Elementare Darstellung der einfachsten Eigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Elementare Darstellung der einfachsten Eigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

1.

In einer Ebene ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniß haben, eine Kreislinie oder eine Gerade. Vertauscht man den einen der beiden festen Punkte mit einer festen Geraden, so kann man sich die Aufgabe stellen:

den Ort des Punktes zu finden, für welchen das Verhältniß seiner Abstände von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Geraden constant ist.*)

Der gegebene Punkt sei F, die feste Gerade MN, die Abstände des gesuchten Punktes von F und MN seien p und q, und $\frac{p}{q}$ sei $= n$. Es kann nun n kleiner, gleich oder größer als 1 sein. Es sei zunächst $n < 1$. Man ziehe durch F den auf MN senkrechten Strahl, welcher die Gerade in C treffe. Theilt man nun die Strecke FC von F aus nach dem gegebenen Verhältnisse durch die Punkte A und A′, von denen A der innere, A′ der äußere Theilpunkt sei, so daß $\frac{FA}{AC} = \frac{FA'}{A'C'}$, jedes Verhältniß $= n$ ist, so sind beide Theilpunkte offenbar Punkte von der verlangten Eigenschaft, und zwar liegen beide mit dem Punkte F auf einerlei Seite der MN. Außer diesen giebt es in der Geraden AA′ weiter keine andern Punkte von der in Rede stehenden Eigenschaft.

---

*) Dieser Aufgabe entspricht ein Theorem, welches beim Pappus unter den Lemmen zu Euklid's τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν vorkommt; es ist das fünfte Lemma, der letzte Satz des wichtigen siebenten Buches, und lautet in der Uebersetzung des Commandinus (Pappi mathem. Collect. edit. Bonon. 1660) also: Sit recta linea positione data AB et datum punctum C in eodem plano ducaturque CD et perpendiculariter DE, proportio autem data sit CD ad DE, dico punctum D coni sectionem contingere, et si quidem proportio sit aequalis ad aequale, erit ea sectio parabole, si vero minoris ad majus, ellipsis, quod si majoris ad minus, erit hyperbole.

Schneidet man aber auf dem gezogenen Strahle von A' aus nach A hin ein Stück $A'F' = AF$ und in der entgegengesetzten Richtung ein anderes Stück $A'C' = AC$ ab und zieht durch C' zu MN eine Parallele $M'N'$, so ist auch

$$\frac{AF'}{AC'} = \frac{F'A'}{A'C'} = \frac{AF}{AC} = n.$$

Daher hat die feste Gerade $M'N'$ und der feste Punkt F' offenbar dieselbe Geltung, wie die gegebene Gerade MN und der gegebene Punkt F. Dies hat auch anderweitig seinen guten Grund. Beschreibt man nämlich über der unveränderlichen Strecke AA', als Durchmesser, einen Kreis, so liegen die beiden Geraden MN und $M'N'$ und die beiden Punkte F und F' in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises symmetrisch.

Es sei nun X irgend ein Punkt von der verlangten Eigenschaft, welcher außerhalb der Geraden AA' liegt und von F und F' um p, p' und von MN und $M'N'$ um q, q' absteht. Dann ist, weil $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, nämlich $= n$ ist, auch $\frac{p + p'}{q + q'} = n$, also constant. Es ist aber $q + q'$ unveränderlich, nämlich gleich dem Abstande der beiden Geraden MN und $M'N'$ von einander, also ist auch $p + p'$ constant. Das heißt aber nichts Anderes als: jeder gesuchte Punkt hat die Eigenschaft, daß für ihn die Summe seiner Abstände von F und F' unveränderlich, nämlich gleich der unveränderlichen Strecke AA' ist, weil dies für die Punkte A und A' stattfindet. Dieser Umstand giebt ein leichtes Mittel an die Hand, Punkte des gesuchten Ortes zu finden.

Ist nämlich O die Mitte von FF', also auch von AA', welche Strecke $= 2a$ sei, und schlägt man mit $OA = OA' = a$, als Halbmesser, um F und F', als Mittelpunkte, zwei Kreise, so schneiden sich diese jederzeit, und ihre Schnittpunkte B und B', welche in Bezug auf die Gerade AA' symmetrisch liegen, sind offenbar zwei andere Punkte des in Rede stehenden Ortes. Hierbei ist für das Folgende zu bemerken, daß die Strahlen aus F und F' nach B und B', als Radien gleicher Kreise, einander gleich sind, jeder Strahl ist $= a$.

Liegt ferner in der Geraden AA' der Punkt J zwischen O und F, so sind die Schnittpunkte zweier Kreise aus F und F' mit AJ und $A'J$, als Halbmessern, wieder zwei Punkte von der verlangten Eigenschaft, und auch sie liegen in Bezug auf die Gerade AA' symmetrisch. Ebenso entsprechen die Schnittpunkte zweier Kreise aus F und F' mit den Halbmessern $A'J$ und AJ der verlangten Eigenschaft.

