Kgl. Ritter-Akademie zu Liegnitz.

Determinationen

zu

Dreiecks-Aufgaben.

Von

Prof. C. Helm.

Liegnitz.
Progr. Nr. 202. Druck von Oscar Heinze.
1897.

Determinationen zu Dreiecksaufgaben.

Bei der Behandlung planimetrischer Konstruktionsaufgaben in den oberen Klassen eines Gymnasiums wird in der Regel das Hauptgewicht auf eine einfache Konstruktion und einen streng durchgeführten Beweis gelegt, allenfalls wird noch eine klare Darstellung der Analysis angestrebt, der letzte Teil der Aufgabe aber, die Determination, wird häufig entweder ganz vernachlässigt oder wenigstens nur ganz flüchtig besprochen. Und doch bietet gerade ein gründliches Eingehen auf die Grenzen, innerhalb deren die Auflösung gerade noch möglich ist, dem Lehrer ein wertvolles Mittel dar, bei seinen Schülern die Erkenntnis des inneren Zusammenhanges der gegebenen Stücke und damit das mathematische Verständnis zu fördern. Wenn man den Schüler veranlaßt, Schritt für Schritt die Konstruktion zu verfolgen und bei jeder Linie, die gezogen ist, zu prüfen, ob sie sich unter allen Umständen ziehen läßt, und ob 2 Linien unter allen Umständen einen Durchschnittspunkt ergeben oder nicht, so wird er nach kurzer Übung meist im Stande sein, die allgemeinen Bedingungen für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Lösung anzugeben. Während man sich nun in den unteren Klassen meist mit ganz allgemeinen Angaben über die Lösbarkeit einer Aufgabe begnügen muß, kommt es in Ober-Sekunda und noch mehr in Prima, wo die Kenntnisse namentlich in der Trigonometrie umfassender und sicherer geworden sind, ganz besonders darauf an, die als notwendig und hinreichend erkannten Bedingungen für die Möglichkeit der Lösung in mathematischer Form auszusprechen, diejenigen Bezeichnungen, die noch unbekannte Größen enthalten, durch die gegebenen Stücke auszudrücken und zuletzt das Resultat in eine Schlußformel zusammen zu drängen, in welcher das Verhältnis einer der gegebenen Größen zu den übrigen ausgesprochen wird.

Da zur Konstruktion von Dreiecken immer 3 von einander unabhängige Stücke gegeben sein müssen, so hat man in der Determination die Beziehungen dieser 3 Stücke zu einander zu untersuchen, am besten so, daß man 2 derselben als unveränderlich betrachtet und das dritte als veränderlich. Welche von den 3 Größen man als veränderlich anzusehen hat, ist im Allgemeinen nicht von Belang; in der Regel wird man wohl diejenigen beiden Stücke, die am nächsten zu einander gehören, als unveränderlich zusammenfassen, z. B. in der Aufgabe u, v, w die beiden ersten Abschnitte, oder bei $a + b$, γ, h die Seitensumme und den eingeschlossenen Winkel. Hauptsächlich aber wird man sich hier wohl von dem Gesichtspunkte leiten lassen, daß die Schlußformel in möglichst einfacher Gestalt auftreten soll.

In den folgenden Blättern sind die Determinationen zu einer Anzahl leichter und bekannter Dreiecksaufgaben entwickelt, wie sie in den oberen Gymnasialklassen öfter zur Besprechung kommen; die Schlußformeln sind größtenteils in Aufgabensammlungen (wie Martus und Hoffmann) bereits veröffentlicht, sodaß also ein Anspruch darauf, daß Neues geboten werde, nicht erhoben werden kann. Da die Determination angeben soll, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausgeführt werden kann, so erhellt die Notwendigkeit, jeder Determination erst die Konstruktion vorauszuschicken, während Analysis und Beweis dafür nicht in Betracht kommen. Im Anschluß an die Determination sind jedesmal noch einige besondere Fälle besprochen worden. Jeder Lehrer der Mathematik wird nämlich wohl die Erfahrung gemacht haben, daß einzelne Schüler bei sorgfältiger Ausführung der Zeichnung rechtwinklige oder gleichschenklige Dreiecke erhalten und nun überzeugt sind, daß das bei der betr. Aufgabe immer der Fall sein muß. Ich bin daher der Ansicht, daß eine Entwicklung der Bedingungen, unter denen diese besonderen Fälle eintreten, nicht nur großes Interesse haben, sondern auch für die Förderung der mathematischen Erkenntnis der Schüler von großem Werte sein muß. Da die

Ableitung dieser Bedingungen häufig in engem Zusammenhange mit der trigonometrischen Auflösung derselben Aufgabe steht oder wenigstens durch Benutzung derselben wesentlich vereinfacht werden kann, so sind der Besprechung dieser besonderen Fälle noch die notwendigsten Formeln der trigonometrischen Lösung vorangestellt worden. Um den innigen Zusammenhang der Planimetrie mit der Trigonometrie darzulegen, sind bei einigen Beispielen die in der Determination entwickelten Formeln auch noch aus der trigonometrischen Lösung besonders abgeleitet worden. Schließlich ist für jede Aufgabe noch ein Zahlenbeispiel berechnet worden, welches auch die sämtlichen besonderen Fälle umfaßt und zu trigonometrischen sowie zu planimetrischen Aufgaben benutzt werden kann.

Was die Bezeichnungsweise anbelangt, so ist zu bemerken, daß $AB = c$ als Grundlinie gewählt ist, und daß bei allen Linien, die nach AB gerichtet sind, der Index c weggelassen worden ist, sodaß also die Größen h, t, w soviel bedeuten wie h_c, t_c, w_c. Wo die Seiten a und b sich unterscheiden, ist immer a als die größere gewählt worden, und entsprechend natürlich die davon abhängigen Größen α, p, u größer als β, q, v. In der Figur, die für die meisten Aufgaben benutzt wurde, ist CD die Höhe, CF Winkelhalbierende, CE Mittellinie, M Mittelpunkt des Inkreises, N der desjenigen Kreises, der die Grundlinie von außen berührt, O Mittelpunkt des Umkreises, JK derjenige Durchmesser des letzteren, der auf AB senkrecht steht, MG und $NH \perp AC$, $ML \perp AB$ u. s. w.

1.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und dem gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben c, h, γ.

Konstruktion.

Man beschreibt über $c = AB$ als Sehne den Kreis, der $\angle \gamma$ als Peripheriewinkel faßt, zieht zu AB im Abstande h die Parallele, die den Kreis in C (C_1) trifft, verbindet C mit A und B, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Errichtet man in der Mitte E von AB das Lot, bis es die Peripherie in K trifft, so ist offenbar die Lösung unmöglich, wenn $h > EK$ ist, weil in diesem Falle die Parallele zu AB den Kreis nicht treffen kann. Ist $h = EK$, so berührt die Parallele den Kreis in K, Punkt C fällt mit K zusammen, das entstehende Dreieck wird gleichschenklig. Ist endlich $h < EK$, so ergeben sich 2 Schnittpunkte C und C_1 der Parallelen mit dem Kreise, die beiden der Aufgabe genügenden Dreiecke ABC und ABC_1 sind kongruent und liegen symmetrisch zu EK. Um EK zu berechnen, verbinde man K mit A, so ist $\angle AKE = \gamma/_2$, folglich $EK = c/_2 \cdot \operatorname{cotg} \gamma/_2$. Somit giebt es, je nachdem $h \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{c}{2} \operatorname{cotg} \gamma/_2$ ist, $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ Lösungen.

Trigonometrische Lösung.

Aus $2\,F = ab \sin \gamma = ch$ folgt $ab = \frac{ch}{\sin \gamma}$. Aus dem Cosinussatz ergiebt sich:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2\,ab \cos \gamma = c^2 + \frac{2\,ch}{\sin \gamma} \cdot \cos \gamma$$

$$2\,ab \qquad = \qquad \frac{2\,ch}{\sin \gamma}$$

einmal addiert, dann subtrahiert:

$$(a + b)^2 = c^2 + \frac{2\,ch}{\sin\gamma}(1 + \cos\gamma) = c^2 + \frac{2\,ch\,.\,2\cos^2\gamma/_2}{2\sin\gamma/_2\cos\gamma/_2}$$
$$= c^2 + 2\,ch\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2,$$

$$(a - b)^2 = c^2 - \frac{2\,ch}{\sin\gamma}(1 - \cos\gamma) = c^2 - \frac{2\,ch\,.\,2\sin^2\gamma/_2}{2\sin\gamma/_2\cos\gamma/_2}$$
$$= c^2 - 2\,ch\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2.$$

Sondert man in beiden Gleichungen auf der rechten Seite c^2 als gemeinsamen Faktor ab, setzt $\frac{2\,h}{c}\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2 = \mathrm{tg}\,\lambda$, $\frac{2\,h}{c}\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2 = \sin^2\varphi$, und zieht die Wurzel aus, so folgt:

$$a + b = \sqrt{c^2(1 + \mathrm{tg}^2\lambda)} = c/\cos\lambda.$$
$$a - b = \sqrt{c^2(1 - \sin^2\varphi)} = c\,.\,\cos\varphi.$$

Besondere Fälle.

1) Soll $\underline{a = b}$ sein, so ist $(a - b)^2 = 0 = c^2 - 2\,ch\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2$, woraus sich der Grenzfall der Determination $\underline{h = \frac{c}{2}\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2}$ ergiebt.

2) Ist $\underline{\alpha = 90^0}$, so wird $AC = h$, also $\underline{h = c\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma.}$

3) Soll $\underline{a = c}$ sein, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC: $h = a\sin\beta = c\sin\beta$; da aber in diesem Falle $\alpha = \gamma$ ist, so ist $\beta = 2\,R - 2\,\gamma$, mithin $\sin\beta = \sin 2\,\gamma$, folglich $\underline{h = c\,.\,\sin 2\,\gamma.}$

$$c = 1701,\ \gamma = 60\,.\,28\,.\,26.$$

h	$c/_2\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2$ 1459, 12	$c\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma$ 963,38	$c\,.\,\sin 2\,\gamma$ 1458,8	$< c/_2\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2$ 1354,28
λ	59 . 45 . 47	54 . 20 . 49	59 . 45 . 37	58 . 49 . 31
φ	90	54 . 20 . 49	89 . 7 . 16	74 . 27 . 0
a	1688,9	1954,88	1701	1871
b	1688,9	963,38	1676,58	1415
α	59 . 45 . 47	90	60 . 28 . 26	73 . 9 . 14
β	59 . 45 . 47	29 . 31 . 34	59 . 3 . 8	46 . 22 . 20

2.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und dem gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben c, t, γ.

Konstruktion.

Man zeichnet AB = c, schlägt darüber als Sehne den Kreis, der γ als Peripheriewinkel faßt, und um die Mitte E von AB den Bogen mit t, der den ersten Kreis in C und C_1 trifft.

Determination.

Verlängert man das Mittellot auf AB, bis es den Kreis in K trifft, so ist die Lösung unmöglich, wenn $t > EK$ ist. Wenn $t < EK$ ist, so erhält man 2 Schnittpunkte C und C_1 und infolge dessen 2 kongruente Dreiecke, die symmetrisch zu EK liegen. Ist $t = EK$, so fallen die Schnittpunkte C und C_1 zusammen, das entstehende Dreieck wird gleichschenklig und hat von allen Dreiecken, die dasselbe c und γ besitzen, den größten Flächeninhalt. Da EK $= \frac{c}{2} \operatorname{cotg} \gamma/_2$ (wie in Aufg. 1), so lautet die Bedingung für die Möglichkeit der Lösung:

Je nachdem $2\,t \gtreqless c \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2$, giebt es $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ Lösungen.

Trigonometrische Lösung.

Es ist $\quad a^2 + b^2 = 2\,t^2 + \frac{c^2}{2} \quad = \frac{4\,t^2 + c^2}{2}$

und nach dem Cosinussatz: $2\,ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\cos\gamma} = \frac{4\,t^2 - c^2}{2 \cos\gamma}$

addiert:

$$(a+b)^2 = \frac{4t^2\cos\gamma + c^2\cos\gamma + 4\,t^2 - c^2}{2\cos\gamma} = \frac{4t^2(1+\cos\gamma) - c^2(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}$$

$$= \frac{4\,t^2\cos^2\gamma/_2 - c^2\sin^2\gamma/_2}{\cos\gamma} = \frac{4\,t^2\cos^2\gamma/_2}{\cos\gamma}\left(1 - \frac{c^2\operatorname{tg}^2\gamma/_2}{4\,t^2}\right),$$

subtrahiert:

$$(a-b)^2 = \frac{4t^2\cos\gamma + c^2\cos\gamma - 4t^2 + c^2}{2\cos\gamma} = \frac{c^2(1+\cos\gamma) - 4t^2(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}$$

$$= \frac{c^2\cos^2\gamma/_2 - 4\,t^2\sin^2\gamma/_2}{\cos\gamma} = \frac{c^2\cos^2\gamma/_2}{\cos\gamma}\left(1 - \frac{4\,t^2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma/_2}{c^2}\right).$$

Zur bequemeren Ausführung der logarithmischen Ausrechnung führt man Hülfswinkel ein: $\sin\lambda = \frac{c}{2\,t}\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2$, $\sin\varphi = \frac{2\,t}{c}\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2$.

Dann ergiebt sich: $a + b = \underline{\frac{2\,t\cos\gamma/_2\cos\lambda}{\sqrt{\cos\gamma}}}$

$$a - b = \underline{\frac{c\,.\,\cos\gamma/_2\,.\,\cos\varphi}{\sqrt{\cos\gamma}}}\,.$$

Besondere Fälle.

1) Für $\underline{a = b}$ wird $t = CE \perp AB$, mithin aus $\triangle$ ACE: $t = c/_2\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2$ oder $\underline{2\,t = c\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2}$ — wie schon aus der Determination bekannt.

2) Wird $\underline{\alpha = 90^0,}$ so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck CAE:

$$t^2 = \frac{c^2}{4} + b^2,$$

und aus $\triangle$ ABC: $b = c\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma$,

folglich $t^2 = \frac{c^2}{4} + c^2\,\mathrm{cotg}^2\,\gamma$, also $4\,t^2 = c^2\,(1 + 4\,\mathrm{cotg}^2\,\gamma)$,

mithin schließlich $\underline{2\,t = c\,.\sqrt{1 + 4\,\mathrm{cotg}^2\,\gamma}.}$

3) Soll $\underline{a = c}$ sein, so geht das Datum $a^2 + b^2 = 2\,t^2 + \frac{c^2}{2}$ über in $2\,t^2 = \frac{c^2}{2} + b^2$; fällt man die Höhe von B aus, so ergiebt sich aus einem der beiden dadurch hergestellten rechtwinkligen Dreiecke: $b = 2\,c\cos\gamma$, demnach:

$$2\,t^2 = \frac{c^2}{2} + 4\,c^2\cos^2\gamma,\quad 4\,t^2 = c^2\,(1 + 8\cos^2\gamma),$$

$$\underline{2\,t = c\sqrt{1 + 8\cos^2\gamma}.}$$

$c = 35\,790,\ \gamma = 71 . 56 . 9$

2t / t	$c.\cot g\gamma/_2$	$c\sqrt{1+4\cot g^2\gamma}$	$c.\sqrt{1+8\cos^2\gamma}$	$<c\sqrt{1+4\cot g^2\gamma}$	$<c.\cot g\gamma/_2$
	24659	21366	23802	19876	21875
λ	31.46.39	37 . 25 . 50	33 . 3 . 51	40 . 47 . 43	36 . 25
φ	90,0.0	60 . 2 . 50	74 . 51	53 . 42 . 33	62.30.35
a	30468	37646	35789,3	37264	37591
b	30468	11674	22194,7	6476	13579
α	54.1.55	90 . 0 . 0	71 . 56 . 9	98 . 9 . 23	86.55.13
β	54.1.55	18 . 3 . 51	36 . 7 . 41	9 . 54 . 28	21.8.38

3.

Ein Dreieck zu konstruieren aus der Differenz zweier Seiten, der dritten Seite und der zu dieser gehörigen Höhe.

Gegeben $a - b = d$, c, h.

Konstruktion.

1) Zeichne $AB = c$, schlage darüber als Durchmesser einen Halbkreis, trage in diesen $d = BP$ als Sehne ein, fälle $PQ \perp AB$, errichte $2\,h = AR \perp AB$, verbinde R mit Q, schlage um B den Kreis mit BP, er treffe RQ in S, ziehe BS und errichte auf RS das Mittellot, welches die Verlängerung von BS in C treffe, und verbinde C mit A.

2) Zeichne $AB = c$, halbiere es in E und verlängere es um BE bis T, schlage um T einen Halbkreis mit d, der AT in U und V schneidet; errichte auf AB in E das Lot $EW = h$, ziehe UW und VW und zu diesen die Parallelen durch T, welche EW in X und Y schneiden, halbiere XY in K, lege den Kreis durch K, A und B, und ziehe durch W zu AB die Parallele, welche den Kreis in C schneidet, verbinde C mit A und B, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Die Lösung ist immer möglich, so lange, was selbstverständlich ist, $a - b < c$ ist. Es giebt immer 2 kongruente Dreiecke, die zu EK symmetrisch liegen.

