I. Die Stellung des geometrischen Zeichnens zur Geometrie und zum Zeichnen.

Die Lehrordnung für die sächsischen Realschulen setzt für jede der 6 Klassen zwei Zeichenstunden an. In den beiden obersten Klassen werden diese zwei Stunden folgendermassen unterschieden:

„Klasse II, 2 Stunden, nämlich:

1 Stunde Zeichnen nach Gipsmodellen (Kreidemanier);

1 Stunde geometrische Darstellung des Grund- und Aufrisses von Punkten, Strecken und begrenzten Ebenen in verschiedenen Lagen.

Klasse I, 2 Stunden, nämlich:

1 Stunde Fortsetzung des Zeichnens nach Gipsabgüssen; für besonders begabte Schüler Landschaftszeichnen nach guten Vorlagen;

1 Stunde Darstellung des Grund- und Aufrisses einfacher Körper in verschiedenen Stellungen, sowie der leichteren Fälle von ebenen Körperschnitten“.

Wie man sieht, sind es durchaus verschiedenartige Stoffe, die im Freihandzeichnen und im geometrischen Zeichnen zu verarbeiten sind. Trotzdem haben die Zeichenlehrer von jeher den Unterricht im geometrischen Zeichnen für sich in Anspruch genommen, zunächst unter der äusserlichen Begründung, dass das geometrische Zeichnen im Lehrplan dem Begriffe des Zeichnens untergeordnet sei, also dem Lehrer für Freihandzeichnen übertragen werden müsse. Nachdem schon 1893 auf der zweiten Realschullehrerversammlung zu Leipzig die Zeichenlehrer in ihrer Abteilungssitzung eine These des oben bezeichneten Inhaltes angenommen hatten, hielt 1895 auf der Dresdner Versammlung in der Abteilungssitzung für technische Fächer Effenberger (Pirna) einen Vortrag, in dem die Schlagwörter Konzentration und Zentralisation eine grosse Rolle spielten und durch alle Stufen des Zeichenunterrichtes hindurch eine enge Verschmelzung von Freihandzeichnen und Zirkelzeichnen, etwa im Sinne des Thiemeschen Lehrganges für den Zeichenunterricht in Volksschulen gefordert wurde. Die Hauptgedanken dieses Vortrages deckten sich ungefähr mit denen in einem von demselben Redner das Jahr zuvor in Görlitz gehaltenen Vortrage, der in der *Z. d. Z.*, 1894, S. 200 ff. nachgelesen werden kann. Während in Görlitz in der sich anschliessenden Debatte von verschiedenen Seiten Bedenken gegen jede Vermengung des freien und des gebundenen Zeichnens erhoben wurden (siehe a. a. O. S. 266 ff.), fand der Vortragende in Dresden bei allen seinen Fachgenossen lebhafte Zustimmung und nur von Seiten der wenigen zufällig anwesenden Mathematiker machte sich entschiedener Widerspruch geltend. Insbesondere war es Geheimrat Schlömilch, der wiederholt das Wort nahm, um in unzweideutigster Weise seiner Ansicht im Sinne des mathematischen Betriebes der Projektionslehre Ausdruck zu geben, was umsomehr hervorgehoben zu werden verdient, als er ja an der Ausarbeitung der Lehrordnung thätigen Anteil genommen hat, sodass hier gewissermassen die Meinung des Gesetzgebers in authentischer Weise zur Geltung kam.

Im folgenden Jahre, 1896, stand auf der Realschullehrer-Versammlung in Meerane u. a. von neuem der Antrag zur Beratung: „dass dem geprüften Zeichenlehrer an allen Realschulen sowohl der Unterricht im Freihandzeichnen als auch im Zirkelzeichnen übertragen werden möchte, indem dadurch, dass sich der gesamte Zeichenunterricht in einer Hand befindet, der Schüler mehr gefördert werden kann“. Diesmal gestaltete sich die Sitzung zu einer kombinierten Sitzung der technischen Lehrer und der Mathematiker.

Nach eingehender Debatte, in der von allen Seiten anerkannt wurde, dass eine Stunde Freihandzeichnen in den beiden oberen Klassen sehr knapp bemessen sei und dass in dieser Hinsicht das Bestreben der Zeichenlehrer nach Erweiterung ihrer Thätigkeit berechtigt sei, während anderseits die Wichtigkeit des Projektionszeichnens für den mathematischen Unterricht betont wurde, kam man schliesslich zu dem Beschlusse, anstatt „geometrisches Zeichnen“ die Bezeichnung „darstellende Geometrie“ zu wählen*) und die darstellende Geometrie der Mathematik zuzuweisen, dagegen in Klasse I 2 Stunden Freihandzeichnen bestehen zu lassen.

Derselbe Widerstreit macht sich übrigens auch anderwärts, insbesondere in Preussen, bemerkbar. Auch hier ist von verschiedenen Seiten (vgl. z. B. die Aufsätze von Kleinstüber und Thaer in der *Z. f. l. S.* Bd. 6, 1895) die Zusammengehörigkeit des (in Preussen wahlfreien) Linearzeichenunterrichts mit dem mathematischen Unterrichte betont worden; das ist natürlich nicht ohne Widerspruch seitens der technischen Lehrer geblieben; in besonders scharfen Worten erklärt Lehmann (im Programm des Realgymnasiums zu Halle 1896): „Das Linearzeichnen gehört einzig und allein dem Unterrichte, der heute den Namen Zeichnen führt. Liegen aber an einer Schule die Verhältnisse so, dass der Mathematiker zur Erteilung des Linearzeichnens herangezogen werden muss, dann hat der Leiter dieser Anstalt die Pflicht, darüber zu wachen, dass kein Missbrauch getrieben werde, d. h. dass der Mathematiker nicht Mathematik treibt; meinen Fachkollegen möchte ich dringend ans Herz legen, sich mit aller Kraft zu wehren gegen die Anstrengungen einiger Mathematiker, das fakultative Zeichnen an den Realschulen ganz der Mathematik zuzuweisen.“ Zum Schlusse erklärt er allerdings im Interesse der Konzentration seine Bereitwilligkeit, den Unterricht so zu gestalten, dass der Mathematiker einen gewissen Vorteil davon habe, indem er schreibt: „auch ich bin der Meinung, dass die Mathematik durch das Linearzeichnen unterstützt werden muss“. Ähnlich schreibt Assmann (*Z. d. Z.*, Bd. 27, 1900, S. 129): „Im Interesse des Unterrichts ist es wünschenswert, dass der Zeichenlehrer mit dem Mathematiker der betreffenden Klasse in Bezug auf den stereometrischen etc. Zeichenunterricht stets Fühlung nimmt.“ Dass diese Konzentration weit wirksamer und vollkommener erreicht werden könne, wenn der Mathematiker selbst das Linearzeichnen in die Hand nimmt, dürfte von keinem Unbefangenen ernstlich bestritten werden können, und ich hoffe das in meinen unten folgenden speziellen Ausführungen über den Lehrgang zu bekräftigen.

Ja, der Mathematiker kann die ihm hier so freundlich zugedachte Unterstützung nicht ohne eine gewisse Bedenklichkeit annehmen. In der Hand des Zeichenlehrers wird der Unterricht einen andern Charakter annehmen, als in der des Mathematikers, schon weil dem Zeichenlehrer in vielen Fällen diejenige gründliche mathematische Schulung abgehen wird, ohne die nun einmal ein gediegener Unterricht in der darstellenden Geometrie undenkbar ist. Es liegt eigentlich in der Natur der Sache, dass im Zeichenunterrichte das zu Zeichnende in den Vordergrund und die scharfe Begriffsbestimmung in den Hintergrund tritt, dass die Ausdrucksweise den streng mathematischen Boden verlässt und zu einer mehr künstlerischen Freiheit hinneigt, die der Mathematiker nicht mitmachen darf, wenn er nicht sich selbst untreu werden will. Schlömilch hat in der Zeitschrift des Vereines deutscher Zeichenlehrer manchmal eingegriffen, um der strengen Ausdrucksweise der Mathematik zu ihrem Rechte zu verhelfen. „Jedem Zeichenlehrer“, schreibt er einmal bei einer solchen Gelegenheit (*Z. d. Z.,* Bd. 14, 1887, S. 361), „ist schon um seiner Autorität willen die Adoption der wissenschaftlichen Terminologie anzuraten, damit er nicht Benennungen einführe, die nachher vom Mathematikus der Prima wieder abgeschafft werden“ — „vielleicht unter Beifügung einiger Seitenhiebe auf den Herrn Kollegen“ — setzt er noch etwas boshaft hinzu. Ich möchte noch bemerken, dass gelegentlich auch von Seiten der Zeichenlehrer das gebundene Zeichnen unbedingt der Mathematik zugewiesen wird. (S. z. B. Stade im Programm der Realschule zu Sondershausen, 1890.) Dass der Mathematiker leicht in die Gefahr kommen kann, vor lauter Theorie das Zeichnen bei Seite zu

*) Projektionslehre wäre vielleicht treffender gewesen, da die allgemeinen Aufgaben der darstellenden Geometrie für die Realschule kaum in Betracht kommen können.

setzen oder vielleicht überhaupt gering zu schätzen, das ist allerdings zuzugeben. Hier muss der richtige Mittelweg gefunden werden, auf dem beides zu seinem Rechte kommt.

Von besonderem Interesse war auf der Versammlung in Meerane noch die Zeichenausstellung. Man sah dort einen Lehrgang für geometrisches Zeichnen, Projektion und Perspektive, in grossem Massstabe (100×69 cm^2) mit kräftigen Linien als Wandtafelvorlagen ausgeführt. Man denke: ein Unterricht in Projektionslehre nach fertigen vor den Schülern aufgehängten Wandtafelvorlagen! Es bedarf, glaube ich, eigentlich gar keiner Worte, dass gerade in diesem Unterrichtsfache alles, was nicht einzeln an der Wandtafel und am Modell entwickelt wird, so gut wie wertlos ist; und wenn der Verfasser jener Vorlagen etwa einwenden wollte, er verfahre in seinem Unterrichte konstruktiv entwickelnd, so frage ich, wozu dann überhaupt die Vorlagen? Etwa dazu, dass sie am Schlusse der Besprechung oder in der folgenden Stunde bei der Wiederholung hingehängt werden, um die Schüler zu mehr oder weniger mechanischem Kopieren zu veranlassen? Schon die Thatsache, dass überhaupt derartige Wandtafelvorlagen angefertigt werden konnten, beweist, in welche Gefahr der Unterricht in der Projektionslehre — ich sage nicht kommen muss, aber kommen kann, wenn er in die Hände der Zeichenlehrer gerät. Aus denselben Gründen sind übrigens auch gewisse, im Buchhandel erschienene Lehrmittel, wie die von Gut herausgegebenen 20 Wandtafeln im Formate 63×81 cm^2, so schön sie auch technisch ausgeführt sind, wenigstens für unsere Schulen schlechthin zu verwerfen. Ein Lehrer, der nur einigermassen Geschick hat, an der Tafel zu zeichnen, bedarf einer derartigen Eselsbrücke nicht.

Die Lehrpläne selbst geben noch einen recht deutlichen Wink, wie der Unterricht im geometrischen Zeichnen erteilt werden soll, wenn die Lehrordnung für die Realgymnasien zum Vergleiche herangezogen wird. In der letzteren wird als Ziel der darstellenden Geometrie „Ausbildung der räumlichen Anschauung, technische Fertigkeit in der Ausführung von Konstruktionen“ aufgestellt. In der Lehrordnung für die Realschulen dagegen heisst es: „Der Unterricht im geometrischen Zeichnen bezweckt die Ausbildung der räumlichen Anschauung, sowie die technische Fertigkeit im Ausführen von Konstruktionen.“ Man sieht, dass das Ziel beidemal genau dasselbe ist. Dass die Realgymnasien bei der wesentlich grösseren Stundenzahl, die zur Verfügung steht, und bei der grösseren Reife der Schüler in den Oberklassen auf einer viel breiteren Basis arbeiten und das Ziel viel gründlicher erreichen können, als die Realschulen, versteht sich von selbst. Nun aber lesen wir in der Lehrordnung für die Realgymnasien: „Da der Unterricht in der darstellenden Geometrie im wesentlichen denselben Zweck verfolgt, wie der in der Stereometrie, so ist derselbe, wenn irgend thunlich, dem Lehrer mit zu übertragen, der den stereometrischen Unterricht erteilt.“ Das weist doch deutlich genug darauf hin, dass auch auf den Realschulen das Lehrziel durch Verbindung mit der Stereometrie am sichersten und vollkommensten zu erreichen sein wird; ja man kann behaupten, dass auf den Realschulen gerade wegen der geringen für die Stereometrie wie für das geometrische Zeichnen zur Verfügung stehenden Stundenzahl diese Verbindung um so notwendiger sei, um durch desto intensivere Konzentration wenigstens möglichst viel zu erreichen.

