

## Notata quaedam de geometris Graecorum.

In nullo unquam populo ex omni memoria geometriae studia vehementius vigerunt quam in Graecis. Tenebat eos quidem profecto humanissima illa delectatio, qua quicumque contemplantur temporis ac spatii rationes legesque, quas numeri, lineae, soni, corpora coelestia ostendunt et omnino tota rerum natura, mirum in modum perfunduntur. Apud Graecos geometrae eodem fere exstiterunt tempore, quo corroborata jam satis tota vi cogitationis poëtae illi, qui gnomici vocantur, florere coeperunt. Ac primo quidem Graeci multa quaedam mathematica atque astronomica accipiebant et ab Aegyptiis et Babyloniis et Phoenicibus, qui populi in his rebus tot jam saecula versati erant: nulla est enim ratio nisi ex usu profecta. Post autem excitato studio accepta ab illis meliora fecerunt. Et progressio admirabilis ad excellentem praestantiam facta est fundamentis mathematicae positae a Thalete Milesio et Pythagora Samio. Quem cursum incredibilem paene ac singularem rebus ipsis scienter et perite et apte explicatis illustravit et descripsit Pappus Alexandrinus, cujus *μαθηματικὰ Συναγωγὰί* germanae sunt historiae. Sed quis est qui non debeat, quod non integrae ad nos pervenerunt illae collectiones, needum tamen omnia, quae exstant, in lucem graece prodita sunt? Praeter haec monumenta rerum mathematicarum et exempla illi exstant commentarii, quos et Proclus Lycius in Euclidem et Eutocius Ascalonites in Archimedem atque Apollonium et Theon Smyrnaeus in Ptolemaeum scripserunt: quamquam ii quidem in hoc genere historiae parum versantur. Eudemi vero Rhodii historia geometriae intercidit.

De antiquis illis geometris Thalete et Pythagora, qui Graecis geometriae auctores exstitisse perhibentur, ab aliis disputatum est, equidem exordiar ab elementorum scriptoribus, quorum memoriam narratione tradam brevi, deinde ad reliquos progrediar.

### II.

Inventis jam permultis rebus et eis occultioribus sublimioribusque communia fundamenta ac simplicia coepta sunt inter se connexa et apta effici et studio diligentiaque demonstrari, quibus perceptis facilius res compositae possent perdisci. Initia ea sunt *στοιχεῖα* elementa nominata eorumque una quaeque propositio *στοιχείων*: unde ii, qui talia composuerunt, sunt *στοιχειωταί* elementorum scriptores vocati et ipsa compositio *στοιχείωσις*. Horum praecipue aetates et gradus breviter persequutus

est Proclus<sup>1)</sup> ideoque alios praetermisit ut Aristaeum seniore primum elementorum conicorum scriptorem. Incipiam ab Hippocrate Chio, qui primus elementa scripsisse dicitur. Quo tum statu fuerit geometria plana, indicat probe lunularum illa quadratura (*μηρίσκων τετραγωνισμός*), quae ab illo inventa est, dilatata tamen, ut totus quadraretur circulus (*τετραγωνισμός διὰ τῶν μηρίσκων*) geometram a vero abduxit fefellitque, qui justo ob id acrius est ab Aristotele vituperatus. Post Peloponnesiaci belli tempus Theaetetus Atheniensis, Socratis auditor, Heracleae docuit, quem constat primum de quinque illis solidis scripsisse. Id quidem est indicio Socratis discipulos non esse a rebus mathematicis abalienatos, illustrissimum exemplum est ipse Plato ille omnium Socratis discipulorum longe princeps, qui suo studio maximo quum totam mathematicam tum geometriam auxit atque amplificavit. Auditis Pythagoreis Italicis, quo in numero tum fuit Archytas Tarentinus geometra clarissimus, cognitisque inventis Aegyptiorum sacerdotum quum intellexisset, quantam haberet vim mathematica quum in rebus civilibus tum in philosophia, illam, quam Socrates paene repudiabat, cognitione semper habuit dignissimam, qua nihil firmiter philosophiae fundamentum posset excogitari. Qua ratione commotus geometriae ignaros solitus est a limine Academiae arcere: est enim notum illud *ἔδειξέ τις ἀγεωμέτητος εἶδένω*. Et multum in his studiis operae curaeque est a Platone positum ejusque discipulis: indicant id studium etiam ejus scripta, quae plena sunt rerum mathematicarum. Idem revocavit memoriam admirabilis problematis Pythagoreorum proposita magna illa quaestione, quae est de implicatis motibus stellarum errantium. Hujus ex uberrima auctoritate exstiterunt illustres geometrae. Tum fuit et Leodamas Thasius, quem Favorinus<sup>2)</sup> et Proclus<sup>3)</sup> produnt methodum analyticam a Platone didicisse, et Leodamante junior Neoclydes et Leo, illius auditor, is qui et ipse elementa multitudine propositionum insignia utilitateque scripsit et problematum determinationem (*διορισμός*) invenit. Eodem fere tempore Leonte paullo fuit junior Eudoxus Cnidius illis temporibus in geometria praecipuus et astronomia. Elementa quidem non scripsit, sed auxit generalium theorematum multitudinem, quo in numero sunt theoremata VII. et X. libri XII. Elementorum<sup>4)</sup>. Eum sequutus est illius discipulus Menaechmus cum fratre Dinostrato et Amyclas Heracleotes, Platonis auditor. His proximus est Thudius Magnesius, qui elementa pulcherrime composuisse dicitur effecisseque definitiones perfectiores. Praeter hos recenset Proclus Athenaeum Cyzicenum, deinde Hermotimum Colophonium, qui Eudoxi et Theaeteti inventa supplevit nonnullosque scripsit locos geometricos, et Philippum Medmaeum, Platonis discipulum. Is quum a Platone impulsus se ad mathematicam contulisset, quaestiones illo duce instituit sibi propositas ea, quae Platonicae philosophiae conducere arbitretur. Hunc postea imitatus est Theon Smyrnaeus.