Trigonometrische Lösung.

1) Da in der 1. Konstruktion $CA = CS = CR$ ist, so ist $\angle ARS = \gamma/_2$, folglich im rechtwinkligen $\triangle RAQ$: $\operatorname{tg} \gamma/_2 = AQ/AR$; nun ist $AR = 2\,h$, $AQ = c - BQ = c - d^2/c = \frac{c^2 - d^2}{c}$, somit $\operatorname{tg} \gamma/_2 = \frac{c^2 - d^2}{2\,ch}$.

2) Aus dem rechtwinkligen Dreieck AEK (Konstruktion 2) folgt $\operatorname{tg} \gamma/_2 = c/2\,EK$, $2\,EK = EX + EY$;

$$\frac{EX}{EW} = \frac{ET}{EV} = \frac{c}{c + d}, \quad EX = \frac{ch}{c + d}$$

$$\frac{EY}{EW} = \frac{ET}{EU} = \frac{c}{c - d}, \quad EY = \frac{ch}{c - d}$$

$$2\,EK = \frac{2\,c^2\,h}{c^2 - d^2}$$

$$\operatorname{tg} \gamma/_2 = \frac{c^2 - d^2}{2\,ch}.$$

3) Dieselbe Formel läßt sich auch ohne Benutzung der Konstruktion rein trigonometrisch folgendermaßen herleiten:

Erweitert man in der bekannten Formel

$$\operatorname{tg} \gamma/_2 = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)}{s\,(s - c)}}$$

den Radikandus mit $16\,(s - a)\,(s - b)$, so folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma/_2 = \frac{4\,(s - a)\,(s - b)}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{2(s-a)\,.\,2(s-b)}{4\,F} = \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2\,ch}$$

$$= \frac{(c - d)\,(c + d)}{2\,ch} = \frac{c^2 - d^2}{2\,ch}.$$

Besondere Fälle.

1) Je nachdem $\gamma \gtreqless 90^0$, also $\gamma/_2 \gtreqless 45^0$, ist $\operatorname{tg} \gamma/_2 \gtreqless 1$, also auch der in der trigonometrischen Lösung entwickelte Wert

$$\frac{c^2 - d^2}{2\,ch} \gtreqless 1\,,$$

woraus sich die Bedingung ergiebt:

Je nachdem $h \lesseqgtr \dfrac{c^2 - d^2}{2\,c}$, ist $\gamma \gtreqless 90^0$.

2) Wenn $\alpha \gtreqless 90^0$ ist, so ist $\alpha - \beta \gtreqless \gamma$, und auch $\sin \dfrac{\alpha - \beta}{2} \gtreqless \sin \gamma/_2$; da nun nach der Mollweideschen Formel

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{d}{c} \cos \gamma/_2$$

ist, so ergiebt sich $\dfrac{d}{c} \cos \gamma/_2 \gtreqless \sin \gamma/_2$, also $\dfrac{d}{c} \gtreqless \operatorname{tg} \gamma/_2$. Ersetzt man hierin $\operatorname{tg} \gamma/_2$ durch den allgemein gültigen, oben hergeleiteten Wert $\dfrac{c^2 - d^2}{2\,ch}$, so folgt

$$\frac{d}{c} \gtreqless \frac{c^2 - d^2}{2\,ch}, \text{ also schließlich:}$$

Je nachdem $h \gtreqless \dfrac{c^2 - d^2}{2\,d}$, ist $\alpha \gtreqless 90^0$.

3) Soll $a = c$ sein, also $\alpha = \gamma$, so ist $\beta = 180 - 2\,\gamma$, $\alpha - \beta = 3\,\gamma - 180^0$, $\dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{3}{2}\gamma - 90^0$, $\sin \dfrac{\alpha - \beta}{2} = - \cos \dfrac{3}{2}\gamma$ $= - 4 \cos^3 \gamma/_2 + 3 \cos \gamma/_2$, folglich nach der oben benutzten Mollweideschen Formel:

$$3 \cos \gamma/_2 - 4 \cos^3 \gamma/_2 = \frac{d}{c} \,.\, \cos \gamma/_2\,,$$

$$3 - 4 \cos^2 \gamma/_2 = d/c\,,\ 4 \cos^2 \gamma/_2 = 3 - d/c = \frac{3\,c - d}{c},$$

$$\cos^2 \gamma/_2 = \frac{3\,c - d}{4\,c};\ \sin^2 \gamma/_2 = 1 - \cos^2 \gamma/_2 = \frac{c + d}{4\,c}.$$

D. Div.: $\operatorname{tg}^2 \gamma/_2 = \dfrac{c + d}{3\,c - d}$, $\operatorname{tg} \gamma/_2 = \sqrt{\dfrac{c + d}{3\,c - d}}$.

Setzt man diesen Ausdruck dem für jedes beliebige Dreieck nachgewiesenen gleich, so folgt

$$\sqrt{\frac{c+d}{3c-d}} = \frac{c^2-d^2}{2ch},$$

$$h = \frac{c^2-d^2}{2c}\sqrt{\frac{3c-d}{c+d}},$$

$$\left[\text{oder auch } h = \frac{c-d}{2c}\sqrt{(3c-d)(c+d)}\,.\right]$$

$$a - b = d = 160,\ c = 843$$

h	$>\frac{c^2-d^2}{2c}<\frac{c^2-d^2}{2d}$	$=\frac{c^2-d^2}{2c}$	$<\frac{c^2-d^2}{2c}$	$=\frac{c^2-d^2}{2d}$	$>\frac{c^2-d^2}{2d}$	$=\frac{c-d}{2c}\sqrt{(3c-d)(c+d)}$
	703,15	406,31	360	2140,76	3600	624,45
α	69 . 26 . 7,5	52.42.46,5	48.46.21	90 . 0 . 0	94.25.54	66 . 6 . 9
β	50 . 31 . 18,5	37.17.13,5	34.18.39	68.30.22	72.41.22	47 . 47 . 41
γ	60 . 2 . 34	90 . 0 . 0	96.55	21.29.38	12.52.44	66 . 6 . 10
a	911	670,7	638,66	2300,75	3770,75	843
b	751	510,7	478,66	2140,75	3610,75	683

4.

Ein Dreieck zu konstruieren aus der Differenz zweier Seiten und den beiden Höhenabschnitten auf der dritten Seite.

Gegeben $a - b = d$, p, q.

Aus dem Datum $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ folgt $(a + b)(a - b) = (p + q) \cdot (p - q)$, daraus ergiebt sich folgende

Konstruktion.

Zeichne $BP = d$ und trage auf derselben Geraden $p - q = BQ$ ab, trage daran unter beliebigem Winkel $p + q = BR$, ziehe PR und dazu die Parallele durch Q, welche die Verlängerung von BR in S schneidet; beschreibe um B mit BP einen Kreisbogen, der BR in T trifft, halbiere ST in C und beschreibe um C mit CT und um B mit BR Kreisbogen, die sich in A schneiden, verbinde A mit B und C, so genügt $\triangle$ ABC der Aufgabe.

Determination.

Dividiert man die zur Analysis benutzte Gleichung $(a+b)(a-b) = (p+q)(p-q)$ durch $a+b > p+q$, so folgt $\underline{a-b < p-q}$. Sobald diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich das Dreieck immer konstruieren.

Besondere Fälle.

1) Um zu entscheiden, unter welchen Bedingungen $\angle \gamma \gtreqless 90^0$ ist, kann man vom Cosinussatz ausgehen:

$$\begin{aligned} 2\,ab \cos\gamma &= a^2 + b^2 - c^2, \\ 2\,ab\,(1 - \cos\gamma) &= c^2 - (a-b)^2 \end{aligned}$$

oder
$$4\,ab \sin^2 \gamma/_2 = (p+q)^2 - d^2.$$

Um das Produkt ab zu eliminieren, quadriere man $a + b = \frac{p^2 - q^2}{d}$ und $a - b = d$, und subtrahiere, so folgt:

$$4\,ab = \frac{(p^2 - q^2)^2 - d^4}{d^2}.$$

Eingesetzt und mit d^2 multipliciert:

$$[(p^2 - q^2)^2 - d^4] \sin^2 \gamma/_2 = d^2 (p+q)^2 - d^4.$$

Je nachdem nun $\gamma \gtreqless 90^0$, ist $\sin^2 \gamma/_2 \gtreqless \frac{1}{2}$, somit

$$\left[(p^2 - q^2)^2 - d^4\right] \cdot \frac{1}{2} \lesseqgtr d^2 (p+q)^2 - d^4.$$

Es folgt: $d^4 - 2\,d^2 (p+q)^2 + (p^2 - q^2)^2 \lesseqgtr 0$

$$d^2 \gtreqless (p+q)^2 - \sqrt{(p+q)^4 - (p^2-q^2)^2}\ *)$$

$$d^2 \gtreqless (p+q)^2 - 2\,(p+q)\sqrt{pq}\,,$$

endlich: Jenachdem $d \gtreqless \sqrt{p+q}\cdot(\sqrt{p}-\sqrt{q})$, ist $\gamma \gtreqless 90^0$.

Anmerkung. Für den Grenzfall $\gamma = 90^0$ erhält man einfacher: nach Pythagoras $a^2 + b^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2\,pq + q^2$, und nach dem Datum: $a^2 - b^2 \qquad = p^2 \qquad - q^2$,

$$a^2 = p^2 + pq\,,$$
$$b^2 = q^2 + pq\,,$$

also $a = \sqrt{p\,(p+q)}$, $b = \sqrt{q\,(p+q)}$, durch Subtraktion:

$$a - b = d = \sqrt{p\,(p+q)} - \sqrt{q\,(p+q)} = \sqrt{p+q}\,(\sqrt{p} - \sqrt{q}).$$

2) Wenn $a = c$ sein soll, so ist $BC = p + q$. Nach Konstruktion ist $BC = d + \frac{1}{2}\,ST = \frac{1}{2}\,d + \frac{1}{2}\,BS$; ferner ist

$$BS = \frac{p^2 - q^2}{d}\,,\ \text{folglich}$$

$$p + q = \frac{1}{2}\,d + \frac{p^2 - q^2}{2\,d} = \frac{d^2 + p^2 - q^2}{2\,d}\,,$$

$$d^2 - 2\,d\,(p+q) + p^2 - q^2 = 0\,,$$

$$d = p + q - \sqrt{(p+q)^2 - p^2 + q^2}\,,$$

$$d = \sqrt{p+q}\,[\sqrt{p+q} - \sqrt{2\,q}].$$

3) Für $b = c$ erhält man entsprechend:

$$p + q = \frac{p^2 - q^2 - d^2}{2\,d}$$

*) Ist allgemein $(x-y)^2 > z^2$, so ist nur dann $x - y > z$, wenn $x - y > 0$, dagegen $x - y < z$, wenn $x - y < 0$. Hier liegt der letztere Fall vor.

$$d = -(p+q) + \sqrt{2p(p+q)}.$$
$$\underline{d = \sqrt{p+q}\,[\sqrt{2p} - \sqrt{p+q}]}.$$
$$p = 225,\ q = 64$$

$a-b=d$	$>\sqrt{p+q}\,.(\sqrt{p}-\sqrt{q})$	$=\sqrt{p+q}\,.(\sqrt{p}-\sqrt{q})$	$=\sqrt{p+q}\,.(\sqrt{p+q}-\sqrt{2q})$	$=\sqrt{p+q}\,.[\sqrt{2p}-\sqrt{p+q}]$
	130	119	96,667	71,6243
a	243,9583	255	288,999	360,625
b	113,9583	136	192,32	289
α	55 . 47 . 54	61 . 55 . 40	70 . 33 . 48	77 . 12 . 20
β	22 . 41	28 . 4 . 20	38 . 52 . 24	51 . 23 . 50
γ	101 . 31 . 6	90 . 0 . 0	70 . 33 . 48	51 . 23 . 50

5.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Differenz der beiden andern Seiten und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

Gegeben $a - b = d$, c, ϱ.

Konstruktion.

Man halbiert $AB = c$ in E, trägt von E aus auf EA die halbe gegebene Differenz $d/_2 = EL$ ab, errichtet in L das Lot $LM = \varrho$, beschreibt um M mit ML den Kreis und zieht an diesen die Tangenten von A und B aus; bezeichnet man deren Schnittpunkt mit C, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Die Konstruktion läßt sich ausführen, so lange die von A und B an den Kreis gelegten Tangenten so konvergieren, daß sie den Kreis einschließen. Betrachtet man die beiden gegebenen Strecken c und d als unveränderlich, so bleibt die Lage der Punkte E und L auf der festgelegten Strecke AB unverändert. Läßt man nun die dritte Strecke ϱ allmählig immer größer werden, so entfernt sich der Punkt C immer weiter von AB; hat ϱ eine gewisse Größe erreicht, so werden die Tangenten parallel, und Punkt C liegt im Unendlichen. Wächst ϱ noch über diese Grenze hinaus, so konvergieren die Tangenten nach der entgegengesetzten Seite, der Kreis M wird dann nicht mehr Inkreis, sondern Ankreis.

Sind im Grenzfalle die beiden Tangenten einander parallel, so ziehe man den Berührungsdurchmesser XMY; dann entsteht ein Trapez ABYX, in welchem E und M die Mitten der nichtparallelen Seiten sind, ihre Verbindungslinie EM ist demnach gleich der halben Summe der parallelen Seiten: $EM = \frac{1}{2}(AX + BY)$. Da nun $AX = AL$ und $BY = BL$, so ist $EM = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$, somit für den Grenzfall in $\triangle$ LME: $ML^2 = ME^2 - LE^2$ oder $\varrho^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{d}{4}$, woraus $4\varrho^2 = c^2 - d^2$ und endlich $2\varrho = \sqrt{c^2 - d^2}$ folgt. Wird 2ϱ größer als dieser Wert, so divergieren die beiden von A und B aus gezogenen Tangenten, wird 2ϱ kleiner, so konvergieren sie, die Bedingung für die Möglichkeit der Lösung ist also

$$\underline{2\varrho < \sqrt{c^2 - d^2}.}$$

Um den Grenzwert $2\varrho = \sqrt{c^2 - d^2}$ oder $\varrho = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ leicht zu konstruieren, zerlege man den Radicandus in das Produkt $\frac{c+d}{2} \cdot \frac{c-d}{2}$, so ist für diesen Fall ϱ die mittlere Porportionale zu $\frac{c+d}{2} = BL$ und $\frac{c-d}{2} = AL$. Konstruiert man daher über AB als Durchmesser den Halbkreis und errichtet auf AB in L das Lot, das den Halbkreis in Z treffe, so ist LZ der Grenzwert, den ϱ nicht erreichen darf.

Trigonometrische Lösung.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \frac{2\varrho}{c-d};\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b} = \frac{2\varrho}{c+d}.$$

Besondere Fälle.

1) Für $\underline{\gamma = 90^0}$ wird $\varrho = s - c = \frac{a + b - c}{2}$, also $2\varrho = a + b - c$. Hierin ist die Unbekannte $a + b$ durch die gegebenen Größen auszudrücken. Nach dem Pyth. Lehrsatze erhält man: $a^2 + b^2 = c^2$; durch Quadrierung von $a - b = d$ folgt:

$$\underline{a^2 - 2\,ab + b^2 = d^2}$$

$$2\,ab = c^2 - d^2,$$

$$a^2 + 2\,ab + b^2 = 2\,c^2 - d^2,$$

$$a + b = \sqrt{2\,c^2 - d^2},$$

mithin $$\underline{2\,\varrho = \sqrt{2\,c^2 - d^2} - c.}$$

2) Für $\underline{\alpha = 90^0}$ wird $\varrho = s - a = \frac{c - a + b}{2} = \frac{c - d}{2}$,

also $$\underline{2\,\varrho = c - d.}$$

3) Für $\underline{a = c}$ ist $a - b = c - b = d$, also $b = c - d$, folglich $2\,s = 2\,b + c - d = 3\,c - d$; ferner $s - a = s - c$ $= \frac{a + b - c}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c - d}{2}$, und $s - b = \frac{a - b + c}{2} = \frac{c + d}{2}$.

