun diesen Werth für P in obiger Gleichung ein, so ist: $k'i'p' + k''i''p'' + k'''i'''p''' = (k' + k'' + k''')\frac{(k'p' + k''p'' + k'''p''')}{k' + k'' + k'''}x = (k'p' + k''p'' + k'''p''')x$; folgl. x od. $T = \frac{k'i'p' + k''i''p'' + k'''i'''p'''}{k'p' + k''p'' + k'''p'''}$, d. h. (wörtlich.) Z. B. Jemand hat 1500 thl. den 16. März zu 4 %; 1800 thl. den 12. Mai zu $3\frac{2}{3}$ %; 2000 thl. den 8. Aug. zu $4\frac{1}{2}$ % und endlich 1700 thl. den 25. Octbr. zu 5% zu leisten: was ist a. das mittlere Procent? b. der mittlere Verfalltag? c. die Zinsen?

Auflös.: Vom 1. Jan. bis zum 16. März sind 75 Tage
— — — 12. Mai — 131 —
— — — 8. Aug. — 217 —
— — — 25. Octbr. — 294 — verflossen.

Wir finden a) $P = \frac{1500.4 + \frac{1800.11}{3} + \frac{2000.9}{2} + 1700.5}{1500 + 1800 + 2000 + 1700} = \frac{6000 + 6600 + 9000 + 8500}{7000} = \frac{60 + 66 + 90 + 85}{70} = \frac{301}{70} = 4\frac{3}{10}$ %.

b)
$$T = \frac{1500.75.4 + \frac{1800.131.11}{3} + \frac{2000.217.9}{2} + 1700.294.5}{6000 + 6600 + 9000 + 8500}$$
$$+ \frac{1500.75.4 + 600.131.11 + 1000.217.9 + 1700.294.5}{30100}$$
$$= \frac{15.\,75.\,4 + 6.\,131.\,11 + 10.\,217.\,9 + 17.\,294.\,5}{301} = \frac{4500 + 8646 + 19530 + 24990}{301} = \frac{57666}{301} = 191\frac{175}{301}$$
Tage = 6 Monat $11\frac{175}{301}$ Tag; folgl. am **12. Juli.**

c) $z = \frac{kip}{100} = \frac{7000.\,57666\,43}{100.301.10.360} = \frac{9611}{60} = \mathbf{160\frac{11}{60}}$ **thlr.** Zinsen.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, daß aus der Haupt-Formel der Termin-Rechnung: $T = \frac{k'i'p' + k''i''p''\ \text{rc.}}{k'p' + k''p''\ \text{rc.}}$ die vorhergehenden Formeln abgeleitet werden können, je nachdem man $p' = p'' = p'''$ rc. oder $k' = k'' = k'''$ rc. setzt. Im erstern Fall ist $T = \frac{(k'i' + k''i'' + k'''i''')\,p}{(k' + k'' + k''')\,p} = \frac{k'i' + k''i'' + k'''i'''}{k' + k'' + k'''}$; im zweiten Fall ist $T = \frac{(i' + i'' + i''')\,k}{3\,k} = \frac{i' + i'' + i'''}{3}$.

IX. Stufe.

Gewinn- und Verlust-Rechnung.
(Ketten-Rechnung.)

Hier kommt in Betracht: Der Einkaufspreis, der Verkaufspreis und die Differenz beider als Gewinn- od. Verlust. Eine Waare, die mit 100 thlr. eingekauft und für 110 thl., bezüglich 90 thlr. verkauft wird, hat einen Gewinn, bezüglich Verlust, von 10 % gebracht. Hier muß ganz besonders der Kettensatz geübt werden und es sind demnach auch alle die Aufgaben herbeizuziehen, wodurch zwei verschiedene Werthe ausgeglichen werden sollen, z. B. wie viel holländische Dukaten sind 1000 Preußische Thaler, Silberrubel, Pfund Sterling, Franks, Friedrichs'dor rc.? wieviel engl. Yards beträgt der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser $9\frac{3}{4}$ prß. Zoll ist? — Hier sind bei den betreffenden Aufgaben kurze Worterklärungen zu geben für folgende Ausdrücke: Brutto (Gewicht der Waare und des Gefäßes oder der Emballage, worin sie verpackt ist, zusammen); Netto (Gew. der Waare allein); Tara (Gew. des Stoffes, worin die Waare verpackt ist, allein); Provision (Entschädigung für den, der das Geschäft des Ein- oder Verkaufs besorgt hat); Courtage (Mäklergebühr für den Nachweis, wo Waaren rc. gekauft werden können); Spesen (Kosten oder Auslagen bei der Besorgung einer Waare rc.); Delcredere (Del credere, die Vergütung, die der Commissionär dafür erhält, daß er die Gewähr der Zahlung der Verkaufssumme übernimmt); Assecuranzprämie (die Gebühren, welche man für die Versicherung einer zu versendenden Waare an die Versicherungsanstalt oder an den Assecuradeur zahlt); Gutgewicht (der Abzug, den der Großhändler dem Krämer bewilligt bei solchen Waaren, wo Letzterer beim Verkauf im Einzelnen unvermeidlich Verluste hat)

Fusti (der Abzug, den der Großhändler dem Krämer bewilligt für unreine Theile, als Sand, Holzspänchen oder Steinchen, die in der Waare sein können, oder für die durch den Transport schadhaft gewordene oder verdorbene Waare, z. B. beim Kaffee, Südfrüchten ꝛc.); Decort, Decortireu (Abzug, Abziehen; decortirter Betrag, d. h. Betrag nach gemachtem Abzug) ꝛc. — Wir lassen einige Aufgaben folgen, jedes gute Rechenbuch gewährt dergleichen hinreichend. Z. B. Ein Leinwandshändler verkaufte 5 Schock Leinwand für $108^2/_3$ thlr., und verlor dabei an jedem Schock $4^1/_3$ thlr. Wie theuer hat er die ganze Waare eingekauft und wie viel Procent daran verloren?

Auflösung. Bei der Verkaufssumme von $108^2/_3$ thl. wurden $5 . 4^1/_3 = 21^2/_3$ thl. verloren, folgl. betrug der Einkaufspreis ($108^2/_3 + 21^2/_3 =$) $130^1/_3$ thlr. $= {}^{391}/_3$ thlr.; demnach ist die

Frage: Wie viel thl. Einkauf entsprechen 100 thl. Verkauf?
Ang.: wenn ${}^{326}/_3$ = Verkauf — ${}^{391}/_3$ = Einkauf.

Lösung:	? thl. Einkauf	100 thlr. Verkauf,
	326 = Verkauf	391 = Einkauf;

folgl. $x = \frac{100 . 391}{326} = 119^{153}/_{163}$ thl.; folgl. $19^{153}/_{163}$ %.

Oder: Jemand kauft das Pfund einer Waare zu 8 sgr. ein und verkauft sie mit 25 % Gewinn; 1) Was gewinnt er an 1 Pfd.? 2) wie theuer verkauft er 1 Pfd.?

Lös.:	? sg. Verk.	8 sg. Eink.	Od. nach d.	? sg. / 2 sg Eink.
	100 = Eink.	125 = Verk.	Hebung 1 sg. E.	5 sg Verk.

Antwort: Er verkauft das Pfund zu 10 sgr., hat folglich an jedem Pfunde 2 sg. Gewinn.

Oder: Eine Elle kostet im Einkauf 5 fl., im Verkauf 5 fl. 36 Xr.; wie viel Procent beträgt der Gewinn?
Frage: Wie viel Guld. Gewinn kommen auf 100 fl. Eink.?
Angabe: wenn auf 5 fl. kommen 36 Xr. Gewinn.