<sup>1)</sup> Edit. Basil. p. 19.

<sup>2)</sup> Diog. Laert. III, 24.

<sup>3)</sup> p. 58.

<sup>4)</sup> Archimedes in praefat. libri I. de Sphaera et Cylindro.

Hactenus ab auctoribus rerum mathematicarum memoratum est. Proclus enim<sup>1)</sup> ait: *οἱ μὲν ἐν τῆς ἰσορίας συγγράψαντες μέχρι τῆς προόδου τὴν τῆς ἐπισήμης ταύτης τελείωσιν.* Itaque historia scribi est desita, ubi nobis quidem proprie admodum incipit: est Pappus, qui quodammodo lacunam expleat. Proclus statim progreditur ad Euclidem. Non multo iis, qui modo memorati sunt, junior est Euclides is, qui Elementa illa conscripsit propositionibus jam inventis delectu adhibito et compositioni arte. Et est his in Elementis admirabilis quidam ordo seriesque propositionum ac maxima vis, maxima necessitas demonstratorum et perspicuitas, quocirca laudem est adeptus summam. Quis est igitur qui superiores oblivione obrutos miretur? Fuit is, ut Pappus<sup>2)</sup> refert, Alexandriae temporibus iisdem, quibus Ptolemaeus Lagi museo illo condito litteris tutum dedit refugium, dum bella gravissima extra Aegyptum exardescunt. Eodem refugit mathematica: „pacis est enim ipsa comes otiique socia.“ In Aegyptum igitur quasi in pristinas reversa est sedes et eas retinuit mille fere annos. Ex amplo statu compluribus saeculis interjectis quum paullatim concidisset, postremo eadem illa, quae antea fuit alumna quaedam sacerdotum, sacerdotum aliorum barbaria evulsa est. Sed revertamur ad Euclidem antiquissimum omnium mathematicorum, quorum quidem scripta exsistent. Hujus Elementa tredecim continent libros, qui quadripartiti fere perhibentur, eaque editio, quae ad nos pervenit, a Theone Smyrnaeo facta esse dicitur, qui non multum aut nihil fere omnino videtur immutasse, quamquam jam quaedam sunt aliter demonstrata ab Apollonio, Posidonio, Ptolemaeo<sup>3)</sup> aliisque. Elementorum Euclideorum quarta pars est de planis et solidis, in his sunt illa regularia corpora, quorum et compositionem Euclides docet et descriptionem in sphaera. In quo sit obiter dictum Proclum<sup>4)</sup> Pythagoreorum Platoniorumque ratione physica adductum esse, ut Euclidi in conscribendis elementis nihil fuisse aliud propositum nisi mundanorum istorum corporum compositionem crederet. Quantam illae quinque figurae habuerint admirationem, quae diutissime obtinuit, declarat hoc epigramma in Synopsi geometrica Michaelis Pselli<sup>5)</sup>:

*Σχήματα πέντε Πλάτωνος, ἃ Πυθαγόρας σοφὸς εὔρεν.  
Πυθαγόρας σοφὸς εὔρε, Πλάτων δ' ἀρίστηλ' ἐδίδαξεν,  
Εὐκλείδης δ' ἐπὶ τοῖσι κλέος περικαλλὲς ἔτευξεν.*

Atque optimi quique ea statuerunt digna, quibus operam navarent. In quo numero praeter Theaetum, quem Euclides est sequutus, et Aristaeus senior fuit et magnus ille geometra Apollonius Pergaeus. Quos imitatus est Hypsicles Alexandrinus, qui multis saeculis post Euclidem duos de solidis regularibus scripsit libros, qui plerisque fere editionibus Elementorum quasi appendix adduntur, et ad secundam propositionem prioris libri *τῆτο δὲ γράφεται*, inquit, *ὑπὸ μὲν Ἀρισταίῳ*

<sup>1)</sup> p. 19.

<sup>2)</sup> Edit. Bonon. p. 251.

<sup>3)</sup> *περὶ τῶν τῶν ἀπ' ἑλλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐμβαλλομένων συμπίπτειν.* Proclus p. 95.

<sup>4)</sup> Proclus p. 20.

<sup>5)</sup> Edit. Basil. p. 53.

ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ πέντε σχημάτων σύγκρισις, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρῃ ἐκδόσει συγκρίσεως τῆς δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. Numeroque eodem fuit Pappus Alexandrinus, qui in tertio libro Collectionum Mathematicarum quinque eadem corpora inscribit in sphaera. Eae quidem propositiones sunt pulcherrima exempla et resolutionis et compositionis. Ipse summus Archimedes dilatata horum solidorum definitione illis quinque figuris tredecim alias adjunxit<sup>1)</sup>. Talia theoremata et problemata, quae quidem elementorum finem et modum transeant ac dilatent, *χειρώδη* dicebantur<sup>2)</sup>. Quorum permagnus numerus apud Pappum invenitur: neque ea sunt dispersa, sed coacta in certa genera quaestionum. Ejusmodi sunt in tertio libro ea, quae in tribus medietatibus versantur, item quae a paradoxis Erycemi incipiunt, tum huc pertinet polyedrorum descriptio in sphaera, deinde in quarto libro quae incipiunt ab illo theoremate, quod a Pappo nomen traxit, et quae sequuntur usque ad propositionem XVIII., item in quinto illa theoremata de figuris isoperimetris planis et de comparatione quinque figurarum habentium superficiem aequalem aliaque. Sed redeamus ad Euclidem. Elementorum, quae is scripsit, est proprium ad figuras accedere jam ortas, initio certe, nam postea in stereometria efficit motu et sphaeram et conum rectum et cylindrum rectum, quos e conis cylindrisque solos spectat, quum quidem motus jam esset ab aliis adhibitus ad generandas figuras, unde profectae sunt definitiones hae: *σημεῖόν ἐστι εἰγμὴ ἀόριστος, γραμμὴ δὲ εἰγμὴ ὁριστά, ἐπιπέδον δὲ ὁριστά γραμμὴ, σῶμα δὲ ἐπιπέδον ὁριστά*. Ipse is motus res geometricas facit perspicuas et apertas, etiam duplex adhibetur motus, cujus primum fuit exemplum quadratrix Dinostrati, deinde helices. Accedit, ut facile ex ea ratione sequantur illi loci geometrici, quos constat maximi in geometria esse momenti. Quam rationem si penitus persequutus esset Euclides, scripsisset elementa minus artificiosa. Quae quum ita sint, desiderant quoddam supplementum. Ad supplenda Elementa scripsit Euclides illa *Ἀεδομένα*, Data, quae theoremata XCV (Pappus numerat XC) continentur. Exponit ea, quae putat elementorum pertractioni usuique ad solvenda problemata plana posse prodesse. Sed multum interest inter Elementa et Data, differunt enim haec ab illis investigandi quadam ratione, qua aperiunt primum ad analysin aditum, namque Elementa in synthesisi duntaxat sunt tota posita. De Elementis haec. Restat, ut problematum geometricorum differentia explicetur. Sunt tria genera problematum plana, solida, linearia. Quod problema per rectam et circuli circumferentiam solvi potest, vocatur planum (*ἐπίπεδον*), contra problema, cujus solutio conisectionum ope fit, solidum (*σφαιρῶν*) et quod aliam postulat lineam ac rectam, circumferentiam conique sectiones, lineare (*γραμμικόν*)<sup>3)</sup>. Similiter distinguuntur loci geometrici.

### III.

Inprimis problemata investigandi initium attulerunt ad eaque Graeci maturime accesserunt.

<sup>1)</sup> Pappus p. 129.

<sup>2)</sup> Proclus p. 21.

<sup>3)</sup> Pappus p. 7 et 95.

Eorum alia per rectam et circuli circumferentiam solvere potuerunt, alia non potuerunt. Ex quo genere et anguli rectilinei cujuslibet tripartitio (*ἡ τῆς γωνίας ἐνθυγράμμῳ τρίχα εἰς ἴσα διαίρεσις*) et cubi duplicatio (*τῆς κύβου διπλασιασμός*) duo exstiterunt problemata nobilissima, quorum alterum studii et artis fuit, alterum utilitatis. Illud problema in angulo, uti breviter dicitur, antiquius est, exstitit enim, quo tempore conii sectiones nondum erant geometris notae<sup>1)</sup>: hujus alterius problematis tanta vis et tanta ratio fuit, ut id Deliaci deo tribueretur. Diu geometrae haesitarunt: at vero labores summi summa compensati sunt gloria. Ex his enim studiis exorta est geometrica illa analysis, ratio sagacissima, qua nihil profecto in tota geometria est pulchrius, nihil praestantius, quae quum in theorematis tum in problematis ad investigandum, inquirendum inveniendumque tam egregia est et singularis, ut summo Platoni quasi cuidam deo philosophorum tribueretur. Ea jam usus est Hippocrates Chius, quem certe constat ad cubum duplicandum inter duas rectas duas proportionales medias sumendas esse primum perspexisse. Deinde hac ratione subornati geometrae invenerunt scientia et pervestigatione magnam varietatem multitudinemque in omni genere curvarum, inter quas illae conii sectiones sunt. Invenit Perseus illas spiras<sup>2)</sup>, Dinostratus aut Hippias<sup>3)</sup> quadratricem, Archimedes helicem, Nicomedes lineam conchoidem, Diocles cissoidem: quis conii sectiones invenit? Eorum inventorem memoriae produnt veteres, qui antiquitatis suae et in inventis rebus et in actis peritissimos esse se fatentur Eudoxi discipulum Menaechmum, qui primus illis lineis ad cubi duplicationem usus esse narratur. Cujus rei auctor fertur Eratosthenes<sup>4)</sup>: dicat quispiam nihil esse simul et inventum et perfectum. Eudoxum vero idem prodit hoc eodem inclaruisse problemate et *διὰ τῶν καλεμένων καμπύλων γραμμῶν* solutionem confecisse. Similiter de his lineis apud Diogenem Laertium sic fere est: *Ἀπολλόδορος φησιν ἐν χρονικοῖς τὸν Κνίδιον Εὐδόξον εὗρεῖν τὰ περὶ τὰς καμπύλας γραμμάς*. Quaeenam curvae fuerint, non est traditum, neque conjectura eorum genus ex ulla re videre licet. Sed jam illud tenendum est, quod Pappus<sup>5)</sup> de conicis tradit. Primum nominat elementorum conicorum totidemque locorum solidorum scripsisse perhibet. Qui quo tempore fuerit, incertum est, et sunt, qui eum ferant successorem fuisse Pythagorae. Certe quidem post Menaechmum fuit et ante Euclidem.