Aus den Erläuterungen zu dem Regulativ für Realschulen vom 2. Juli 1860, durch welches das geometrische Zeichnen zum ersten Male als obligatorischer Unterrichtsgegenstand in den damals sechsklassigen Realschulen — die sich im Laufe der Zeit zu den jetzigen neunklassigen Realgymnasien entwickelt haben — eingeführt wurde, möchte ich noch eine Stelle anfügen, da sie auch für unsere jetzigen Realschulen durchaus zutrifft: „Bezüglich des Unterrichts im geometrischen Zeichnen und der Projektionslehre wird sämtlichen Realschulen eröffnet, wie man im Sinne des Regulativs diesen Unterricht nicht als eine spezielle Vorbereitung für den Techniker angesehen wissen wolle, sondern in demselben ein weitergehendes bildendes Element für alle übrigen Berufsarten erblicke. Der Unterricht im geometrischen Zeichnen nämlich wird, namentlich wenn er wenigstens teilweis in Verbindung mit dem Unterrichte in der Geometrie gebracht wird, ... nicht nur die Fertigkeit im Gebrauche der Zeicheninstrumente hervorbringen, sondern auch den Unterricht in Geometrie wesentlich unterstützen, übrigens aber den Anschauungskreis der Schüler vorteilhaft erweitern ... Die ersten Elemente der Projektionslehre liegen aber jeder Darstellung eines Körpers zu Grunde und gewähren daher einem jeden auch erst das richtige Verständnis einer Zeichnung" (vgl. Braunersreuther, das geometrische Zeichnen als Unterrichtsgegenstand in Realschulen; Programm der Realschule zu Chemnitz 1865, S. 25).

In der That: die Schüler sollen in der Stereometrie korrekte Figuren zeichnen; sie sollen umgekehrt die Figuren des Lehrbuchs richtig zu lesen verstehen; beides bedarf eingehender Anleitung, und das geometrische Zeichnen ist es, welches diese Anleitung gewährt. Es erscheint mir in diesem Sinne nicht bedeutungslos, dass die Projektionslehre ein Jahr eher beginnt als die Stereometrie;*) man ist dadurch in der günstigen Lage, die später folgende wissenschaftlich begründete Stereometrie zeichnerisch vorzubereiten. Die Schüler bewegen sich, wenn dann die strenge Stereometrie einsetzt, bereits auf bekanntem Boden, und es ist dadurch ein wesentlich rascheres Fortschreiten möglich, als wenn jene Vorbereitung entbehrt werden müsste.

Eines Einwandes müssen wir noch gedenken, der namentlich in der Zeitschrift des Vereines deutscher Zeichenlehrer eine gewisse Rolle spielt, aber auch von anderer Seite (Krumme, Wernicke) geltend gemacht worden ist, und der darauf hinausläuft, dass die Mathematiker nach der ganzen Art ihrer Vorbildung nichts vom Zeichnen verstünden und deshalb überhaupt zur Erteilung des Unterrichtes im Linearzeichnen unfähig seien. Weder auf dem Gymnasium, noch auf der Universität, so sagt man, ist Gelegenheit, sich mit darstellender Geometrie theoretisch zu beschäftigen, geschweige denn sie praktisch zeichnend zu üben. Für die ältere Generation mag dieser Vorwurf, soweit er sich auf die Vorbildung bezieht, zutreffend sein, obwohl ich glaube, dass ein Mathematiker, der sein Studium in ernstem wissenschaftlichen Sinne absolviert hat, unbedingt befähigt sein werde, sich an der Hand eines der Fundamentalwerke in das Gebiet der darstellenden Geometrie einzuarbeiten, auch wenn er zufällig keine Vorlesung darüber gehört haben sollte, während freilich das praktische Zeichnen in solchem Falle in der Regel zu kurz kommen wird.

Aber auch der Universitätsunterricht ist in Leipzig seit etwa 20 Jahren mehr und mehr diesem praktischen Bedürfnisse gerecht geworden, wenn wir uns hier auch vielleicht noch nicht derartig vollkommener Einrichtungen erfreuen, wie sie neuerdings an der mächtig vorwärts strebenden Universität Göttingen geschaffen worden sind. (S. Klein und Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen, 1900, S. 42 ff.) Nachdem zuerst, wenn ich nicht irre, im Sommer 1880 Rohn eine Vorlesung über darstellende Geometrie in Verbindung mit synthetischer Geometrie gehalten hatte, sind regelmässig aller 2—3 Semester, mitunter sogar in noch kürzeren Zwischenräumen, Vorlesungen, meist auch mit Zeichenübungen im mathematischen Institut verbunden, abgehalten worden, die sich mit den verschiedenen Teilen der darstellenden Geometrie befasst haben, sodass wohl jeder Student der Mathematik innerhalb seiner Studienzeit mindestens zwei bis dreimal Gelegenheit gehabt hat, die darstellende Geometrie auch von der praktischen Seite her kennen zu lernen. Und das letztere ist von ganz besonderer Wichtigkeit. Der Lehrer, der einen fruchtbringenden Unterricht in der darstellenden Geometrie erteilen will, muss zuvor selbst am Reissbrette fleissig gearbeitet, womöglich einen ganzen Kursus durchgezeichnet haben, nicht etwa nur skizzierend, sondern bis ins Einzelne hinein jedes Blatt exakt ausführend und austuschend; er muss aus eigener Erfahrung heraus alle die Fehlerquellen und die Ursachen der Ungenauigkeiten kennen gelernt haben, an denen vielleicht eine mühsame Konstruktion schliesslich scheitern kann; er muss aus eigener Erfahrung mit den Hilfsmitteln zur Kontrolle der Zeichnung und mit all den kleinen Handgriffen vertraut sein, wenn er nicht infolge mangelhafter Anleitung seinen Schülern die Arbeit unnötig sauer machen und ihnen eine undankbare und unfruchtbare Aufgabe zumuten will.

Dass bei der Prüfung für das Lehramt ein ordnungsmässiges Studium an einer deutschen technischen Hochschule bis zu 3 Halbjahren dem Universitätsstudium gleichgerechnet wird, und dass an der technischen

*) Wenn Szirtes (s. *P. A.*, Bd. 40, 1898, S. 491) diese Einrichtung eine Anomalie nennt, so beurteilt er sie entschieden viel zu ungünstig.

Hochschule zu Dresden sogar eine besondere Prüfungskommission für Kandidaten des höheren Schulamtes besteht, sei nur erwähnt, um zu zeigen, dass jeder Student der Mathematik hinlänglich Gelegenheit hat, das rein abstrakte Studium durch mehr praktisch geartete Studien zu ergänzen.

Die neue Prüfungsordnung vom 19. Juli 1899 hat nun in Übereinstimmung mit der 1898 erschienenen preussischen Prüfungsordnung eine besondere Lehrbefähigung für angewandte Mathematik eingeführt, die nur in Verbindung mit der Lehrbefähigung in der reinen Mathematik erworben werden kann. Unter allen den verschiedenartigen Gegenständen, die unter dem Namen der angewandten Mathematik vereinigt sind, ist für den künftigen Gymnasial- und Realschullehrer die darstellende Geometrie bei weitem der wichtigste. Es würde vielleicht überhaupt richtiger sein, die darstellende Geometrie der reinen Mathematik anzugliedern, sodass jeder Mathematiker, auch wenn er auf die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik etwa verzichten sollte, doch genötigt wäre, sich mit der darstellenden Geometrie zu befassen. J. C. V. Hoffmann hat diese Forderung in seiner Zeitschrift zu wiederholten Malen erhoben. Man vergleiche auch die treffenden Worte von Sturm in der Vorrede zur 2. Auflage seiner „darstellenden Geometrie“.

Neuerdings ist sogar die Forderung aufgetaucht, der Mathematiker solle überhaupt den Zeichenunterricht übernehmen (S. Pietzkers Bericht über die darstellende Geometrie auf den höheren Schulen, Unterrichtsblätter Bd. 6, 1900, S. 104 f.) und er solle sich eine Lehrbefähigung für den Zeichenunterricht erwerben, die dann einer vollen wissenschaftlichen Lehrbefähigung gleichzuachten sei, sodass Mathematik, Physik und Zeichnen eine gebräuchliche Zusammenstellung von Fakultäten werde (s. Wernicke, Was verlangt die Technik von der Oberrealschule? *Z. f. l. S.,* Bd. 9, 1898, S. 177).

Die erstere Forderung hat alsbald Schröder (in demselben Hefte der Unterrichtsblätter) auf das richtige Mass zurückgeführt. Dass ein erfolgreicher Unterricht im Zeichnen nur von einem Lehrer erteilt werden könne, der in gewissem Grade künstlerisch gebildet ist, kann wohl keinem Zweifel unterliegen. Sehen wir nun ganz davon ab, dass künstlerische Begabung und anderseits Neigung für die strenge Mathematik zwei Dinge sind, die nur in Ausnahmefällen — und dass es derartige Ausnahmefälle giebt, ist ja bekannt, ich brauche nur den Namen Hildebrandt-Braunschweig zu nennen — in derselben Individualität gleichmässig vorhanden sein werden, so müsste doch noch die Frage aufgeworfen werden, welcher Mathematiker wohl nach einem 4—5 jährigen Studium seines Faches noch ein 2—3 jähriges Studium an einer Kunstschule auf sich nehmen würde. Treibt er aber beides nebeneinander, so dürfte entweder die mathematische oder die zeichnerisch-künstlerische Ausbildung dabei Schaden leiden.

Wernicke selbst hat übrigens seine Forderung dahin eingeschränkt, dass er die volle Lehrbefähigung im Linearzeichnen für ausreichend erklärt (*Z. d. Z.*, Bd. 25, 1898, S. 457 ff.), sodass natürlich in diesem Falle, der beim Mathematiker die Regel bilden wird, auch nur im Linearzeichnen unterrichtet werden darf — womit aber die Trennung des freien und des gebundenen Zeichnens wiederum konstatiert ist.

So kann man die Sache betrachten, von welchem Standpunkte man will, man wird aus theoretischen und praktischen Gründen immer wieder zu dem Ergebnis kommen, dass eine Scheidung zwischen Freihandzeichnen und darstellender Geometrie einzutreten hat, sodass die letztere dem Mathematiker zukommt, und dass der Mathematiker sich dasjenige, auch in der Staatsprüfung zu fordernde, Mass von zeichnerischer Ausbildung erwerben muss, das zur Erteilung eines guten Unterrichtes in dem genannten Fache erforderlich ist. Und so möge hier dem Wunsche Ausdruck gegeben werden, dass bei einer etwaigen Neuordnung der Lehrpläne die Abtrennung des geometrischen Zeichnens vom Freihandzeichnen auch äusserlich vollzogen werde.*)

*) Gegenwärtig liegen die Verhältnisse folgendermassen. Wir haben in Sachsen 27 vollständig ausgebaute Realschulen. An 14 Realschulen wird das geometrische Zeichnen vom Mathematiker erteilt, an einer in Klasse II vom Zeichenlehrer, dagegen in Klasse I vom Mathematiker, an 10 Schulen vom Zeichenlehrer und endlich an 2 Schulen von einem wissenschaftlichen Lehrer, der aber nicht der Mathematiker in den betreffenden Klassen ist.