Auf diese Weise kann man beliebig viele Punkte des gesuchten Orts erhalten. Die gefundenen Punkte liegen aber auch in Bezug auf die Gerade BB' symmetrisch. Daher ist nicht nur die Gerade AA' eine Axe, sondern auch die Gerade BB'; die erstere Gerade heißt die erste, die letztere die zweite Axe. Hier kann man zugleich bemerken, daß die eine Axe die der anderen parallelen Sehnen in die Hälfte theilt. Verbindet man aber je zwei wechselnamige Schnittpunkte zweier zusammengehörigen Constructionskreise, so erhält man offenbar einen Durchmesser. Die Durchmesser sind paarweise einander gleich, mit Ausnahme der beiden auf einander senkrechten Axen, von welchen AA′ der größte, BB′ der kleinste Durchmesser ist.

Die so gefundenen Punkte bilden zusammen eine in sich zurücklaufende Linie innerhalb des Parallelstreifens der Geraden (Leitlinien) MN und M′N′, und diese ist der gesuchte Ort. Denn nimmt man außerhalb derselben einen Punkt Y an, zieht die YF und YF′ und verbindet weiter einen Punkt P des Bogens zwischen diesen Verbindungslinien mit F und F′, so ist

$$YF + YF' > PF + PF', \text{ also } > 2a;$$

und nimmt man einen Punkt Y′ innerhalb des Dreiecks PFF′ an und zieht Y′F und Y′F′, so ist

$$Y'F + Y'F' < PF + PF', \text{ also } < 2a.$$

Daher genügen in der That nur Punkte der gefundenen Linie. Dieselbe heißt die Ellipse, O ihr Mittelpunkt, F und F′ die Brennpunkte, ein Strahl aus einem Brennpunkt nach einem Punkte des Umfangs ein Radius vector, die Punkte A und A′ die Scheitel der ersten oder großen Axe oder Hauptaxe, B und B′ die Scheitel der zweiten oder kleinen oder Nebenaxe. Die Strecke FF′ heißt die Excentricität der Ellipse, OF = OF′ die halbe Excentricität. Ist diese gleich Null, d. h. fallen die beiden Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammen, so geht die Ellipse in einen Kreis über. Im Folgenden soll die halbe Excentricität mit e bezeichnet werden.

2.

Weil nun $\frac{AF}{AC} = \frac{A'F}{A'C}$ ist, so ist auch

$$A'C \,.\, AF = AC \,.\, A'F$$

oder

$$A'C\,(AA' - A'F) = (A'C - AA') \,.\, A'F.$$

Hieraus folgt

$$A'C \,.\, AA' + A'F \,.\, AA' = 2A'C \,.\, A'F,$$

was durch Division durch das Produkt A′C . A′F . A′A übergeht in

$$\frac{1}{A'F} + \frac{1}{A'C} = \frac{2}{AA'},$$

welche Gleichung offenbar ein allgemeines Gesetz für vier harmonische Punkte ausspricht.

Weil nun $\frac{A'F}{A'C} = n$, also $A'F = n \,.\, A'C$, und nach dem Obigen $AA' = 2a$ ist, so gibt die eben gefundene Gleichung

$$A'C = \frac{n+1}{n} a;$$

also ist

$$A'F = (n + 1)\, a,$$

und daher

$$AF = 2a - (n + 1)\,a = (1 - n)\,a.$$

Und weil ferner $\frac{AF}{AC} = n$, also $AC = \frac{1}{n} \,.\, AF$, so ist

$$AC = \frac{1-n}{n}\,a.$$

Es ist aber auch

$$AF = a - e;$$

daher ist

$$(1 - n)\,a = a - e,$$

woraus

$$n = \frac{e}{a}$$

folgt.

Fällt man nun von einem beliebigen Punkte M der Ellipse auf die große Axe das Perpendikel $MP = y$ (Ordinate), so ist CP gleich dem Abstande des Punktes M von der Leitlinie und MF der Abstand desselben Punktes von dem Brennpunkt F. Dann ist nach der Bedingung der Ellipse

$$MF = n \,.\, CP,$$

also auch

$$MF^2 = n^2 \,.\, CP^2.$$

Nun ist aber

$$CP = CF \mp FP,$$

und

$$CF = CA + AF = \frac{n^2 - 1}{n}\,a = \frac{a^2 - e^2}{e};$$

ferner ist, wenn der von O aus genommene Abschnitt (Abscisse) $OP = x$ gesetzt wird,

$$FP = \pm\,(x - e);$$

daher ist

$$CP = \frac{a^2 - e^2}{e} - x + e = \frac{a^2 - ex}{e},$$

und somit

$$CP^2 = \frac{(a^2 - ex)^2}{e^2}.$$

Weiter ist offenbar

$$MF^2 = y^2 + (x - e)^2.$$

Mithin ist

$$y^2 + (x - e)^2 = \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{(a^2 - ex)^2}{e^2} = \frac{(a^2 - ex)^2}{a^2},$$