Lös. ? fl. Gew.	100. fl. Eink.	Od. nach ? fl. Gew.	2 fl. Eink.
5 fl. Eink.	36 Xr. Gew.	der Heb. 1 fl. Eink.	6 Xr. Gw.
60 Xr. Gew.	1 fl. Gew.	1 Xr.	1 fl. Gew.

folglich kommen auf 100 fl. Einkauf 12 fl. Gewinn, d. h. **12** % Gewinn.

Oder: Man gewinnt an einer Waare 20 %, wenn man sie zu 18 thlr. verkauft; wie theuer muß man die Waare verkaufen, wenn man 25 % gewinnen will?
Antwort: $18^3/_4$ thlr.

Lösung 1.

? thl. Eink.	18 thl Verk.
120 = Verk.	100 thl Enk.

folgl. $x = \frac{18 . 100}{120} = 15$ thl. Eink.

? thl. Verk.	15 thl Enk.
100 thl. Eink.	125 thl Wrk.

folglich $x = \frac{15 . 125}{100} = {}^{75}/_4 =$ **$18^3/_4$** thlr.

Lösung 2.

? thlr. Verk. zu d. 2ten Preise	18 thl. Verk. zu d. 1sten Preise
120 thl. Verk. zu d. 1sten Preise	125 thl. Verk. zu d. 2ten Preise

$x = \frac{18 . 125}{120}$ thlr. $= \frac{18 . 25}{24} = \frac{3 . 25}{4} =$ **$18^3/_4$** thl.

Oder: Elberfeld kauft in Amsterdam 6 Ctnr. 84 Pfd. 15 Loth Kaffee, die Unkosten betrugen 10 % Steuern u. 2 % Fracht, beide berechnet vom Einkaufspreise. Wie theuer wurde 1 Pfd. preußisch in Cöln verkauft, wenn 20 % bei diesem Geschäft verdient werden sollten und 1 Pfd. holländisch in Amsterdam mit 35 Cens eingekauft wurde, wenn 106 Pfd. preuß. = 100 Pfd. holl., 1 rheinischer Gulden = 1 holl. fl. = 100 Cens ist, endlich $3^1/_2$ fl. rhein. = 2 thlr. preuß. sind?

Lösung:

? sgr. im Verkauf	1 Pfd. preußisch
106 Pfd. preuß.	100 Pfd. holl.
1 Pfd. holländ.	35 Cens
100 Cens	1 fl. holl. (oder rhein.)
100 fl. holl. im Einkauf	110 fl. rh. mit Steuerzuschlg.
100 fl. rh., mit Steuerzuschlag	102 fl. rh. m. Zuschl. d. Fracht
7 fl. rheinisch	4 thlr. preuß.
100 thlr. preuß. im Einkauf	120 thlr. im Verkauf.
1 thlr. im Verkauf.	30 sgr. im Verkauf.

$$x = \frac{100 . 35 . 110 . 102 . 4 . 120 . 30 \text{ sgr.}}{106 . 100 . 100 . 100 . 7 . 100} = \left(\frac{102 . 11 . 3 . 3}{53 . 25} = {}^{10098}/_{1325} = \right) 7 \text{ sgr. } 7^{601}/_{1325} \text{ pf.} = 7 \text{ sg. } 7^1/_2 \text{ pf.}$$

ohngefähr.

X. Stufe.

Repartitions- (Vertheilungs-) oder Gesellschafts-Rechnung.

A. Einfache Gesellschafts-Rechnung.

Ein Vater bringt seinen drei Kindern ein Schock Nüsse mit, die sie sich nach Verhältniß ihres Alters theilen sollen; A ist 5 Jahr alt, B 4 Jahr und C 3 Jahr. A nimmt also zuerst 5, B nimmt 4 und C nimmt 3 Nüsse; dadurch ist der ganze Haufe Nüsse um 12 Stück verringert worden; es kann jeder noch 4mal, bezüglich 5 u. 4 u. 3 Nüsse fortnehmen, im Ganzen also 5mal; folglich bekommt A 5mal 5 Nüsse, B 4 . 5 Nüsse, C 3 . 5 Nüsse; nennen wir nun die Zahlen der Jahre, wonach die Vertheilung vorgenommen wurde, die Verhältnißzahlen, so ergiebt sich leicht, daß, wenn man die Verhältnißzahlen summirt und durch die Summe der Verhältnißzahlen die Gesammtsumme oder die zu vertheilende Größe dividirt, der Quotient diejenige Zahl ist, mit der man jede Verhältnißzahl multiplicirt, um die Antheile der Einzelnen zu erhalten, also: wenn a, b, c die Verhältnißzahlen und S die Gesammtsumme oder die zu vertheilende Größe ist, so bekommt

A den Antheil $\frac{S a}{a + b + c}$

B — — $\frac{S b}{a + b + c}$

und

C — — $\frac{S c}{a + b + c}$

wonach leicht jede Aufgabe, wo die Verhältnißzahlen ganze Zahlen sind, sich lösen läßt. — Sind die Verhältnißzahlen Brüche, so macht man diese gleichnamig und läßt dann die Nenner weg, da, z. B. sich verhält: ${}^4/_9 : {}^5/_9 : {}^7/_9 = 4 : 5 : 7$ — Haben die Verhältnißzahlen einen gleichen Factor, so verkürzt man sie um denselben, da z. B. $20 : 35 : 45 = 4 : 7 : 9$ sich verhält. —

Z. B. Drei Kaufleute bilden eine Handelsgesellschaft, A legt 300 thlr., B 450 thlr., C 750 ins Geschäft. Nach Beendigung desselben theilen sie sich in den Gewinn von 260 thlr.; wie groß ist der Gewinn-Antheil eines Jeden?

Auflösung:

A — 300 thl.	30	6	2	A erhält: $\frac{260.2}{10.}=52$ thl.
B — 450 „	45	9	3	B — $\frac{260.3}{10}=78$ thl.
C — 750 „	75	15	5	C — $\frac{260.5}{10}=130$ thl.
				Sa: 260 thl.

Oder: Den 3 Arbeitern A, B, C wird eine Prämie von 13 thlr. in Aussicht gestellt und zwar so, daß jeder einen um so größern Antheil davon erhalten soll, in je kürzerer Frist er mit seiner Arbeit fertig wird. Alle 3 Arbeiter haben gleich viel zu thun, aber A wird in 9, B in 10 und C in 11 Stunden fertig: wie viel bekommt nun Jeder von der Prämie?

Auflösung: Wenn A in 9 Stunden fertig wird, so macht er in 1 St. $\frac{1}{9}$ der Arbeit, B, der in 10 St. fertig wird, macht in 1 St. $\frac{1}{10}$ der Arbeit und C, der in 11 Stunden sein Werk zu Stande bringt, macht in 1 St. $\frac{1}{11}$ der Arbeit; folglich sind die Verhältnißzahlen von A. B u. C bezüglich $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$.

A — $\frac{1}{9}=\frac{1.10.11}{9.10.11}=110$	A bek. $\frac{13.110}{299}=\frac{110}{23}=4\frac{18}{23}$ thl
B — $\frac{1}{10}=\frac{1.9.11}{10.9.11}=99$	B bek. $\frac{13.99}{299}=\frac{99}{23}=3\frac{7}{23}$ thl.
C — $\frac{1}{11}=\frac{1.9.10}{11.9.10}=90$	C bek. $\frac{13.90}{299}=\frac{90}{23}=3\frac{21}{23}$ thl.
Sa. 299	Sa. 13 thl.

B. Zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung.

Drei Kaufleute gründen ein Handelsgeschäft und gewinnen damit 5800 thlr. A hatte 3000 thl. auf 5 Jahre, B 4000 thl. auf 4 Jahre, und C 4500 thl. auf 6 Jahre in der Handlung stehen; wie hoch waren die Gewinn-Antheile von A, B u. C?

Lösung:

A gab 3000 thl. auf 5 J., was 3000.5 thl. auf 1 J. entspricht,
B — 4000 „ — 4 „, — 4000.4 „ — —
C — 4500 „ — 6 „, — 4500.6 „ — —

folglich sind die Verhältnißzahlen und die Gewinnantheile von

A — 3000.5	30.5	6.5	3.5	15	A gewinnt $\frac{5800.15}{58}=1500$ thl.
B — 4000.4	40.4	8.4	8.2	16	B — $\frac{5800.16}{58}=1600$ thl.
C — 4500.6	45.6	9.6	9.3	27	C — $\frac{5800.27}{58}=2700$ thl.
				Sa. 58	

Oder: 3 Fleischer pachten eine Wiese für 110 thlr. A weidet darauf 100 Hammel $8\frac{1}{10}$ Woche lang, B 84 Hammel $7\frac{1}{2}$ Woche und C 45 Hammel 12 Wochen lang. Was hat jeder zu zahlen?

A. 100 H., $8\frac{1}{10}$ W. lang $=\left(\frac{100.81}{10}=\right)$ 810 H. auf 1 W.
B. 84 — $\frac{15}{2}$ — $=\left(\frac{84.15}{2}=\right)$ 630 — —
B. 45 — 12 — $=(45.12=)$ 540 — —

folglich sind die Verhältnißzahlen und Zahlungs-Antheile von

A — 810	81	9	A zahlt $\frac{110.9}{22}=5.9=45$ thlr.
B — 630	63	7	B zahlt $\frac{110.7}{22}=5.7=35$ thlr.
C — 540	54	6	C zahlt $\frac{110.6}{22}=5.6=30$ thlr.
	Sa.	22	

Anmerkung. Es liegt hier, wie überall, in der Hand des Lehrers, nach den verschiedensten Seiten hin Anwendung von dieser Rechnungsart zu machen; z. B. 3 Personen sollen 500 thlr. so theilen, daß A 59 thl. mehr als jede der beiden andern erhält. Wie viel erhält A, B, C?

Lösung. Da A vorweg 59 thl. erhält, so bleiben noch 441 thlr. in 3 gleiche Theile zu theilen, folglich erhält B 147 thlr., C 147 thlr. und A 206 thlr.

Oder: 350 thlr. sind unter A, B, C so zu theilen, daß B 20 thlr. mehr als A, und C 30 thlr. weniger als A erhält. Wie viel bekommt Jeder von der Erbschaft?

Lösung. Wenn B 20 thlr. mehr als A erhalten soll und C 30 thlr. weniger als A, so gleichen sich diese 20 thlr mehr und 30 thlr. weniger dahin aus, daß, wenn 10 thlr. der zu theilenden Masse zugelegt gedacht werden, die dadurch entstehenden 360 thlr. in 3 gleiche Theile getheilt werden müssen, um den Theil von A bestimmen zu können. A erhält also 120 thlr., B 140 thlr., C 90 thlr., welche 3 Antheile zusammen 350 thl. geben. — Eine andere Lösung ist folgende:

Nimmt B seine 20 thl. vorweg aus der Masse, so bleiben noch 330 thlr. zu theilen; da nun C 30 thlr. weniger bekommen soll, so würden diese 30 thlr., zu 330 hinzugelegt, eine Summe geben, wovon A den 3. Theil, also 120 thlr bekäme. — Schließlich ist hier der Ort, die Aufgabe auch durch Ansatz einer Gleichung zu lösen, z. B. $x+(x+20)+(x-30)=3x-10=350$; $3x=360$; folglich $x=120$.

Oder: 6000 thlr. sollen unter 3 Verwandte nach dem Grade der Verwandschaft so getheilt werden, daß A $\frac{5}{12}$, B $\frac{2}{5}$ und C $\frac{1}{6}$ des ganzen Vermögens erhält, der Bediente aber für treue Dienstleistung den Rest. Wie viel erhält Jeder?

Lösung: $A=\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$
$B=\frac{2}{5}=\frac{24}{60}$
$C=\frac{1}{6}=\frac{10}{60}$
Sa. $\frac{59}{60}$.

folgl. bekommt der Bediente $\frac{1}{60}$ des Ganzen, oder 100 thl., A 2500 thl. B 2400 thl. u. C 1000 thl.

XI. Stufe.

Mischungs-Rechnung.

Die Gesellschafts-Rechnung macht den Übergang zu der 1. Art der Mischungs-Rechnung, wo die Verhältnißzahlen der Bestandtheile und die Menge der Mischung gegeben ist; z. B. zu feinem rothem Siegellack nimmt man 4 Theile Terpentin, 6 Theile Zinnober, 6 Theile Schellack, 1 Theil Kreide; wie viel muß man von jedem Bestandtheile nehmen, wenn 1 Centner Siegellack gemischt werden soll? — Die Gesellschaftsrechnung giebt folgende Mengen: $23^{9}/_{17}$ Pfd. Terp., $35^{5}/_{17}$ Pfd. Zinn., $35^{5}/_{17}$ Pfd. Schellack, $5^{15}/_{17}$ Pfd. Kreide.

Eine zweite Art der Mischungs-Rechnung giebt das Legiren der Metalle. Es ist nützlich, hier die alte Art der Legirung des Silbers und des Goldes zu erklären und zu üben. Die Mark Silber (= 16 Loth) ist fein, wenn sie ohne allen Zusatz von Kupfer ist; das Silber ist 15löthig, wenn in der Mark 15 Loth Silber und 1 Loth Kupfer enthalten sind ꝛc. Die Mark Gold (= 24 Karat) ist fein, wenn kein Zusatz von Silber oder Kupfer darin ist; das Gold ist 18karatig, wenn zu 18 Karat Gold 6 Karat Silber oder Kupfer gesetzt worden ist. Man unterscheidet auch wohl weiße und rothe Karatirung, je nachdem bloß Silber oder bloß Kupfer mit dem Golde legirt ist. Wenn nun 9 Mk. feines Silber und 1 Mk. Kupfer legirt werden, so enthalten diese 10 Mk. der Mischung 9. 16 = 144 Loth reines Silber, folglich ist die Mischung 14,4 löthig; wenn 3 Mk. 15löthiges Silber, 4 Mk. 12löthiges Silber und 1 Mk. Kupfer zusammengeschmolzen werden, so enthalten diese 8 Mk. 3. 15. + 4. 12 = 45 + 48 = 93 Loth reines Silber; folglich ist das Silber $11^{5}/_{8}$ löthig. Wenn man aber 9 Loth 14löth. Silber mit 7 Loth 11löth. Silber und 4 Loth 8löth. Silber zusammenschmelzt, so ist das Verfahren dasselbe, als wenn 9 Mk., 7 Mk. und 4 Mk. der verschiedenen Arten von Silber legirt werden, also:

$$\begin{array}{l} 9.\ 14 = 126 \\ 7.\ 11 = \ \ 77 \\ 4.\ \ 8 = \ \ 32 \\ \hline 20 \text{ Mk. enthalten } 235 \text{ Lth. S.,} \end{array}$$

folglich 1 Mk. $^{235}/_{20} = 11^{3}/_{4}$ Lth. S.;

$$\begin{array}{llll} \text{denn: } ^{9}/_{16} \text{ Mk.} & \text{14löth. S.} & = {}^{126}/_{16} & \text{Lth. S.} \\ ^{7}/_{16} \ — & 11 \ — \ — & \ \ {}^{77}/_{16} & — \\ ^{4}/_{16} \ — & \ 8 \ — \ — & \ \ {}^{32}/_{16} & — \\ \hline ^{20}/_{16} \text{ Mk.} & & {}^{235}/_{16} & \text{Lth. S.} \end{array}$$

folglich 1 Mk. $^{235}/_{16} : {}^{20}/_{16} = {}^{235}/_{20} = 11^{3}/_{4}$ Lth. S.