II. Das geometrische Zeichnen in der 4. und 3. Klasse.

Will man in der verhältnismässig geringen Zeit, die für das geometrische Zeichnen zur Verfügung steht, etwas Befriedigendes erreichen, so muss man allerdings voraussetzen können, dass die Schüler in die 2. Klasse bereits mit einer einigermassen sicheren Zeichentechnik eintreten. Das ist ohne jeden besonderen Linearzeichenunterricht mit Leichtigkeit zu erreichen, wenn bereits im geometrischen Unterricht der vorhergehenden Klassen auf genaues Zeichnen, und zwar nicht nur mit Bleistift, sondern mit der Reissfeder gehalten wird. Bei uns sind wiederholt aus anderen Realschulen des Landes Schüler eingetreten, die aus der 3. Klasse kamen und mit der Reissfeder überhaupt noch nicht umzugehen wussten, weil sie bisher nur mit Bleistift gezeichnet hatten. Dass dort, wo das so üblich ist, dann in der 2. Klasse eine Menge kostbarer Zeit verloren geht, weil die Schüler erst zu korrektem Zeichnen angeleitet und an einen ordentlichen Reissfederstrich für die verschiedenen vorkommenden Linienarten gewöhnt werden müssen, liegt auf der Hand.

Schon in der 4. Klasse muss Sicherheit im Gebrauch der Zeicheninstrumente erzielt werden, was durchaus keinen grossen Zeitaufwand bedingt. Ein gutes Reisszeug ist die erste Bedingung, und deshalb müssen gleich in der ersten Stunde die Reisszeuge revidiert und schlechte unerbittlich zurückgewiesen werden; die zweite ist, dass eine hinreichend genaue Anleitung zum Gebrauche und zur Behandlung der Instrumente gegeben wird, wobei man auch sehr einfache Dinge nicht als selbstverständlich übergehen darf: dann kann die Ausrede „meine Reissfeder zieht nicht“ u. dergl. überhaupt nicht mehr gelten. Der Stoff zum Zeichnen ergiebt sich nun in reicher Auswahl im Anschlusse an den Lehrstoff. Ich kann mich durchaus nicht etwa für einen nur propädeutischen Kursus erwärmen, in dem nur Anschauungs- und Zeichenunterricht getrieben wird. Vielmehr soll der Unterricht von Anfang an „ein wissenschaftliches Gepräge tragen“ *), und so ist er an unserer Schule stets erteilt worden; freilich soll er auf Schritt und Tritt durch die Anschauung und die Zeichnung, insbesondere durch die vom Schüler selbst ausgeführte Zeichnung unterstützt werden. Die allerersten Übungen mit der Reissfeder werden auf ein Blatt Papier gemacht, bis die Linien glatt und gleichmässig aussehen, dann wird von Stunde zu Stunde ins Diarium gezeichnet, das deshalb gutes, festes, weisses Papier — nicht das gewöhnliche Konzeptpapier — haben muss.

Von vornherein sind die Schüler zu gewöhnen, ihre Zeichnungen erst mit fein gespitztem, nicht zu weichem Bleistift (No. 3 oder 4) vorzuzeichnen und dann erst auszuziehen, und zwar so, dass gegebene Linien fein, Hilfslinien fein gestrichelt, gesuchte Linien stark gezeichnet werden. Dabei empfiehlt es sich, möglichst viel nach gegebenen Massen von Strecken und Winkeln arbeiten zu lassen, erstens um die Schüler an genaues Messen zu gewöhnen, und zweitens wegen der Bequemlichkeit der Kontrolle. Man braucht sich ja nur die aufgegebenen Figuren auf ein Stückchen Pauspapier aufzuzeichnen, um durch blosses Auflegen auf die Schülerzeichnung alle Ungenauigkeiten mit einem Schlage übersehen und den Jungen zu Gemüte führen zu können. Warum Thaer den Transporteur aus dem Anfangsunterrichte ausschliessen will (*Z. l. S.*, Bd. 6, 1895, S. 226), ist mir nicht recht begreiflich. In den ersten Wochen muss man öfters auch in der Klasse zeichnen lassen; am Ende der Stunde, oder während der Durchsicht der Hefte finden sich immer einmal ein paar Minuten, die dazu benutzt werden können, eine kleine Zeichenaufgabe zur sofortigen Ausführung zu stellen, und man findet dabei gar oft Veranlassung, bei dem einen oder anderen einzugreifen, um ungeschickte Haltung des Zirkels, ungeeignete Führung der Reissfeder, schlechte Ausführung der gestrichelten Linien u. dergl. zu tadeln und zu verbessern. Man findet dabei hie und da einen, der an der Schattenseite des Lineals oder mit der Reissfeder am Lineal von unten nach oben zieht, weil er zu bequem ist, das Heft so zu drehen, dass er von links nach rechts im Lichte arbeiten kann. Da wir überdies schon in der 4. Klasse von Johannis ab aller 3 Wochen eine

*) Siehe die Thesen von Fink im Korrespondenzblatte für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, Bd. 40, 1893, S. 319.

Arbeit ins Reinheft fordern, so ist bei der Korrektur hinreichend Gelegenheit, zu erkennen, wer noch nicht die wünschenswerte Sicherheit erlangt hat und noch weiterer Anleitung bedarf.

Die Zeichenaufgaben sollen sich an den Lehrstoff anschliessen, wie schon oben gesagt wurde. Reihen von Dreiecken, die in zwei Stücken übereinstimmen und in einem dritten verschieden sind, und ihre Zusammenfassung in eine Figur; Umklappungen, Drehungen und Verschiebungen von Figuren; mannigfaltige Anwendungen der elementarsten Kreissätze bieten ein in vielerlei Hinsicht auszunutzendes Übungsmaterial. In der 3. Klasse stehen die Zeichenübungen im engsten Zusammenhange mit der Lösung von Konstruktionsaufgaben. Schon bei der Ausarbeitung im Diarium sind stets saubere und korrekte mit Tinte oder Tusche ausgeführte Zeichnungen mit genauer Unterscheidung der verschiedenen Linienarten zu verlangen. Sind Ungeschickte vorhanden, so werden sie sogleich im Anfange des Schuljahrs ein- oder zweimal nach Schluss des Unterrichts in eine Nachhilfestunde bestellt, und es ergiebt sich dabei in der Regel, dass durch geeignete Anleitung in kurzer Zeit fast alle Schüler zu der gewünschten Sicherheit im Gebrauch ihrer Instrumente gebracht werden können — von einzelnen Ausnahmen abgesehen, wo z. B. wegen Augenleiden u. dergl. Rücksicht genommen werden muss. — Die Determinationsfiguren, gewöhnlich jedoch nur als freiwillige Aufgaben gestellt, gewähren viel Stoff zu Übung. Mässige Anwendung von Farben wird dabei gestattet oder direkt vorgeschrieben.

Dagegen gehören nach meiner Meinung blosse Zierformen, oder wie sie in der modernen Nomenklatur des Zeichenunterrichts genannt werden, „Schönheits- und Lebensformen“ nicht in den geometrischen Unterricht. Sie mögen dem Zeichenunterrichte überlassen bleiben, wo es der Lehrplan gestattet, d. h. wo etwa der Zeichenunterricht dem Lehrgange O. Thiemes folgt. Es soll hier in keiner Weise die Streitfrage entschieden werden, ob das Freihandzeichnen von der untersten Stufe an ausschliesslich freies Zeichnen sein soll, wie Flinzer will, und wie es auch die Lehrordnung für die Realschulen fordert, oder ob von unten an Zirkelzeichnen und Freihandzeichnen parallel miteinander betrieben werden sollen, wie es O. Thieme vorschlägt und wie es auch an mehreren Realschulen des Landes üblich ist. Wer wollte leugnen, dass ein solcher Lehrgang im Zirkelzeichnen, der auf die konkrete Dekorationsform das Hauptgewicht legt und den Stoff vor allen Dingen nach ästhetischen Gesichtspunkten auswählt (Bänder, Parkettmuster, Rosetten, architektonische Formen, Profilleisten u. dergl.) sehr bildende Momente für das Stilgefühl hat und für das Verständnis architektonischer und kunstgewerblicher Gebilde klärend und fördernd zu wirken vermag? Ein solcher Unterricht hat aber mit dem geometrischen wenig oder nichts zu schaffen, und das ist auch von seiten der Zeichenlehrer selbst in den letzten Jahren wiederholt nachdrücklich betont worden.

III. Das geometrische Zeichnen in der 2. und 1. Klasse.

1. Allgemeines.

Nach dieser Abschweifung wenden wir uns zu dem in der 2. und 1. Klasse im geometrischen Zeichnen zu verarbeitenden Lehrstoffe. Die Forderungen der Lehrordnung sind schon oben angeführt worden. Bei einer Durchsicht der Programme stösst man zunächst auf die Thatsache, dass in einer nicht unbeträchtlichen Zahl von Realschulen in der 2. Klasse ausschliesslich oder vorwiegend planimetrische Konstruktionen geübt werden.*) Dabei findet man Lehrgänge, über die man ein gewisses Erstaunen nicht

*) In 5 Realschulen wird in der 2. Klasse ausschliesslich planimetrisch konstruiert, in 2 weiteren beinahe ausschliesslich, wie die Bemerkung am Ende des Lehrberichts „Übergang zur Projektion“ beweist. In 6 von diesen 7 Fällen erteilt der Zeichenlehrer den Unterricht. In 8 weiteren Realschulen werden die Stunden teils planimetrischen, teils räumlichen Konstruktionen gewidmet, — wieviel auf das eine und auf das andere kommt, ist natürlich aus den kurzen Programmberichten nicht zu ersehen. Diesen 15 Realschulen stehen 12 gegenüber, an denen die Projektionslehre das ganze Jahr hindurch getrieben wird.

unterdrücken kann, da hier ungefähr das Gegenteil von der Konzentration zu Tage tritt, die so oft als Hauptgrund für die Vereinigung der beiden Arten des Zeichnens geltend gemacht zu werden pflegt; Lehrgänge, wie sie fast in allen Leitfäden des Linearzeichnens vorkommen, beginnend mit den Fundamentalkonstruktionen: Antragen des Winkels, Errichten und Fällen von Loten, Konstruktion von Dreiecken und Vierecken aus Seiten und Winkeln, Kreiskonstruktionen, Zeichnung ähnlicher Vielecke u. dergl. Ein derartiger Lehrgang hat seinen guten Sinn für eine Gewerbeschule, deren Schüler mit sehr verschiedenem Bildungsgange, öfters direkt von der Volksschule kommen und nicht selten noch keinen geregelten Unterricht in strengem Konstruieren gehabt haben. In einer Realschule aber müssten solche Dinge, die in der vierten und dritten Klasse längst erledigt und den Schülern in Fleisch und Blut übergegangen sind oder wenigstens sein sollten, im geometrischen Zeichnen der zweiten Klasse als selbstverständliches sicheres Eigentum eines jeden Schülers vorausgesetzt werden können, wenigstens wenn der geometrische Unterricht in den Unterklassen so erteilt worden ist, dass er überall in hinreichender Weise von Konstruktionsaufgaben unterstützt wurde, wie es unsere Lehrordnung (§ 31 am Ende) ausdrücklich und mit Recht fordert. Ich vermag, falls eine derartige Vorbildung der Schüler vorhanden ist, durchaus keinen Grund einzusehen, warum nicht in der zweiten Klasse sofort mit der Projektionslehre eingesetzt werden sollte. Oder hält man die letztere für zu schwer, weil noch keine Stereometrie dagewesen ist? Dass diese Befürchtung grundlos ist, hat mich eine zwölfjährige Unterrichtserfahrung gelehrt. Freilich, Schwierigkeiten sind dabei zu überwinden, aber sie sind nicht unüberwindlich. An die geistige Thätigkeit des Schülers nicht minder wie des Lehrers werden hohe Anforderungen gestellt; vergessen wir aber nicht, dass dasjenige Wissen und Können — und auf beides kommt es hier gleichmässig an — den sichersten Besitz bildet, das in ernster Anstrengung, und nicht in tändelndem Spiele errungen worden ist.