woraus

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, (a^2 - e^2)$$

folgt. Es ist aber der Radius vector nach einem Scheitel der kleinen Axe jederzeit gleich der großen Halbaxe $= a$; daher ist $a^2 - e^2$ offenbar das Quadrat der kleinen Halbaxe. Setzt man diese $= b$, also $a^2 - e^2 = b^2$, so geht die Gleichung über in

$$b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, b^2,$$

oder, wenn man durch $a^2\, b^2$ dividirt, in

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1.$$

Diese Gleichung nennt man die Gleichung der Ellipse in Bezug auf den Mittelpunkt derselben. Sie folgt auch leicht aus der Eigenschaft, daß die Summe der Radien vectoren nach einem und demselben Punkte gleich der großen Axe $= 2a$ ist. Es ist nämlich die Quadratdifferenz zweier Seiten eines Dreiecks gleich der Quadratdifferenz der Projectionen dieser Seiten auf die dritte Seite, daher ist im $\triangle$ FMF'

$$MF^2 - MF'^2 = FP^2 - F'P^2.$$

Setzt man nun $MF = v$, $MF' = v'$ und nimmt $FP = e + x$, also $F'P = e - x$, so ist

$$v^2 - v'^2 = (e + x)^2 - (e - x)^2,$$

d. i.

$$(v + v')\,(v - v') = 4ex.$$

Weil nun $v + v' = 2a$, so ist

$$v - v' = \frac{2ex}{a}.$$

Hieraus und aus $v + v' = 2a$ folgt

$$v = a + \frac{ex}{a},$$

$$v' = a - \frac{ex}{a}.$$

Es ist aber das Quadrat eines Radius vector jederzeit gleich der Summe der Quadrate der Ordinate und des zwischen beiden liegenden Abschnittes der großen Axe, z. B.

$$MF^2 = MP^2 + PF^2,$$

d. i.

$$\left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 = y^2 + (e + x)2.$$

Wird diese Gleichung reducirt und $a^2 - e^2 = b^2$ gesetzt, so erhält man

$$b^2\, x^2 + a^2\, y^2 = a^2\, b^2$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

2.

Es sei zweitens $n > 1$. Theilt man die auf MN senkrechte Strecke FC nach dem gegebenen Verhältniß, und zwar von F aus, durch die Punkte A und A', von denen A der innere, A' der äußere Theilpunkt sei, so daß $FA : AC = FA' : A'C$, so sind beide Theilpunkte Punkte von der verlangten Eigenschaft, und zwar liegt in diesem Falle A' auf der andern Seite der Geraden MN. Außer diesen Punkten gibt es in der Geraden AA' weiter keine von der verlangten Eigenschaft.

Schneidet man aber auf dem gezogenen Strahle von A' aus nach A hin ein Stück $A'C' = AC$ und in der entgegengesetzten Richtung ein anderes Stück $A'F' = AF$ ab und zieht durch C' eine Parallele M'N' zu MN, so ist auch

$$\frac{AF'}{AC'} = \frac{F'A'}{A'C'} = \frac{AF}{AC} = n.$$

Daher hat die feste Gerade M'N' und der feste Punkt F' offenbar dieselbe Geltung, wie die gegebene Gerade MN und der gegebene Punkt F. Beschreibt man über der unveränderlichen Strecke AA', als Durchmesser, einen Kreis, so liegen die beiden Geraden MN und M'N' und die beiden Punkte F und F' in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises symmetrisch.

Für irgend einen Punkt außerhalb der Geraden AA' seien die Abstände desselben von F und MN, sowie von F' und M'N' beziehlich p, q und p', q'. Dann ist $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, also auch $\frac{p - p'}{q - q'} = n$. Da nun $q - q'$ unveränderlich, so muß auch $p - p'$ constant sein, d. h. jeder gesuchte Punkt hat die Eigenschaft, daß für ihn die Differenz seiner Abstände von den beiden festen Punkten F und F' unveränderlich, und zwar offenbar gleich der Strecke $AA' = 2a$ ist, weil dies für die Punkte A und A' stattfindet. Dies gewährt ein einfaches Mittel, Punkte von der in Rede stehenden Eigenschaft zu finden. Schlägt man nämlich um F, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, welcher größer als AF ist, einen Kreis, und einen andern um F' mit einem Halbmesser gleich der Strecke AA' + jenem Halbmesser, so sind die Schnittpunkte, und solche gibt es jederzeit, offenbar zwei Punkte der verlangten Eigenschaft. Schlägt man ferner um dieselben Punkte, als Mittelpunkte, mit denselben, aber mit einander vertauschten Halbmessern zwei Kreise, so sind deren Schnittpunkte wiederum zwei Punkte, welche der Bedingung entsprechen; und so fort. Die auf diese Weise gefundenen Paare von Punkten liegen offenbar in Bezug auf die Gerade AA' symmetrisch, je zwei derselben auf einerlei Seite der AA' aber auch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte O der Strecke AA'; daher sind diese beiden Geraden offenbar Axen des gesuchten Ortes, die erstere heißt die erste oder Hauptaxe, die letztere die zweite oder Nebenaxe. Verbindet man zwei wechselnamige Schnittpunkte jener Kreise, so erhält man einen Durchmesser. Die Durchmesser sind somit paarweise vorhanden und die eines Paares einander gleich, mit Ausnahme jener beiden Axen. Die Endpunkte dieser Linien heißen Scheitel.