Ebenso ist die Rechnung in Betreff der Legirung des Goldes, mit dem Unterschiede, daß die Mk. Gold in 24 Karat getheilt ist.

Die 3te Art der Mischungsrechnung nennt man gewöhnlich die Alligations-Rechnung im eigentlichen Sinne. Z. B.

Wie viel Kupfer muß man zu 10 Mk. fein Silber setzen, um 12löth. zu erhalten?

Lösung: 10 Mk. fein Silber enthalten 160 Lth. Silber; 160 Loth f. Silber lassen sich auf $13^{1}/_{3}$ Mk. 12löth. S. vertheilen, denn $^{160}/_{12} = 13^{1}/_{3}$; folglich da 10 Mk. f. S. da sind, so hat man noch $3^{1}/_{3}$ Mk. Kupfer hinzuzusetzen.

Oder: Wie viel Kupfer muß man zu 25 Mk. fein Gold setzen, um 18karatiges Gold zu erhalten?

Lösung: 25 Mk. fein Gold = 25. 24 Kar. f. Gold = 600 Kar. f. Gold; $^{600}/_{18} = {}^{100}/_{3} = 33^{1}/_{3}$; $33^{1}/_{3} - 25 = 8^{1}/_{3}$; folglich sind $8^{1}/_{3}$ Mark Kupfer hinzuzusetzen. —

Ferner: Aus 15- und 10löth. Silber soll 12löth. S. legirt werden; wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen sein?

Auflösung: 1 Mk. 15löth. Silber ist um 3 Loth S. besser als 1 Mk. 12löth. S.; 1 Mk. 10löth. S. ist um 2 Loth S. geringer, als 1 Mk. 12löth. S. Nimmt man folglich 2 Mk. von der 1sten und 3 Mk. von der 2ten Sorte, so erhält man in 2 Mk. 15löth. S. 30 Loth S., und in 3 Mk. 10löth. S. auch 30 Loth S.; folglich in 5 Mk. der Legirung zusammen 60 Lth. S.; das macht auf 1 Mk. 12 Loth S.; folglich ist die Mischung 12löth. — Dies wird gewöhnlich mit folgendem übersichtlichen Ansatz gerechnet:

$$\left.\begin{array}{l} 15 \\ 10 \end{array}\right\} 12 \left|\begin{array}{l} +3 \\ -2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{2 Mk. v. d. 1. Sorte} \\ \underline{\text{3 Mk. v. d. 2. Sorte}} \\ \text{5 Mk.} \end{array} \left|\begin{array}{r} \text{Probe: 2 M. 15 l. S.} = \text{30 Lt.} \\ \text{3 M. 10 l. S.} = \underline{\text{30 Lt.}} \\ \text{Sa. 60 Lt.} \end{array}\right.$$

60 Loth S., vertheilt auf 5 Mk., giebt 12löth. Silber.

Oder: Jemand will aus 22kar. und 16kar. Golde 15 Mk. 18kar. Gold legiren, wie viel nimmt er von jeder Art?

Lösung: $\left.\begin{array}{r} 22 \\ 16 \end{array}\right) 18 \left|\begin{array}{r} +4 \\ -2 \end{array}\right|\begin{array}{r} 2 \\ 4 \end{array}\left|\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}\right.\Bigg($ folgl. sind die Verhältnißzahlen 1 u. 2; oder man nimmt von der 1sten Sorte halb so viel, als von der andern Sorte, d. h. von der 1sten Sorte 5 Mk. und von der 2ten Sorte 10 Mk.

Oder: Man will aus Wein, die Flasche zu 1 thlr. 10 sgr. und die Flasche zu 15 sgr. 60 Fl. Wein à 25 sgr. mischen, also:

$\left.\begin{array}{r} 40 \\ 15 \end{array}\right) 25 \left|\begin{array}{r} +15 \\ -10 \end{array}\right|\begin{array}{r} 10 \\ 15 \end{array}\left|\begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array}\right.\Bigg($ folgl., da die Verhältnißzahlen 2 u. 3 sind, so nimmt man 24 Fl. von der 1sten und 36 Fl. von der 2ten Sorte. Probe: 24 Fl. à 1 thlr. 10 sgr. kosten 32 thlr. und 36 Fl. à 15 sgr. kosten 18 thlr.; folgl. obige 60 Flaschen 50 thl.; folglich jede Fl. $^{5}/_{6}$ thlr. = 25 sgr.

Oder: Man will von dem Stoffe A, wo die Gewichts- oder Maaß-Einheit m werth ist, und von dem Stoffe B, wo die Einheit n werth ist, eine 3te Sorte mischen, wo die Einheit p werth ist; wie viel nimmt man von A u. B?

Lösung: $\left.\begin{array}{r} m \\ n \end{array}\right) p \left|\begin{array}{l} + m - n \\ - p - n \end{array}\right|\begin{array}{l} p - n \\ m - n \end{array}\Bigg($ folglich nimmt man von A so viel als der Unterschied des Werthes der Einheit der Mischung und der Einheit der 2. Sorte beträgt, und von B so viel, als der Unterschied des Werthes der Einheit der 1. Sorte und der Einheit der Mischung beträgt. Nach dieser Regel ist z. B. folgende Aufgabe zu lösen. Wie viel 13löthiges Silber muß man zu 30 Mk. 8löth. Silber setzen, damit die Mischung 11löth. werde? —

Lösung. Die Verhältnißzahlen sind (11—8 =) 3, und (13—11 =) 2; folglich hat man 30 (= 2. 15) Mk. 8löth. S., so muß man (3. 15 =) **45** Mk. 13löthiges Silber nehmen. — Probe:

30 Mk. 8löth. S. enthalten 240 Loth fein Silber; und
45 „ 13löth. „ — 585 „ — — ;

folgl. beide gemischt, zusammen 825 Loth S.; folgl. wenn in 45 + 30 =) 75 Mk. S. 825 Loth S. enthalten sind, so ist in 1 Mk. enthalten ($^{825}/_{75}$ =) 11 Loth Silber, d. h. die Mischung ist 11löthig.

Sind mehr als 2 Sorten zu mischen, so ist die Aufgabe unbestimmt. Z. B. Man will aus feinem, 14= und 8=löthigem Silber 13löthiges Silber mischen.