Im übrigen spielt hier die Auswahl des Stoffes und ihre methodische Behandlung eine grössere Rolle, wie vielleicht irgend wo anders. Wir haben an unserer Schule früher einen ungemein abstrakten Lehrgang (nach Prix) gehabt, der, wie ich mich oft überzeugt habe, die Kräfte der Schüler thatsächlich überstieg. Es wurde ausschliesslich die Darstellungsweise in Grundriss und Aufriss gepflegt, jede andere Darstellungsweise war grundsätzlich ausgeschlossen. Mehr und mehr hat sich bei uns die Überzeugung Bahn gebrochen, dass sich durch Mitbenutzung der Parallelprojektion, des Schrägbildes, wie es Böttcher treffend nennt, eine weit grössere Klarheit der Anschauung und ein sichereres Fortschreiten erzielen lässt, und so hat sich allmählich ein Lehrgang ausgebildet, der sich im grossen und ganzen gut bewährt hat. Wenn ich diesen Lehrgang im folgenden nicht nur hinsichtlich des Lehrstoffes, sondern auch hinsichtlich der methodischen Behandlung etwas ausführlicher darlege, so bestimmt mich dazu vor allem die schon erwähnte Thatsache, dass man sich in vielen unserer Realschulen nicht recht an die Projektionslehre heranzuwagen scheint, vermutlich weil man sie für zu schwierig für die zweite Klasse hält. Ich möchte zeigen, dass das durchaus nicht der Fall ist.

Zu diesem Zwecke habe ich es auch für wünschenswert gehalten, das Wort durch die Zeichnung zu unterstützen, und zwar durch unmittelbare Schülerarbeiten, wie sie während des Unterrichts entstanden sind. Sie stammen aus diesem und dem vorigen Schuljahre, und zwar fast alle von verschiedenen Schülern. Die einzelnen Zeichenbogen sind durch Photographie verkleinert worden, und die so erhaltenen Bilder haben als Grundlage für die lithographische Ausführung gedient. Diese Tafeln werden ein deutlicheres Bild liefern von dem, was erstrebt werden muss und was erreicht werden kann, als es viele Worte vermöchten.

Das Mass des Erreichbaren hängt natürlich ausser vom Schülermateriale, das ja nicht alle Jahre gleichwertig ist, auch von der zur Verfügung stehenden Zeit ab. In den letzten zehn Jahren haben mir in Klasse II durchschnittlich 37 Stunden, in Klasse I, wo wegen der Abiturientenprüfung etwas eher abgeschlossen werden muss, durchschnittlich 34 Stunden zu Gebote gestanden. Die höchste Zahl in Klasse II ist 42 gewesen, die niedrigste — mit günstigenfalls 31—32 Stunden — dürfte in dem laufenden Schuljahre erreicht werden, wo infolge unglücklicher Lage der Stunde im Plane auf das ganze Sommerhalbjahr nur 11 Stunden kamen. In Klasse I ist die höchste Zahl 38, die niedrigste 32 gewesen. Dementsprechend hat die Zahl der zur Ablieferung gelangten Bogen in Klasse II zwischen 11 und 7, in Klasse I, wo man schon etwas rascher vorgehen kann, zwischen 12 und 8 geschwankt; im Durchschnitt können für Klasse II 8—9, für Klasse I 9—10 Bogen angenommen werden. Die anhangsweise beigegebenen Tafeln bleiben also der Zahl nach unter dem Durchschnitt; ich habe, namentlich bei Klasse I, einiges ausgelassen, weil die Zahl von 4 Figurentafeln, auf denen sich 16 Bogen unterbringen liessen, nicht überschritten werden sollte.

Es sind in den Schulprogrammen der letzten Jahrzehnte etliche mehr oder weniger ins Einzelne ausgeführte Lehrgänge für das stereometrische Zeichnen erschienen, für verschiedenartige Schulverhältnisse bestimmt, von verschiedenartigen Gesichtspunkten ausgehend, und jeder durch besondere Eigentümlichkeiten ausgezeichnet.

Soweit sie mir bekannt und zugänglich geworden sind, führe ich sie an:

Spangenberg, Anfangsgründe der darstellender Geometrie. Programm der höheren Gewerbeschule zu Cassel, 1858.

Fritsche, Abriss der Projektionslehre für Realschulen II. Ordnung. Jahresbericht der Realschule zu Crimmitschau, 1873.

Höllig, Grundlehren der orthogonalen Projektion von Raumgebilden nebst Anwendung. Für die unteren Klassen von Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten. Programm der öff. ev. Schulanstalten zu Oberschützen, 1881.

Hegele, Die Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie. Programm der Realschule zu Straubing, 1892.

Müller, Stereometrische Konstruktionen. Jahresbericht des Kaiser-Friedrichs-Gymn. zu Frankfurt a. M., 1893.

Buka, Grundzüge der darstellenden Geometrie für höhere Lehranstalten. Programm des Realgymnasiums zu Charlottenburg, 1894.

Schmehl, Die darstellende Geometrie in der Realschule. Jahresbericht der Realschule zu Darmstadt, 1895.

Ibrügger, Zeichnungen für den stereometrischen Unterricht. Jahresbericht des Kgl. Gymnasiums zu Greifenberg i. P., 1897.

Busch, Vorbereitender Lehrgang in der Körperlehre für IIb des Gymnasiums. Jahresbericht über das Kgl. Laurentianum zu Arnsberg, 1899.

Die meisten dieser Lehrgänge geben weit mehr, als wir bei einem nur einstündigen Unterricht in zwei Jahren verarbeiten können. Wie z. B. das, was Schmehl für einen einstündigen und einjährigen Kursus giebt, in dieser Zeit bewältigt werden soll, ist mir ganz unbegreiflich. Wenig, aber gründlich — das muss unser Wahlspruch sein. Jede Überhäufung mit Stoff auf Kosten der Klarheit und Sicherheit der räumlichen Anschauung ist unbedingt zu verwerfen. Ich möchte nun im folgenden gerade dasjenige angeben, was sich ohne Übertreibung und Überlastung als durchführbar bewährt hat, und um das Bild noch bestimmter zu gestalten, habe ich, wenigstens für die 2. Klasse, wo das Stoffgebiet am schärfsten abgegrenzt werden kann, die Anzahl der Unterrichtsstunden, die ich für die einzelnen Abschnitte aufzuwenden pflege, mit angegeben, während ich für die 1. Klasse, wo eine grosse Fülle von Stoff zur Verfügung steht, aus dem man nach Belieben die Auswahl treffen kann, eine mehr zusammenfassende Darstellung für ausreichend erachtet habe.

2. Der Lehrstoff der 2. Klasse.

Wir haben in der Regel mit einigen Vorübungen im genauen Zeichnen begonnen; als Stoff dafür sind meist die einem Kreise ein- und umbeschriebenen regelmässigen Vielecke (einschliesslich der Sternvielecke) gewählt worden, da sie wegen der mancherlei dabei zur Verfügung stehenden Kontrollen einen geeigneten Prüfstein bilden, ob die Schüler in den vorausgehenden Klassen exakt arbeiten gelernt haben. Seit einigen Jahren habe ich jedoch direkt mit der Projektion begonnen, da mir jede Stunde leid thut, die dem Hauptzwecke dieses Unterrichts entzogen wird, und da anderseits auch im Laufe des Lehrganges regelmässige Vielecke öfter als passende Beispiele verwertet werden können.

Die Streitfrage, ob mit dem Körper oder mit dem Punkte zu beginnen sei, hat mich oft beschäftigt. Jeder, der Holzmüllers vortreffliche Einführung in das stereometrische Zeichnen studiert hat, muss eigentlich zu der Überzeugung kommen, dass dieser Weg, der von dem Schrägbilde des Würfels ausgeht, für die Klärung und Bildung der räumlichen Anschauung von unschätzbarem Vorteile sein muss. Auch die Mehrzahl der im Jahre 1900 auf der Hamburger Hauptversammlung erstatteten Gutachten über den Unterricht in der darstellenden Geometrie vertritt mit mehr oder weniger Nachdruck diesen Standpunkt. Unser Lehrplan (s. o. S. 5) fordert dagegen ausdrücklich in Klasse II Darstellung von Punkten, Strecken und begrenzten Ebenen und lässt erst in Klasse I die Darstellung der Körper folgen. Hieran sind wir zunächst gebunden; mit Punkt und geraden Linien anfangen heisst übrigens noch lange nicht, mit den allgemeinen abstrakten Aufgaben der darstellenden Geometrie beginnen, und ich habe gefunden, dass man im Rahmen unserer Lehrordnung sehr gut arbeiten kann, und dass man auch hier Klarheit und Anschaulichkeit in vollem Masse erreichen kann, wenn man nur die Darstellung in Grundriss und Aufriss fortwährend begleiten lässt von erläuternden Bildern in Parallel-Projektion, die Punkt für Punkt in genauer Übereinstimmung mit den Grund- und Aufrisszeichnungen sein müssen, sodass man sie gewissermassen als gezeichnete Modelle betrachten könnte.

Als Einleitung empfiehlt es sich, die Schüler mit dem Begriffe der Projektion (wir gebrauchen in der 2. Klasse dieses Wort der Kürze halber nur in dem Sinne der senkrechten Projektion) an einigen planimetrischen Beispielen vertraut zu machen; wobei zugleich der Gebrauch von Reissschiene und Winkeldreieck einzuüben ist: Projektion eines Punktes auf eine wagerechte Gerade, wenn er oberhalb, unterhalb, auf der Geraden liegt; dann die Projektion einer Strecke in verschiedenen Lagen, die dabei eintretende Verkürzung mit ihren beiden Grenzfällen. Es wird durch Anwendung einfacher Sätze aus der 3. Klasse gezeigt, dass der Halbierungspunkt einer Strecke sich wieder als Halbierungspunkt projiziert, dass auch eine Teilung im Verhältnis 2 : 3 auf der projizierten Strecke wiederkehrt. Es folgt die Projektion einer geschlossenen Figur, eines Vielecks, eines Kreises u. dergl., wobei man eine doppelt überdeckte Strecke erhält. Die Projektion der Seiten eines Vielecks auf eine seiner Diagonalen liefert die gleichzeitig im geometrischen Unterricht zu besprechende Zerlegung des Vielecks in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, mittelst deren man die Inhaltsbestimmung des Vielecks auszuführen pflegt. Es sind ferner Beispiele dafür zu geben, dass ein Punkt gleichzeitig auf mehrere Gerade projiziert werden kann. Wir nehmen die Geraden beliebig an, können die Aufgabe aber auch in der Form stellen: Einen Punkt auf alle Seiten eines Vielecks zu projizieren. Insbesondere darf die Projektion eines Punktes, einer Strecke oder eines Dreiecks u. dergl. auf zwei zu einander senkrechte Gerade nicht fehlen, um die Vorstellung von Grundriss und Aufriss vorzubereiten. Verschiedene Beispiele aus der Geometrie lassen sich anschliessen, ich erinnere an die Deutung der Höhenabschnitte eines Dreiecks als Projektionen der Seiten aufeinander. Alle diese Übungen, die das erste Blatt füllen, nehmen einschliesslich des Zeichnens und Austuschens 3 Lehrstunden in Anspruch. Sie bilden für die entsprechenden Vorkommnisse im Raume eine gute Vorbereitung und für die folgenden schwierigeren Betrachtungen einen sicheren Unterbau.

Das zweite Blatt behandelt die Projektion auf eine Ebene. Um zuvörderst den Begriff der Ebene festzustellen, genügt es, anschaulich zu zeigen, dass eine Fläche eben ist, wenn jede durch zwei ihrer Punkte gelegte Gerade ganz in ihr liegt, indem man etwa wie der Tischler ein Lineal auf die Wandtafel an verschiedenen Stellen auflegt, wobei sich in der Regel herausstellt, dass die Tafel nicht eben, sondern in irgend einer Richtung krumm gelaufen ist — ein Gegensatz, der um so wirksamer den Begriff klarzulegen vermag.