Quae inceperat Aristaeus, scriptor Pappi iudicio luculentus in iis, quae de conicis tradiderat, Euclides persequutus est. Cujus quattuor libros conicorum Apollonius Pergaeus (a. C. 247) quum, ut ait Pappus<sup>6)</sup>, explevisset, quattuor alios libros adjunxit. Propter horum conicorum

<sup>1)</sup> Pappus p. 95.

<sup>2)</sup> Proclus p. 31.

<sup>3)</sup> Proclus p. 93.

<sup>4)</sup> Eutocius in commentario in Archimedes p. 146. ed. Oxon. et Proclus p. 31.

<sup>5)</sup> p. 249.

<sup>6)</sup> p. 249.

singularem eximiamque virtutem magnus geometra appellatus est. Is primus ex omni cono secuit tres omnes lineas, quibus nomina imposuit ea, quae usque ad hoc tempus nota atque usitata sunt. Qui ante Apollonium fuerunt, unum secuerunt conum rectum (rectangulum, acutangulum, obtusangulum) et ducto plano ad unum conii latus recto sectionem a conii proprietate nominaverunt unam conii rectanguli, alteram acutanguli, tertiam obtusanguli. Contra Apollonius in omni cono sectiones effecit, ducto plano secante perpendiculariter ad triangulum per axem, quod ad conii basim rectum est. Tali modo et Serenus, Pappi aequalis, cylindrum conumque secuit: recentiores demum progressi sunt longius. Nomina autem posita sunt ex antiquis illis applicationibus spatii dati ad datam rectam, quae ipsae ad conii sectiones pertinent<sup>1)</sup>. Haec nomina mox comprobata sunt et percepta usu a geometris, ac mirari quodammodo licet, si Geminus, quippe qui Sullae temporibus Petavii quidem iudicio<sup>2)</sup> fuerit, illa antiqua nomina<sup>3)</sup> usurpavit. Ex octo vero Apollonii libris primi quattuor sunt de elementis conicorum (*εἰσαγωγή κοίχαιώδης*), reliqui ad abundantiores pertinent scientiam (*τὰ δὲ λοιπὰ ἐστὶ περισσισιαστικώτερα*)<sup>4)</sup>. In eadem praefatione commemorat Apollonius problema nobilissimum, locum ad tres et quattuor lineas (*ὁ ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπος*), quem dicit non esse ab Euclide perfectum. Problema est hoc: datis positione tribus vel quattuor vel pluribus lineis rectis invenire ejus puncti locum, a quo ductarum linearum rectarum ad datas rectas in datis angulis ratio conjuncta ex aliis ad alias sit data. Quod si ad plures quam quattuor ducantur lineae, neque Apollonius locum perficere potuit neque alius quisquam veterum. Primus sua ratione usus locum perfecit Cartesius. In conica Apollonii Pappus permulta lemmata addidit. Praeter conica magnus geometra plura investigavit et litteris mandavit. Verum pauca (loci quidem plani arabice versi) exstant: deperdita ex iis, quae Pappus exposuit, divinatione geometrica restituta sunt.

Quae et Aristaeus senior et Euclides scripserunt et Apollonius Pergaeus, ea efficiunt quasi unum quoddam corpus utriusque rationis mathematicae, analyseos et syntheseos, resolutionis et compositionis, id quod *ὁ ἀναλύμενος τόπος*, locus resolutus, a Pappo vocatur. Librorum, qui huc pertinent, ordo hic est<sup>5)</sup>:

Euclidis datorum liber unus, Apollonii *λόγος ἀποτομῆς* i. e. de rationis sectione libri duo, *χωρὶς ἀποτομῆς* i. e. de spatii sectione duo, *διωρισμένης τομῆς* i. e. sectionis determinatae duo, *ἐπαφῶν* i. e. tactionum duo, Euclidis porismatum tres, Apollonii *νεύσεων* i. e. inclinationum duo, ejusdem *τόπων ἐπιπέδων* hoc est planorum locorum duo, Conicorum

<sup>1)</sup> Pappus p. 250. Proclus p. 109.