Auflösung:

$$\left.\begin{array}{r}16\\14\\8\end{array}\right\}13\left|\begin{array}{r}+3\\+1\\-5\end{array}\right|$$

Hier ist jeder Überschuß mit dem Mangel auszugleichen, also $+3$ mit -5, und $+1$ mit -5; folglich nimmt man von der 1sten Sorte 5, so nimmt man von der 3ten Sorte 3, und nimmt man von der 2ten Sorte 5, so nimmt man von der 3ten Sorte 1; folgl. sind die Verhältnißzahlen: 5, 5, 4; sie können aber auch sein: 10, 5, 7; oder: 5, 10, 5; oder: 10, 10, 8; oder: 10, 15, 9 rc., je nachdem man den Überschuß mit dem Mangel ausgleicht. —

Oder: Jemand hat 4 Weinsorten, die Flasche zu 30, 25, 15 u. 8 sg.; er will 64 Flaschen darausmischen, wovon er die Flasche zu 18 sgr. geben kann: wie viel wird er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung:

$$\left.\begin{array}{r}30\\25\\15\\8\end{array}\right\}18\left|\begin{array}{r}+12\\+7\\-3\\-10\end{array}\right|$$

Gleicht man hier $+12$ mit -3, und $+7$ mit -10 aus, so wird man von d. 1. Sorte 3, von der 2. Sorte 10, von der 3. Sorte 12, von der 4. Sorte 7 Fl. nehmen, folgl. sind die Verhältnißzahlen: 3, 10, 12, 7; folglich nimmt man von der 1. Sorte im Ganzen 6 Fl., von der 2. Sorte 20 Fl., von der 3. Sorte 24 Fl. und von der 4. Sorte 14 Fl., was zusammen 64 Fl. giebt. Aber die Verhältnißzahlen können auch andere sein; man nehme von der 1. Sorte 1 Fl., von der 2. Sorte 10 Fl., von der 3. Sorte 4 Fl., von der 4. Sorte 7 Fl., so sind die Verhältnißzahlen: 1, 10, 4, 7; folglich wird man im Ganzen von der 1. Sorte $^{64}/_{22} = 2^{10}/_{11}$ Fl.; von der 2. Sorte $\frac{32.4}{11} = {}^{128}/_{11}$ $= 11^{7}/_{11}$ Fl.; von der 3. Sorte $\frac{32.10}{11} = {}^{320}/_{11} = 29^{1}/_{11}$ Fl., und von der 4. Sorte $\frac{32.7}{11} = {}^{224}/_{11} = 20^{4}/_{11}$ Fl.; zusammen 64 Fl. — Man konnte aber auch $+12$ gegen -10, und $+7$ gegen -3 ausgleichen, dann nahm man von der 1. Sorte 10, von der 2. Sorte 3, von der 3. Sorte 7 und von der 4. Sorte 12 Fl., das giebt die Verhältnißzahlen geordnet: 10, 3, 7, 12 oder 5, 3, 7, 6, was beides ganz andere Ergebnisse bringt, nämlich: von der 1. Sorte 20, von der 2. S. 6, von der 3. Sorte 14 und von der 4. Sorte 24, oder von der 1. Sorte $\frac{64.5}{21} = 15^{5}/_{21}$ Fl.; von der 2. Sorte $\frac{64.3}{21} = {}^{64}/_{7} = 9^{1}/_{7}$ Fl.; von der 3. Sorte $\frac{64.7}{21} = \frac{64}{3.} = 21^{1}/_{3}$ Fl. und von der 4. Sorte $\frac{64.6}{21} = \frac{64.2}{7} = {}^{128}/_{7} = 18^{2}/_{7}$ Fl.; zusammen 64 Fl. Und so weiter, denn der Auflösungen dieser Aufgabe sind unzählige. —

Nach dem Münzgesetz von 1857 wird die Mark Silber nicht mehr in 16 Loth und die Mk. Gold nicht mehr in 24 Karat, sondern das Pfund Gold od. Silber in Tausendtel getheilt, z. B. $^{700}/_{1000}$ Pfd. fein Gold oder Silber, legirt mit $^{300}/_{1000}$ Pfd. Kupfer geben 1 Pfd. Gold oder Silber von einem Feingehalt von 700. — Man bezeichnet jetzt also den Feingehalt der edeln Metalle in Tausendteln. 8 Loth Gold und 2 Loth Kupfer zusammengeschmelzt geben also z. B. eine Legirung von einem Feingehalt von 800; den 8 Loth Gold und 2 Loth Kupfer geben eine Mischung von 10 Loth; wenn also 10 Theile Mischung = 1000 Tausendtheile sind, so ist 1 Theil der Mischung = 100 Tausendteln, und 8 Thle. = 800 Tausendteln, der Feingehalt also = 800.

Oder: 1 Schale, die 15 Pfd. Silber enthält bei einem Feingehalt von 900, wiegt $16^{2}/_{3}$ Pfd. im Ganzen; denn, wenn auf 900 Pfd. Silber 1000 Pfd. der Legirung kommen, so kommt auf 1 Pfd. Silber $^{10}/_{9}$, oder auf 15 Pfd. Silber $^{150}/_{9}$ Pfd. Brutto, oder $16^{2}/_{3}$ Pfund Vollgewicht der Schale.

Oder: wenn ein Goldgefäß $1^{1}/_{2}$ Pfd. Gold und 11 Loth Silber enthält, so ist das in der Mischung enthaltene Gold von einem Feingehalt von 803,5714285... = 803,57 (= $803^{4}/_{7}$); denn: $1^{1}/_{2}$ Pfd. Gold sind 45 Loth Gold, dazugelegt 11 Loth Silber giebt eine Mischung von 56 Loth. Wenn nun 56 Theile der Mischung = 1000 Tausendtheile sind, so ist ein Theil der Mischung = $^{1000}/_{56}$; folglich 45 Theile der Mischung $= \frac{1000.45}{56} = \frac{125.45}{7} = {}^{5625}/_{7} = 803^{4}/_{7} = 803,571428571\ldots$

XII. Stufe.

Zinseszinsen= und Renten=Rechnung.

Wenn man die Zinsen seines ausgeliehenen Kapitals jedesmal wieder als Kapital ausleiht, so erhält man Zinsen von den Zinsen oder Zinseszinsen. Dies kann kein Gesetz verbieten; dagegen ist es nicht erlaubt, seinem Schuldner die Bedingung aufzulegen, daß er die fälligen Zinsen nicht baar zahle, sondern sie ohne Weiteres zum Kapital schlage. Auf dem ersteren, wonach man die Zinsen wiederum als Kapitalien ausleiht, beruhen die Wittwen=Kassen, Rentenversicherungs=Anstalten rc. rc. Hierbei ist zunächst zu erörtern, was man unter Zinsfuß versteht. Der Zinsfuß ist in den Ländern, wo man nach Thalern rechnet, 1 thlr. sammt den Zinsen eines Thalers auf 1 Jahr; bei 5% also 1 thlr. + $^{5}/_{100}$ thlr. = $1_{,05}$ thl. Also überhaupt: der Zinsfuß ist die Einheit des Geldes, sammt den Zinsen dieser Einheit auf 1 Jahr, bei m% also: $1 + m/_{100} = \frac{100+m}{100} = p$; folglich bei 2% ist $p = 1{,}02$; bei 3% $= 1{,}03$; bei $4^{1}/_{2}$% $= 1{,}045$; bei $4^{3}/_{4}$% $= 1{,}0475$; bei $5^{2}/_{3}$% $= 1{,}05666\ldots$