Wir besprechen nun die Schrägdarstellung einer horizontalen rechteckig begrenzten Ebene. Den Ausgangspunkt bietet die schon in der vierten Klasse im Freihandzeichnen nach dem Augenmasse geübte perspektivische Darstellung nach Stabmodellen, z. B. die Grundfläche eines Würfels in Frontalstellung. Wir zeichnen sie zunächst mit der dabei auftretenden perspektivischen Verkürzung hin; halten dann ein Reissbrett horizontal vor die schwarze Wandtafel. Welches Stück derselben erscheint einem etwas entfernt stehenden Beobachter verdeckt? Dieses verdeckte Stück ist das Bild des Rechtecks. Bei der zeichnerischen Darstellung sehen wir nun davon ab, dass die hintere Seite kürzer erscheint als die vordere; je entfernter man steht, um so geringer erscheint ja der Unterschied zwischen beiden. Wir bilden also wegen der bequemeren Zeichnung das horizontale Rechteck geradezu als ein Parallelogramm ab — eine Darstellungsweise, die an Schattenbildern im Sonnenlichte zu erläutern ist, wobei die verschiedenen Winkel und Verkürzungen, unter denen die von vorn nach hinten gehenden Seiten erscheinen können, in gehöriger Weise berücksichtigt werden müssen. Nun wird der Zeichen-Bogen eingeteilt und die begrenzte Ebene als Parallelogramm etwa sechsmal gezeichnet; die spitzen Winkel werden zu 30°, 45° oder 60° angenommen, was jedem Schüler freigestellt wird.

Nun soll ein Punkt auf eine Ebene projiziert werden. Zu diesem Zwecke ist erst der Begriff des Lotes auf einer Ebene zu gewinnen. Ein rechtwinkliges Dreieck wird mit einer Kathete auf ein Reissbrett aufgesetzt; die andere Kathete kann dann noch unbeschränkt viele Lagen annehmen, da das Dreieck um die erste Kathete gedreht werden kann. Ein zweites Dreieck, das man mit seinem rechten Winkel in demselben Punkte aufsetzt, kann für sich dieselbe Mannigfaltigkeit der Lagen annehmen. Zwingt man aber die beiden freien Katheten zusammen, so hält die eine die andere fest, vorausgesetzt, dass die beiden Grundkatheten miteinander einen Winkel bilden, der von 180° verschieden ist. Jetzt sagen wir, die Gerade (die gemeinsame Kathete) stehe auf der Ebene senkrecht, und wir haben so auf rein anschaulichem, aber für die vorliegenden Zwecke völlig ausreichendem Wege den Satz gewonnen, dass eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, wenn sie auf zwei ihrer Fusspunktlinien senkrecht steht. Durch Zufügung eines dritten und vierten Dreiecks wird ferner noch dargelegt, dass ein solches Lot auf allen Geraden senkrecht steht, die man durch seinen Fusspunkt in der Ebene legen kann. Wie muss nun dieses Lot in unserm Schrägbilde der Ebene dargestellt werden? Die Vergleichung mit den senkrechten Kanten des Drahtwürfels und mit deren Bild lehrt alsbald, dass wir jedes Lot auf der horizontalen Ebene senkrecht nach oben mit Reissschiene und Winkeldreieck zu zeichnen haben, woraus überdies noch folgt, dass die Bilder mehrerer Lote untereinander parallel sind. In der ersten Figur stellen wir nun die beiden oben erwähnten rechtwinkligen Dreiecke dar; es ist dabei noch festzustellen, dass ihre rechten Winkel im allgemeinen nicht als rechte Winkel erscheinen. Das Lot wird unterhalb der Ebene fortgesetzt, sodass sie die Ebene durchsticht oder durchdringt (Veranschaulichung durch ein Blatt Papier und eine Stricknadel). In der Zeichnung tritt hier zum ersten Male eine unsichtbare Linie auf, für deren Darstellung die Punktstrichmanier für alle Zukunft festgesetzt wird.

Wie ist nun die Projektion eines Punktes auf die Ebene in dem Schrägbilde darzustellen? Nachdem die Projektion eines Punktes auf eine Ebene definiert und am Modell erläutert ist, nehmen wir über dem Schrägbilde der Ebene einen Punkt A an, der das Bild eines Raumpunktes sein soll. Das Lot kann sofort gezeichnet werden, dagegen ist sein Fusspunkt nicht bestimmt, wenn nicht noch eine Angabe hinzugefügt wird: die Angabe der Höhe des Punktes über der Ebene. Weiss man, dass er 10 oder 10,5 cm hoch liegt, so ist der Endpunkt A' des von A auf die Ebene gefällten Lotes bestimmt. Nun werden alle Zeichnungen nach bestimmten Höhenmassen an der Wandtafel ausgeführt (während bei der Ausführung auf dem Reissbrette sich jeder die Höhen selbst wählen darf): ein Punkt unterhalb der Ebene, eine zur Ebene senkrechte, eine zu ihr parallele Strecke, eine geneigte Strecke. Die erstere giebt eine unverkürzte, die zweite eine verkürzte Strecke als Projektion. Im ersten Falle sind die Projektionslote gleich, im andern ungleich. Im letzteren Falle entsteht die Aufgabe, den Durchdringungspunkt der verlängerten Strecke zu bestimmen, wenn zu der Strecke AB ihre Projektion gezeichnet ist. Diese Aufgabe ist vollständig bestimmt. Es tritt hier zum ersten Male eine Ebene auf, die auf einer andern senkrecht steht. Die Gerade wird nun über den Durchdringungspunkt hinaus verlängert und ihre Verlängerung von unten nach oben auf die Ebene projiziert. Bei dieser, wie bei anderen Gelegenheiten wird darauf hingewiesen, dass die Projektionsebene auch über die von uns willkürlich angenommene Begrenzung hinaus fortgesetzt werden kann, ohne dass die Konstruktion deshalb unbestimmt wird. Es folgen Kombinationen von Strecken: zwei parallele, deren Projektionen wieder parallel sind (oder im Grenzfalle sich decken), zwei sich schneidende Gerade, wobei man zuerst den Schnittpunkt und dann von jeder Geraden noch einen Punkt zu projizieren hat, während für die weiteren Punkte die Konstruktion völlig bestimmt ist. Hält man die eine der beiden Geraden fest und rückt die andere ein Stück nach unten, so erhält man zwei windschiefe Gerade CD und FG, die sich im allgemeinen als zwei sich schneidende Gerade projizieren. Ein Dreieck in verschiedenen Lagen zur Projektionstafel: senkrecht, parallel, geneigt, schliesst die Reihe dieser Vorübungen in zweckmässiger Weise ab. Dabei sind an der fertigen Zeichnung noch verschiedene sehr wichtige und bildende Übungen vorzunehmen: welche Ecke liegt am höchsten, welche am tiefsten, welche am weitesten vorn, welche am meisten zurück? Halte das Holzdreieck so, dass seine Lage mit der in der Figur dargestellten Lage übereinstimmt! u. dergl. Ferner ergiebt sich der wichtige Satz: jede zur Projektionstafel parallele ebene Figur projiziert sich in wahrer Grösse und Gestalt. Zieht man in dem Raumdreieck eine Transversale AD, so ist deren Projektion nunmehr völlig bestimmt, da die Projektion von D auf $B'C'$ liegen muss. Insbesondere wird sich eine Mittellinie wieder als Mittellinie projizieren. Andere Beispiele, die hier noch zur Besprechung kommen können, sind die Projektion eines Parallelogrammes, das aus zwei parallelen und gleichen Strecken abgeleitet wird, die sich wieder als zwei parallele und gleiche Strecken projizieren werden, wobei ferner dem Diagonalenschnittpunkt der Raumfigur wieder der Diagonalenschnittpunkt der Projektion entsprechen muss — ferner die Projektion eines Vier- oder Fünfecks, wo die Konstruktion zeigt, dass nur für 3 Punkte die Höhen willkürlich festgesetzt werden dürfen, während für jeden weiteren Punkt die Projektion (vermittelst Diagonalen) exakt konstruiert werden kann. Hierdurch wird der Satz, dass eine Ebene durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmt ist, auf konstruktivem Wege bewiesen oder wenigstens vorbereitet. Ein Zeichenbogen reicht nicht aus, um alle diese Beispiele zur Darstellung zu bringen. Wir treffen also eine Auswahl und behalten uns die übrigen Fälle für die Darstellung in Grundriss und Aufriss vor.

Die Besprechung und Lösung dieser Aufgaben nimmt etwa 4 Stunden in Anspruch; in besonders günstigen Jahrgängen ist das bisherige Pensum bis Pfingsten erledigt gewesen, sodass der zweite Bogen in den Ferien ausgetuscht werden konnte. Für das Austuschen gilt hier die Regel, dass alle im Raume liegenden Linien rot, alle in der Ebene liegenden schwarz zu zeichnen sind.

Jetzt erst, nachdem in diesen Dingen volle Klarheit und Sicherheit erzielt ist, geht es an die Darstellung in Grundriss und Aufriss. Dass zu einem Punkte A' der Projektionstafel unbeschränkt viele Raumpunkte gehören und dass die Höhe des Raumpunktes über oder unter der Projektionstafel gegeben sein muss, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, darauf hat man in den bisherigen Stunden oft genug hinweisen können. Die Aufrisstafel wird nun eingeführt zu dem Zwecke, diese Höhenangabe für jeden einzelnen Punkt zu liefern.

Nachdem am Modelle die Lage der beiden Tafeln im Raume sowie in der Aufklappung klar gemacht worden ist, fügen wir in der Schrägansicht der Grundtafel, die wie bisher gezeichnet wird, die Aufrisstafel hinzu, die, da sie parallel zur Bildtafel liegt, als ein Rechteck in unveränderter Grösse darzustellen ist. Daneben werden die beiden Tafeln in der Aufklappung wiederholt. Da die gegenseitige Beziehung zwischen diesen beiden Lagen gar nicht gründlich genug eingeübt werden kann, so teilen wir den dritten Bogen in 6 Felder, in deren jedem die doppelte Darstellung als Grundlage für die folgenden Figuren zu wiederholen ist. Um alle Längenmasse aus der einen in die andere ohne Weitläufigkeiten übertragen zu können, nehmen wir im Schrägbilde das Verhältnis 1 : 1 an, d. h. wir zeichnen die von hinten nach vorn laufenden Linien in wahrer Grösse. Wir haben nun drei Achsen in der Figur, die eigentliche Projektionsachse OZ, die die beiden Tafeln von einander trennt, ferner OX senkrecht auf der Grundrisstafel und OY senkrecht auf der Aufrisstafel; es muss von vorn herein Klarheit darüber geschaffen werden, dass jede auf der Grundrisstafel senkrechte Gerade parallel zu OX, jede auf der Aufrisstafel senkrechte parallel zu OY gezeichnet werden muss. Wir beschränken uns vorläufig auf den ersten Quadranten. Die Erweiterung der beiden Ebenen kommt erst dann in Betracht, wenn es sich um die Spuren einer Geraden handelt, und bis dahin sparen wir uns die Verallgemeinerung auf.

Erst wenn diese Vorbereitungen gründlich gethan sind, gehen wir an die Aufgabe, einen Punkt A auf beide Tafeln zu projizieren. Wir finden zunächst am räumlichen Modell die Lote AA' und AA'', die angeben, wie hoch, und anderseits wie weit nach vorn der Punkt A liegt. Ihnen entsprechen in den beiden Tafeln die Lote A_0A'' und A_0A', die beim Aufklappen allein übrig bleiben. Wie erscheint das Ganze in unserem Schrägbilde? Wir zeichnen nach bestimmten Massen, etwa (an der Wandtafel) Höhe 25 cm, Vorderabstand $13^1/_2$ cm und tragen zuerst die Strecken $A_0A'' \parallel OX$ und $A_0A' \parallel OY$ ein; die Ergänzung des Linienzuges $A'A_0A''$ zum Parallelogramm giebt die Ansicht des Raumpunktes. Für die aufgeklappten Tafeln ergiebt sich nun der wichtige Satz, dass stets $A'A'' \perp OX$ liegt. Ein strenger stereometrischer Beweis hierfür kann natürlich auf dieser Stufe nicht geführt werden, ist aber auch kaum nötig. Viele Zahlenbeispiele folgen nun, um diese Fundamentalbegriffe sicher zu stellen; wie ändert sich der Aufriss, wenn der Punkt A um 12 cm nach oben oder nach unten rückt; was ändert sich, wenn der Punkt A um 5 cm nach vorn oder wenn er um $7^1/_2$ cm nach hinten geschoben wird, wieviel Punkte von 6 cm Höhe und 8 cm Vorderabstand giebt es, und wo liegen sie? Senke den Punkt A bis in die Grundrisstafel, oder schiebe ihn nach hinten, bis er in der Aufrisstafel liegt! Derartige Übungen dienen dazu, um Sicherheit in den Grundbegriffen zu erzielen.