<sup>2)</sup> Uranologium p. 411.

<sup>3)</sup> Proclus p. 31.

<sup>4)</sup> Apollonius in praefat. libri I.

<sup>5)</sup> Pappus p. 241.

octo, Aristaei *τόπων ζερεῶν* i. e. locorum solidorum quinque, Euclidis *τόπων πρὸς ἐπιγάνειαν* i. e. locorum ad superficiem duo, Eratosthenis de medietatibus duo.

Tria sola ex toto hoc mathematicorum quodam canone comparato iis, qui perceptis elementis ad sublimiorem se conferunt geometriam, exstant opera Euclidis data, Apollonii de sectione rationis (arabice) et septem primi libri conicorum (libri tres posteriores arabice versi reperti sunt et liber octavus ab Hallejo restitutus est, a quo unica Apollonii conicorum Graeca editio facta est): reliqua fere omnia exceptis Euclidis locis ad superficiem divinatione geometrica restituta sunt, postremo Euclidis porismata, quorum restitutionem Robertus Simson inchoavit, illustrissimus Chasles hoc tempore (1860) finivit. Pappus in his porismatis solito brevior est et obscurior, quamquam XXXVIII lemmata scripsit. Illi divinatores censent porismata esse theoremata, quae ea, quae Data in elementis incepterunt, persequantur, alterum quasi quoddam supplementum Elementorum, aptissimum ad investigandos locos geometricos ac perutile ad resolutionem problematum. Eodem fuisse genere data, porismata, locos geometricos jam Arabs ille geometra idemque astronomus sensit Hassan ben Haithem (1038), qui talia appellat communi nomine Cognitorum geometricorum. Ergo et Euclides data porismataque et Apollonii loci plani uno quodam societatis vinculo continentur atque eā suppeditant, quae ad resolutionem problematum spectant: et contra Apollonii libri de sectione rationis spatiique, tactionum inclinationumque praeclara sunt ad imitandum exempla problematum perfecte artificioseque solutorum. Sectio rationis problema hoc est:

*Αὐτὰ τῆς δοθέντος σημείσ ἐνθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνεσαν ἀπὸ τῶν τῆ θέσει δοθεισῶν δύο ἐνθεῖῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις λόγον ἐχέσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.*

Problema de sectione spatii enuntiatur hoc modo:

*Αὐτὰ τῆς δοθέντος σημείσ ἐνθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνεσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο ἐνθεῖῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχέσας ἴσον τῷ δοθέντι.*

Sectio autem determinata insignis illa ratione punctorum, quae involutio dicitur, in hoc est problemate<sup>1)</sup>:

Datam infinitam rectam lineam uno puncto secare, ut interjectarum linearum ad data ipsius vel unius quadratum vel rectangulum duabus contentum datam rationem habeat vel ad rectangulum contentum una ipsarum interjecta et alia extra data vel duabus interjectis contentum ad utrasque partes datis.

Solutiones horum problematum ab simplicissimis incipientes casibus progrediuntur per compositos ad universales usque casus: nunc unum quodque problema unicam habet solutionem eamque universalem<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Pappus p. 243.

<sup>2)</sup> Chasles Traité de géométrie supérieure p. 214 sqq.

Sequitur problema *περὶ ἐπαφῶν*:

*Σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνῶν θέσει δοθέντων κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἐκάστων τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον ἐκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν,* quod Franciscus Vieta<sup>1)</sup> suscitavit celebravitque. Hunc aemulatus Wilebrordus Snellius Apollonii libros, qui *περὶ λόγων καὶ χωρῶν ἀποτομῆς*<sup>2)</sup> et *περὶ διορισμένης τομῆς*<sup>3)</sup> inscripti sunt, resuscitavit et postea Hallejus<sup>4)</sup>. Eodem studio commotus Marinus Ghetaldus restituit problema *περὶ νεύσεων*. „*Νεύειν δὲ λέγονται εὐθεῖαι, αἵτινες ἐκβαλλόμεναι καθ' ἓν σημεῖον συμπέτεσθαι*“: Latini dicunt inclinare vel pertingere vel vergere. Problema hoc est<sup>5)</sup>:

Duabus lineis positione datis inter ipsas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertingat.

Id problema postea restituit Samuel Horsley<sup>6)</sup>. Apollonii autem *τόπων ἐπιπέδων* libros duos primus Petrus Fermat restituit, deinde Robertus Simson<sup>7)</sup>. Item Aristaei senioris libros quinque de locis solidis restituere conatus est Vincentius Viviani<sup>8)</sup>. At nemo est, qui ad Euclidis locos ad superficiem aggressus sit. Quos ille demum clarissimus Chasles<sup>9)</sup> est ex quattuor iis lemmatis, quae Pappus attulit, suspicatus superficies fuisse secundi gradus, id quod laudari potest et probari: namque id lemmata ostendunt. Sed quaeri potest, num de una ea re sola i. e. de conoidibus sphaeroidibusque fuerint hi loci: Pappus autem illa lemmata inscripsit in loco ad superficiem. Ad tales locos varia genera superficierum linearumque duplicis curvaturae pertinent. Primum loci ad superficiem exemplum est Archytea illa solutio problematis Deliaci, quae apud Eutocium invenitur. Praeclarum id est et grande documentum, quantum in solidorum superficierumque sectionibus geometra potuerit. Jisdem locis annumerandae illae spirae sunt, quas Perseus invenit. Deinde post Archimedesmodi loci sunt magnopere aucti magna accessione facta in superficieribus admirabilibus excogitandis.