Nennen wir nun das ursprünglich ausgeliehene Kapital k, die Procente m, den Zinsfuß p und die Zahl der Jahre, in welchen das Kapital durch Zinseszinsen gewachsen ist, n, so ergiebt sich die Formel: $\mathbf{k = ap^{n}}$. Denn, wenn a thlr. Kapital 1 Jahr lang ausgeliehen worden siad, so tragen sie $\frac{am}{100}$ thlr. Zinsen; folglich ist im Beginn des 2ten Jahres das Kapital nicht mehr a, sondern $a + \frac{a\,m}{100}$ thlr. $= \frac{100\,a + am}{100} = \left(\frac{100 + m}{100}\right)$. $a = ap^{I}$. — Werden diese ap^{I} thlr. Kapital wieder auf 1 Jahr ausgeliehen, so bringen sie $\frac{ap^{I}m}{100}$ thlr. Zinsen, folglich ist nach 2 Jahren das Kapital angewachsen zu $ap^{1} + \frac{ap^{1}m}{100}$ thlr. $= \frac{100\,ap^{I} + ap^{I}\,m}{100} = ap^{I} \times \left(\frac{100 + m}{100}\right) = ap^{2}$. — Wird dieß Kapital ap^{2} wiederum auf 1 Jahr ausgeliehen, so trägt es $\frac{ap^{2}m}{100}$ thlr. Zinsen; folglich ist am Schluß des 3ten Jahres das Kapital angewachsen zu $ap^{2} + \frac{ap^{2}m}{100} = \frac{100\,ap^{2} + ap^{2}m}{100} = ap^{2}\left(\frac{100 + m}{100}\right) = ap^{2}p = ap^{3}$. — Ebenso wird das Kapital am Ende des 4ten Jahres angewachsen sein zu ap^{4}, am Ende des 5ten Jahres zu ap^{5}, rc.; folglich am Ende des n. Jahres ist $k = ap^{n}$. In dieser Grundformel der Zinseszins-Rechnung stecken noch 3 andere Aufgaben. Wenn also

I. $k = ap^{n}$, so ist auch, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit p^{n} dividirt,

II. $a = \frac{k}{p^{n}}$, und wenn man Formel I. auf beiden Seiten durch a dividirt, und dann mit n radicirt,

III. $p = \sqrt[n]{\frac{k}{a}}$; endlich wenn man Formel I. auf beiden Seiten durch a theilt und daun logarithmirt, endlich mit log. p dividirt,

IV. $n = \frac{\log. k - \log. a}{\log. p.} \left(= \frac{\log. k - \log. a}{\log. \left(\frac{100 + m}{100}\right)} = \frac{\log. k - \log. a}{\log. (100 + m) - \log. 100} = \frac{\log. k - \log. a}{\log. (100 + m) - 2} \right)$ *)

Aus der IV. Formel: $n = \frac{\log. k - \log. a}{\log. p.}$, wonach man die Zahl der Jahre bestimmt, in welcher das Kapital von a thlr. zu k thlr. angewachsen ist, läßt sich auch die Frage beantworten, in welcher Zeit das Kapital a sich verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen oder sich beliebig vervielfachen wird. Man setze k der Reihe nach $= 2a$, $= 3a$, $= 4a$, endlich qa, so wird $n = \frac{\log. 2a - \log. a}{\log. p} = \frac{\log. 2 + \log. a - \log. a}{\log. p} = \frac{\log. 2}{\log. p}$; eben so wird $n = \frac{\log. 3a - \log. a}{\log. p} = \frac{\log. 3 + \log. a - \log. a}{\log. p} = \frac{\log. 3}{\log. p}$; oder endlich

V. $n = \frac{\log. q}{\log. p}$; d. h., man findet die Zeit, in welcher ein ausgeliehenes Kapital qmal so groß wird, wenn man den log. q theilt durch den Logarithmus des Zinsfußes. — Aus dieser Formel: $n = \frac{\log. q}{\log. p}$ sind noch 2 andere Formeln abzuleiten, und zwar:

VI. $\log. p = \frac{\log. q}{n}$ und

VII. $\log. q = n. \log. p$.

Nach der erstern dieser beiden Formeln findet man den Zinsfuß, wenn die Zahl der Jahre, in der das ausgeliehene Kapital qmal größer geworden, bekannt ist, und nach der letzten die Vervielfachung des ausgeliehenen Kapitals, wenn die Zahl der Jahre, wo es ausgeliehen gewesen, und der Zinsfuß bekannt sind. —

Wenn die Zinsen nicht nach Ablauf des Jahres, sondern in kürzeren Zeitabschnitten, z. B. halbjährlich, vierteljährlich rc. zum Kapital geschlagen werden, so wird die Formel I: $k = ap^{n}$ nicht mehr angewendet, denn wenn a thlr. zu m % halbjährlichen Zinsen stehen, so bringen sie nach dem ersten Halbjahr $\frac{am}{200}$ Zinsen, folglich ist das Kapital nach dem 1sten Halbjahr, d. h. $k = a + \frac{am}{200} = \frac{200a + am}{200} = \left(\frac{200 + m}{200}\right) a = a\,P$, wo P für $\frac{200 + m}{200}$ gesetzt wird. Nutzt man nun das Kapital a P wiederum zu m %, so sind die Zinseu desselben $= \frac{a\,Pm}{200}$; folglich ist k nach dem 2ten halben Jahr $= a\,P + = \frac{a\,Pm}{200} = \frac{200\,a\,P + a\,P\,m}{200} = \left(\frac{200 + m}{200}\right) a\,P = a\,P^{2}$; folglich ist das auf ein ganzes Jahr ausgeliehene Kapital a angewachsen zu $a \left(\frac{200 + m}{200}\right)^{2}$, oder $k = a\,P^{2}$. Ebenso ist am Schluß des 3ten Jahres $k = a\,P^{2.3}$; folglich am Schluß des nteu Jahres ist $k = a\,P^{2n}$. — Würden die Zinsen alle 4 Monate zum Kapital geschlagen, so ergiebt sich durch dieselbe Betrachtung am Schluß des 1sten Jahres: $k = a\,P^{3}$; am Schluß des 2ten Jahres: $k = a\,P^{2.3}$; am Schluß des 3ten Jahres: $k = a\,P^{3.3}$; folglich am Schluß des n. Jahres $k = a\,P^{3.n}$. rc. Werden nun die Zinsen nach $\frac{c}{d}$ Jahren zum Kapital geschlagen, so bringt a nach dem ersten Jahresbruch $\frac{a\,c\,m}{100d}$ Zinsen; folglich ist das erste $k = a + \frac{a\,c\,m}{100\,d} = \frac{100\,ad + a\,c\,m}{100\,d} = \left(\frac{100\,d + c\,m}{100\,d}\right) a$. — Setzt man nun $\frac{100\,d + c\,m}{100\,d}$

*) Es versteht sich von selbst, daß der Lehrer diese 4 Formeln nicht bloß entwickeln, sondern auch in Worte übersetzen läßt.