Somit geht die allgemein gültige Formel

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}{s}} \text{ über in}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{(c - d)^2\,(c + d)}{4\,(3\,c - d)}},$$

oder $$\underline{2\varrho = (c - d)\,.\,\sqrt{\frac{c + d}{3\,c - d}}}.$$

4) Für $\underline{b = c}$ erhält man ähnlich

$$\underline{2\,\varrho = (c + d)\sqrt{\frac{c - d}{3\,c + d}}}.$$

$$a - b = d = 24,\ c = 123.$$

2ϱ	$= \sqrt{2c^2 - d^2} - c$	$= c - d$	$= (c - d) \cdot \sqrt{\frac{c + d}{3c - d}}$	$= (c + d) \cdot \sqrt{\frac{c - d}{3c + d}}$	$< \sqrt{c^2 - d^2}$	$= \sqrt{c^2 - d^2}$
ϱ	24,642	49,5	32,3115	36,89	38,6267	60,318
a	98,142	327,2	123	147	159	AC ‖ BC
b	74,142	303,2	99	123	135	
α	52 . 55 . 50	90 .	66 . 16 . 9	73.23.24	75 . 55 . 50	101 . 15 . 4
β	37 . 4 . 10	67.55.6	47.27.42	53.18.18	55 . 26 . 44	78 . 44 . 56
γ	90 .	22.4.54	66 . 16 . 9	53.18.18	48 . 37 . 26	0 . 0 . 0

6.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, der Differenz der durch sie auf der zugehörigen Seite hervorgebrachten Abschnitte und der Differenz der Winkel, die dieser Seite anliegen.

Gegeben h, $p - q = 2\,d$, $\alpha - \beta = \delta$.

Konstruktion.

Zeichne $BP = p - q = 2\,d$, beschreibe darüber als Sehne den Kreisbogen, der $\alpha - \beta = \delta$ als Peripheriewinkel faßt, ziehe zu BP im Abstande h eine Parallele, welche den Kreis in C schneidet, schlage um C mit CP einen Kreisbogen, der die Verlängerung von BP in A schneidet, verbinde C mit A und B, so genügt $\triangle$ ABC der Aufgabe.

Determination.

Es kommt darauf an, daß die zu BP gezogene Parallele den Kreis über BP trifft, was nur dann der Fall ist, wenn h nicht kleiner ist als das auf der Mitte von BP bis zum Kreise errichtete Lot QR. Ist $h = QR$, so fällt C mit R zusammen und A mit B, das Dreieck reduziert sich also auf die Strecke BC. Ist $h < QR$, so schneidet die Parallele den Kreis in 2 Punkten.

Benutzt man zur ferneren Konstruktion den rechts von QR liegenden Punkt C, so fällt A rechts von B, es entsteht ein dem ersten kongruentes Dreieck, in welchem nur die Ecken A und B vertauscht sind, so daß auch $\delta = \beta - \alpha$ ist. Verbindet man R mit B, so ist $\angle \mathrm{BRQ} = \delta/_2$, $\mathrm{BQ} = \frac{\mathrm{p} - \mathrm{q}}{2} = \mathrm{d}$, also $\mathrm{QR} = \mathrm{d} \operatorname{cotg} \delta/_2$; demnach kann die Aufgabe nur gelöst werden, wenn

$$\underline{\mathrm{h} < \mathrm{d} \operatorname{cotg} \delta/_2 \text{ ist.}}$$

Trigonometrische Lösung.

In jedem Dreieck ist $\operatorname{cotg} \beta = \mathrm{p/h}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \mathrm{q/h}$, folglich $\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\mathrm{p} - \mathrm{q}}{2} = \frac{2\,\mathrm{d}}{\mathrm{h}}$; $\frac{\cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{2\,\mathrm{d}}{\mathrm{h}}$. Da der Zähler $= \sin \delta$ ist, so folgt hieraus:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\mathrm{h} \,.\, \sin \delta}{2\,\mathrm{d}}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit 2 und subtrahiert sie von $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos \delta$, so folgt

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \delta - \frac{\mathrm{h} \sin \delta}{\mathrm{d}}.$$

Die inke Seite ist $= \cos (\alpha + \beta) = - \cos \gamma$, demnach ergiebt sich

$$\cos \gamma = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{d}} \,.\, \sin \delta - \cos \delta\,.$$

Setzt man $\mathrm{h/d} = \operatorname{tg} \lambda$, so folgt

$$\cos \gamma = \operatorname{tg} \lambda \sin \delta - \cos \delta = - \frac{\cos (\lambda + \delta)}{\cos \lambda}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos (180^0 - [\lambda + \delta])}{\cos \lambda},$$

oder einfacher: $\cos (\alpha + \beta) = - \cos \gamma \qquad = + \frac{\cos (\lambda + \delta)}{\cos \lambda}.$

Besondere Fälle.

1) Errichtet man auf BP in P das Lot, bis es den Kreis in S schneidet, so wird $\underline{\alpha = 90^0}$, wenn $h = PS$ wird, denn dann fällt C mit S und A mit P zusammen. Verbindet man S mit B, so ist $\angle BSP = \delta$, demnach $PS = \underline{h = 2\,d \operatorname{cotg} \delta}$. Ist $h > 2\,d \operatorname{cotg} \delta$, so wird $\alpha > 90^0$.

2) Soll $\underline{\gamma = 90^0}$ sein, so wird AB Durchmesser des Umkreises; verbindet man den Mittelpunkt O desselben mit C und fällt $CD \perp AB$, so ist $\angle OCD = \delta$ und $DO = \frac{p - q}{2} = d$, folglich $\underline{h = d \operatorname{cotg} \delta}$ (also halb so groß wie im vorhergehenden Falle). Ist $h < d \operatorname{cotg} \delta$, so ist $\gamma > 90^0$.

3) Wenn $\underline{a = c}$, also $\alpha = \gamma$ wird, so ist $2\,\alpha + \beta = 180^0$, und da $\alpha - \beta = \delta$ gegeben ist, so folgt $\alpha = 60^0 + {}^1/_3\,\delta$ und $\beta = 60^0 - {}^2/_3\,\delta$. Da nun $\operatorname{cotg} \beta = p/h$, $\operatorname{cotg} \alpha = q/h$, so ergiebt sich, wenn man α und β durch die oben berechneten Werte ausdrückt und subtrahiert:

$$\operatorname{cotg}(60 - {}^2/_3\,\delta) - \operatorname{cotg}(60 + {}^1/_3\,\delta) = 2\,d/h,$$

$$\frac{\sin(60 + {}^1/_3\,\delta)\cos(60 - {}^2/_3\,\delta) - \cos(60 + {}^1/_3\,\delta)\sin(60 - {}^2/_3\,\delta)}{\sin(60 - {}^2/_3\,\delta)\,.\,\sin(60 + {}^1/_3\,\delta)} = \frac{2\,d}{h}$$

Der Zähler der linken Seite ist $\sin \delta$, demnach folgt die Bedingung

$$h = \frac{2\,d \sin(60 - {}^2/_3\,\delta)\sin(60 + {}^1/_3\,\delta)}{\sin \delta}.$$

Drückt man $\sin(60 - {}^2/_3\,\delta)$ durch den halben Winkel aus und beachtet, daß $30^0 - {}^1/_3\,\delta$ das Komplement zu $60^0 + {}^1/_3$ ist, so geht die Formel über in

$$\underline{h = \frac{4\,d \sin(30 - {}^1/_3\,\delta)\,.\,\cos^2(30 - {}^1/_3\,\delta)}{\sin \delta}}.$$

$p - q = 2\,d = 753{,}2\,,\ \alpha - \beta = \delta = 17\,.\,35\,.\,18.$

h	$= d \operatorname{cotg} \delta/_2$ 2434,33	$= d \operatorname{cotg} \delta$ 1188,03	$< d \operatorname{cotg} \delta$ 495,6	$= 2\,d \operatorname{cotg} \delta$ 2376,06	$> 2\,d \operatorname{cotg} \delta$ 2400	$= 4\,d \sin (30 - {}^1/_3\,\delta) \ldots$ 1697,7
γ	0	90.0.0	123.45.6	17.35.18	13.29.20	65.51.46
α	98.47.39	53.47.39	36.55.6	90.0.0	92.2.59	65.51.46
β	81.12.21	36.12.21	19.19.48	72.24.42	74.27.41	48.16.28
a	2463,33	2011,27	1497,24	2492,6	2491	2274,7
b	2463,33	1472,34	825,07	2376	2401,5	1860,3
c	0	2492,6	3033,7	753,2	581,4	2274,7.

7.

Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe zweier Seiten, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und der zur dritten Seite gehörigen Höhe.

Gegeben $a + b = m, \gamma, h$.

Konstruktion.

Man zeichne AD = 2 h, trage daran in A einen Rechten und in D $\angle\, 90^0 - \gamma/_2$ an, die freien Schenkel mögen sich in E schneiden; schlage über AE als Durchmesser einen Kreis, trage auf AD die gegebene Strecke m = AF ab, ziehe von F in den Kreis den Durchmesser FLG, schlage um den Mittelpunkt M des Kreises einen Kreisbogen mit MF, der die Verlängerung von EA in B trifft, und um B einen Bogen mit m*), der ED in H trifft, verbinde H mit B und A, errichte auf HA das Mittellot, das BH in C trifft, verbinde C mit A, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Die Lösung ist nur möglich, wenn der Kreis um B mit m die Gerade ED trifft, wenn also m nicht kleiner ist als das von

*) Wenn man m nicht abheben will, so kann man von B aus eine Tangente an den Kreis M ziehen und mit dieser den Bogen um B schlagen, da sie gleich m ist.

B auf ED gefüllte Lot BJ. Ist $m > BJ$, so giebt es 2 Schnittpunkte H und H_1, demnach auch 2 Dreiecke, die kongruent sind und symmetrisch zu dem auf AB errichteten Mittellot liegen. Ist $m = BJ$, so fallen die Schnittpunkte H und H_1, folglich auch die Ecken C und C_1 zusammen, es giebt also nur ein Dreieck, und zwar ein gleichschenkliges. Je nachdem also $m \substack{<\\=\\>} RJ$, giebt es $\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$ Lösungen.

BJ ist noch durch die gegebenen Stücke auszudrücken.

In $\triangle BJE$ ist $BJ = BE \,.\, \sin \gamma/_2$, $BE = FG$. Nach dem Tangentensatze ist $FL : FA = FA : FG$, oder

$$AB : m = m : BE$$

also
$$AB \,.\, BE = m^2 \,.$$

Da ferner in $\triangle EAD$: $BE - AB = AE = 2\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2$, so ist

$$AB = BE - 2\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2 \,,$$

demnach
$$BE\,(BE - 2\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2) = m^2$$

woraus
$$BE = h \operatorname{cotg} \gamma/_2 + \sqrt{h^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma/_2 + m^2}\,,$$

also
$$BJ = h \cos \gamma/_2 + \sqrt{h^2 \cos^2 \gamma/_2 + m^2 \sin^2 \gamma/_2}$$

folgt. Die Determinationsformel geht also über in

$$m \substack{<\\=\\>} h \cos \gamma/_2 + \sqrt{h^2 \cos^2 \gamma/_2 + m^2 \sin^2 \gamma/_2}\,.$$

Löst man diese Formel noch in Bezug auf h auf, so ergiebt sich schließlich als Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe:

Je nachdem $h \substack{>\\=\\<} \frac{1}{2}\, m \cos \gamma/_2$, giebt es $\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$ Lösungen.

Trigonometrische Lösung.

Wie in der Determination ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$BE \,.\, AB = m^2\,,\quad BE - AB = 2\,h \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2 \,.$$

Eliminiert man BE, so folgt, wenn man $AB = c$ setzt:

$$c\,(c + 2\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2) = m^2\,,$$
$$c = -\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2 + \sqrt{h^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma/_2 + m^2}\,.$$

Um diesen Ausdruck für die logarithmische Berechnung bequemer zu gestalten, hebt man im Radikandus m^2 heraus und setzt $\frac{h}{m} \cdot \operatorname{cotg} \gamma/_2 = \operatorname{cotg} \lambda$, so folgt:

$$c = -h \operatorname{cotg} \gamma/_2 + m \sqrt{\left(\frac{h}{m} \operatorname{cotg} \gamma/_2\right)^2 + 1} = -m \operatorname{cotg} \lambda + m \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \lambda + 1}$$

$$= -m \operatorname{cotg} \lambda + m/\sin \lambda = \frac{m}{\sin \lambda}(1 - \cos \lambda) = \frac{2\, m \sin^2 \lambda/_2}{2 \sin \lambda/_2 \cos \lambda/_2},$$

zuletzt $\underline{c = m \cdot \operatorname{tg} \lambda/_2}$.

Aus der zweiten Mollweideschen Gleichung folgt dann:

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{m}{c} \sin \gamma/_2 .$$

Besondere Fälle.

1) Ist $\underline{a = b}$, so wird $a = b = \frac{1}{2} m$, die Höhe h halbiert $\angle \gamma$, und man erhält $\underline{h = a \cos \gamma/_2 = \frac{1}{2} m \cos \gamma/_2}$ — wie schon aus der Determination bekannt. Dieselbe Bedingung ergiebt sich natürlich auch, wenn man in der Gleichung $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{m}{c} \cdot \sin \gamma/_2$ die Differenz der Winkel $\alpha - \beta = 0$, also $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$ setzt, und den hieraus folgenden Wert $c = m \sin \gamma/_2$ dem oben entwickelten allgemein gültigen $c = -h \operatorname{cotg} \gamma/_2 + \sqrt{h^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma/_2 + m^2}$ gleichsetzt.

2) Soll $\underline{\alpha = 90^0}$ werden, so folgt aus $\triangle$ ABC, worin $AC = h$ ist: $c = h \operatorname{tg} \gamma$, und wenn man AC über C hinaus um BC bis E verlängert, sodaß also $AE = m$ und $\angle AEB = \gamma/_2$ ist: $c = m \operatorname{tg} \gamma/_2$. Setzt man diese beiden Werte für c einander gleich, so folgt

$$\underline{h = m \operatorname{tg} \gamma/_2 \cdot \operatorname{cotg} \gamma .}$$

3) Soll $\underline{a = c}$ werden, so erhält man $b = 2\, c \cos \gamma$, $a + b = c + b = c + 2\, c \cos \gamma = m$, also $c = \frac{m}{1 + 2 \cos \gamma}$.

Setzt man diesen Wert von c gleich dem allgemein hergeleiteten, so folgt:

$$\frac{m}{1 + 2\cos\gamma} = -\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2 + \sqrt{h^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma/_2 + m^2},$$

$$\frac{m^2}{(1 + 2\cos\gamma)^2} + \frac{2\,m\,h \operatorname{cotg}\gamma/_2}{1 + 2\cos\gamma} + h^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma/_2 = h^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma/_2 + m^2.$$

$$m + 2\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2\,(1 + 2\cos\gamma) = m\,(1 + 4\cos\gamma + 4\cos^2\gamma)$$

$$2\,h \operatorname{cotg} \gamma/_2 = \frac{4\,m \cos\gamma\,(1 + \cos\gamma)}{1 + 2\cos\gamma}.$$

$$h = \frac{2\,m\cos\gamma\,.\,2\cos^2\gamma/_2\,.\,\operatorname{tg}\gamma/_2}{2\,(\frac{1}{2} + \cos\gamma)} = \frac{m\,.\,\cos\gamma\,.\,2\sin\gamma/_2\cos\gamma/_2}{2\,(\cos 60^0 + \cos\gamma)}$$

$$h = \frac{m\,.\,\sin 2\gamma}{4\cos(\gamma/_2 + 30^0)\,.\,\cos(\gamma/_2 - 30^0)}.$$

$$a + b = m = 14679,\ \gamma = 72\,.\,53\,.\,26.$$

h	$<\frac{1}{2} m \cos\gamma/_2$	$=\frac{1}{2} m \cos\gamma/_2$	$= m \operatorname{tg}\gamma/_2 . \operatorname{cotg}\gamma$	$< m \operatorname{tg}\gamma/_2 \operatorname{cotg}\gamma$	$\frac{m \sin 2\gamma}{4\cos(\gamma/_2+30)\cos(\gamma/_2-30)}$
	5840,9	5904,2	3336,78	2000	5197,1
λ	61 . 41	61.25.30	72.53.26	79.32.49	64.23.11
α	59.21.17	53.33.17	90.0.0	98.1.12	72.53.26
β	47.45.17	53.33.17	17.6.34	9.5.22	34.13.8
a	7890	7339,5	11342,22	12660	9241,4
b	6789	7339,5	3336,78	2019	5437,6
c	8765	8720,2	10840,3	12213,6	9241,4

8.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und den Radien des Um- und Inkreises.

Gegeben γ, r, ϱ.

Konstruktion.