<sup>1)</sup> Apollonius Gallus, Parisiis 1600.

<sup>2)</sup> Wilebrordi Snellii *περὶ λόγων ἀποτομῆς καὶ περὶ χωρῶν ἀποτομῆς* resuscitata geometria. Lugodini 1607.

<sup>3)</sup> Apollonius Batavus s. exsuscitata geometria Apollonii Pergaei *περὶ διορισμένης τομῆς*. Leidae 1608.

<sup>4)</sup> Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo. Accedunt ejusdem de sectione spatii libri duo restituti. Praemittitur Pappi Alexandrini praefatio Graece edita, ad VII<sup>mam</sup> collectionis mathematicae cum lemmatibus ejusdem Pappi in hos Apollonii libros. Opera et studio Edmundi Halley etc. Oxonii 1706. 8.

<sup>5)</sup> Pappus p. 249.

<sup>6)</sup> Apollonii inclinationum libri duo restituti a Samuele Horsley. Oxon. 1770. 4.

<sup>7)</sup> Glasguae 1749.

<sup>8)</sup> Florent. 1701. fol.

<sup>9)</sup> Aperçu historique Note II.



Talis est superficies plectoides (*πληκτοειδής*), qua duplici modo constructa<sup>1)</sup> demonstratum est, si communis sectio plectoidis et cujusdam plani, quod per unam e lineis generatricibus transeat et per rectam inclinatam per dimidium recti ad basim, projiciatur in planum ductum perpendiculariter ad axem, lineam quadratricem oriri: itemque si communis sectio superficiei plectoidis et conii recti, qui eundem habeat axem, in planum perpendiculare ad axem projiciatur, lineam spiralem nasci. Quae vis subjecta sit et natura his exemplis *γεωμετρικωτάτοις*, primus ostendit clarissimus Chasles. Haec haecenus.

At quo utantur homines acuti argumento ad probandum operae pretium est considerare, ut Cicero ait, itaque de ratione demonstrandi explicare breviter liceat. Omnem demonstrationem mathematicam Graeci breviter commodeque dicunt fieri vel *ἀπὸ τῶν ἀρχῶν*, quae ab ipsis principiis sive a rebus jam concessis et probatis ad rem propositam progrediatur, vel *ἐπὶ τὰς ἀρχάς*, quae a re proposita regrediatur ad principia sive ad res jam affirmatas. Haec rursus est duplex. Nam est vel *θετική* affirmativa et tum nominatur *ἀνάλυσις*, cui opponitur *σύνθεσις*, cujus utriusque viae exponit differentiam initium libri VII. Collectionum mathematicarum definitionibus perfectis, totum volumen exemplis praeclaris, vel *ἀναιρετική* negativa et ea dicitur *ἀπαγωγή εἰς τὸ ἀδύνατον*, cujus auctor perhibetur Euclides, quamquam antiquius inventum existimari licet. Eam rationem instructissimi quique dilexerunt geometrae Apollonius et Archimedes.

### III.

Duplices exstiterunt geometriae rationes partesque, quarum unam *τὴν τάξιν καὶ συμμετρίαν*, alteram *τὸ ὄρισμένον* sequi Aristoteles (Metaphys. XIII, 3.) dicit. Illa nunc nominari solet geometria sitūs, haec altera geometria mensurae. Maxima illius partis incrementa debentur Aristaeo, Euclidi, Apollonio, haec aucta est ab Archimede Syracusano summi viro ingenii numquam satis laudato. Ei maxime placuit demonstrandi ratio illa *ἀπὸ τῶν ἀρχῶν*, resolutio solis in nonnullis est problematibus libri secundi de Sphaera et Cylindro: quam ob rem summus geometres Archimedes non habetur in numero eorum, qui conscripserunt locum resolutum. Duo potissimum sunt nominanda ejus scripta, quae genere Elementis finitima sunt atque illa supplent. Ac primum hujus loci est illa Circuli Dimensio (*Κύκλος μέτρησις*). Id problema antiquissimum multi quidem ante eum attigerunt et Dinostratus quoque, qui lineam quadratricem ad circuli quadraturam assumpsit<sup>2)</sup>, sed fructra, at efficacissime primus Archimedes. Etiam solutionis ratio insignis est et hujus modi prima, quae quidem, ut res postulat, appropinquet duntaxat ad id, de quo quaeritur, sed ad veritatem quam proxime accedat. Itaque is primus problematis hujus genus perspexit et naturam. Ut enim intellectum

<sup>1)</sup> Pappus p. 90 et 91.