Die durch das obige Verfahren erhaltenen Punkte liegen außerhalb des Parallelstreifens der beiden Geraden (Leitlinien) MN und M'N' zu beiden Seiten derselben, indem sie keine in sich zurücklaufende, geschlossene Linie, sondern zwei Aeste oder Zweige bilden, deren Punkte sich mehr und mehr von den beiden Geraden entfernen und zuletzt ins Unendliche rücken. Beide Aeste lassen sich übrigens zur Deckung bringen durch Drehung um die zweite Axe. Andere Punkte der Ebene aber haben die in Rede stehende Eigenschaft nicht. Denn nimmt man außerhalb der krummen Linie, z. B. auf der Seite der zweiten Axe, auf welcher der Punkt F liegt, einen Punkt Y an und zieht die Strahlen YF und YF', von welchen der erstere die krumme Linie in M schneide, und außerdem die MF', so ist

$$YF' - YM < F'M;$$

aber offenbar

$$MF = MF,$$

folglich ist

$$YF' - YF < F'M - MF, \text{ d. i. } < 2a.$$

Nimmt man dagegen auf derselben Seite der genannten Axe einen Punkt Y' an und zieht die Strahlen Y'F und Y'F', von welchen der erstere über Y' hinaus verlängert die krumme Linie in M' schneide, so ist

$$Y'F' + Y'M' > F'M';$$

es ist aber offenbar

$$M'F = M'F,$$

folglich ist

$$Y'F' - Y'F > F'M' - M'F, \text{ d. i. } > 2a.$$

Daher genügen in der That nur Punkte der gefundenen Linie; und diese ist somit der gesuchte Ort. Sie heißt die Hyperbel, O ihr Mittelpunkt, F und F' die Brennpunkte, ein Strahl aus einem Brennpunkt nach einem Punkte der Hyperbel ein Radius vector, die Punkte A und A' die Scheitel, die die Strecke OF = OF' die Excentricität, welche mit e bezeichnet werden soll.

3.

Wie im vorigen Falle ist auch jetzt

$$A'C = \frac{n+1}{n} a,$$

$$A'F = (n+1)\,a.$$

Dagegen ist

$$AF = A'F - AA' = (n+1)\,a - 2a = (n-1)\,a$$

und

$$AC = \frac{n-1}{n} a.$$

Ferner ist auch
$$AF = e - a.$$
Daher ist
$$(n - 1)\,a = e - a;$$
also ist auch in diesem Falle
$$n = \frac{e}{a}.$$

Fällt man nun von einem beliebigen Punkte M der Hyperbel, z. B. von einem Punkte, welcher in dem zum Brennpunkt F gehörigen Zweige liegt, ein Perpendikel (Ordinate) $MP = y$ auf die Hauptaxe, wozu der Abschnitt $OP = x$ als Abscisse gehört, und zieht den Radius vector MF, so ist nach der Bedingung der Hyperbel
$$ME = n\,.\,CP,$$
also auch
$$MF^2 = n^2\,.\,CP^2.$$

Es ist aber
$$\begin{aligned} MF^2 &= MP^2 + PF^2 \\ &= y^2 + (x - e)^2; \end{aligned}$$
und ferner ist
$$\begin{aligned} CP &= CF \pm FP \\ &= CA + AF \pm FP \\ &= \frac{n-1}{n}\,a + (n - 1)\,a + x - e \\ &= \frac{n^2 - 1}{n}\,a + x - e \\ &= \frac{e^2 - a^2}{e} + x - e \\ &= \frac{-a^2 + ex}{e}. \end{aligned}$$
Daher ist
$$y^2 + (x - e)^2 = \frac{e^2}{a^2}\,\frac{(-a^2 + ex)^2}{e^2},$$
woraus
$$(e^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(e^2 - a^2)$$
folgt. Setzt man nun $e^2 - a^2 = b^2$, so erhält man die Gleichung
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
oder, durch Division durch a^2b^2,
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel. Die Größe b nennt man die kleine Halbaxe der Hyperbel. Ist $b = a$, so nennt man die Hyperbel gleichseitig; die Gleichung derselben ist