Zeichne $\angle\, 2\gamma$ mit dem Scheitelpunkt O, schlage um O mit r den Kreis, der die Schenkel von 2γ in A und B trifft, ziehe AB und dazu die Parallele im Abstande ϱ, halbiere Bogen AB in J, ziehe AJ und schlage damit um J einen Kreisbogen, der die Parallele in M und M_1 trifft, ziehe JM und verlängere es, bis es die Peripherie des Kreises O in C trifft, ziehe CA und CB, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Die zu AB im Abstande $EP = \varrho$ gezogene Parallele trifft den Kreisbogen um J in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem $\varrho \gtreqless EQ$ ist, d. i. der Abstand des Scheitels des Bogens um J von der zugehörigen Sehne AB. Im Grenzfalle $\varrho = EQ$ wird das Dreieck gleichschenklig, weil C auf der Mittelsenkrechten von AB liegt. Die Größe EQ ist durch die gegebenen Stücke auszudrücken. Am einfachsten läßt sich EQ aus dem $\triangle$ AEQ berechnen, in welchem $AE = c/_2 = r \sin \gamma$, und $\angle$ EQA als Basiswinkel im gleichschenkligen $\triangle$ AJQ, worin der Winkel an der Spitze $AJQ = 90^0 - \gamma/_2$ ist, gleich $45^0 + \gamma/_4$ wird. Dann ist EQ $= r \sin \gamma \,.\, \operatorname{cotg} (45 + \gamma/_4)$, mithin giebt es, je nachdem

$$1)\ \varrho \gtreqless r \sin \gamma \operatorname{cotg} (45 + \gamma/_4) \text{ ist, } \frac{0}{\frac{1}{2}} \text{ Lösungen.}$$

Eine hiermit identische Formel erhält man folgendermaßen: Es ist $EQ = JQ - JE = JA - JE$. Aus $\triangle$ AJK erhält man $JA = 2 r \sin \gamma/_2$, ferner aus $\triangle$ AJE : $JE = AE \,.\, \operatorname{tg} \gamma/_2 = r \sin \gamma \,.\, \operatorname{tg} \gamma/_2 = 2 r \sin \gamma/_2 \cos \gamma/_2 \,.\, \operatorname{tg} \gamma/_2 = 2 r \sin^2 \gamma/_2$, demnach

$$EQ = 2 r \sin \gamma/_2 - 2 r \sin^2 \gamma/_2 = 2 r \sin \gamma/_2 (1 - \sin \gamma/_2)$$
$$= 2 r \sin \gamma/_2\, 2 \sin^2 (45 - \gamma/_4),$$

$$\text{folglich } 2)\ \varrho \gtreqless 4 r \sin \gamma/_2 \,.\, \sin^2 (45 - \gamma/_4),\ \frac{0}{\frac{1}{2}} \text{ Lösungen.}$$

Trigonometrische Lösung.

$c = 2 r \sin \gamma$; $s - c = \varrho \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2$; $a + b = 2 s - c$;

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a + b}{c} \,.\, \sin \gamma/_2.$$

Besondere Fälle.

1) Soll $\alpha = 90^0$ sein, so verlängere man AC über C hinaus um BC bis R, so ist $\angle$ ARB $= \gamma/_2$, also $a + b = c \,.\, \mathrm{cotg}\, \gamma/_2 = 2\, r \sin \gamma \,.\, \mathrm{cotg}\, \gamma/_2 = 4\, r \cos^2 \gamma/_2$. Nun ist allgemein

$$a + b = 2\, s - c = 2\, \varrho\, \mathrm{cotg}\, \gamma/_2 + 2\, r \sin \gamma,$$

setzt man diese beiden Werte einander gleich, so folgt:

$$2\, \varrho\, \mathrm{cotg}\, \gamma/_2 + 2\, r \sin \gamma = 4\, r \cos^2 \gamma/_2,$$

$$\varrho = r\, (2 \cos^2 \gamma/_2\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2 - \sin \gamma\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2) = r\, (\sin \gamma - \sin \gamma\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2)$$
$$= r \,.\, \sin \gamma\, (1 - \mathrm{tg}\, \gamma/_2),$$

$$\underline{\varrho = 4\, r \sin \gamma/_2 \cos 45^0 \,.\, \sin (45 - \gamma/_2)}\,.$$

Ohne Benutzung der allgemein gültigen trigonometrischen Lösung läßt sich derselbe Ausdruck aus dem rechtwinkligen $\triangle$ BAC folgendermaßen herleiten: Fällt man $\varrho =$ ML $\perp$ AB, so ist $\varrho =$ AM $\cos 45^0$; in $\triangle$ AMJ ist AM $= 2$ AJ $\sin (45^2 - \gamma/_2)$, und AJ $= 2\, r \sin \gamma/_2$, demnach wie oben

$$\underline{\varrho = 4\, r \sin \gamma/_2 \cos 45^0 \sin (45 - \gamma/_2)}.$$

A n m e r k u n g : Auch der oben gefundene Ausdruck $\varrho = r\, (\sin \gamma - \sin \gamma\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2)$ kann zur Bestimmung von ϱ benutzt werden. Da nämlich AE $= r \sin \gamma$, und EJ $=$ AE $\mathrm{tg}\, \gamma/_2 = r \sin \gamma\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2$ ist, so muß $\varrho =$ AE $-$ EJ sein. Stellt man daher diese Differenz dar, indem man EJ auf EA bis T abträgt, errichtet in T das Lot auf AB, bis es den um J mit JA geschlagenen Bogen in M schneidet, zieht JM und verlängert es, bis es die Peripherie von O in C schneidet, so läßt sich beweisen, daß $\triangle$ CAB der Aufgabe genügt und daß $\angle\, \alpha = 90^0$ ist. Hier möge nur der Beweis der letzteren Behauptung ausgeführt werden: Fällt man MU $\perp$ JO, so ist $\triangle$ AEJ $\cong$ JUM (IV), folglich $\angle$ EAJ $=$ UJM $= \gamma/_2$, da aber auch JCA $= \gamma/_2$ ist, so ist UJM $=$ JCA. Da diese beiden Winkel die Lage von Wechselwinkeln haben, so muß AC $\parallel$ JU sein, folglich, da JU $\perp$ AB, auch AC $\perp$ AB, also $\angle\, \alpha = 90^0$.

2) Für $\underline{a = b}$ gilt die Grenzbedingung der Determination

$$\varrho = r \sin \gamma\, \mathrm{cotg}\, (45 + \gamma/_4)\,.$$

3) Wenn $\underline{a = c}$ ist, so ist auch $\alpha = \gamma$, also $\angle$ MAJ $= \alpha/_2 + \gamma/_2 = \gamma$, demnach $\varrho = ML = AM \,.\, \sin \gamma/_2$, $AM = \dfrac{2 \,.\, AM}{2} = 2\, AJ \cos \gamma$, $AJ = 2\, r \sin \gamma/_2$, somit

$$\underline{\varrho = 4\, r \sin^2 \gamma/_2 \,.\, \cos \gamma \,.}$$

$$r = 123,\ \gamma = 65 \,.\, 25.$$

ϱ	$r \sin \gamma \operatorname{cotg}(45 + \gamma/_4)$ 61,1	$4 r \sin \gamma/_2 \sin(45 - \gamma/_2)$. cos 45 40,022	$4\, r \sin^2 \gamma/_2 \,.\, \cos \gamma$ 59,767	$< 4\, r \sin \gamma/_2 \ldots$ 30.
a	207	246	223,7	244,01
b	207	102,34	186,126	73,12
c	223,7	223,7	223,7	223,7
α	57 . 17 . 30	90 .	65 . 25	97 . 17 . 30
β	.57 . 17 . 30	24 . 35	49 . 10	17 . 17 . 30 .

9.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Halbierungslinie desselben und dem Radius des Umkreises.

Gegeben γ, w, r.

Konstruktion.

Man zeichnet einen Winkel $O = 2\,\gamma$, beschreibt um O den Kreis mit dem Radius r, der die Schenkel von $2\,\gamma$ in A und B trifft, halbiert Bogen AB in J, zieht AJ und darauf senkrecht AP = w, beschreibt über AP als Durchmesser den Kreis und zieht in diesen von J aus den Durchmesser QR, schlägt um J mit JR den Kreis, der den um O in C (C_1) trifft, und verbindet C mit A und B, so genügt $\triangle$ ABC der Aufgabe.

Determination.

Der Punkt C kann nur dann festgelegt werden, wenn der Kreis um J den um O trifft, wenn also nicht JR > 2 r ist. Ist

$JR < 2\,r$, so giebt es 2 Schnittpunkte, die zu JOK symmetrisch liegen, die entstehenden beiden Dreiecke sind kongruent. Ist $JR = 2\,r$, so fallen beide Schnittpunkte C mit K (dem höchsten Punkte des Umkreises über AB) zusammen, es giebt nur ein Dreieck, und zwar ein gleichschenkliges. Je nachdem also $JR \gtreqless 2\,r$, giebt es $\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$ Lösungen.

Hierin ist JR durch die gegebenen Stücke auszudrücken.

Es ist $JR \,.\, JQ = JA^2$; $JQ = JR - w$, $JA = 2\,r \sin \gamma/_2$, also

$$JR^2 - JR \,.\, w - 4\,r^2 \sin^2 \gamma/_2 = 0\,,$$

$$JR = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} + 4\,r^2 \sin^2 \gamma/_2}\,.$$

Da die Wurzel größer als $\frac{w}{2}$ ist, darf nur das positive Vorzeichen benutzt werden.

Man erhält also durch Einsetzung dieses Wertes:

$$\frac{w}{2} + \sqrt{\frac{w^2}{4} + 4\,r^2 \sin^2 \gamma/_2} \gtreqless 2\,r$$

und hieraus durch Umstellung und Quadrierung u. s. w. schließlich:

Je nachdem $w \gtreqless 2\,r \cos^2 \gamma/_2$ ist, giebt es $\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}$ Lösungen.

Um den Grenzausdruck $2\,r \cos^2 \gamma/_2$ zu konstruieren, ziehe man den Durchmesser JK, der AB in E treffe, und verbinde K mit A, so ist im $\triangle$ AEK: $EK = AK \cos \gamma/_2$, und in $\triangle$ KAJ: $AK = 2\,r \cos \gamma/_2$, somit $EK = 2\,r \cos^2 \gamma/_2$, d. h. der größte Wert, den bei konstantem r und γ die Winkelhalbierende w annehmen darf, ist gleich dem Abstande des höchsten Punktes des Umkreises von der Grundlinie AB.

Trigonometrische Lösung.

Aus den beiden Formeln für den doppelten Inhalt des Dreiecks $ab \sin \gamma$ und $(a + b) \,.\, w \,.\, \sin \gamma/_2$ erhält man durch Gleichsetzen und Kürzen: $2\,ab \cos \gamma/_2 = (a + b) \,.\, w$. Aus dem Cosinussatze kann man entwickeln: $(a + b)^2 - 4\,a\,b \cos^2 \gamma/_2 = c^2$.

Eingesetzt: $(a + b)^2 - 2\,(a + b) \,.\, w \cos \gamma/_2 - c^2 = 0$

$$a + b = w \cos \gamma/_2 + \sqrt{w^2 \cos^2 \gamma/_2 + c^2},$$

Ferner $\cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{a + b}{c} \sin \gamma/_2$, $c = 2\,r \sin \gamma$.

Um den Wert von $a + b$ für die logarithmische Berechnung geeignet zu machen, schreibe man

$$a + b = w \cos \gamma/_2 + w \cos \gamma/_2 \sqrt{1 + c^2/w^2 \cos^2 \gamma/_2},$$

und setze $c/w \cos \gamma/_2 = \operatorname{tg} \lambda$, dann erhält man nach einigen leichten Umformungen:

$$a + b = \frac{2\,w \cos \gamma/_2 \,.\, \cos^2 \lambda/_2}{\cos \lambda}$$

und $$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{w \cos^2 \lambda/_2}{2\,r \cos \lambda}.$$

Besondere Fälle.

1) Ist $\underline{a = b}$, so ist $w \perp AB$, folglich

$$w = c/_2 \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2 = r \sin \gamma \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2 = \underline{2\,r \cos^2 \gamma/_2},$$

was schon aus der Determination bekannt ist.

2) Für $\underline{\alpha = 90^0}$ wird $a = 2\,r$, also $\cos \gamma = b/2\,r$ und $\cos \gamma/_2 = b/w$, folglich $\dfrac{\cos \gamma/_2}{\cos \gamma} = \dfrac{2\,r}{w}$, woraus folgt:

$$\underline{w = 2\,r \cos \gamma \,/\, \cos \gamma/_2 \,.}$$

3) Ist $\underline{a = c}$, so ist $a = 2\,r \sin \gamma$, $\angle \beta = 180^0 - 2\,\gamma$, und, wenn $CF = w$ die Winkelhalbierende ist, $\angle CFB = \gamma + \gamma/_2 = \dfrac{3}{2}\gamma$, also nach dem Sinussatz in $\triangle BCF$:

$$a : w = \sin {}^3/_2\, \gamma \,.\, \sin 2\,\gamma,$$

somit $$\underline{w = 2\,r \sin \gamma \,.\, \sin 2\,\gamma \,/\, \sin {}^3/_2\, \gamma \,.}$$

$2\,r = 61201{,}4;\ \gamma = 57\,.\,9\,.\,52$

w	$= 2\,r \cos^2 \gamma/_2$ 47192	$= 2\,r \cos\gamma/\cos\gamma/_2$ 37792	$= \frac{2\,r \sin\gamma \sin 2\,\gamma}{\sin {}^3/_2\,\gamma}$ 46986
λ	51 . 8 . 6	57 . 9 . 50	51 . 15 . 26
a	53742	61201,4	55765
b	53742	33958,5	51423
c	51423	51423	51423
α	61 . 25 . 4	90 .	65 . 40 . 16
β	61 . 25 . 4	32 . 50 . 8	57 . 9 . 52

10.

Ein Dreieck zu konstruieren aus der Halbierungslinie eines Winkels, der Differenz der beiden andern Winkel und dem Radius des umgeschriebenen Kreises.

Gegeben w, $\alpha - \beta = \delta$, r.

Konstruktion.

Zeichne CO = r, beschreibe damit um O den Kreis und trage an CO in C $\angle\ \delta/_2$ an, dessen freier Schenkel die Peripherie in J treffen möge, trage auf CJ von C aus w = CF ab, fälle von F auf den Radius OJ das Lot, welches nach beiden Seiten verlängert den Kreis in A und B schneidet, und verbinde A und B mit C, so ist Δ ABC das verlangte.

Determination.

Wenn $\delta/_2 \geqq 90^0$ ist, so fällt sein freier Schenkel außerhalb des Kreises. Dieser Fall ist aber eigentlich von vornherein auszuschließen, weil selbstverständlich die ganze Differenz $\delta < 180^0$ sein muß, da andernfalls ja auch $\alpha > 180^0$ werden müßte. Ferner muß w < CJ sein, denn wäre w > CJ, so würde das auf OJ gefällte Lot ganz außerhalb des Kreises liegen, und wäre w = CJ, so fielen A und B mit J zusammen, das Dreieck ABC würde also zur Strecke CJ zusammenschrumpfen. Zur Berechnung von CJ verlängere man den Radius CO, bis er den Kreis in P trifft, und verbinde J mit P, so ist $CJ = CP \,.\, \cos \delta/_2 = 2\,r \cos \delta/_2$; die Aufgabe ist also nur zu lösen, wenn

$$w < 2\,r \cos \delta/_2$$

ist.

Trigonometrische Lösung.

Verbindet man A mit J, so ist in $\triangle$ AJF: $AJ = 2\,r \sin \gamma/_2$, $JF = CJ - CF = 2\,r \cos \delta/_2 - w$; $\angle JAF = \gamma/_2$, $\angle AFJ = \alpha + \gamma/_2 = 90^0 + \delta/_2$, folglich nach dem Sinussatze:

$$AJ : JF = \sin AFJ : \sin JAF$$

oder $$2\,r \sin \gamma/_2 : (2\,r \cos \delta/_2 - w) = \cos \delta/_2 : \sin \gamma/_2 \,.$$

Hieraus folgt: $$\sin^2 \gamma/_2 = \frac{2\,r \cos^2 \delta/_2 - w \cos \delta/_2}{2\,r},$$

$$\sin \gamma/_2 = \cos \delta/_2 \sqrt{1 - \frac{w}{2\,r \cos \delta/_2}} \,.$$

Setzt man noch hierin $\frac{w}{2\,r \cos \delta/_2} = \sin^2 \lambda$, so ergiebt sich

$$\sin \gamma/_2 = \cos \delta/_2 \,.\, \cos \lambda \,.$$

Besondere Fälle.