<sup>2)</sup> Pappus p. 88.

est circumferentiam circuli inter perimetros binum polygonorum regularium, alterius circumscripti, alterius inscripti eodemque laterum numero semper intercedere quendam quasi earum limitem, minorem prima perimetro, altera majorem, earumque excessum omni data magnitudine minorem posse fieri, id quod semper demonstratur, primus numeros polygonis adhibuit et profectus ab hexagonis in polygonis senum nonagenum laterum instituit. In extrema igitur quaestione Archimedes: *Ἡ ἄρα τῆς κύκλου*, inquit, *περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίον ἐστὶ καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοσομόνοις ὑπερέχουσα*. Omnem autem circulum demonstrat aequalem esse triangulo rectangulo, cujus unum laterum angulum rectum continentium aequalis est lineae ex centro, alterum circumferentiae. Sic est solutum problema nobilissimum. Is numerorum usus institutus ab Archimede in geometria, post celebratus frequentatusque novum genus disciplinae procreavit.

Ex eodem deinde genere sunt illi libri duo de Sphaera et Cylindro. Inventa circuli quadratura Archimedes sphaerae cubationem tradit. Gravissima theoremata, quae horum inventorum familiam ducunt, ea sunt, quibus demonstratum est omnem cylindrum, cujus basis sit circulus maximus omnium, qui sunt in sphaera, et altitudo aequalis diametro sphaerae, sesquialterum esse sphaerae, et ipsius superficiem una cum basibus sphaerae superficiei esse sesquialteram: Archimedes ait: *Προδεδειγμένων δὲ τέτων, φανερόν ὅτι πᾶς κύλινδρος, βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφανεία αὐτῆ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιόλια τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας*. Et merito ac jure cylindrus complectens sphaeram in hujus sepulcro positus est. Earum quaestionum imitationes sunt complures in quinto libro Collectionum Mathematicarum. Item primo ab Archimede quadratura parabolae tentata et inventa est: demonstravit autem omne segmentum comprehensum recta qualibet et coni rectanguli sectione trianguli illius sesquitertium esse, quod basim habeat et altitudinem eandem. Idem studium dimetiendi cernitur in libro de conoidibus et sphaeroidibus, quae ad cylindros et conos rediguntur. Archimedis inventa sunt etiam admirabilia illa theoremata de helice. Quae cum aliis inventis, ut solebat, Cononi Samio geometrae ad demonstrandum proposuerat: quo factum est, ut Cononem lineae spiralis inventorem fuisse orta sit opinio, in qua Pappus<sup>1)</sup> quoque est. Tractat hanc rem arduam ingeniose atque in spatiorum spiraliū mensuram et rectorum, quae helices contingunt. Talium disquisitionum studio commoti posteriores excogitaverunt tres alias helices unam in cylindro, alteram in cono, tertiam in sphaera perhibetque Proclus<sup>2)</sup> Apollonium *περὶ τῆς κοχλίας* scripsisse: ac praeclarum illud est neque satis mirandum, quod helices sphaerae aream spiralem dimensi sunt<sup>3)</sup>, idque hujus modi primum est exemplum. Denique Archimedes geometriae adjunxit quodammodo staticam, quam certe geometrica ratione stabilivit. Quaestionem de centro gravitatis

<sup>1)</sup> p. 82.

<sup>2)</sup> p. 26.

<sup>3)</sup> Pappus IV, 30.

figurarum non esse postea neglectam declarat et elegantissimum illud theorema, quod Pappus subindicat in extrema praefatione libri septimi Collectionum Mathematicarum quodque immerito solet a Guldino nominari, et ipsum initium octavi libri. Haec de Archimede.

Magna inventa et crebra sequatur longum intervallum necesse est: aliquantum enim temporis opus est ad perdiscendum. Nec mira est paucitas geometrarum illustrium post Archimedem et Apollonium. Huc accessit, ut studiorum commutatio fieret et virium partitio quaedam ac distractio. In magna tunc erat admiratione astronomia, in qua multa est opera posita. Ex eo tempore iidem fere erant et geometrae et astronomi. Astronomia vero rursus geometriae novum disciplinae genus addidit. Invenit enim Hipparchus Nicenus (Bithynus), totius antiquitatis summus astronomus verusque mathematicae astronomiae auctor trigonometriam utramque, qua de arte libros duodecim scripsisse dicitur<sup>1)</sup>. Hujus auctoritatem posteriores sequuti sunt et Ptolemaeus ipse. Sphaerica autem trigonometria, quae est in geometria sphaerae, accuratam desiderat cognitionem circulorum in sphaera. Ejus modi elementa inchoavit Theodosius Tripolites, cujus Sphaericorum libri tres tanta sunt subtilitate atque elegantia, ut in summo apud mathematicos honore semper fuerint. Praestantissimum hunc scriptorem non omisit Pappus et difficiliora Sphaericorum theoremata est in sexto libro Collectionum commentatus. Dimidio fere saeculo ante Theodosium fuit Nicomedes, quem jam commemoravimus, huic autem aetati suppar fere fuisse perhibetur Geminus (*Γεμῖνος*), quem Proclus optimum habet auctorem in rebus repugnantibus et vicies laudat ad Euclidem neque inscriptionem indicat operis tanquam unius notique omnibus. Pappus in praefatione octavi libri Collectionum<sup>2)</sup> Geminum commemorat scripsisse de disciplinarum mathematicarum ordine ejusdemque sextum librum laudat Eutocius, qui in commentario ad praefationem libri primi Conicorum: *ταῦτα μὲν ἔν, inquit, ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας*. Eum ordinem, quem rebus mathematicis Geminus adhibuit, et rationem Proclus<sup>3)</sup> exponit breviter. Totam igitur mathesim Geminus in duas divisit partes, quarum altera versatur circa res mente et ratione perceptas (*τὰ νοητά*) continetque arithmetica et geometria, altera rerum sensu subjectarum (*τῶν αἰσθητῶν*) habet perceptionem atque ex partibus constat sex mechanica, astronomia, optice, geodaesia, canonica (musica), logistica. Geometriam, quae secundum obtinet ordinem, distinxit varietate materiae. Inprimis principia et quidem axiomata est subtiliter persequutus et ortum linearum nominatque Proclus<sup>4)</sup> spiras, conchoidem cissoidemque, e quo apparet cissoidis inventorem Dioclem fuisse ante Geminum. Componendis ordinandisque rebus jam inventis Geminus nonnihil addidit sui ut theorema de helice cylindrica, quam jam Apollonius<sup>5)</sup> *ὁμοιομερῆ* esse ostendit et annumeravit rectae ac circum-