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel folgt auch aus der Eigenschaft der Radien vectoren nach einem und demselben Punkte, daß ihre Differenz gleich der großen Axe $= 2a$ ist. Ist nämlich der Punkt M wieder in dem zum Brennpunkt F gehörigen Zweige der Hyperbel angenommen, und seine Ordinate $MP = y$, zu welcher die Abscisse $OP = x$ gehört, gezogen, so ist im $\triangle$ FMF′ nach dem Satze von der Quadratdifferenz zweier Seiten eines Dreiecks

$$MF'^2 - MF^2 = F'P^2 - FP^2.$$

Setzt man $MF' = v'$, $MF = v$, so ist

$$v'^2 - v^2 = (x + e)^2 - (x - e)^2,$$

d. i.

$$(v' + v)(v' - v) = 4ex.$$

Weil nun

$$v' - v = 2a,$$

so ist

$$v' + v = \frac{2ex}{a}.$$

Hieraus und aus $v' - v = 2a$, folgt

$$v' = a + \frac{ex}{a},$$

$$v = - a + \frac{ex}{a}.$$

Es ist aber jederzeit

$$MF^2 = MP^2 + PF^2$$

oder

$$\left(- a + \frac{ex}{a}\right)^2 = y^2 + (x - e)^2.$$

Reducirt man diese Gleichung und setzt $e^2 - a^2 = b^2$, so ergibt sich, wie vorhin,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3.

Ist drittens endlich $n = 1$, so ist die Mitte A des auf MN senkrechten Strahles CF offenbar ein Punkt von der verlangten Eigenschaft. Der diesem entsprechende harmonische Gegenpunkt liegt in diesem Falle im Unendlichen, dasselbe gilt auch von der, der Geraden MN entsprechenden Geraden. Was weiter andere Punkte der verlangten Art betrifft, so liegt jeder derselben einmal in einer Parallele zur MN, sodann aber auch in einem Kreise um F mit einem Halbmesser, welcher gleich dem Abstande der Parallele von MN ist; die Schnittpunkte beider Linien sind Punkte von der verlangten Eigenschaft. Jede Parallele aber muß von der MN offenbar einen größeren Abstand haben, als $CA = AF$. Die auf diese Weise gefundenen Punkte liegen mit dem Punkte F auf derselben Seite der Leitlinie MN; der Punkt A liegt derselben am nächsten, die übrigen Punkte aber entfernen sich mehr und mehr von derselben, bis sie zuletzt ins Unendliche rücken. Weil nun je zwei zusammengehörige Schnittpunkte einer Parallele und eines Kreises in Bezug auf die Gerade durch C, A, F symmetrisch liegen, so ist diese Gerade offenbar eine Axe.

Andere Punkte der Ebene aber haben die verlangte Eigenschaft nicht; insbesondere liegt jeder Punkt außerhalb der gefundenen Linie der Leitlinie näher als dem gegebenen festen Punkte, jeder Punkt innerhalb derselben aber hat einen größeren Abstand von jener Linie als von dem Punkte. Denn ist Y ein beliebiger Punkt außerhalb der krummen Linie, YR sein Abstand von MN, so fälle man das Perpendikel YP auf die Axe, welches die krumme Linie in M schneide, und ferner das Perpendikel MS auf MN, dann ist $YF > MF$, also auch größer als $MS = YR$, da $MF = MS$ ist; und nimmt man in dem Perpendikel YP zwischen M und P einen beliebigen Punkt Y′ an, der also innerhalb der krummen Linie liegt, und stellt seinen Abstand Y′R′ von MN und FY′ von F dar, so ist $FY' < FM$; also, da $FM = MS = Y'R'$ ist, auch kleiner als Y′R′. Also ist die gefundene Linie in der That der Ort des verlangten Punktes. Sie heißt die Parabel, der feste Punkt F der Brennpunkt, die Gerade durch C, A, F die Axe, der Punkt A der Scheitel, ein Strahl aus dem Brennpunkt nach einem Punkte der Parabel ein Radius vector.

Nimmt man in der Parabel den beliebigen Punkt M an, fällt von ihm MP senkrecht auf die Axe und zieht den Radius vector MF, so ist nach der Bedingung der Parabel

$$MF = CP,$$

wo CP gleich dem Abstande des Punktes M von der Leitlinie ist. Ist nun $CF = 2a$, also $CA = AF = a$, und nimmt man die Abscissen von A aus, so ist, weil

$$MF^2 = y^2 + (x - a)^2,$$

und

$$MP = x + a,$$

offenbar

$$y^2 + (x - a)^2 = (x + a)^2.$$

Dies gibt

$$y^2 = 4ax$$

oder, wenn man $4a = p$ setzt,

$$y^2 = px.$$

Dies ist die Gleichung der Parabel, in welcher die constante Größe p der Parameter der Parabel heißt.

4.

Die Halbirungslinie des Winkels, welcher von einem Radius vector nach einem Punkte einer Ellipse und von der Verlängerung des andern Radius vector nach demselben Punkte gebildet wird, ist eine Tangente der Ellipse in diesem Punkte. Die Tangente der Ellipse.