1) Ist $\underline{\gamma = 90^0}$, so wird AB Durchmesser. Fällt man dann noch $CD \perp AB$, so ist $w = h \,/\, \cos \delta/_2$, und da in diesem Falle in $\triangle$ CDO: $h = r \cos \delta$ ist, so folgt $w = r \cos \delta \,/\, \cos \delta/_2$. Ist w kleiner als dieser Ausdruck, so ist γ ein stumpfer, ist w größer, so ist γ ein spitzer Winkel. Je nachdem also

$$w \gtreqless 2\,r \cos \delta \,/\, \cos \delta/_2, \text{ ist } \gamma \gtreqless 90^0 \,.$$

2) Ist $\underline{\alpha = 90^0}$, so ist $CA = h$ aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken CAF und CAP zu berechnen: $h = w \cos \delta/_2 = 2\,r \cos \delta$, also $w\ 2\,r \cos \delta \,/\, \cos \delta/_2$. Ist $\alpha > 90^0$, so fällt der Fußpunkt der Höhe D außerhalb des Umkreises, demnach ist $h = w \cos \delta/_2 > 2\,r \,.\, \cos \delta$,

also $w > 2 r \cos\delta / \cos \delta/_2$, und da ebenso für $\alpha < 90^0$ sich $w < 2 r \cos\delta / \cos\delta/_2$ ergiebt, so ist, je nachdem

$$w \gtreqless 2 r \cos\delta / \cos\delta/_2 \text{ ist, } \alpha \gtreqless 90^0 .$$

3) Ist $\underline{a = c}$, so ist $\alpha = \gamma$, also $2 a + \beta = 180^0$, und da $\alpha - \beta = \delta$ gegeben ist, so folgt $\alpha = 60^0 + {}^1/_3\, \delta$, $\beta = 60^0 - {}^2/_3\, \delta$. Setzt man diese Werte in die für h geltenden Ausdrücke $h = w \cos\delta/_2 = a \sin\beta$, und $a = 2 r \sin\alpha$ ein, so ist:

$$h = w \cos\delta/_2 = 2 r \sin\alpha \sin\beta = 2 r \sin(60^0 + {}^1/_3\,\delta) \sin(60^0 - {}^2/_3\,\delta),$$

demnach $$w = \frac{2 r \sin(60^0 + {}^1/_3\,\delta) \sin(60 - {}^2/_2\,\delta)}{\cos\delta/_2},$$

oder auch $$\underline{w = \frac{4 r \sin(30 - {}^1/_3\,\delta) \,.\, \cos^2(30 - {}^1/_3\,\delta)}{\cos\delta/_2}}.$$

$$r = 486{,}5, \quad \delta = 18^0\, 55'.$$

w	$= r \cos\delta / \cos\delta/_2$ 466,57	$< r \cos\delta / \cos\delta/_2$ 400	$= 2 r \cos\delta / \cos\delta/_2$ 933,14	$> 2 r \cos\delta / \cos\delta/_2$ 950	$= 4 r \sin(30 - {}^1/_3\,\delta)\ldots$ 664,775	$= 2 r \cos\delta/_2$ 959,76
λ	44.12.16	40.12.32	80.24.24	84.13	56.19.47	90.0.0
α	54.27.30	50.34.50	90.0.0	93.45.14	66.18.20	99.27.30
β	35.32.30	31.39.50	71.5.0	74.50.14	47.23.20	80.32.30
γ	90.0.0	97.45.20	18.55.0	11.24.32	66.18.20	0.0.0
a	791,72	751,64	973	970,9	890,9	959,76
b	565,6	510,75	920,44	939,1	716,1	959,76
c	973	964,1	315,47	192,47	890,9	0.

11.

Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Halbierungslinie des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Gegeben a, b, w.

Konstruktion.

Zeichne BC = a, verlängere es um b bis P, lege unter beliebigem Winkel an BC in C die Strecke w = CQ, ziehe dazu durch P die Parallele, diese treffe die Verlängerung von BQ in R, beschreibe um P mit PR und um C mit CP Kreise, die sich in A schneiden, verbinde A mit C und B, so ist △ ABC das verlangte.

Determination.

Die Möglichkeit der Konstruktion hängt davon ab, daß die beiden Kreise um P und C einander treffen. Da der Kreis um C durch den Mittelpunkt P des anderen gehen muß, so können die beiden Kreise nicht ganz außerhalb einander liegen, die Möglichkeit, daß die Centrale CP größer als die Summe der Radien ist, ist also von vornherein auszuschließen. Auch gleich der Summe der Radien kann sie nicht sein, da sonst PR und somit auch w = O sein müßte. Ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größeren, die Aufgabe ist dann also nicht zu lösen; ist CP gleich der Differenz der Radien, so berühren die beiden Kreise einander, der Berührungspunkt A liegt auf BC, das Dreieck wird also zur geraden Linie; ist endlich CP größer als die Differenz der Radien, so giebt es 2 Schnittpunkte A, es ergeben sich 2 kongruente Dreiecke, die symmetrisch zu BC liegen. Es muß also CP > PR — PC sein. Hier ist CP = b, und da a : a + b = w : PR nach Konstruktion, so ist PR = (a + b) . w / a, somit muß

$$2\,b > \frac{(a + b) \,.\, w}{a},$$

also

$$w < \frac{2\,a\,b}{a + b} \text{ sein.}$$

Trigonometrische Lösung.

$2F = ab \sin\gamma = (a+b)\,w \,.\, \sin \gamma/_2$; $\sin\gamma = 2 \sin\gamma/_2 \cos\gamma/_2$, demnach $\cos\gamma/_2 = \frac{(a+b)\,.\,w}{2\,ab}$.

Auch aus dieser Formel (die sich übrigens auch aus $\triangle$ CAP herleiten läßt, wenn man noch $CS \perp PA$ fällt) ergeben sich die oben entwickelten Fälle der Determination. Ist nämlich $w > \frac{2\,ab}{a+b}$, so wird $\cos\gamma/_2 > 1$, also die Aufgabe unmöglich; ist $w = \frac{2\,ab}{a+b}$, so wird $\cos\gamma/_2 = 1$, $\gamma/_2 = 90^0$, $\gamma = 180^0$, also das Dreieck eine Gerade; ist endlich $w < \frac{2\,ab}{a+b}$, so wird $\cos\gamma/_2 < 1$, also die Aufgabe lösbar.

Besondere Fälle.

1) Soll $\underline{\gamma = 90^0}$ werden, so ist $\cos\gamma/_2 = {}^1/_2\sqrt{2}$, also $\frac{(a+b)\,w}{2\,ab} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\underline{w = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}$. Für $\gamma > 90^0$ wird

$$\cos\gamma/_2 < \frac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ also } w < \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

2) Soll $\underline{\alpha = 90^0}$ sein, so ist in dem rechtwinkligen $\triangle$ CAF (worin $CF = w$ die Winkelhalbierende ist): $\cos\gamma/_2 = b/w$; setzt man diesen Wert dem allgemein gültigen gleich, so folgt:

$$\frac{(a+b)\,.\,w}{2\,ab} = \frac{b}{w},\ w^2 = \frac{2\,ab^2}{a+b},\ \underline{w = b\sqrt{\frac{2\,a}{a+b}}}.$$

Dieselbe Formel ergiebt sich auch, aber umständlicher, wenn man den Pyth. Lehrsatz auf die Dreiecke CAB und CAF anwendet. Wenn $\alpha > 90^0$ sein soll, so wird $w > b\sqrt{\frac{2\,a}{a+b}}$.

3) Wenn $\underline{a = c}$ sein soll, so fälle man $BT \perp AC$, dann ist in $\triangle$ BCT : $\cos\gamma = b/2\,a$, $1 + \cos\gamma = 2\cos^2\gamma/_2 = \frac{2\,a+b}{2\,a}$,

$\cos \gamma/_2 = \sqrt{\frac{2a+b}{4a}}$. Dies dem allgemeinen Werte gleich gesetzt ergiebt:

$$\frac{(a+b)\cdot w}{2ab} = \sqrt{\frac{2a+b}{4a}},$$

$$w = \frac{b}{a+b}\sqrt{a(2a+b)}.$$

4) Für $\underline{b = c}$ ergiebt sich durch einfache Vertauschung der Buchstaben:

$$w = \frac{a}{a+b}\sqrt{b(a+2b)}.$$

$$a = 1870,\ b = 1813$$

w	$=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$	$=b\sqrt{\frac{2a}{a+b}}$	$=\frac{b}{a+b}\sqrt{a(2a+b)}$	$=\frac{a}{a+b}\sqrt{b(a+2b)}$	$<\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$	$>b\sqrt{\frac{2a}{a+b}}$
	1301,83	1827	1586,3	1602,76	1200	1830
α	45.53.12	90.	61.0.9	62.5.44	41.26.20	91.42.30
β	44.6.48	75.49	57.59.42	58.57.8	39.54.54	75.43.
γ	90.	14.11	61.0.9	58.57.8	98.38.46	12.34.30
c	2604,53	458,2	1870	1813	2825,53	407,305

12.

Ein Dreieck zu konstruieren aus der Halbierungslinie eines Winkels und den beiden Abschnitten, in welche sie die gegenüberliegende Seite teilt.

Gegeben u, v, w.

Konstruktion.

Zeichne u = BF, verlängere es um v bis A, teile BA außen im Verhältnis u : v in P, beschreibe über FP als Durchmesser einen Kreis und um F mit w einen Kreisbogen, der den Kreis über PF in C trifft, verbinde C mit A und B, so ist △ ABC das verlangte.

Determination.

Der Kreisbogen um F kann den Kreis über FP nur dann treffen, wenn $w \leqq FP$ ist. Ist $w = FP$, so fällt C mit P zusammen, das Dreieck wird also zur geraden Linie BP. Soll also überhaupt ein Dreieck möglich sein, so muß $w < PF$ sein. Nun ist $FP = EA + AP = v + \frac{v(u+v)}{u-v} = \frac{2uv}{u-v}$, somit muß

$$w < \frac{2uv}{u-v}$$

sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so giebt es zwei kongruente Dreiecke, da die beiden Kreise einander in 2 Punkten schneiden, die symmetrisch zu AB liegen.

Trigonometrische Lösung.

1) Beschreibt man um $\triangle$ ABC den Kreis und verlängert CF, bis es den Kreis in J trifft, und verbindet J mit B, so ist $\triangle CJB \backsim CAF$, mithin $a : w + FJ = w : b$, woraus $ab = w^2 + w \cdot FJ$ folgt; nach dem Sehnensatze aber ist $w \cdot FJ = u \cdot v$, demnach

$$ab = w^2 + uv.$$

Da ferner $a/b = u/v$, so ist

$$a^2 = u/v\,(w^2 + uv),\quad b^2 = v/u\,(w^2 + uv).$$

2) Trägt man AC auf BC von C aus bis Q ab, und AF auf FB bis R, und verbindet man Q mit A und R, so ist $QR \parallel CF$ (denn aus $a : b = u : v$ folgt $a - b : u - v = a : u$, d. i. $BQ : BR = BC : BF$), demnach ist $QR : w = u - v : u$, woraus $QR = \frac{w(u-v)}{u}$ folgt. Nun ist ferner $\angle QAR = \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\angle AQR = 90^0$ (weil $AF = FQ = FR$), folglich

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = QR/AR = \frac{w(u-v)}{2uv}.$$

Endlich ergiebt sich aus $\frac{a-b}{a+b} = \frac{u-v}{u+v} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{u+v}{u-v} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Besondere Fälle.

1) Soll $\gamma = 90^0$ sein, so ist $a^2 + b^2 = c^2$, also, wenn man die oben berechneten Werte einsetzt:

$$u/v\,(w^2 + u\,v) + v/u\,(w^2 + u\,v) = u^2 + 2\,u\,v + v^2,$$

$$(w^2 + u\,v)\,(u^2 + v^2) = u\,v\,(u^2 + 2\,u\,v + v^2)$$

$$w^2 = \frac{2\,u^2\,v^2}{u^2 + v^2}, \text{ also } w = u\,v\sqrt{\frac{2}{u^2+v^2}}.$$

2) Ist $\alpha = 90^0$, so wird $a^2 - b^2 = c^2$, also entsprechend $(w^2 + u\,v)\,(u^2 - v^2) = u\,v\,(u^2 + 2\,u\,v + v^2)$,

$$w = v\sqrt{\frac{2\,u}{u-v}}.$$

3) Für $a = c$ ergiebt sich durch Gleichsetzung der Werte von a^2 und c^2: $\frac{u}{v}(u\,v + w^2) = u^2 + 2\,u\,v + v^2$,

$$w^2 = \frac{2\,u\,v^2 + v^3}{u}, \; w = v\sqrt{\frac{2\,u + v}{u}}.$$

4) Soll der Flächeninhalt F ein Maximum werden, so muß bei unveränderlichem $c = u + v$ die Höhe ein Maximum werden. Dieser Fall tritt ein, wenn C auf dem höchsten Punkte des Halbkreises liegt, alsdann ist die Höhe gleich $^1/_2\,FP = \frac{u\,v}{u-v}$. Fällt man die Höhe CD, so muß in diesem Falle D die Mitte von FP,

also $CD = DF = \frac{u\,v}{u - v}$ sein; dann erhält man aus dem recht-winklig-gleichschenkligen Dreieck CDF: $w = \frac{u\,v}{u - v} \cdot \sqrt{2}$.

5) Zieht man durch C zur Grundlinie AB die Parallele, bis sie den Apollonischen Kreis zum zweiten Male in C_1 trifft, und verbindet C_1 mit A und B, so haben die beiden Dreiecke ABC und ABC_1 gleiche Grundlinie und Höhe, folglich auch gleichen Flächeninhalt. Um die Beziehungen der Winkelhalbierenden w und w_1 in diesen beiden Dreiecken zu ermitteln, verbinde man C mit P, C_1 mit P und F, so ist CC_1PF ein gleichschenkliges Trapez, folglich seine Diagonalen C_1F und CP gleich lang, mithin:

$$w_1^2, \text{ d. i. } C_1F^2 = CP^2 = FP^2 - CF^2 = \left(\frac{2\,u\,v}{u - v}\right)^2 - w^2.$$

oder

$$w_1^2 + w^2 = \left(\frac{2\,u\,v}{u - v}\right)^2.$$

Anmerkung: Es läßt sich leicht beweisen, daß auch

$$\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = 90^0$$

sein muß.

$u = 713, \; v = 527$

w	$u\,v\sqrt{\frac{2}{u^2+v^2}}$ 599,345	$v\sqrt{2u/u-v}$ 1459,2	$v\sqrt{(2u+v)/u}$ 872,2	$\frac{u\,v}{u-v}\sqrt{2}$ 2856,95	$\sqrt{\left(\frac{2\,u\,v}{u-v}\right)^2 - w_1^2}$ 3995,6
a	997,18	1840,96	1240	3398,7	4762,1
b	737,05	1360,7	916,52	2512,1	3475,5
α	53 . 31 . 51	90 .	68 . 18 . 40	126.28.9	170 . 10 . 49
β	36 . 28 . 9	47 . 39 . 26	43 . 22 . 40	36.28.9	7 . 14 . 31
γ	90 .	42 . 20 . 34	68 . 18 . 40	17 .3.42	2 . 34 . 40
F	367483	843620	528010	1252514	367483

13.

Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Umfang, einem Winkel und der auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe.

Gegeben $a + b + c = 2s$, γ, h.

Konstruktion.

Man zeichnet $CH = s$, trägt daran in $C \angle \gamma/_2$ an und errichtet in H das Lot, das den freien Schenkel von $\gamma/_2$ in N trifft, schlägt um N mit NH und um C mit h Kreise und legt an diese eine gemeinschaftliche innere Tangente, welche CH in A und die andere von C an Kreis N gezogene Tangente in B trifft, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Determination.

An die beiden Kreise um N und C läßt sich nur dann eine innere gemeinschaftliche Tangente legen, wenn ihre Centrale CN nicht kleiner als die Summe der Radien ist. Ist sie gleich der Summe der Radien, dann berühren die beiden Kreise einander, AB steht senkrecht auf CN, folglich wird $\triangle ABC$ gleichschenklig. Ist endlich die Centrale größer als die Summe der Radien, so giebt es 2 gemeinschaftliche innere Tangenten, die gegen CN gleich geneigt sind, folglich auch 2 Dreiecke, die symmetrisch zu CN liegen und kongruent sind. Je nachdem also

$$CN \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} h + NH, \text{ giebt es } \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \text{ Lösungen.}$$

Nun ist $NH = s \,.\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2$, $CN = s / \cos \gamma/_2$, folglich geht obige Formel über in:

$$s / \cos \gamma/_2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} h + s\, \mathrm{tg}\, \gamma/_2,$$

$$h \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s \,.\, \frac{1 - \sin \gamma/_2}{\cos \gamma/_2}.$$

Drückt man die Funktionen von $\gamma/_2$ durch die entsprechenden seines Komplementwinkels aus, so folgt:

$$\frac{1 - \sin \gamma/_2}{\cos \gamma/_2} = \frac{1 - \cos(90 - \gamma/_2)}{\sin(90 - \gamma/_2)} = \frac{2 \sin^2(45 - \gamma/_4)}{2 \sin(45 - \gamma/_4)\cos(45 - \gamma/_4)},$$

somit endlich: Je nachdem

$$h \gtreqless s \operatorname{tg}(45 - \gamma/_4) \text{ ist, giebt es } \frac{0}{\frac{1}{2}} \text{ Lösungen.}$$

Der Grenzwert $h = s \,.\, \operatorname{tg}(45 - \gamma/_4)$ wird am einfachsten dadurch hergestellt, daß man den Kreis um N mit NH zeichnet; wenn dieser CN in P schneidet, so ist, wie von vornherein einleuchtet, CP der größte Wert, den bei unveränderlich angenommenem s und γ die Höhe h annehmen darf. Um zu beweisen, daß $CP = s \operatorname{tg}(45 - \gamma/_4)$ ist, ziehe man HP und verlängere diese Linie, bis sie das in C auf HC errichtete Lot in Q trifft, alsdann stimmen die Dreiecke HNP und QCN in den Winkeln überein, folglich verhält sich $NH : NP = CQ : CP$, also $CP = CQ$. Da nun $CQ = s \,.\, \operatorname{tg} CHQ$, und $\angle CHQ = 90^0 - Q = 90^0 - PHN$ $= 90^0 - [90^0 - \frac{1}{2} N] = \frac{1}{2} N = 45^0 - \gamma/_4$ ist, so ist in der That $CP = s \,.\, \operatorname{tg}(45 - \gamma/_4)$.