<sup>1)</sup> Theon: *Εἰς τὸ τῷ Πτολεμαίῳ βιβλίῳ α.*

<sup>2)</sup> p. 448.

<sup>3)</sup> p. 11 et 12.

<sup>4)</sup> p. 31.

<sup>5)</sup> Proclus p. 29.

ferentiae. Definitio haec est: *ὁμοιομερῆς ἐστὶ ἡ γραμμὴ ἢ πάντα τὰ μέρη πᾶσιν ἐφαρμόζοντα ἔχουσα*. Geminus autem insuper demonstravit<sup>1)</sup> duas rectas aequales per idem punctum ductas in quamlibet lineam *ὁμοιομερῆ* angulos facere aequales. Quo theoremate usus idem nititur solas tres posse esse lineas *ὁμοιομερῆς* rectam, circumferentiam, helicem cylindricam.

Paulo post Geminum imperium Romanum quum ultimum geometriae domicilium ac sedem attigisset, miserrimum tempus fuit. Romanis enim omnino haud placuit mathesis, contenti agrimensoribus suis ultra nihil requirebant: notum est illud Ciceronis: at nos metiendi ratiocinandique utilitate hujus artis terminavimus modum. Huic tempori cedens geometria jacebat. Sero sub imperatoribus animus immanis ac ferus est coeptus leniri, jam inclinatus erat mirus ille vigor mentis antea innatus genti Graecorum et illa alacritas ad perscrutandum investigandumque. Itaque longo post intervallo Theodosium excepit Alexandrinus Menelaus is, qui ultra illum modum, quem Theodosius his rebus adhibuit, progressus de ipsis egit triangulis sphaericis. Ejus Sphaericorum libri tres versi duntaxat ex arabico et hebraico exstant. Gravissimum theorema et fundamentum totius trigonometriae sphaericae, quod Arabes regulam intersectionis dicebant, est primum tertii libri, quod versatur in iis sex segmentis, in quae trianguli sphaerici latera dividuntur circumferentia circuli maximi. Ad demonstrationem assumitur simile illud theorema de plano triangulo, quod nunc merito nomen ex inventore repperit. Computatio triangulorum his in Sphaericis non deprehenditur, illum calculum Menelaus tradidit fortasse in iis sex libris, quos de chordis scripsisse narratur a Theone. Trigonometriae autem quae tractatio apud Graecos fuerit, ex Claudii Ptolemaei magna Compositione, quae ab illo *μαθηματικὴ σύνταξις*, ab interpretibus *μεγάλῃ σύνταξις*, ab Arabibus Almagestum est vocata, potest intelligi. Is pluribus exemplis exposuit tantum, quantum opus fuit ad explicandam astronomiam. In primo libro exhibet canonem chordarum, cujus constructionem, tractationem usumque quo artificio quodam singulari redegerit ad pauca theoremata et commoda admiratus est Theon<sup>2)</sup>. In his est illud theorema, quod nunc nomen habet a Ptolemaeo tractum. Illud vero theorema, in quo trigonometria sphaerica est tota, est depromptum de Menelao itemque propositio ea, qua demonstratio nititur. Ceterum hoc tam nominatum opus nihil fuit aliud nisi perfecta solutio illius problematis, quod Plato geometris astronomisque proposuisse dicitur. In quo quidem genere etsi hoc tempore est nihil, tamen nihilo minus etiam nunc excitat admirationem geometrarum. Quoniam igitur solutum et quidem admirabiliter illud grande totius scientiae problema geometris videretur, studium intermissum est laborque ipso in eo genere, in quo quum omnia essent in promptu, progredi longius facile fuerat. Quo factum est, ut retro respicientes geometrae concluderentur in ea, quo jam prolata erant. Sic in Claudio Ptolemaeo Graecorum ingenii vis et solertia ad ultimum pervenit. Huic enim successit solum interpretum genus, e quibus unus Pappus suo stat iudicio.

<sup>1)</sup> Proclus p. 68, cf. p. 31.

<sup>2)</sup> p. 39.