$= P$, so ist $k_{,} = a\,P$; ebenso das 2. k oder $k_{,,} = a\,P^2$; das 3. k oder $k_{,,,} = a\,P^3$. Der Bruch $\frac{c}{d}$ ist in 1 Jahr $\frac{d}{c}$mal enthalten, denn $1 : \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$; folglich findet der Zinszuschlag in jedem Jahr $\frac{d}{c}$mal Statt, folglich in n Jahren $\frac{n\,d}{c}$. Demnach ist das Kapital a am Schluß des 1sten Jahres angewachsen auf $a\,P^{d/c}$; also nach dem 1sten Jahre ist $k = a\,P^{d/c}$, am Schluß des 2ten Jahres ist $k = a\,P^{2d/c}$; am Schluß des 3ten Jahres ist $k = a\,P^{3d/c}$, ꝛc., am Schluß des n. Jahres ist

VII. $k = a\,P^{n.d/c} = a\left(\frac{100\,d + cm}{100\,d}\right)^{nd/c}$

Werden also die Zinsen alle $\frac{2}{3}$ Jahre zum Kapital geschlagen, so ist am Schluß des 4ten Jahres $k = a\left(\frac{100.3 + 2m}{100.3}\right)^{\frac{4.3}{2}} = \left(\frac{300 + 2m}{300}\right)^{6} a.$

Eine andere Aufgabe ist diese: Wie viel betragen die halbjährlichen Zinsen des Kapitals a, wenn die jährlichen m thlr. sind, bei Zinseszinsen-Berechnung? — Oder: zu welchem Zinsfuß müssen a thlr. Kapital ausgeliehen werden, so daß dabei die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen werden, wenn dadurch das Kapital eben so anwachsen soll, als wenn a thlr. zum Zinsfuß $p = \frac{100 + m}{100}$ ausgeliehen ist und die Zinsen erst jährlich zum Kapital geschlagen werden? — In diesem Fall ist: $ap^1 = a\,x^2$; folglich $p^1 = x^2$; folglich $2 \log. x = \log. p$; folglich $\log. x = \frac{\log. p}{2}$. — Desgleichen, wie viel betragen die vierteljährlichen Zinsen unter den oben angegebenen Bedingungen? — Wenn $ap^1 = ax^4$ ist, so ist $p = x^4$, folglich $x = \sqrt[4]{p} = \sqrt[4]{\frac{100 + m}{100}}$. — Endlich, wieviel betragen für den Zinsfuß p die $\frac{1}{n}$jährlichen Zinsen? — Offenbar ist, wie vorher, $x = \sqrt[n]{p}$. Setzt man nun für x den Werth $\frac{100 + m}{100}$ ein, so ist: $\frac{100 + m}{100} = \sqrt[n]{p}$; folglich $100 + m = 100\sqrt[n]{p}$; folglich $m = 100\sqrt[n]{p} - 100 = 100\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)$, wo m die $\frac{1}{n}$jährlichen Zinsen sind und p der Zinsfuß für die jährlichen Zinsen.

Eine andere Reihe von Aufgaben ergiebt sich, wenn man fragt: wie lange muß ein Kapital a zum Zinsfuß p stehen, um zu gleicher Höhe anzuwachsen mit dem Kapital a′, das, zum Zinsfuß p′, n Jahre hindurch steht? —

Auflösung:

$ap^x = a'.p'^n$. Man logarithmire, folglich ist: $\log. a + x \log. p = \log. a' + n. \log. p'$; oder $x. \log. p = \log. a' + n. \log. p' - \log. a$; folglich

IX. $x = \frac{\log. a' + n. \log. p' - \log. a.}{\log. p.}$

In der Gleichung: $ap^x = a'p'^n$, liegen noch zwei andere Aufgaben; denn wenn in ap^x für x ein bestimmter Werth eingesetzt und a u. p in Frage gestellt wird, z. B. so: $x\,p^n = a'p'^{n'}$, u. dividirt man auf beiden Seiten durch p^n, so ist $x = \frac{a'p'^{n'}}{p^n}$. Logarithmirt man, so ist:

X. $\log. a = \log. a' + n' \log. p' - n. \log. p.$ —

Endlich setzt man in der Gleichung: $ap^n = a'p'^{n'}$, p als unbekannt, so ist: $x^n = \frac{a'p'^{n'}}{a}$; folgl. $n \log. x = \log. a' + n' \log. p' - \log. a$; folglich,

XI. $\log. p = \log. a' + n' \log. p' - \log. a.$ —

Ferner: Jemand borgt ein Kapital zu m % und verborgt es wieder zu m′ %: wie viel betrug das Kapital, wenn er nach n Jahren g Thaler gewonnen hat?

Lösung: $x p'^n - x p^n = g$; also: $x\,(p'^n - p^n) = g$; folglich:

XII. $x = \frac{g}{p'^n - p^n} = \frac{g}{\left(\frac{100 + m'}{100}\right)^n - \left(\frac{100 + m}{100}\right)^n} = \frac{g}{(1 + 0{,}01\,m')^n - (1 + 0{,}01\,m)^n}$

Eine andere Reihe von Aufgaben folgt aus dieser Frage: Ein Kapital a wird zum Zinsfuß p auf Zinseszinsen ausgeliehen, aber jährlich regelmäßig dadurch vermehrt oder vermindert, daß z. B. am Schluß jedes Jahres dieselbe Summe b hinzugelegt oder davon weggenommen wird: wie groß wird dieß Kapital nach n Jahren sein? —

Auflösung: Das Kapital a, zum Zinsfuß p und n Jahre hindurch ausgeliehen, wächst (nach I.) zu ap^n an. Angenommen: $n = 6$, und es werden jährlich b thlr hinzugelegt, so steht das b, welches am Schluß des 1sten Jahres hinzugelegt wird, noch 5 Jahre zum

Zinsfuß p auf Zinseszinsen aus, folglich ist dies erste $b = bp^5$; das b, welches am Schluß des 2ten Jahres hinzugelegt wird, steht noch 4 Jahre aus, das zweite b ist also $= bp^4$; eben so ist das 3te $b = bp^3$; das 4te $b = bp^2$, das 5te $b = bp$; das 6te $b = b$. Die Summe der Zuschläge, vom letzten angefangen, ist also:

$$b + bp + bp^2 + bp^3 + bp^4 + bp^5 =$$
$$bp^0 + bp^1 + bp^2 + bp^3 + bp^4 + bp^5 =$$

[nach der Formel für die Summirung der geometrischen Reihen: $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$] $\frac{b(p^6 - 1)}{p - 1}$. Offenbar würde die Summe der Zuschläge in n Jahren sein $\frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$.

Eben so viel würde aber auch von ap^n abzuziehen sein, wenn jährlich nicht b zugelegt, sondern abgezogen wird, folglich ist:

XIII. $k = ap^n \pm \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$,

wo das + Zeichen für den Fall, daß jährlich b zugelegt, und das — Zeichen zu lesen ist, wenn b am Schluß jedes Jahres vom Ertrage des anwachsenden Kapitals abgenommen wird. —

In dieser Gleichung sind außerdem noch 4 Aufgaben enthalten. Man findet a, wenn k, b, p, n gegeben sind; man findet b, wenn k, a, p, n gegeben sind, &c. —

Um a zu finden, setzt man $ap^n = k \mp \frac{b(p^n - 1)}{p - 1} = \frac{k(p - 1) \mp b(p^n - 1)}{p - 1}$; folglich ist

XIV. $a = \frac{k(p - 1) \mp b(p^n - 1)}{p^n (p - 1)}$.

Ferner, da $ap^n = \frac{k(p - 1) \mp b(p^n - 1)}{p - 1} = \frac{kp - k \mp bp^n \pm b}{p - 1}$,

so ist $ap^n (p - 1) = kp - k \mp bp^n \pm b$, oder

$ap^{n+1} - ap^n \pm bp^n - kp = \pm b - k$, oder

$ap^{n+1} - (a \mp b) p^n - kp = \pm b - k$, oder

$p^{n+1} - \frac{(a \mp b)}{a} p^n - \frac{kp}{a} + \frac{(k \mp b)}{a} = 0$. — Daß diese Gleichung sich nur in seltenen Fällen für uns lösen läßt, ist selbstverständlich.

Um b zu berechnen, müssen k, a, p, n gegeben sein; denn $\pm \frac{b(p^n - 1)}{p - 1} = k - ap^n$; folglich $\pm b = \frac{(k - ap^n)(p - 1)}{p^n - 1}$, d. h.