Nach dem Punkte M der Ellipse mit dem Mittelpunkte O und den Brennpunkten F und F′ seien die Radien vectoren MF und MF′ gezogen, und von diesen der eine, z. B. MF, über M hinaus verlängert. Auf seiner Verlängerung schneide man $MG = MF'$ ab und halbire den Winkel F′MG. Dann ist jeder Punkt der Halbirungslinie von den Punkten G und F′ gleichweit entfernt, z. B. der Punkt, in welchem die Verbindungslinie der Punkte F′ und G von der Halbirungslinie geschnitten wird, er sei H; ebenso ist für jeden andern Punkt L der Halbirungslinie $LG = LF'$. Soll nun die Halbirungslinie eine Tangente sein, so darf sie offenbar nur einen Punkt, den Punkt M, mit der Ellipse gemein haben, muß also sonst ganz außerhalb derselben liegen. Dies findet aber in der That Statt. Denn in dem Dreieck FLG ist

$$FL + LG > FG,$$

d. i.

$$FL + LF' > 2a,$$

d. h. der beliebige Punkt L der Halbirungslinie, also auch jeder andere Punkt derselben mit Ausnahme des Punktes M liegt außerhalb der Ellipse.

Zugleich erhellet leicht, daß die Radien vectoren nach dem Berührungspunkte mit der Tangente gleiche Winkel bilden.

Mit Hilfe des Hauptsatzes kann man eine Tangente an eine Ellipse sowohl durch einen Punkt (M) der Ellipse, als auch durch einen Punkt (L) außerhalb derselben ziehen. Der erste Fall ist leicht. Im zweiten Fall ist festzuhalten, daß die Tangente durch den gegebenen Punkt und ihren Berührungspunkt bestimmt ist. Dieser aber liegt einmal in der Ellipse, sodann aber auch in einem Radius vector nach dem Berührungspunkte. Von diesem Radius vector läßt sich ein zweiter Punkt bestimmen. Nimmt man nämlich die Verlängerung dieses Radius vector (FM) gleich dem andern Radius vector (F′M) nach dem Berührungspunkte, so liegt der Endpunkt (G) derselben in einer Kreislinie mit dem Halbmesser 2a um den zugehörigen Brennpunkt (F), aber auch in einer andern Kreislinie um den gegebenen Punkt (L) mit dem Abstande (F′L) desselben von dem andern Brennpunkte (F′). Der Schnittpunkt beider Kreislinien ist jener Endpunkt. Beide Kreislinien aber schneiden einander jederzeit.

Es ist nämlich einmal, weil der gegebene Punkt L außerhalb der Ellipse liegt, FL + F'L > 2a, also auch FL > 2a — F'L, d. h. der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreislinien von einander ist größer als die Differenz der Radien; es ist aber auch in dem Dreieck FLF' offenbar FL < FF' + F'L, daher ist um so mehr FL < 2a + F'L, d. h. der Abstand der Mittelpunkte beider Kreislinien von einander ist kleiner als die Summe der Radien. U. S. W. Somit gibt es jederzeit zwei Tangenten.

Nach dem Obigen ist F'H senkrecht auf der Tangente durch M. Verbindet man nun den Fußpunkt H dieses Perpendikels mit dem Mittelpunkte O der Ellipse, so ist OH ∥ FG, also ist OH = a, mithin constant. Und fällt man von F aus auf dieselbe Tangente ein Perpendikel, indem man z. B. F'M über M um MF verlängert und den Endpunkt der Verlängerung mit F verbindet, so ist der Abstand seines Fußpunktes von O auch gleich a. Das gibt den Satz: die Kreislinie über der großen Axe einer Ellipse als Durchmesser ist der Ort der Fußpunkte der von den Brennpunkten auf alle Tangenten der Ellipse gefällten Perpendikel.

5.

Die Tangente der Hyperbel.

Die Halbirungslinie des Winkels, welchen die beiden Radien vectoren nach einem Punkte einer Hyperbel mit einander bilden, ist eine Tangente der Hyperbel in diesem Punkte.

Der Mittelpunkt der Hyperbel sei O, die Brennpunkte F und F'. Gehen nun z. B. nach dem Punkte M, welcher in dem Zweige mit dem Brennpunkt F liegt, die Radien vectoren MF und MF', so schneide man MF von M aus auf MF' ab, so daß MG = MF und ziehe GF. Die Halbirungslinie des Winkels FMF' treffe die FG in H. Dann ist GH = HF; und ebenso steht jeder andere Punkt der Halbirungslinie von G und F gleichweit ab, so daß für den beliebigen Punkt L derselben auch LG = LF. In dem Dreieck F'GL aber ist

$$F'L - LG < F'G$$

oder

$$F'L - LF < 2a,$$

d. h. der Punkt L liegt außerhalb der Hyperbel. Somit liegen alle Punkte der Halbirungslinie mit Ausnahme des Punktes M außerhalb der Hyperbel; folglich ist die Gerade eine Tangente der Hyperbel. Hierbei findet noch Folgendes Statt. Verbindet man den Punkt H, d. i. der Fußpunkt des Perpendikels von dem Brennpunkt F auf die Tangente durch M, mit dem Mittelpunkte O der Hyperbel, so ist HO = F'G = a, d. h. der Ort der Fußpunkte der von jedem Brennpunkt einer Hyperbel auf die Tangenten derselben gefällten Perpendikel ist die Kreislinie über der großen Axe, als Durchmesser.