Als sehr nützlich hat sich dabei ein durchbrochenes Modell der beiden Projektionstafeln erwiesen; die Grenzlinien sind durch schmale Blechstreifen dargestellt, das Rechteck $A_0A'AA''$ durch starke Drähte; die beiden projizierenden Lote AA' und AA'' sind rot, alles andere weiss lackiert. Im Sonnenlicht giebt der Schatten dieses Modells, wenn es in geeigneter Weise vor ein Reissbrett gehalten wird, genau das Schrägbild, wie wir es in der ersten Figur gezeichnet haben.

Mindestens zwei Unterrichtsstunden sind so vergangen, ehe wir dazu übergehen, das Gelernte zeichnerisch auf dem Reissbrette zu fixieren. Als Übungsmaterial für die Zeichnungen des dritten Blattes dienen ausser dem Punkte Strecken in verschiedenen Lagen zu den Projektionstafeln. Überall ist streng darauf zu halten, dass die Darstellung im reinen Grundriss und Aufriss mit dem Schrägbilde den Längenmassen nach genau übereinstimmt. Wir gehen dabei bald von der ersteren, bald von der letzteren Darstellungsweise aus, um die Einsicht in diese gegenseitigen Beziehungen zwischen beiden zu fördern. Auf die Fertigstellung des dritten Blattes sind 5 Lehrstunden zu rechnen.

Wir wenden uns zur Darstellung ebener Figuren. Drei Punkte, die zunächst jeder für sich in der oben besprochenen Weise dargestellt worden sind, führen ungezwungen zum Dreieck in allgemeinster Lage. Auch hier muss zunächst unermüdlich geübt werden, aus der Lage der Projektionen, erst am Schrägbilde, dann aber auch, ohne das Schrägbild zu konstruieren, direkt am Grundriss und Aufriss, auf die Lage der Ecken im Raume zu schliessen; aus dem Grundriss wird abgeleitet, welcher Punkt am weitesten zurück, welcher am weitesten vorn liegt, aus dem Aufriss wird ebenso auf die Höhe der einzelnen Ecken geschlossen und dann ein Dreieck ABC in der Luft so gehalten, wie es der Darstellung entspricht.

Das sind einfache Dinge, und doch fallen sie dem Schüler anfangs durchaus nicht leicht. Sie sind aber ungemein wichtig, wenn die Raumvorstellung der Schüler so geklärt werden soll, dass sie mit vollem Verständnis zeichnen.

Wir benutzen nun das Dreieck, um ein paar Lagenveränderungen daran zur Darstellung zu bringen. Die einfachste Lagenveränderung ist die Verschiebung. Es wird abgezählt, wieviele Arten von Verschiebungen im Raume möglich sind; es ergeben sich 6 einfache: nach rechts, links, oben, unten, vorn, hinten. Es können aber auch zwei dieser Verschiebungen kombiniert werden. Das Gesetz vom Parallelogramm der Bewegungen, das in der Physik unterdes dagewesen ist, bietet die Handhabe dazu; es ergeben sich 12 Doppelverschiebungen (*r. o., r. u., r. v., r. h.* und so fort), und überdies noch 8 dreifache Verschiebungen (*r. o. v., r. o. h.* und so weiter). Einige davon werden an der Wandtafel besprochen, dann wird für das vierte Blatt eine entsprechende Aufgabe gestellt: die 6 einfachen Verschiebungen müssen alle Schüler zeichnen, dazu noch zwei doppelte und zwei dreifache nach freier Wahl — mit Ausschluss jedoch der an der Tafel besprochenen Fälle. Unter jede Figur muss geschrieben werden, welche Verschiebung dargestellt sein soll. Was das Austuschen betrifft, so ziehen wir die gegebenen Dreiecke nebst den zugehörigen Verbindungsloten schwarz, die verschobenen rot kräftig aus, die Verschiebungswege werden am besten als feine farbige Linien gezeichnet. In 3 (ausnahmsweise 4) Stunden ist dieses Blatt fertig gestellt.

Mehr Mühe macht die folgende Gruppe der Lagenveränderungen, die Drehungen. Wir betrachten zur Vorbereitung die Drehung eines Punktes um irgend eine Gerade als Achse, indem wir etwa aus Pappe ein Dreieck so ausschneiden, dass eine seiner Seiten über beide Enden verlängert ist. Diese Seite stellt die Drehungsachse, die dritte Ecke den gedrehten Punkt dar. Derselbe beschreibt einen Kreis im Raume, dessen Mittelpunkt auf der in Ruhe bleibenden Achse liegt, und dessen Radius sich als Abstand des Punktes von der Achse erweist. Es wird festgestellt, dass dieser Kreis nur in der Richtung der Achse gesehen als Kreis erscheint, und dass man in dieser Richtung blickend auch den Drehungswinkel in richtiger Grösse erblickt, während das Auge senkrecht auf die Drehungsachse blickend den Kreis nur als eine Strecke, die Drehbewegung nur als eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung wahrnimmt. Bei den Zeichnungen beschränken wir uns selbstverständlich auf die beiden einfachsten Fälle, dass die Drehungsachse auf einer der beiden Tafeln senkrecht steht. Das Konstruktionsverfahren ergiebt sich nunmehr einfach aus der vorigen Betrachtung. Als Übungsstoff sind hier die regelmässigen Vielecke in mannigfaltigen Variationen, sowie der Kreis sehr geeignet. Bei der Drehung des letzteren wird nicht versäumt, zwei parallele Tangenten nebst der zugehörigen Sehnenschar und dem Berührungsdurchmesser mit zu projizieren. Die entsprechenden Ellipsentangenten finden wir durch die Erwägung, dass alle Punkte der Drehungsachse bei der Bewegung ihren Ort im Raume nicht ändern, dass also entsprechende Gerade der ursprünglichen und der gedrehten Figur sich auf der Achse schneiden müssen. Der Zeitbedarf zur Ausführung dieses Blattes ist schon wegen der verwickelteren Zeichnungen auf 5—6 Stunden anzuschlagen.

Projektion auf mehr als zwei Ebenen ist das Thema des folgenden Blattes (s. Blatt 6). Wir beginnen mit dem Seitenriss. Auch hier schliesst sich an die Betrachtung des Modelles, das jeder Schüler aus Papier gefertigt stets zur Stelle haben muss, zuerst die Darstellung des Eckraumes im Schrägbilde, und dann in der Aufklappung. Da die Seitenebene ebensowohl links als rechts angesetzt und sowohl in die Grundriss- als in die Aufrisstafel umgelegt werden kann, so ergiebt sich, dass von den vier Vierteln, in die die Ebene nach der Umlegung durch die beiden aufeinander senkrechten Projektionsachsen geteilt wird, immer je ein Feld freizubleiben hat. Alle vier Möglichkeiten werden erörtert, und den Schülern dann die Wahl bei den Zeichnungen frei gestellt. Bei den Konstruktionen handelt es sich darum, den dritten Riss zu bestimmen, wenn zwei gegeben sind — die gegebenen brauchen nicht immer Grundriss und Aufriss zu sein. Als Übungsbeispiele dienen ebene Figuren, u. a. auch solche, deren Ebene auf den beiden ersten Projektionstafeln senkrecht steht, und die nun in der dritten in wahrer Grösse konstruiert werden können.

Es lässt sich hier auch, falls genügende Zeit vorhanden ist, ein Beispiel geben für die Drehung einer Figur um eine Achse, die auf der Seitenebene senkrecht steht.

Nun verallgemeinern wir die frühere Betrachtung. Nehmen wir die Grundrisstafel als Hauptebene, so kann auf ihr in jeder beliebig gegebenen Geraden eine Ebene aufgerichtet und diese als dritte Projektionsebene betrachtet werden. Man betrachtet das in Grundriss und Aufriss gegebene Gebilde in der Richtung nach dieser dritten Ebene, und da die Höhe jedes Punktes aus dem Aufriss bekannt ist, so kann man die dritte Projektion ohne Schwierigkeit finden. So ist z. B. in der 5. Figur des 6. Blattes der Aufrisspunkt A'' die Ansicht aus der Richtung PQ, A''' die Ansicht desselben Punktes aus der Richtung RS u. s. w. Man erhält auf diesem Wege z. B. in neuer Form die Projektion des Kreises auf eine geneigte Ebene (Fig. 6) Man kann die Konstruktion aber auch umkehren: der Grundriss und die dritte Projektion einer Figur ist gegeben: man soll ihren Aufriss bestimmen. Wählt man einen Kreis, der der 3. Tafel parallel liegt, so wird er sich jetzt im Aufriss als Ellipse darstellen (Fig. 7). Weitere Beispiele, die natürlich nicht in jedem Jahre alle ausgeführt werden können, sind: eine Gruppe von Zeichnungen des Quadrates, sodass in der Umlegung entweder eine Seite, oder eine Diagonale, oder keins von beiden parallel zu der Achse der dritten Projektion ist — oder die Projektion eines Vielecks, wobei nur 3 Punkte willkürlich angenommen werden dürfen, während für die übrigen der Grundriss in bestimmter Weise zu konstruieren ist, wenn der Aufriss gegeben ist, — und umgekehrt. Dann folgt noch die Projektion des Vielecks auf eine weitere senkrechte Ebene (Fig. 8). Die Affinitätsgerade für je zwei benachbarte Projektionen wird zur Probe der Zeichnung benutzt, aber beim Austuschen weggelassen, um eine Überladung der Figur mit Linien zu vermeiden.

Dass man eben so leicht Ebenen benutzen kann, die auf der Aufrisstafel senkrecht stehen, die dann in die letztere umgelegt werden, versteht sich von selbst. Der Zeitbedarf für alle diese Übungen beläuft sich auf 5—6 Stunden.

Erst jetzt, nachdem durch alle diese Besprechungen und Zeichnungen das räumliche Anschauungsvermögen einigermassen geweckt ist, gehen wir zu der abstrakteren Aufgabe über, die wahre Grösse einer Strecke entweder durch Umlegung in eine der beiden Tafeln (womit zugleich die Bestimmung der Spuren der verlängerten Strecke verbunden wird), oder anderseits durch Drehung parallel zu einer der Tafeln zu bestimmen. Was die erstere Lösung betrifft, so halte ich es fürs beste, von einer Strecke AB auszugehen, die sich mit ihren beiden Enden A und B an die Projektionsebenen anlehnt, ihre Projektion zuerst am räumlichen Modell, dann im Schrägbilde, endlich in der Aufklappung darzustellen, ferner auf ihr durch zwei Punkte C und D eine Teilstrecke zu begrenzen und sie ebenfalls zu projizieren. Nun werden die beiden projizierenden rechtwinkligen Dreiecke ebenso wie die zu CD gehörigen Trapeze in die Tafeln umgelegt, dann wird umgekehrt die Strecke CD als gegeben betrachtet und bis an die Spurpunkte verlängert. Bei der Lösung dieser Aufgabe ergeben sich nun je nach der Lage von $C'D'$ und $C''D''$ auch diejenigen Fälle, bei denen eine der Spuren in dem unsichtbaren Teil der einen Tafel liegt, sodass eine Verlängerung einer der beiden Tafeln über die Projektionsachse hinaus erforderlich wird. Es darf nicht versäumt werden, die Lage der Geraden in diesen Fällen durch Profilzeichnungen zu erläutern.