Trigonometrische Lösung.

1) $\varrho_c = s \,.\, \operatorname{tg} \gamma/_2$; $2F = 2\varrho_c(s - c) = c \,.\, h$, daraus folgt $s - c : c = h : 2\varrho_c$, hieraus $c = \frac{2 s \,.\, \varrho_c}{h + 2\varrho_c}$; $a + b = 2s - c$.

2) Ist $CD = h$, so ist $\angle DCF = \frac{\alpha - \beta}{2}$, folglich $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $= h/CF$. Fällt man $NR \perp AB$, so ist $\triangle CDF \backsim NRF$, somit $h : NR = CF : NF$, woraus durch korrespondierende Addition folgt: $h + NR : h = CN : CF$, also $CF = \frac{h \,.\, CN}{h + NR}$.

Nun ist $CN = s/\cos \gamma/_2$ und $NR = NH = s \operatorname{tg} \gamma/_2$, folglich

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{h \cos \gamma/_2}{h \,.\, s}(h + s \operatorname{tg} \gamma/_2) = \frac{h}{s} \cos \gamma/_2 + \sin \gamma/_2 \,.$$

Um diesen Ausdruck für die logarithmische Berechnung bequemer umzuformen, kann man $h/s = \mathrm{tg}\,\varphi$ setzen, so folgt:

$$\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin(\gamma/_2 + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Besondere Fälle.

1) Für $\underline{a = b}$ wird $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 1$, demnach auch

$$\frac{h}{s}\,.\,\cos\gamma/_2 + \sin\gamma/_2 = 1,\; h = s\,.\,\frac{1 - \sin\gamma/_2}{\cos\gamma/_2},$$

also wie in der Determination: $\underline{h = s\,.\,\mathrm{tg}\,(45 - \gamma/_4)}$.

2) Für $\underline{\alpha = 90^0}$ wird $\alpha - \beta = \gamma$, somit

$$\cos\gamma/_2 = \frac{h}{s}\cos\gamma/_2 + \sin\gamma/_2,$$

$$\underline{h = \frac{2\,s\,.\,\cos 45^0\,.\,\sin(45 - \gamma/_2)}{\cos\gamma/_2}}.$$

Soll nicht auf die trigonometrische Lösung Bezug genommen werden, so läßt sich dieselbe Formel auch folgendermaßen herleiten: Für $\alpha = 90^0$ wird $h = AC = CH - HA = s - HA$. Da in diesem Falle Viereck AHNR ein Quadrat sein muß, so ist $AH = HN = s\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2$, also $h = s - s\,\mathrm{tg}\,\gamma/_2$; der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich in den oben entwickelten umwandeln.

Trägt man HN auf HC bis S ab, so ist CS gleich diesem besonderen Werte von h. Zum Beweise verlängere man NS und fälle darauf das Lot CT, ferner $TU \perp CS$, so ist $\frac{1}{2}\,CS = CU = CT\,.\,\cos 45^0$. Im rechtwinkligen $\triangle$ CTN ist

$$\angle\,CNT = 90^0 - \gamma/_2 - 45^0 = 45^0 - \gamma/_2,$$

folglich $CT = CN\,.\,\sin(45 - \gamma/_2)$, und da $CN = s/\cos\gamma/_2$, so folgt:

$$CS = \frac{2\,s\,.\,\cos 45\,.\,\sin(45 - \gamma/_2)}{\cos\gamma/_2}.$$

3) Soll $\underline{a = c}$ sein, so wird $\beta = 180^0 - \gamma$, $\alpha - \beta = 3\gamma - 180^0$,

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos(3 \,.\, \gamma/_2 - 90) = \sin 3\,\gamma/_2 = 3 \sin \gamma/_2 - 4 \sin^3 \gamma/_2,$$

und da allgemein $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h}{s} \,.\, \cos\gamma/_2 + \sin\gamma/_2$, so folgt:

$$h = \frac{2\,s\,(1 - 2\sin^2\gamma/_2)}{\operatorname{cotg}\gamma/_2} = \underline{2\,s \,.\, \cos\gamma \,.\, \operatorname{tg}\gamma/_2}\,.$$

Um diesen Ausdruck zu konstruieren, ziehe man von C aus die zweite Tangente an den Kreis um N, fälle darauf das Lot HV, welches CN in W trifft, verdoppele VW über W hinaus bis X, ziehe durch X die Parallele zu CV, bis sie CH in A trifft, fälle $AY \perp CV$, ziehe ferner die Tangente AB an Kreis N und fälle $CD \perp AB$, so ist $CD = AY = VX = 2\,VW = 2\,CV \,.\, \operatorname{tg}\gamma/_2$, ferner $CV = s\cos\gamma$, somit $CD = 2\,s\cos\gamma \,.\, \operatorname{tg}\gamma/_2$.

(Hieran kann man den Beweis anschließen, daß BC = AB ist.)

$$2\,s = 4862,\ \gamma = 60 \,.\, 56 \,.\, 26$$

h	$= s\operatorname{tg}(45 - \gamma/_4) =$ 1390,28	$\frac{2s\cos 45 \,.\, \sin(45 - \gamma/_2)}{\cos\gamma/_2}$ 1000,75	$= 2s\cos\gamma\operatorname{tg}\gamma/_2$ 1389,4	$< \frac{2s\cos 45 \sin(45 - \gamma/_2)}{\cos\gamma/_2}$ 500
a	1613	2060,25	1636,2	2272,2
b	1613	1000,75	1589,6	521
c	1636	1801	1636,2	2068,8
α	59 . 31 . 47	90 .	60 . 56 . 26	106 . 20 . 37
β	59 . 31 . 47	29 . 3 . 34	58 . 7 . 8	12 . 42 . 57 .

14.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Höhe auf die Gegenseite und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

Gegeben γ, h, ϱ.

Konstruktion.

Zeichne einen Winkel gleich $2\,R - \gamma$, beschreibe um seinen Scheitelpunkt M den Kreis mit dem gegebenen Radius ϱ, der die

Schenkel in G und G_1 trifft, errichte in diesen Schnittpunkten auf den Schenkeln die Lote, die sich in C schneiden, beschreibe um C mit dem Radius h den Kreis und lege an diesen und den um M eine gemeinschaftliche Tangente, welche die Verlängerungen von CG und CG_1 in A und B trifft, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Zunächst muß $\underline{h > 2\varrho}$ sein; denn wäre $h = 2\varrho$, so wäre die gemeinschaftliche Tangente der Kreise um C und M entweder parallel CG oder CG_1, also würde entweder A oder B im Unendlichen liegen; wäre aber $h < 2\varrho$, so würde der Kreis um M nicht Inkreis, sondern Ankreis des $\triangle$ ABC werden. Ferner ist die Aufgabe nur zu lösen, wenn sich überhaupt an die beiden Kreise um C und M eine gemeinsame äußere Tangente legen läßt, wenn also die Centrale $CM \geqq h - \varrho$ ist. Der andre Fall, daß die beiden Kreise eine gemeinsame innere Tangente haben, kommt hier nicht in Betracht, weil sonst M wiederum nicht Inkreis, sondern Ankreis werden würde.

Fällt man $MP \perp CD$, so ist $PD = ML = \varrho$, also $CP = h - \varrho$. Ist nun $CM = CP$, so fällt CM mit CP zusammen, die beiden Kreise berühren einander in D, ihre gemeinsame Tangente AB steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels γ, das entstehende Dreieck ist demnach gleichschenklig. Ist $CM > CG$, so haben die beiden Kreise zwei gemeinschaftliche äußere Tangenten, es giebt daher 2 Dreiecke, die der Aufgabe genügen; dieselben sind kongruent und liegen symmetrisch zu CM. Je nachdem also

$$CM \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} CP \text{ ist, giebt es } \begin{matrix} 0 \\ \overline{1} \\ 2 \end{matrix} \text{ Lösungen.}$$

Aus dem rechtwinkligen $\triangle$ CGM [worin $MG \perp AC$] folgt $CM = \varrho/\sin\gamma$, ferner war $CP = h - \varrho$, demnach

$$\varrho/\sin{}^{\gamma}/_{2} \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} h - \varrho,\quad h \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \varrho/\sin{}^{\gamma}/_{2} + \varrho,$$

$$h \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \frac{2\varrho\cos^2(45 - {}^{\gamma}/_{4})}{\sin{}^{\gamma}/_{2}},\ \begin{matrix} 0 \\ \overline{1} \\ 2 \end{matrix} \text{ Lösungen.}$$

Trigonometrische Lösung.

Aus der Formel für den doppelten Inhalt des Dreiecks $2\,F = 2\,\varrho\,s = ch$ folgt die Proportion: $2\,s : c = h : \varrho$; $2\,s - c : c = h - \varrho : \varrho$. Nun ist $2\,s - c = a + b$, und $a + b : c = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \gamma/_2$, also auch $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \gamma/_2 = h - \varrho : \varrho$.

Dieselbe Gleichung kann man auch unmittelbar aus $\triangle$ CPM ableiten, worin $\angle\, MCP = \frac{\alpha - \beta}{2}$ als Winkel zwischen der Höhe und der Winkelhalbierenden ist. Hier ist $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = CP/CM$; da aber $CP = h - \varrho$ und $CM = \varrho/\sin\gamma$ bekannt sind, so ergiebt sich ohne Weiteres die obige Gleichung.

Zusatz. Wird in dieser Formel (entsprechend dem Grenzfall der Determination) $\sin\gamma/_2 = \frac{\varrho}{h - \varrho}$ gesetzt, so folgt: $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{h - \varrho}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{h - \varrho} = 1$, also $\frac{\alpha - \beta}{2} = 0$, also das Dreieck gleichschenklig. Ist $\sin\gamma/_2 > \frac{\varrho}{h - \varrho}$, so wird in der Gleichung $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{h - \varrho}{\varrho} \,.\, \sin\gamma/_2$ das Produkt auf der rechten Seite größer als 1, demnach auch $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} > 1$, die Aufgabe also unlösbar.

Besondere Fälle.

1) Für $\underline{a = b}$ ergiebt sich der Grenzfall der Determination:

$$\underline{h = \frac{2\,\varrho\cos^2(45 - \gamma/_4)}{\sin\gamma/_2}}\,.$$

2) Soll $\underline{\alpha = 90^0}$ sein, so ist $h = CA = CG + GA = \varrho\,.\,\mathrm{cotg}\,\gamma/_2 + \varrho$, woraus man durch Umformung erhält:

$$\underline{h = \frac{2\,\varrho\sin 45^0 \,.\, \cos(45 - \gamma/_2)}{\sin\gamma/_2}}\,.$$

3) Soll $\underline{a = c}$ sein, so ist auch $\alpha = \gamma$, ferner $\beta = 180^0 - 2\,\gamma$, $\alpha - \beta = 3\,\gamma - 180^0$, demnach $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \cos(3\,\gamma/_2 - 90^0)$ $= \sin 3\,.\,\gamma/_2 = 3\sin\gamma/_2 - 4\sin^3\gamma/_2$. Setzt man diesen Wert in die allgemein gültige Gleichung für $\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ ein, so folgt:

$$\frac{3\sin\gamma/_2 - 4\sin^3\gamma/_2}{\sin\gamma/_2} = \frac{h - \varrho}{\varrho},$$

$$4 - 4\sin^2\gamma/_2 = h/\varrho,$$

$$\underline{h = 4\,\varrho\cos^2\gamma/_2\,.}$$

$$\varrho = 105,\ \gamma = 76\,.\,54\,.\,32$$

h	$\frac{2\varrho\cos^2(45 - \gamma/_4)}{\sin\gamma/_2}$ 273,84	$\frac{2\varrho\sin 45^0\,.\,\cos(45 - \gamma/_2)}{\sin\gamma/_2}$ 237,22	$4\,\varrho\cos^2\gamma/_2$ 257,57	$< \frac{2\varrho\sin 45^0\cos(45 - \gamma/_2)}{\sin\gamma/_2}$ 234.
a	349,685	1047,32	583,76	1187,32
b	349,685	237,22	264,48	234,11
c	434,93	1020,1	583,76	1156,97
α	51 . 32 . 44	90 .	76.54.32	91 . 43 . 28
β	51 . 32 . 44	13 . 5 . 28	26.10.56	11 . 22 . 0

15.

Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe der Quadrate zweier Seiten und der zur dritten Seite gehörigen Höhe und Mittellinie.

Gegeben $a^2 + b^2 = s^2$, h, t.

Konstruktion.

Zeichne einen rechten Winkel mit dem Scheitelpunkt P, trage auf seinen beiden Schenkeln $\frac{s}{2} = PA = PQ$ ab, beschreibe um A mit AQ einen Kreisbogen und ziehe zu PA im Abstande t eine Parallele, welche den Kreisbogen im R schneidet, fälle RE $\perp$ PA, verdoppele AE über E hinaus bis B, beschreibe um E mit ER einen Kreisbogen, der die zu AB im Abstande h gezogene Parallele im Punkte C schneidet, und verbinde C mit A und B, so entspricht $\triangle$ ABC den Bedingungen der Aufgabe.

Determination.

1) Der Bogen um E mit ER trifft die im Abstande h zu AB gezogene Parallele in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem $h \gtreqless t$ ist. Ist im Grenzfalle $h = t$, so ist $\triangle$ ABC gleichschenklig, ist $h < t$, so sind die 2 möglichen Dreiecke kongruent und zu ER symmetrisch.

2) muß $AQ > t$ sein; wäre $AQ = t$, so würde das von R auf PA gefällte Lot seinen Fußpunkt in A haben, die Punkte A und E und somit auch B würden zusammenfallen, also $\triangle$ ABC zur geraden Linie AR werden. Aus $\triangle$ APQ folgt: $AQ^2 = 2 \cdot \frac{s^2}{4} = s^2/_2$, demnach muß $s^2/_2 > t^2$, also $\underline{s^2 > 2\,t^2}$ sein.

Trigonometrische Lösung.

Aus dem Datum $a^2 + b^2 = 2\,t^2 + c^2/_2$ folgt: $c^2 = 2\,s^2 - 4\,t^2$, ferner nach dem Cosinussatz: $2\,ab \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 = s^2 - c^2 = 4\,t^2 - s^2$.

Weiter ist $4\,F = 2\,ab \sin\gamma = 2\,ch$

$$= 2\,h\sqrt{2\,s^2 - 4\,t^2}$$

Dividiert: $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\,h\sqrt{2\,s^2 - 4t^2}}{4\,t^2 - s^2},$$

quadriert, addiert u. radiciert:

$$2\,ab = \sqrt{4\,h^2(2\,s^2 - 4\,t^2) + (4\,t^2 - s^2)^2};$$

aus $a^2 + b^2 = s^2$ und $2\,ab$ sind dann die Seiten einzeln bekannt.

Besondere Fälle.

1) Soll $\underline{\gamma = 90^0}$ sein, so ist t als Mittellinie nach der Hypotenuse gleich der Hälfte der letzteren, folglich $c = 2\,t$. Da nun $a^2 + b^2 = c^2$ sein muß, so ist $\underline{s^2 = 4\,t^2}$.

2) Für $\alpha = 90^0$ ist $a^2 = b^2 + c^2$. Nun ist in jedem Dreieck $c^2 = 2(a^2 + b^2) - 4t^2 = 2s^2 - 4t^2$, ferner hier $b = h$, also $a^2 = s^2 - b^2 = s^2 - h^2$, somit $s^2 - h^2 = h^2 + 2s^2 - 4t^2$,

$$\underline{s^2 = 4t^2 - 2h^2.}$$

3) Ist $a = c$, so wird in $\triangle$ BCD: $c^2 = a^2 = h^2 + p^2$. Da nun in jedem Dreieck $\frac{p+q}{2} = \frac{c}{2}$, und $\frac{p-q}{2} = \sqrt{t^2 - h^2}$, so ist $p = \frac{c}{2} + \sqrt{t^2 - h^2}$, demnach

$$c^2 = h^2 + \frac{c^2}{4} + c\sqrt{t^2 - h^2} + t^2 - h^2 = \frac{c^2}{4} + t^2 + c\sqrt{t^2 - h^2},$$

$$\frac{3}{4}c^2 - c\sqrt{t^2 - h^2} - t^2 = 0$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{t^2 - h^2} + \sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{9}h^2 + \frac{4}{3}t^2}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{t^2 - h^2} + \sqrt{4t^2 - h^2}\right]$$

quadriert: $c^2 = \frac{4}{9}\left[t^2 - h^2 + 4t^2 - h^2 + 2\sqrt{(t^2 - h^2)(4t^2 - h^2)}\right]$.