Mit Hilfe des Hauptsatzes kann man die Tangente an die Hyperbel ziehen sowohl durch einen Punkt der Hyperbel, als auch durch einen Punkt außerhalb derselben. Der erste Fall ist leicht. Im andern Fall aber kommt es darauf an, den Berührungspunkt zu finden. Es sei z. B. der vorhin mit L bezeichnete Punkt der gegebene Punkt. Der Berührungspunkt (M) liegt einmal in der Hyperbel, sodann aber auch in dem Radius vector MF'. Denkt man sich nun den andern Radius vector MF nach dem Berührungspunkt von M aus auf MF′ abgeschnitten, so daß MG = MF, so findet man leicht, daß GL = FL ist. Also liegt der Punkt G in einer Kreislinie um den gegebenen Punkt mit dem bekannten Halbmesser LF. Es ist aber GF′ als Unterschied der beiden Radien vectoren gleich 2a; mithin liegt G auch in einer Kreislinie um F′ mit 2a als Halbmesser. Somit ist der Punkt G als Schnittpunkt dieser beiden Kreislinien bekannt, also auch der Radius vector F′GM, mithin auch der Berührungspunkt M. Jene beiden Kreislinien schneiden sich aber; denn im Dreieck FLF′ ist einmal

$$\begin{aligned} F'L &< F'F + FL \\ &< 2a + FL, \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} F'L &> F'F - FL \\ &> 2a - FL. \end{aligned}$$

6.

Die Asymptoten der Hyperbel.

Schneidet die Tangente im Punkte M der Hyperbel die große Axe in X, so ist

$$\frac{F'M}{MF} = \frac{F'X}{XF}.$$

Daher ist auch

$$\frac{F'M + MF}{MF} = \frac{F'X + XF}{XF}$$

oder

$$\frac{2\,\frac{ex}{a}}{-a + \frac{ex}{a}} = \frac{2e}{XF}.$$

Das gibt

$$XF = e - \frac{a^2}{x}.$$

Rückt der Berührungspunkt, dessen Abscisse x ist, immer weiter und weiter weg vom Scheitel der Hyperbel, so wird x immer größer und größer. Somit wird das Glied $\frac{a^2}{x}$ in dem Ausdruck für XF immer kleiner und kleiner, und folglich nähert sich XF der Größe e mehr und mehr, d. h. es rückt der Schnittpunkt X der Tangente und der großen Axe mehr und mehr nach dem Mittelpunkt der Hyperbel hin. Und ist $x = \infty$, d. h. rückt der Berührungspunkt ins Unendliche, so geht der Werth von XF in e über, d. h. die Tangente des unendlich entfernten Punktes geht durch den Mittelpunkt. Und dies gilt sowohl für den einen Zweig der Hyperbel, als für den andern. Das gibt zwei Gerade, welche beide durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen und die Hyperbelzweige zwischen sich haben, indem diese sich ihnen mehr und mehr nähern. Die Lage dieser beiden Geraden, welche Asymptoten heißen, läßt sich so feststellen. Weil dieselben nämlich Tangenten sind, so liegen die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf sie gefällten Perpendikel in der Kreislinie über der großen Axe als Durchmesser; der Fußpunkt des Perpendikels von F aber liegt auch in einem Halbkreise über OF als Durchmesser, folglich ist jeder Schnittpunkt beider Kreislinien der Fußpunkt, d. i. ein zweiter Punkt einer Asymptote. — Das Quadrat jenes Perpendikels ist offenbar $= e^2 - a^2$, also $= b^2$; mithin das Perpendikel selbst $= b$. Errichtet man aber in einem Scheitel der großen Axe ein Perpendikel auf derselben, so ist das entstandene Dreieck dem vorigen offenbar congruent. Daher ist das errichtete Perpendikel auch $= b$; das gibt eine andere leichte Construction der beiden Asymptoten.

7.

Die Tangente der Parabel.

Die Halbirungslinie des Winkels, welcher von einer Parallele durch einen Punkt einer Parabel zur Axe und von dem Radius vector nach diesem Punkte gebildet wird, ist eine Tangente der Parabel in dem in Rede stehenden Punkte.