Bei hinreichender Zeit ergiebt sich als naheliegendes Übungsbeispiel die Bestimmung der wahren Grösse eines Dreiecks, indem man die Länge jeder Seite durch Umlegung der projizierenden Trapeze ermittelt und dann das Dreieck aus den Seiten zeichnet. Dagegen habe ich die andere Lösung dieser Aufgabe, die auf der Umlegung des ganzen Dreiecks um eine seiner Spuren gegründet ist, nur bei besonders günstigen Jahrgängen durchgeführt.

Schwieriger einzusehen ist die Bestimmung der wahren Grösse einer Strecke durch Paralleldrehung. Zunächst sind die Bedingungen zu wiederholen, unter denen sich eine Strecke in einer der Tafeln in wahrer Grösse darstellt. Um die Drehung selbst zu erläutern, benutzen wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Strecke darstellt und dessen eine Kathete, die als Drehungsachse dienen soll, entweder senkrecht zur Aufrisstafel, oder senkrecht zur Grundrisstafel gestellt wird. Erst stellen wir die volle Drehung um 360° dar, halten das Dreieck dabei in denjenigen Lagen an, in denen die eine Projektion der Hypotenuse in wahrer Grösse erscheint, und leiten dann daraus die Lösung der gestellten Aufgabe ab.

Hiermit ist das für die 2. Klasse vorgeschriebene Pensum erledigt. Es ist wünschenswert, die Behandlung des Stoffes so zu gestalten, dass noch 6—8 Stunden erübrigt werden zur Behandlung einiger Kegelschnittkonstruktionen. Die Ellipse ist schon wiederholt als Projektion des Kreises aufgetreten. Durch ein paar Proportionen kann man beweisen, dass dabei stets alle zu einem Kreisdurchmesser senkrechten Sehnen in gleichem Verhältnis verkürzt werden. Das kann direkt zur Konstruktion der Ellipse benutzt werden, indem man die Verkürzung etwa mittelst eines Proportionalmassstabes (in Form eines gleichseitigen Dreiecks, dessen eine Seite durch eine Transversale in dem gegebenen Verhältnis geteilt wird) ausführt. Die Konstruktion der Ellipse mittelst der beiden konzentrischen Achsenkreise ist nur eine andere Form der letzten Konstruktion. Auch die Ellipse als Schrägbild des Kreises ist unschwer aus den früheren Konstruktionen abzuleiten. Man braucht nur einen in der Grundrisstafel liegenden Kreis so wie bei den Figuren auf Blatt 3 ins Schrägbild zu übertragen; das bedeutet geometrisch nichts anderes als die Schräglegung der auf einem Durchmesser senkrechten Sehnen — zunächst ohne Verkürzung, dann auch mit einer beliebigen Verkürzung. Statt des Proportionalmassstabes kann natürlich in bekannter Weise ein System ähnlicher Dreiecke benutzt werden, die über den halben Kreissehnen gezeichnet werden. Ein zweckmässiges Modell zu allen diesen Konstruktionen kann man sich verschaffen, wenn man aus nicht zu feiner Drahtgaze einen Kreis ausschneidet und auf ihn einen Durchmesser nebst einer Schar senkrechter Sehnen mit dunkler Lackfarbe aufmalt. Im Sonnenlichte veranschaulicht der Schatten des Kreises die verschiedenen eben erwähnten Konstruktionsweisen. Drückt man anderseits das Gewebe zusammen, sodass die Fäden des Drahtgewebes schief zu einander stehen, so wird dadurch eine neue Entstehungsweise für die 2. Figur des 8. Blattes erläutert.

Wenn die bisherigen Konstruktionen sich an die Projektionslehre anknüpfen liessen, so sind die nun folgenden unabhängig davon; ja man kann hier mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht einmal beweisen, dass die jetzt konstruierten Kurven wirklich Ellipsen sind. Dennoch dürfen wir nicht darüber hinweggehen, ist doch hier die einzige Gelegenheit, einige wichtige Eigenschaften der Kegelschnitte, die für das Verständnis gewisser physikalischer Erscheinungen von Bedeutung sind, abzuleiten; — obwohl die Lehrordnung für die Realschulen nichts davon sagt, haben wir in den speziellen ausführlichen Lehrplan unserer Schule die Forderung aufgenommen: „Sätze über die Ellipse (Parabel, Hyperbel)". Die Schüler sollen u. a. unsern Ellipsenzirkel verstehen lernen und müssen deshalb diese Konstruktion, am einfachsten mittelst eines Papierstreifens, auf dem die Endpunkte der sich auf den beiden winkelrechten Geraden bewegenden Strecke markiert sind, einmal ausführen. Es werden sowohl Punkte innerhalb als ausserhalb der Strecke verfolgt; für die wirkliche Ausführung auf dem Blatte wird aber nur eine Ellipse verlangt. Zum andern ist die Konstruktion aus der grossen Achse und den Brennpunkten von Wichtigkeit, weil hier mit ganz elementaren Mitteln bewiesen werden kann, dass die Brennstrahlen nach dem Berührungspunkte einer Tangente mit dieser gleiche Winkel bilden; das Reflexionsgesetz ist kurz zu erörtern, wodurch zugleich der Name Brennpunkt gerechtfertigt und das Verständnis der sog. Flüstergewölbe u. dgl. erschlossen wird. In der Regel bleibt noch Zeit, die Parabel und die Hyperbel zu konstruieren und die entsprechenden Reflexionssätze zu begründen, um u. a. die parabolischen Hohlspiegel zu erklären. In langen Schuljahren kann man auch noch einen Schritt weiter gehen und den Satz beweisen, dass der Ort für die Fusspunkte der von einem Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Lote der Kreis ist, der die grosse Achse als Durchmesser hat (bez. bei der Parabel die Scheiteltangente), und dann die Lösung einer Reihe von Aufgaben anknüpfen, die sich auf Konstruktion der Tangenten von einem Punkte ausserhalb der Kurve u. dgl., sowie auf Konstruktion der Kurven durch Umhüllung beziehen.

3. Der Lehrstoff der 1. Klasse.

In der 1. Klasse handelt es sich zuerst um die Darstellung einfacher Körper. Es werden geeignete Typen der wichtigsten Körperarten: Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel gewählt, wobei von vorn herein darauf Rücksicht genommen wird, die später in der Stereometrie erforderlichen Definitionen sofort in der geeigneten Form festzustellen. Die Beispiele selbst können natürlich sehr verschieden gewählt werden, und man kann alle Jahre wechseln; die Blätter 9—16 wollen daher nur als Beispiele aufgefasst sein. Über die Gesichtspunkte, die bei der Ausführung massgebend sind, sei noch folgendes erwähnt. Die Körper werden in der Regel nicht nur in Grundriss und Aufriss, sondern noch auf eine dritte Ebene projiziert, die so zu wählen ist, dass sich möglichst wenig Linien decken — oder es wird durch eine oder mehrere Drehungen eine allgemeine Ansicht des Körpers gewonnen. Die sichtbaren Kanten werden kräftig ausgezogen, die unsichtbaren punktiert-gestrichelt.

So viel als möglich sollen die Schrägbilder mit gezeichnet werden, und zwar sind sie stets durch strenge Konstruktion aus Grundriss und Aufriss abzuleiten. Dabei halte ich es weder für notwendig noch für zweckmässig, ein für alle mal eine bestimmte Schablone (z. B. 30^0 und Verkürzung $1:3$) vorzuschreiben, es soll vielmehr jeder Schüler von demselben Körper mehrere verschiedene Bilder liefern, z. B. das Rechtkant in drei oder vier verschiedenartigen Darstellungsweisen ($1:1$, $1:2$, $1:3$, $2:3$ u. s. f. nach freier Wahl kombiniert mit Winkeln von 30^0, 45^0, 60^0, gelegentlich auch 90^0) entwerfen, um dann durch Vergleichung der verschiedenen Bilder ein eigenes Urteil zu gewinnen, welches das gefälligste, welches das unschönste ist. Von axonometrischen Darstellungen kann nur die isometrische in Betracht kommen, die sich ja anschaulich am Schatten des Würfels ganz gut begründen lässt.

Diese einfachen Körperdarstellungen werden zum Teil sofort benutzt, um bestimmte Aufgaben zu lösen. Wählt man z. B. die gerade quadratische Pyramide, so kann die Aufgabe gestellt werden, ihr einen Würfel einzubeschreiben, eine Aufgabe, die, wenn die Stellung der Pyramide zur Aufrisstafel geeignet gewählt wird, auf die planimetrische Aufgabe zurückzuführen ist, in ein Dreieck ein Quadrat einzubeschreiben. Für das Austuschen in solchen Fällen gilt die Regel, dass beide Körper mit verschiedenen Farben (etwa der eine schwarz, der andere mit allen zugehörigen Hilfslinien rot) gezeichnet werden; hinsichtlich der Sichtbarkeit oder Unsichtbarkeit der Kanten wird festgesetzt, dass jeder Körper so auszuziehen ist, als ob er für sich allein vorhanden wäre.

Wird der gerade Cylinder zur Darstellung gebracht, so kann man ihn noch mit einer oder mehreren Schraubenwindungen versehen, die namentlich im Schrägbilde ein sehr anschauliches Bild geben, oder man schneidet ihn, wie es dies Jahr (s. Blatt 13) geschehen ist, schief ab. Beim Kegel müssen alle drei Fälle, dass der Mantelsektor einen Mittelpunktwinkel $\gtreqless 180^0$ hat, dargestellt werden. Man kann für diese drei Figuren entweder die Mantellinie gleich gross annehmen, oder den Grundkreis. Der letztere Fall ist dieses Jahr gewählt worden, und dabei sind noch die Kegel durch kongruente Schnittkreise abgestumpft worden. Dass jeder Parallelschnitt zum Grundkreise wieder ein Kreis ist, wird natürlich vorher bewiesen — die wenigen dazu erforderlichen Sätze sind in dem ersten Teile der Stereometrie, die in Klasse I zu Ostern einsetzt, unterdessen dagewesen.

Bei allen diesen Körpern dürfen die Netzkonstruktionen nicht fehlen; auch hier aber soll auf die verschiedenen Möglichkeiten, die Flächen anzuordnen, aufmerksam gemacht werden. Soweit der Raum des Zeichenblattes es zulässt, soll das Netz auch auf wenigstens zwei verschiedene Arten gezeichnet werden. Das Ausschneiden und Zusammenbrechen der erhaltenen Netze ist eine wichtige Ergänzung der konstruierenden Thätigkeit des Schülers. Dagegen beschwere ich die Schüler nur ausnahmsweise, z. B. einmal während der Ferien damit, einen Körper wirklich zusammenzupappen. Das bleibt mehr dem freiwilligen Beschäftigungsdrange des Einzelnen überlassen. Auch in den mathematischen Arbeiten wird, wo es sich um Konstruktion von Netzen handelt, stets ausser der Zeichnung im Hefte noch ein zweites, ausgeschnittenes und zusammengebrochenes Exemplar des Netzes verlangt. Hier verbietet sich das Zusammenkleben schon aus praktischen Gründen — ein massiver Körper kann nicht ins Buch gelegt werden; der beabsichtigte Zweck aber, nämlich die anschauliche Überzeugung zu liefern, dass die planimetrische Konstruktion thatsächlich den gewünschten Körper ergiebt, wird auch so vollständig erreicht.