Setzt man diesen Wert für c^2 dem in 2) gefundenen Werte $c^2 = 2s^2 - 4t^2$ gleich, so ergiebt sich

$$2s^2 - 4t^2 = \frac{4}{9}\left[5t^2 - 2h^2 + 2\sqrt{(t^2 - h^2)(4t^2 - h^2)}\right],$$

endlich $s^2 = \frac{4}{9}\left[7t^2 - h^2 + \sqrt{(t^2 - h^2)(4t^2 - h^2)}\right]$.

4) Soll noch $a = b$, das Dreieck also **gleichseitig** werden, so hat man in dem zuletzt entwickelten Ausdruck $t = h$ zu setzen; man erhält alsdann $\underline{s^2} = \frac{4}{9} \cdot 6h^2 = \underline{\frac{8}{3}h^2}$.

Dieser Ausdruck stimmt überein mit der bekannten Beziehung zwischen Seite und Höhe des gleichseitigen Dreiecks: $a^2 = \frac{4}{3}h^2$, da hier $a^2 + b^2 = 2a^2 = s^2/_2$ ist.

$h = 301{,}71,\ t = 315{,}29$

s^2	$> 2t^2$ 356177	$= 4t^2$ 397632	$= 4t^2 - 2h^2$ 215574	$= \frac{4}{9}[7t^2 - h^2 + \sqrt{\ldots}$ 291339	$h = t = 315{,}29$ $= {}^8/_3\, h^2$ 265088
a	479	506,475	352,9125	430,17	364067
b	356	375,645	301,6975	326,03	364067
c	561	630,58	183,067	430,17	364067
α	57.56.26	53.26.12	90.0.0	67.43.54	60.0.0
β	39.2.28	36.33.48	58.45.3	44.32.12	60.0.0
γ	83.1.6	90.0.0	31.14.57	67.43.54	60.0.0

16.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten und der Transversalen, welche die größere von diesen halbiert.

Gegeben c, $a^2 - b^2 = d^2$, t_a.

Konstruktion.

Man zeichnet AB = c, schlägt darüber einen Halbkreis, trägt in diesen von B aus $\sqrt{a^2 - b^2} = d = BD$ als Sehne ein, fällt DE $\perp$ AB, halbiert EA in F und BF in G, errichtet auf AB Lote in G und F, schlägt um A einen Kreisbogen mit t_a, der das in G errichtete Lot in H schneidet, zieht BH und verlängert es bis zum Schnittpunkte C mit dem in F errichteten Lote, verbindet C mit A, so genügt $\triangle$ ABC der Aufgabe.

Determination.

Je nach dem Größenverhältnis von $\sqrt{a^2 - b^2}$ und c sind 3 Fälle zu unterscheiden.

1) Es sei $\sqrt{a^2 - b^2} < c$, also $a^2 - b^2 < c^2$, $a^2 < b^2 + c^2$, dann ist $\alpha < 90^0$. In diesem Falle muß AH > AG sein; denn wäre AH < AG, so würde das in G errichtete Lot von dem Kreis=

bogen um A überhaupt nicht getroffen; wäre $AH = AG$, so fielen die Punkte H und G zusammen, das $\triangle ABC$ würde also zur Strecke AB zusammenschrumpfen. Da $AH = t_a$ gegeben ist, bleibt nur noch AG durch die gegebenen Stücke auszudrücken. Es ist:

$$AG = c - BG = c - \frac{1}{2} BF;$$

$$BF = c - AF = c - \frac{1}{2} AE = \frac{2c - AE}{2} = \frac{c + (c - AE)}{2} = \frac{c + BE}{2},$$

$BE = d^2/c$, also

$$AG = c - \frac{c^2 + d^2}{4c} = \frac{4c^2 - c^2 - d^2}{4c} = \frac{3c^2 - d^2}{4c},\text{ demnach}$$

$$t_a > \frac{3c^2 - d^2}{4c}.$$

2) Wenn $\sqrt{a^2 - b^2} = c$, also $a^2 - b^2 = c^2$ ist, so ist $\alpha = 90^0$, und G wird die Mitte von AB, in diesem Falle muß also

$$t_a > \frac{1}{2} c$$

sein.

3) Ist $\sqrt{a^2 - b^2} > c$, also $a^2 - b^2 > c^2$, $a^2 > b^2 + c^2$, so ist $\alpha > 90^0$. Für diesen Fall muß die Konstruktion folgendermaßen abgeändert werden: Man zeichnet $AB = C$, errichtet darauf in A das Lot, schlägt um B mit $\sqrt{a^2 - b^2} = d$ einen Kreisbogen, der dieses Lot in D trifft, errichtet auf DB das Lot, das die Verlängerung von BA in E trifft, halbiert u. s. w. In derselben Weise wie bei 1) erhält man wieder die Bedingung:

$$t_a > \frac{3c^2 - d^2}{4c},\text{ so lange } d^2 < 3c^2 \text{ bleibt.}$$

Wird $d^2 > 3c^2$, so fällt der Fußpunkt des Lotes GH in die Verlängerung von BA, die entsprechende Rechnung ergiebt

$$t_a > \frac{d^2 - 3c^2}{4c}.$$

Ist $d^2 = 3\,c^2$, so genügt die Bedingung $t_a > 0$. In diesem letzteren Falle ist $AH \perp AB$ und identisch mit GH, und es wird $p = 2\,c = 2\,q$.

Trigonometrische Lösung.

Aus $p + q = c$ und $p - q = d^2/c$ folgt $p = \frac{c^2 + d^2}{2\,c}$, $q = \frac{c^2 - d^2}{2\,c}$; ferner ist $AG = c - p/_2 = \frac{3\,c^2 - d^2}{4\,c}$, und im rechtwinkligen $\triangle$ AGH : $GH^2 = t_a^2 - \left(\frac{3\,c^2 - d^2}{4\,c}\right)^2$. Da nun $GH = {}^1/_2\,h_c$, so ist h_c bekannt, und es folgt weiter: $\operatorname{tg} \alpha = h/q$, $\operatorname{tg} \beta = h/p$.

Besondere Fälle.

1) Soll $\underline{\gamma = 90^0}$ werden, so ist $a^2 + b^2 = c^2$, und da $a^2 - b^2 = c^2$ gegeben ist, so folgt: $a^2 = \frac{c^2 + d^2}{2}$, $b^2 = \frac{c^2 - d^2}{2}$. Ferner ergiebt sich aus dem rechtwinkligen $\triangle$ ACH : $t_a^2 = a^2/_4 + b^2$; setzt man hierin die oben berechneten Werte für a^2 und b^2 ein, so folgt:

$$t_a^2 = \frac{c^2 + d^2}{8} + \frac{c^2 - d}{2},$$

demnach

$$\underline{t_a^2 = \frac{5\,c^2 - 3\,d^2}{8}}.$$

2) Für $\underline{\alpha = 90^0}$ wird $a^2 - b^2 = c^2$, also

$$\underline{c = d.}$$

3) Soll $\underline{a = c}$ werden, so folgt aus $a^2 - b^2 = d^2$ der Wert $b^2 = c^2 - d^2$, und aus dem bekannten Datum $b^2 + c^2 = a^2/_2 + 2\,t_a^2$, wenn man $a = c$ setzt: $b^2 = 2\,t_a^2 - c^2/_2$. Setzt man diese beiden Werte von b^2 einander gleich, so ergiebt sich die Beziehung:

$$\underline{t_a^2 = \frac{3\,c^2 - 2\,d^2}{4}}.$$

4) Soll $\underline{b = c}$ werden, so kann man entweder ebenso verfahren wie bei 3) oder auch folgendermaßen: Für $b = c$ ist $t_a \perp a$, also in dem rechtwinkligen $\triangle$ AHB: $t_a^2 = c^2 - a^2/_4$.

Addiert man zu dieser Gleichung $\quad d^2/_4 = a^2/_4 - c^2/_4$,

so folgt: $$t_a^2 + d^2/_4 = \frac{3\,c^2}{4}, \text{ und daraus}$$

$$\underline{t_a^2 = \frac{3\,c^2 - d^2}{4}.}$$

	$c = 41,\ d = 32{,}45$			$3\,c^2 > d^2 > c^2$ $c = 28, d = 32{,}45$	$c = d = 32{,}45$	$d^2 > 3\,c^2$ $c = 18, d = 32{,}45$
t_a	$= \sqrt{\frac{5c^2 - 3d^2}{8}}$ 25,6077	$= \sqrt{\frac{3c^2 - 2d^2}{4}}$ 27,097	$= \sqrt{\frac{3c^2 - d^2}{4}}$ 31,583	$> \frac{3\,c^2 - d^2}{4\,c}$ 15	$> \frac{1}{2}\,c$ 20	$> \frac{d^2 - 3\,c^2}{4\,c}$ 15
a	36,973	41	52,2875	37,932	40	48,56
b	17,72	25,06	41	19,643	23,388	36,124
α	64 . 23 . 35	72 . 12 . 18	79 . 14 . 8	104 . 9 . 18	90 .	124 . 5 . 42
β	25 . 36 . 25	35 . 35 . 24	50 . 22 . 56	30 . 8 . 25	35 . 46 . 56	38 . 1 . 44
γ	90 .	72 . 12 . 18	50 . 22 . 56	45 . 42 . 17	54 . 13 . 4	27 . 52 . 34 .

17.

Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Produkt zweier Seiten, der Differenz der Höhenabschnitte auf der dritten Seite und dem Radius des umgeschriebenen Kreises.

Gegeben $ab = l^2$, $p - q = 2\,d$, r.

Konstruktion.

Man zeichne über $CD = 2\,r$ als Durchmesser einen Halbkreis, trage in diesen $l = CE$ als Sehne ein, fälle $EF \perp CD$, trage auf dieser Linie $FG = \frac{p - q}{2} = d$ ab, errichte in G das Lot, das den um C mit r geschlagenen Kreisbogen in O trifft, schlage um O mit OC den Kreis, dieser treffe die Verlängerungen von FG in A und B, verbinde diese Punkte mit C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Determination.

1) Da a und b Sehnen des Kreises mit dem Radius r sein sollen, so darf höchstens eine von ihnen die Länge 2 r erreichen, ihr Produkt muß daher jedenfalls kleiner als $(2\,r)^2$ sein, d. h.

$$\sqrt{ab} = \underline{l < 2\,r.}$$

2) Wäre $FG > r$, so würde das in G errichtete Lot den Kreis um C nicht treffen, es darf also nicht $d > r$ sein. Ist $d = r$, so wird $CO \parallel AB$, und da $OG < r$ sein muß, weil andernfalls der Kreis um O die FG nicht treffen würde, so muß auch $CF < r$, somit auch $CE = \underline{l < r\sqrt{2}}$ sein.

3) Auch wenn $d < r$ ist, muß $OG < r$ sein. Nun ist $OG = CF - CH$, $CF = l^2/2\,r$, $CH = \sqrt{r^2 - d^2}$, also $l^2/2\,r - \sqrt{r^2 - d^2} < r$, demnach $\underline{l^2 < 2\,r\,(r + \sqrt{r^2 - d^2})}$.

Trigonometrische Lösung.

1) Aus $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{p - q}{2\,r} = \dfrac{d}{r}$ folgt $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$. Durch Multiplication von $\sin\alpha = a/2\,r$ und $\sin\beta = b/2r$ erhält man: $\sin\alpha \,.\, \sin\beta = ab/4\,r^2 = l^2/4r^2$. Multipliziert man diese Gleichung mit 2 und subtrahiert sie von $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$, so folgt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta) - l^2/2r^2 = \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} - l^2/2\,r^2.$$

2) Statt $\cos(\alpha + \beta)$ kann man auch $\cos\gamma$ aus dem rechtwinkligen $\triangle$ AOG berechnen. Es ist $\cos\gamma = OG/r$, in der Deter=

mination (3) war aber schon ausgerechnet $OG = l^2/2\,r - \sqrt{r^2 - d^2}$,

demnach erhält man: $\cos\gamma = l^2/2\,r^2 - \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$, d. i. $-\cos(\alpha + \beta)$.

Anmerkung: Da $\cos\gamma < 1$ bleiben muß, so muß stets

$$l^2/2\,r^2 - \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} < 1, \text{ also } l^2 < 2\,r\,(r + \sqrt{r^2 - d^2})$$

sein, es ergiebt sich also dieselbe Formel wie in Determination 3.

Besondere Fälle.

1) Ist $\gamma = 90^0$, so ist O der Mittelpunkt von AB, das Lot OH fällt mit GF zusammen, und aus dem rechtwinkligen $\triangle$ CED folgt: $l^2 = 2\,r\,\sqrt{r^2 - d^2}$. Dieselbe Bedingung erhält man, wenn man in der Gleichung für $\cos\gamma$ den Winkel $\gamma = 90^0$, also $\cos\gamma = 0$ setzt. Ist $\gamma > 90^0$, so ist $\cos\gamma < 1$, also auch $l^2/2\,r^2 - \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} < 1$, somit $l^2 < 2\,r\,\sqrt{r^2 - d^2}$, man erhält

also: je nachdem $l^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} 2\,r\,\sqrt{r^2 - d^2}$, ist $\gamma \overset{>}{\underset{<}{=}} 90^0$.

2) Ist $\alpha = 90^0$, so ist $a = 2\,r$ und $b = 2\,CH = 2\sqrt{r^2 - d^2}$, somit $ab = l^2 = 4\,r\,\sqrt{r^2 - d^2}$. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die in der trigonometrischen Lösung entwickelten Werte von $\cos\gamma$ und $\cos(\alpha - \beta)$ einander gleichsetzt, in der Erwägung, daß $\gamma = \alpha - \beta$ sein muß. Soll $\alpha > 90^0$ sein, so ist $\gamma < \alpha - \beta$, also $\cos\gamma > \cos\alpha - \beta$; setzt man die obigen Werte ein, so folgt die Bedingung $l^2 > 4\,r\,\sqrt{r^2 - d^2}$.

3) Für $a = c$ wird $\alpha = \gamma$, also $2\,\alpha + \beta = 180^0$. Da man nun aus $\sin(\alpha - \beta) = d/r$ berechnen kann $\alpha - \beta = \delta$, so folgt: $\alpha = 60^0 + \delta/_3$, $\beta = 60^0 - {}^2/_3\,\delta$, somit:

$a = 2r\sin\alpha = 2r\sin(60 + \delta/_3) = 2r\cos(30 - \delta/_3)$,
$l = 2r\sin\beta = 2r\sin(60 - {}^2/_3\delta) = 4r\sin(30 - \delta/_3) \, . \, \cos(30 - \delta/_3)$,

also durch Multiplikation:

$$\underline{ab = l^2 = 8\, r^2 \sin(30 - \delta/_3) \cos^2(30 - \delta/_3).}$$

Anmerkung: Will man hierin δ durch die gegebenen Größen ausdrücken, so kommt man auf eine Gleichung dritten Grades.

$$p - q = 2\,d = 133{,}52,\ r = 228{,}65$$

$ab = l^2$	$= 2r\sqrt{r^2 - d^2}$ 100009	$= 4r\sqrt{r^2 - d^2}$ 200018	$= 8r^2\sin(30-\delta/_3)\cos^2(30-\delta/_3)$ 143110	$= 2r(r + \sqrt{r^2 - d})$ 204573 (max)
a	367,544	457,303	416,65	452,29
b	272,086	437,377	343,47	452,29
c	457,3	133,52	416,65	0
α	53 . 29 . 17	90 .	65 . 39 . 32	98 . 29 . 17
β	36 . 30 . 43	73 . 1 . 26	48 . 40 . 56	81 . 30 . 43
γ	90 .	16 . 58 . 34	65 . 39 . 32	0 .

18.

Ein Dreieck zu konstruieren, von dem der Flächeninhalt, ein Winkel und der Radius des umgeschriebenen Kreises gegeben ist.

Gegeben $F = l^2, \gamma, r$.

Konstruktion.

Man zeichnet einen Winkel gleich 2γ, beschreibt um seinen Scheitelpunkt O mit dem Radius r einen Kreis, der die Schenkel in A und B trifft, zieht AB, fällt OE $\perp$ AB und trägt auf diesem Lote von E aus EP = l ab, zieht AP und errichtet darauf in P das Lot, es treffe AB in Q, beschreibt um E mit EQ einen Kreisbogen, der EP in R trifft, zieht durch R die Parallele zu AB, die den Kreis um O in C und C_1 trifft, und verbindet einen dieser Punkte, z. B. C, mit A und B, so genügt $\triangle$ ABC der Aufgabe.

Determination.