XV. $b = \frac{(k - ap^n)(p - 1)}{p^n - 1}$, für den Fall, daß dies b jährlich zugelegt wurde, und

$b = \frac{(ap^n - k)(p - 1)}{p^n - 1}$, wenn b am Schlusse jedes Jahres abgezogen wurde. —

Um n zu berechnen, müssen die Werthe von k, a, b und p gegeben sein. $ap^n \pm \frac{bp^n \mp b}{p - 1} = k$; folglich

$ap^n (p - 1) \pm bp^n \mp b = kp - k$; oder

$p^n (a(p - 1) \pm b) = \pm b + k(p - 1)$; oder

$p^n = \frac{\pm b + k(p - 1)}{a(p - 1) \pm b}$; folglich: $n \log. p = \log. \left(\frac{\pm b + k(p - 1)}{\pm b + a(p - 1)}\right)$; d. h.

XVI. $n = \frac{\log. [k(p - 1) \pm b] - \log. [a(p - 1) \pm b]}{\log. p}$,

---

Es kann die Frage sein: wann wird ein auf Zinseszins ausgeliehenes Kapital, von dem am Schluß jedes Jahres eine gewisse Summe abgenommen wird, ganz oder zum Theil aufgezehrt? Für den ersten Fall setzt man $ap^n = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$. Demnach ist $ap^n (p - 1) = bp^n - b$; oder: $ap^n (p - 1) - bp^n = -b$; oder $[a(p - 1) - b] p^n = -b$; oder: $p^n = \frac{-b}{a(p - 1) - b} = \frac{b}{b - a(p - 1)}$; folglich

$n \log. p = \log. b - \log. [b - a(p - 1)]$; d. h.

XVII. $n = \frac{\log. b. - \log. [b - a(p - 1)]}{\log. p}$.

Für den 2ten Fall wird die Formel XIII. angewendet, wenn man für k die Summe einsetzt, bis auf welche das Kapital verzehrt worden ist.

In der Gleichung: $ap^n = \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$ stecken ebenfalls noch 3 andere Aufgaben.

Man kann a finden, wenn b, p, n gegeben sind; eben so b, wenn a, p, n gegeben sind, und p, wenn a, b und n gegeben sind, z. B.

XVIII. $a = \frac{b(p^n - 1)}{p^n (p - 1)}$.

XIX. $b = \frac{ap^n (p - 1)}{p^n - 1}$; endlich, um p zu finden, löse man die Klammer auf, dann ist: $ap^n = \frac{bp^n - b}{p - 1}$;

oder $ap^n\,(p-1) = bp^n - b$; oder: $app^n - ap^n = bp^n - b$, d. h. $ap^{n+1} - (a+b)\,p^n = -b$; oder: $p^{n+1} - \frac{(a+b)}{a}\,p^n + \frac{b}{a} = o$; eine Gleichung, die sich auch aus der umstehenden Gleichung XIII. unmittelbar ergiebt, wenn man in derselben $k = o$ setzt. — Wird das Vermögen durch die jährlichen Rückzahlungen nicht ganz aufgezehrt, so wendet man, wie gesagt, die Formel an: $k = ap^n - b\frac{(p^n-1)}{p-1}$, in welcher Gleichung man ebenfalls noch, wenn die übrigen 4 Größen gegeben sind, die 5te finden kann, selbst unter Umständen p. —

Wäre nur der baare Werth einer Jahresrente, welche man n Jahre hindurch zu dem Zinsfuße p zu genießen hat, zu berechnen, so geschieht dieß nach der Formel XVIII., wo a der baare Werth, b die Jahresrente, p der Zinsfuß und n die Jahre sind. Z. B. Jemand, der eine Jahresrente von 1001 thlr. 15 sgr. auf 13 Jahre zu beziehen hat, will solche verkaufen: wie viel kann man ihm für die Rente zahlen, wenn die Zinsen zu 4 % gerechnet werden?

Cf. XVIII. $a = \frac{b\,(p^n - 1)}{p^n\,(p-1)} = \frac{1001\tfrac{1}{2}\,(1{,}04^{13} - 1)}{1{,}04^{13}.\ 0{,}04}$

$= \frac{1001{,}5\,(1{,}04^{13} - 1)}{0{,}04.\ 1{,}04^{13}} = \frac{100150\,(1{,}04^{13} - 1)}{4.\ 1{,}04^{13}} =$

$\frac{25037{,}5\,(1{,}04^{13} - 1)}{1{,}04^{13}} = 25037{,}5 - \frac{25037{,}5}{1{,}04^{13}} =$

$25037{,}5 - 150\,37 = 10{,}000$ thlr.

Wäre eine durch n Jahre zu beziehende Jahresrente, die den baaren Werth a hat, bei dem Zinsfuß p zu berechnen, so geschieht dieß nach Formel XIX. $b = \frac{ap^n\,(p-1)}{p^n - 1}$. Z. B Eine Schuld von 4000 thlr., welche zu 4 % verzins't wird, soll in 6 jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden, welche Summe ist jährlich abzuzahlen? —

$b = \frac{4000.\ 1{,}04^6.\ 0{,}04}{1{,}04^6 - 1} = \frac{160.\ 1{,}04^6}{0{,}2653184} = 763{,}049.$ —

Ist endlich die Anzahl der Jahre, welche eine jährlich zu beziehende Rente zu laufen hat, zu berechnen, so geschieht dies nach der Formel XVII.;

$n = \frac{\log.\,b - \log.\,(b - (p-1)\,a)}{\log.\,p}.$

Z. B. Eine Rente von jährlich 1260 thlr., die zu 4 % berechnet ist und mit einem Kapital von 9970 thlr. erkauft worden ist, läuft wieviel Jahre? Auflösung:

$n = \frac{\log.\,1260 - \log.\,(1260 - 0{,}045.\ 9970)}{\log.\,1{,}045} =$

$\frac{\log.\,1260 - \log.\,(1260 - 448{,}65)}{\log.\,1{,}045} =$

$\frac{\log.\,1260 - \log.\,811{,}35}{\log.\,1{,}045} = 10$ Jahren *).

---

*) Wir brechen ab.

II.

Schul-Nachrichten.

---

1. Zur Schul-Chronik.

Das Schuljahr begann in der Mädchen- und Elementarschule am Donnerstag, den 12. April, in der Real- und Vorschule am Dinstag, den 17. April 1860, früh 7 Uhr. — Es ist hier noch nachzuholen, daß am 22. März 1860 in der Morgenandacht der hiesigen Schulen dem treuen Gott Dank gesagt wurde für die Erhaltung des theuern Lebens Sr. Königl. Hoheit des Prinz-Regenten, mit der kindlichen Bitte, daß Gott auch ferner den hohen Herrn in Seinen gnädigen Schutz nehmen wolle! Im Laufe des Schuljahres haben wir diesmal keinen Lehrerwechsel erlebt, wenn gleich viele Krankheitsfälle, namentlich unter den jüngeren Schülern, besonders an den Masern. Für den Mädchenlehrer Hrn. Marquardt, der an eine Schule nach Finsterwalde berufen wurde, trat gleich mit Anfang des Schuljahres, den 12. April 1860 der Schulamts-Candidat Hr. Ermel in die 3. Lehrerstelle der hiesigen Mädchenschule ein. Hr. Friedrich August Robert Ermel, geb. den 30 September 1840 zu Calau, besuchte dort die Stadtschule, dann das Gymnasium zu Luckau und von