Von ebenen Körperschnitten können im ersten Halbjahre nur die einfachen Fälle in Betracht kommen, dass die Schnittebene auf einer der Tafeln senkrecht steht. Nachdem aber in der Stereometrie die Sätze über die Lagen von Geraden und Ebenen zu einander ihre strenge Begründung gefunden haben, benutzen wir sie alsbald, um wenigstens einige Aufgaben über die Darstellung der Ebene im allgemeinen zu lösen. Die Ebene wird durch ihre Spuren dargestellt, wobei die verschiedenen Lagemöglichkeiten zu erörtern sind; — wenn die Zeit reichte, habe ich sämtliche Fälle in Grundriss, Aufriss und Seitenriss auf einem besonderen Blatte darstellen lassen. Es werden die Neigungswinkel der Ebene gegen die Tafeln und die Umlegung der Ebene in die Tafeln konstruiert; dann folgt die Darstellung von Strecken, die in einer Ebene liegen: die Bestimmung des Aufrisses einer solchen Strecke, wenn ihr Grundriss gegeben ist, und umgekehrt; die Aufgabe, zu beurteilen, ob ein Punkt, der durch seine Projektionen gegeben ist, in einer gegebenen Ebene liegt oder nicht. Insbesondere sind die Scharen von Geraden zu betrachten, die entstehen, wenn eine Ebene durch eine Schar von Ebenen parallel zu einer der beiden Tafeln geschnitten wird. Die Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen kann bei den mannigfaltigen Lagen, die eintreten können, Stoff für einen ganzen Bogen geben. Erwähnen wir endlich noch die Aufgabe, die Spuren der Ebene zu ermitteln, die durch zwei sich schneidende oder zwei parallele Gerade bestimmt ist, so ist damit das äusserste Mass dessen umgrenzt, was ich aus der allgemeinen darstellenden Geometrie für zulässig erachte — und auch das ist für ein Schuljahr schon zuviel, wenn nicht andere vielleicht wichtigere Dinge zurückstehen sollen. Es wird deshalb im einen Jahre mehr das eine, im anderen mehr ein anderes Kapitel in den Vordergrund gerückt. Bei allen diesen Aufgaben leisten Hilfsdarstellungen in Parallelprojektion zur Veranschaulichung beinahe bessere Dienste als Modelle.

Als Anwendung behandeln wir den Schnitt eines geraden prismatischen oder cylindrischen Körpers, vielleicht auch einer Pyramide oder eines Kegels mit einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene, — eine Aufgabe, die bei der grösseren Zahl von Hilfskonstruktionen, die zur Gewinnung des Netzes erforderlich sind, an die schwächeren Schüler schon verhältnismässig höhere Anforderungen stellt. Die verschiedenen Proben für die Richtigkeit der Zeichnung sind überall gebührend zu berücksichtigen.

Es sollen nicht bloss Körper mit regelmässiger Grundfläche, und nicht bloss gerade Pyramiden*) und Prismen, obwohl diese natürlich nicht fehlen dürfen, sondern auch unregelmässige Körper für die Darstellung gewählt werden, um zu zeigen, dass die Besonderheiten und Vereinfachungen, die bei den ersteren Körpern eintreten, nicht immer zutreffen. Ja auch Körper mit einspringenden Winkeln werden gern zugelassen,

*) Hinsichtlich der Benennung der Pyramiden bestehen in manchen Lehrbüchern grosse Unklarheiten. Eine Pyramide soll, so wird gelehrt, gerade heissen, wenn sie gleiche Seitenkanten hat, d. h. wenn sie einem geraden Kegel einbeschrieben werden kann. Man braucht sich nur eine derartige Pyramide, deren Grundfläche ein stumpfwinkliges Dreieck ist, herzustellen, um dann zu sehen, dass diese gerade Pyramide nicht einmal auf ihrer Grundfläche zu stehen vermag, sondern notgedrungen umfällt. Meiner Meinung nach ist dieser Körper überhaupt nicht wichtig genug, um einen besonderen Namen zu verdienen. Mit demselben Rechte könnte eine Pyramide, deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte eines Kreises liegt und deren Grundfläche ein Tangentenvieleck desselben ist, d. h. eine Pyramide, die einem geraden Kegel umbeschrieben werden kann, einen besonderen Namen beanspruchen, was, wenn ich nicht irre, vor Jahren schon einmal in Hoffm. Z. besprochen worden ist. Ferner aber soll eine Pyramide, die gleiche Grundkanten und gleiche Seitenkanten hat, regelmässig heissen. Man hat also hier den interessanten Fall, dass eine regelmässige Pyramide im allgemeinen unter die unregelmässigen Körper zu subsumieren ist, denn die

falls ein Schüler einen derartigen Fall wählt, — wie man überhaupt der freien Selbstbethätigung des Einzelnen Spielraum gewähren soll, ohne doch das gemeinsame Fortschreiten der ganzen Klasse zu gefährden.

Es ist übrigens ein sehr lohnendes Kapitel, Aufgaben über ebene Schnitte prismatischer und pyramidenförmiger Körper in reiner Parallelprojektion zu lösen, indem man etwa auf der Oberfläche des Körpers drei Punkte giebt und nun den Schnitt der hierdurch bestimmten Ebene mit dem Körper konstruiert. Ein dankbarer Übungsstoff sind z. B. die verschiedenen ebenen Schnitte eines Würfels (gleichseitiges, gleichschenkliges, ungleichseitiges Dreieck, Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboid, Trapez, Fünfeck, regelmässiges und unregelmässiges Sechseck) nebst den Netzkonstruktionen der entstehenden Teile. Es sind das Aufgaben, die zu Übungen im korrekten stereometrischen Zeichnen, wie es auch in den mathematischen Arbeiten stets zu fordern ist, ebenso geeignet sind wie zu Übungen in der schriftlichen Entwickelung und Begründung räumlicher Konstruktionen.

Ein weiterer Gegenstand sind die regelmässigen Körper. Sie erfahren ja bereits in der Stereometrie eine mehr oder weniger eingehende Behandlung, insbesondere geben die drei einfacheren ein fast unerschöpfliches Material nicht nur zu Berechnungs-, sondern auch zu Konstruktionsaufgaben. Was nun ihre Verwertung im geometrischen Zeichnen betrifft, so empfiehlt sich die Darstellung in Grundriss und Aufriss nicht so sehr als diejenige in schräger Parallelprojektion, und deshalb habe ich in der Regel die letztere gewählt. Man geht vom Schrägbilde des Würfels aus und beschreibt die andern vier Körper in ihn ein, oder man legt die 3 Hauptachsen des regulären Systemes zu Grunde. Die Konstruktion des Ikosaeders ist dabei ein schönes Beispiel einer algebraischen Analysis im Raume. (Vgl. z. B. Holzmüllers neu erschienene „Elemente der Stereometrie“ § 83 und 84, — ein Werk, das eine grosse Fülle prächtiger und zum Teil neuer Aufgaben enthält, und deshalb von keinem Mathematiker übersehen werden sollte.) Die Ecken des Dodekaeders werden dann als die Schwerpunkte der Flächen des Ikosaeders bestimmt; die Ikosaederzeichnung ist also zweimal auszuführen, einmal als Hauptfigur, dann als Hilfsfigur. Die Netzkonstruktionen bieten nun keinerlei Schwierigkeit mehr. Auf die Poinsot'schen Körper kann dagegen nicht ausführlicher eingegangen werden, sie werden höchstens einmal an der Hand der Modelle besprochen.

Zum Schlusse ist noch kurz die Kugel zu besprechen, die aus naheliegenden Gründen nur in rechtwinkliger Projektion zur Darstellung kommt. Ihre Hauptschnitte parallel zu einer Tafel, die Bestimmung entsprechender Punkte oder entsprechender Radien in Grundriss und Aufriss, die Darstellung des Gradnetzes, falls die Achse auf der Grundrisstafel senkrecht steht, endlich auch ein schräger Schnitt — das sind Aufgaben, die sich hier lösen lassen. Die Konstruktion der ein- und der umbeschriebenen, eventuell auch der durch die Kanten gehenden Kugel eines Würfels, oder eines regelmässigen Oktaeders kann ohne Mühe ausgeführt werden; namentlich bei der umbeschriebenen Kugel ist immer anfänglich das Erstaunen gross, dass der diese Kugel darstellende Kreis nicht durch die Ecken hindurch geht.

---

regelmässige Pyramide ist nur dann ein regelmässiger Körper, wenn ihre Grundfläche und ihre Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. (Holzmüller, der einzige, der — soweit mir die Litteratur bekannt ist — die Sache korrekt darstellt, fügt in seinen „Elementen der Stereometrie“ II, S. 100 wenigstens hinzu „unter Erweiterung des Begriffes der Regelmässigkeit“.) Darum sollte der Begriff der regelmässigen Pyramide überhaupt beseitigt werden. Beschränkt man den Namen „gerade Pyramide“ auf den praktisch wichtigsten Fall, dass die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck und die Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind, so hat man eine einfache und in sich widerspruchslose Bezeichnung, die sich auch in der Unterrichtspraxis völlig bewährt hat. (Nachdem das Vorstehende schon gesetzt war, habe ich die in Hoffm. Z. über diesen Punkt geführte Diskussion wieder aufgefunden; sie zieht sich durch die Bände 21, 22 und 24 und ist von Lucke eingeleitet und von Kirchberger, Pietzker und Klang fortgesetzt worden. Die Lektüre dieser verschiedenen Bemerkungen hat mir aber keine Veranlassung gegeben, meine Ansicht irgendwie zu ändern.)

Vielen Übungsstoff über das ganze Gebiet, den ich schon sehr mannigfaltig verwertet habe, findet man in dem von mir in neuer Bearbeitung herausgegebenen Werke von Weishaupt, Die geometrische Projektionslehre, in 2 Stufen, mit 58 Tafeln (Verlag von H. Zieger in Leipzig, 1896 und 1899).

Nebenbei sei erwähnt, dass ich in günstigen Jahren noch die Grundbegriffe der Zentralprojektion entwickelt habe und auf den beiden letzten Bogen einige Beispiele dazu, und zwar von Grundriss und Aufriss ausgehend, habe ausführen lassen. Die Zeit ist jedoch meist zu knapp, als dass man zu einem recht befriedigenden Abschlusse kommen könnte.

Als eine wichtige Ergänzung des geometrischen Zeichnens betrachte ich noch die mathematischen Arbeiten, die sich im Winter vorwiegend mit Stereometrie beschäftigen. Konstruktions- und Berechnungsaufgaben gehen hier Hand in Hand, und geben eine erwünschte Gelegenheit, manches zu vertiefen. Es ist ein grosser Unterschied, ob die Schüler nur im lebendigen Wechselspiel von Frage und Antwort Rede zu stehen haben, oder ob sie genötigt sind, eine grössere Konstruktion im Zusammenhange schriftlich darzulegen und in mathematisch-strenger Form zu begründen. Freilich heisst es hierbei Mass halten: schon deshalb, weil der Umfang der schriftlichen Arbeiten nicht über eine gewisse Grenze hinausgehen darf. Als Aufgaben, die zu einer schriftlichen Behandlung geeignet sind, sind anzuführen eine strengere Begründung der Parallelprojektion, als sie in der 2. Klasse möglich ist, z. B. der Beweis des Hauptsatzes, dass parallele Gerade parallele oder sich deckende Bilder haben, ferner, dass die Bilder paralleler Strecken zu diesen selbst proportioniert sind, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks im Bilde wieder der Schwerpunkt wird; dass bei senkrechter Projektion ein rechter Winkel sich als rechter abbildet, wenn einer seiner Schenkel parallel zur Projektionsebene ist, dass die Ebene, die durch die von einem Punkte auf Grundriss- und Aufrisstafel gefällten Lote bestimmt ist, auf der Projektionsachse senkrecht steht u. a. m. Ein noch weiteres Feld der Bethätigung bilden die Konstruktionsaufgaben, die mitunter auch mit Berechnungen verknüpft werden können. Ich unterlasse es, Beispiele anzuführen, da es nicht meine Absicht ist, hier eine Aufgabensammlung zu liefern. Kommerell-Hauck, H. Thieme, Holzmüller, Schwering, um nur ein paar Namen zu nennen, haben wertvolles Material in reicher Auswahl dargeboten.

Gerade in dieser gegenseitigen Durchdringung und Wechselwirkung von Mathematik und Zeichnen liegt ein grosser Teil des Reizes, den der Unterricht im geometrischen Zeichnen besitzt, sei es, dass er vorbereitend für die Stereometrie wirkt, sei es, dass er sich seinerseits auf die in der letzteren bereits erlangten Ergebnisse stützt; und dass das Zeichnen dabei nicht zu kurz kommt, wie es von seiten mancher Zeichenlehrer so gern behauptet und den Mathematikern so oft vorgeworfen wird, das glaube ich im Vorausgegangenen bewiesen zu haben. In dieser Verbindung liegt wahre Konzentration, und nicht in derjenigen von freihändigem und Projektionszeichnen.