Der Punkt C kann nur dann festgelegt werden, wenn die Parallele durch R zu AB den Kreis um O trifft. Das ist ausgeschlossen, wenn ER $>$ EK ist — wenn man mit K den höchsten Punkt des Kreises über AB bezeichnet. Wenn ER $<$ EK ist, so giebt es 2 Schnittpunkte (C und C_1), also auch 2 Dreiecke, die einander kongruent sind und symmetrisch zu EK liegen. Ist ER $=$ EK, so fallen die beiden Punkte C und C_1 mit K zusammen, es giebt also nur ein Dreieck, und zwar ein gleichschenkliges. Je nachdem also

$$\mathrm{ER} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \mathrm{EK} \text{ ist, giebt es } \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \text{ Lösungen.}$$

Hier ist $\mathrm{ER} = \mathrm{EQ} = \mathrm{EP}^2/\mathrm{AE} = l^2/c/_2 = l^2/r \,.\, \sin\gamma$, und da $\angle\, \mathrm{AKE} = \gamma/_2$ ist, so ist $\mathrm{EK} = c/_2 \operatorname{cotg} \gamma/_2 = r \,.\, \sin\gamma \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2$, demnach ergiebt sich die Bedingung:

$$\text{Je nachdem } F \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} r^2 \sin^2\gamma \operatorname{cotg} \gamma/_2 \text{ ist, giebt es } \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \text{ Lösungen.}$$

Zerlegt man den Grenzausdruck $x^2 = r^2 \sin^2\gamma \operatorname{cotg} \gamma/_2$ in das Produkt $x^2 = r \,.\, \sin\gamma \,.\, r \sin\gamma \operatorname{cotg} \gamma/_2$, so ist der erste Faktor $r \sin\gamma = \mathrm{AC}$, der zweite $r \sin\gamma \operatorname{cotg} \gamma/_2 = \mathrm{EK}$, folglich der Grenzwert x leicht zu konstruieren als mittlere Proportionale zu AE und EK.

Trigonometrische Lösung.

$c = 2\, r \sin\gamma$; $2\, ab = 4\, F/\sin\gamma$; $a^2 + b^2 = c^2 + 2\, ab \cos\gamma$;
$(a+b)^2 = c^2 + 2\, ab\, (1 + \cos\gamma) = c^2 + 4\, ab \cos^2 \gamma/_2 = c^2 + 4\, F \operatorname{cotg} \gamma/_2$;
$(a-b)^2 = c^2 - 2\, ab\, (1 - \cos\gamma) = c^2 - 4\, ab \sin^2 \gamma/_2 = c^2 - 4\, F \operatorname{tg} \gamma/_2$.
$a + b = c\sqrt{1 + 4\, F \operatorname{cotg} \gamma/_2/c^2} = c\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda} = c/\cos\lambda$, wenn
$\dfrac{4\, F}{c^2 \operatorname{tg} \gamma/_2} = \operatorname{tg}^2 \lambda$, $a - b = c\sqrt{1 - 4\, F \operatorname{tg} \lambda/_2/c^2} = c\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = c \,.\, \cos\varphi$,
wenn $\dfrac{4\, F \,.\, \operatorname{tg} \gamma/_2}{c^2} = \sin^2\varphi$ gesetzt wird.

Besondere Fälle.

1) Für $a = b$ wird $a - b = 0$, also $c^2 - 4 F \operatorname{tg} \gamma/_2 = 0$, woraus $4 F \operatorname{tg} \gamma/_2 = 4 r^2 \sin^2 \gamma$, $F = r^2 \sin^2 \gamma \,.\, \operatorname{cotg} \gamma/_2$ folgt, d. i. der Grenzfall der Determination.

2) Soll $\alpha = 90^0$ sein, so ist $a = 2 r$, $b = h = 2 r \cos \gamma$, demnach $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = 2 r^2 \sin \gamma \cos \gamma$, oder

$$F = r^2 \sin 2 \gamma.$$

3) Wenn $a = c$ ist, so ist $F = \frac{1}{2} c b \sin \gamma$ und $b = 2 c \cos \gamma$, demnach $F = \frac{1}{2} c^2 \,.\, 2 \sin \gamma \cos \gamma = \frac{1}{2} c^2 \sin 2 \gamma$. Da nun $c = 2 r \sin \gamma$ ist, so ergiebt sich schließlich

$$F = 2 r^2 \sin^2 \gamma \sin 2 \gamma.$$

$$r = 514{,}43, \quad \gamma = 73 \,.\, 35 \,.\, 57$$

F	$r^2 \sin^2 \gamma \operatorname{cotg} \gamma/_2$ 325560	$r^2 \sin 2 \gamma$ 143429	$2 r^2 \sin^2 \gamma \sin 2 \gamma$ 263989	$< r^2 \sin 2 \gamma$ 123456
λ	53 . 12	41 . 34 . 31	50 . 16 . 54	39 . 27 . 36
φ	90	41 . 34 . 31	64 . 13 . 26	38 . 0 . 39
a	823,85	1028,86	987	1028,017
b	823,85	290,504	557,37	250,363
c	987	987	987	987
α	53 . 12 . 1,5	90 .	73 . 35 . 57	92 . 19 .
β	53 . 12 . 1,5	16 . 24 . 3	32 . 48 . 6	14 . 5 . 3

Zusatz. Wenn $a = b$ ist, so ist $a - b = c \,.\, \cos \varphi = 0$, also $\cos \varphi = 0$, somit $\varphi = 90^0$. — Ist $\alpha = 90^0$, so ist $a^2 - b^2 = c^2$; durch Multiplikation der beiden Gleichungen für $a + b$ und $a - b$ (in der trigonometrischen Lösung) erhält man:

$$a^2 - b^2 = c^2 \,.\, \cos \varphi \,/\, \cos \lambda.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $\cos\varphi / \cos\lambda = 1$; das ist nur möglich, wenn die beiden Hülfswinkel λ und φ einander gleich sind.

19.

Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Summe der beiden anderen Seiten und der Halbierungslinie des von letzteren eingeschlossenen Winkels.

Gegeben c, $a + b$, w.

Konstruktion.

Man zieht $CF = w$, teilt CF in M nach dem Verhältnis $a + b : c$, beschreibt über CM als Durchmesser den Kreis, trägt in diesen $\frac{1}{2}(a + b - c) = CG = CG_1$ als Sehne ein, verbindet G und G_1 mit M, beschreibt mit GM um M den Kreis und zieht an diesen eine Tangente von F aus, welche die Verlängerungen von CG und CG in A und B (A_1 und B_1) trifft.

Determination.

Die Lösung ist unmöglich, wenn 1) $\frac{1}{2}(a + b - c) \geqq CM$ und 2) wenn $MF < MG$ ist, in letzterem Falle, weil sonst F innerhalb des Kreises liegen würde, also die Tangente von F aus nicht gezogen werden könnte. Wenn $MF = MG$ ist, so steht $CF \perp AB$, das Dreieck ist also gleichschenklig. Ist ferner $\frac{1}{2}(a + b - c) = CM$, so wird das Dreieck zur Geraden CF, falls gleichzeitig $c = 0$ und $a + b = 2\,w$ ist, andernfalls ist die Aufgabe unsinnig.

Da $CM : MF = a + b : c$ u. K., so ist $CM = \frac{(a + b) \cdot w}{a + b + c}$, es muß also

1) $\frac{a + b - c}{2} < \frac{(a + b)\,w}{a + b + c}$, also $w > \frac{(a + b + c)\,(a + b - c)}{2\,(a + b)}$

sein.

Ferner ist $MF = \frac{c \cdot w}{a+b+c}$ und $MG = \sqrt{\frac{(a+b)^2 \cdot w^2}{(a+b+c)^2} - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2}$, daraus erhält man nach einigen leichten Umformungen:

$$2)\ w \leqq \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Durch Zusammenfassung dieser beiden Bedingungen erhält man schließlich:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} \geqq w > \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b)}.$$

Trigonometrische Lösung.

$$\cos \gamma/_2 = CG/CM = \frac{a+b-c}{2} : \frac{(a+b)\,w}{a+b+c} \text{ oder}$$

$$\cos \gamma/_2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2\,w\,(a+b)}.$$

Dieselbe Formel läßt sich auch rein trigonometrisch aus dem Cosinussatze herleiten, wenn man unter Benutzung der Formeln für den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $2\,ab = \frac{(a+b)\,w}{\cos \gamma/_2}$ berechnet.

Besondere Fälle.

1) Für $\underline{a = b}$ wird $a = \frac{a+b}{2}$ und $w \perp c$, demnach $w^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4}$, folglich ergiebt sich der Grenzfall der Determination:

$$\underline{w = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}}$$

2) Für $\underline{\gamma \gtreqless 90^0}$ wird $\cos \gamma/_2 \lesseqgtr \frac{1}{2}\sqrt{2}$, demnach

$$\underline{w \gtreqless \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)\cdot\sqrt{2}}}.$$

3) Ist $\underline{\alpha = 90^0}$, so ist $\operatorname{tg} \gamma/_2 = \dfrac{c}{a+b}$; setzt man den hieraus zu berechnenden Sonderwert $\cos \gamma/_2 = \dfrac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$ dem allgemein gültigen gleich, so folgt

$$\frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+c^2}} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2\,w\,(a+b)},$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\underline{w = \frac{(a+b+c)(a+b-c) \,.\, \sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2\,(a+b)^2}}.$$

4) Für $\underline{a = c}$ wird $\cos \gamma = b/2\,a$, also $1 + \cos \gamma = \dfrac{2\,a+b}{2\,a}$ oder $2 \cos^2 \gamma/_2 = \dfrac{a+b+c}{2\,c}$, $\cos \gamma/_2 = \sqrt{\dfrac{a+b+c}{4\,c}}$. Setzt man wiederum diesen Wert von $\cos \gamma/_2$ gleich dem allgemein gültigen, so folgt:

$$\underline{w = \frac{a+b-c}{a+b} \,.\, \sqrt{c\,(a+b+c)}}.$$

$$a+b = 1127, \quad c = 943$$

w	$\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}$ 308,58	$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)\sqrt{2}}$ 238,97	$\frac{(a+b+c)(a+b-c)\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{2\,(a+b)^2}$ 220,335	$\frac{a+b-c}{a+b}\,.\,\sqrt{c\,(a+b+c)}$ 228,1
a	563,5	920	958	943
b	563,5	207	169	184
α	33.12.12	77.19.7	90.0.0	84.24.6
β	33.12.12	12.40.53	10.9.36	11.11.48
γ	113.35.36	90.0.0	79.50.24	84.24.6.

20.

Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Umfang, einem Winkel und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

Gegeben $a + b + c = 2s, \gamma, \varrho$.

Konstruktion.

Man zeichne $\angle \gamma$ mit dem Scheitelpunkt C, ziehe zu den Schenkeln Parallelen im Abstande ϱ, verbinde deren Schnittpunkt M mit C und fälle auf einen Schenkel von γ das Lot MG, trage auf CG von C aus $s = CH$ ab, errichte darauf das Lot von H aus, welches die Verlängerung von CM in N schneidet, beschreibe um N und M Kreise mit den Radien NH und MG und lege an diese eine gemeinschaftliche Tangente, welche die Schenkel von γ in A und B trifft, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Determination.

Das Dreieck ist nur möglich, wenn sich an die beiden Kreise um M und N eine innere gemeinschaftliche Tangente legen läßt, wenn also die Centrale MN nicht kleiner als die Summe der Radien ϱ und NH ist. Ist die Centrale gleich der Summe der Radien, so ist nur eine Tangente und somit nur ein Dreieck möglich, und zwar ein gleichschenkliges; ist endlich die Centrale größer als die Summe der Radien, so giebt es 2 gegen CN gleich geneigte Tangenten, demnach auch 2 kongruente Dreiecke. Je nachdem

also $MN \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \varrho + NH$, giebt es $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ Lösungen.

Nun ist $NH = s \operatorname{tg} \gamma/_2$, $MN = \dfrac{NH - MG}{\sin \gamma/_2} = \dfrac{s \operatorname{tg} \gamma/_2 - \varrho}{\sin \gamma/_2}$,

demnach $s \operatorname{tg} \gamma/_2 - \varrho \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} (\varrho + s \operatorname{tg} \gamma/_2) \,.\, \sin \gamma/_2$,

$$\varrho \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s \,.\, \operatorname{tg} \gamma/_2 \,.\, \frac{1 - \sin \gamma/_2}{1 + \sin \gamma/_2},$$

schließlich $\varrho \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s \operatorname{tg} \gamma/_2 \,.\, \operatorname{tg}^2 (45^0 - \gamma/_4)$, $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ Lösungen.

Das Maximum von ϱ kann man folgendermaßen konstruieren: Man zeichnet $\angle \gamma$ mit dem Scheitelpunkt C, macht den einen Schenkel $CH = s$, errichtet darauf in H das Lot, das die Halbierungslinie von γ in N trifft, halbiert $\angle HNC$, die Halbierungslinie treffe CH in A, errichtet auf NA in A das Lot, das CN in M treffe, und fällt $MG \perp CH$, so läßt sich beweisen, daß

$$MG = s \,.\, tg\, \gamma/_2 \,.\, tg^2\, (45^0 - \gamma/_4) \text{ ist.}$$

Trigonometrische Lösung.

$s - c = \varrho \cot g\, \gamma/_2$; $a + b = s + (s - c) = s + \varrho \cot g\, \gamma/_2$; $c = s - (s - c) = s - \varrho \cot g\, \gamma/_2$; $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a + b}{c} \sin \gamma/_2$ $= \frac{s + \varrho \cot g\, \gamma/_2}{s - \varrho \cot g\, \gamma/_2} \,.\, \sin \gamma/_2$. Setzt man $\varrho/s = tg\, \varphi$, so ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen:

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin (\gamma/_2 + \varphi)}{\sin (\gamma/_2 - \varphi)} \,.\, \sin \gamma/_2 \,.$$

Besondere Fälle.

1) Für $\underline{a = b}$ wird $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$, mithin auch der oben entwickelte Ausdruck $\frac{s + \varrho \cot g\, \gamma/_2}{s - \varrho \cot g\, \gamma/_2} \,.\, \sin \gamma/_2 = 1$, woraus sich der Grenzfall der Determination ableiten läßt:

$$\underline{\varrho = s\, tg\, \gamma/_2 \,.\, tg^2\, (45^0 - \gamma/_4)}\,.$$

2) Soll $\underline{\alpha = 90^0}$ werden, so ist $\alpha - \beta = \gamma$, $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \gamma/_2$, demnach $\cos \gamma/_2 = \frac{s + \varrho \cot g\, \gamma/_2}{s - \varrho \cot g\, \gamma/_2} \,.\, \sin \gamma/_2$, $\frac{s - \varrho \cot g\, \gamma/_2}{s + \varrho \cot g\, \gamma/_2} = tg\, \gamma/_2$,

$$\frac{\varrho \cot g\, \gamma/_2}{s} = \frac{1 - tg\, \gamma/_2}{1 + tg\, \gamma/_2} = tg\, (45 - \gamma/_2)\,,$$

$$\underline{\varrho = s \,.\, tg\, \gamma/_2 \,.\, tg\, (45 - \gamma/_2)}.$$

3) Für $\underline{a = c}$ wird $\frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cdot \gamma/_2 - 90^0$, folglich $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \sin \gamma/_2 - 4 \sin^3 \gamma/_2$, somit

$$\frac{s + \varrho \operatorname{cotg} \gamma/_2}{s - \varrho \operatorname{cotg} \gamma/_2} = \frac{3 \sin \gamma/_2 - 4 \sin^3 \gamma/_2}{\sin \gamma/_2} = 3 - 4 \sin^2 \gamma/_2,$$

daraus erhält man durch Auflösung nach ϱ:

$$\underline{\varrho = s \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma/_2 \cdot \operatorname{cotg} \gamma.}$$

Anmerkung. Wenn $\gamma < 60^0$ ist, so wird nicht a, sondern $b = c$.

$s = 1234, \ \gamma = 50 \cdot 12 \cdot 48$

ϱ	$s . \operatorname{tg}\gamma/_2 . \operatorname{tg}^2(45-\gamma/_4)$ 233,717	$s . \operatorname{tg} \gamma/_2 \operatorname{tg}(45 - \gamma/_2)$ 209,24	$s \operatorname{tg}^2\gamma/_2 \operatorname{cotg}\gamma$ 225,637	$< s \operatorname{tg}\gamma/_2 \operatorname{tg}(45-\gamma/_2)$ 180
φ	10 . 43 . 29	9 . 37 . 24,5	10 . 21 . 43	8 . 17 . 56
a	866,39	1024,76	963,06	1085,64
b	866,39	655,78	752,47	532,5
c	735,22	787,46	752,47	849,86
α	64 . 53 . 36	90 . 0 . 0	79 . 34 . 24	101 . 0 . 18
β	64 . 53 . 36	39 . 47 . 12	50 . 12 . 48	28 . 46 . 54 .

3) Fü[illegible] 90^0, folglich

$\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ [illegible]

$\frac{s + \varrho\, c[illegible]}{s - \varrho\, c[illegible]}$ [illegible] $4 \sin^2 \gamma/_2$,

daraus erhö[illegible]

Anme[illegible]icht a, sondern b = c.

ϱ	$s . tg\gamma/_2 . tg^2$[illegible] 233,[illegible]	$< s\,tg\gamma/_2\,tg(45 - \gamma/_2)$ 180
φ	10 . 4[illegible]	8 . 17 . 56
a	866[illegible]	1085,64
b	866[illegible]	532,5
c	735[illegible]	849,86
α	64 . 5[illegible]	101 . 0 . 18
β	64 . 5[illegible]	28 . 46 . 54 .