Durch den Punkt M der Parabel sei der Radius vector MF und eine Parallele zur Axe gezogen, welche die Leitlinie in G schneide. Dann ist die Halbirungslinie des Winkels GMF offenbar eine Tangente der Parabel, wenn jeder andere Punkt derselben außerhalb der Parabel liegt, was jederzeit der Fall ist, wenn er der Leitlinie näher als dem Brennpunkt ist. Zieht man aber FG, welche von der Halbirungslinie in H geschnitten werde, so ist $GH = HF$, und ebenso ist für einen beliebigen Punkt L der Halbirungslinie $GL = LF$. Fällt man nun von L auf die Leitlinie ein Perpendikel, welches dieselbe in N schneide, so ist offenbar $LN < LG$, also auch $LN < LF$. U. s. w.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man durch einen gegebenen Punkt die Tangente an die Parabel ziehen, mag der Punkt in der Parabel oder außerhalb derselben liegen. Die Construction derselben ist in beiden Fällen leicht. Hierbei kommt man auch leicht auf den Satz: Der Ort der Fußpunkte aller vom Brennpunkt auf die Tangenten der Parabel gefällten Perpendikel ist die Leitlinie.

8.

Die Scheitelgleichungen der Ellipse und Hyperbel.

In der Parabel werden die Abscissen vom Scheitel aus genommen. Nimmt man auch in der Ellipse und Hyperbel die Abscissen von einem Scheitel aus, so kommt man auf die Scheitelgleichungen dieser Linien. Diese Gleichungen lassen sich leicht aus den Mittelpunktsgleichungen herleiten; man braucht nur $a - x'$ bei der Ellipse und $a + x'$ bei der Hyperbel für die alte Abscisse zu setzen. Das giebt für die Ellipse

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}\,x' - \frac{b^2x'^2}{a^2}$$

und für die Hyperbel

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}\,x' + \frac{b^2x'^2}{a^2},$$

oder, wenn man der Uebereinstimmung wegen x für x' setzt, für die Ellipse

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

und für die Hyperbel

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2x^2}{a^2},$$

oder, wenn man

$$\frac{2b^2}{a} = p$$

setzt, für die Ellipse

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$$

und für die Hyperbel

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}.$$

Die Größe p nennt man den Parameter, und es ist offenbar

$$2a : 2b = 2b : p,$$

d. h. der Parameter der Ellipse, sowie der Hyperbel ist die dritte Proportionale zwischen der großen und kleinen Axe, oder die kleine Axe ist die mittlere Proportionale zwischen der großen Axe und dem Parameter. Errichtet man durch den Brennpunkt auf der großen Axe eine senkrechte Sehne, so ist diese in beiden Linien dem Parameter gleich, was alsbald aus den Mittelpunktsgleichungen folgt, wenn man in ihnen $x = e$ setzt. Dasselbe gilt auch für die Parabel, was sich sofort ergibt, wenn man in ihrer Gleichung $x = \frac{1}{4}p$ setzt.

9.

Die Gleichung

$$y^2 = px$$

läßt sich auch durch Verwandlung des Rechtecks px, dessen eine Seite p unveränderlich, dessen andere Seite x aber veränderlich ist, in ein Quadrat construiren. Die alten Griechen nannten diese Construction, weil das Rechteck px an die Gerade, auf welcher von ihrem Anfangspunkte an die x Seiten zu nehmen sind, angelegt erscheint, eine Anlegung (παραβολή, applicatio). Daher rührt offenbar der Name der Parabel her. Aehnliches gilt für die Gleichungen

$$y^2 = px - \frac{px}{2a},$$

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a};$$

beide können construirt werden, indem das Quadrat y^2 im ersten Fall um ein Rechteck $\frac{px^2}{2a}$ kleiner, im zweiten aber um ein Rechteck $\frac{px^2}{2a}$ größer ist, als das Rechteck px, und zwar so, daß der Defect (ἔλλειψις) sowohl, als der Ueberschuß (ὑπερβολή) einem gegebenen Rechteck 2ap ähnlich ist, denn es ist $2a : p = x : \frac{px}{2a}$, wo x und $\frac{px}{2a}$ die Seiten des Defects oder des Ueberschusses sind.

10.

Auf dieselben krummen Linien führen auch, wie alsbald erhellet, die folgenden Berührungsaufgaben:

1. einen Kreis zu beschreiben, welcher eine Gerade berührt und durch einen Punkt außerhalb derselben geht;
2. einen Kreis zu beschreiben, welcher einen Kreis berührt und durch einen Punkt innerhalb desselben geht;
3. einen Kreis zu beschreiben, welcher einen Kreis berührt und durch einen Punkt außerhalb desselben geht.

Kegelschnitte. **Eben dieselben Kurven erscheinen aber auch als ebene Schnitte der Cylinderfläche, sowie der Kegelfläche. Am einfachsten läßt sich dies darthun, wenn beide Flächen gerade sind.**

Wird nämlich eine gerade Cylinderfläche durch eine Ebene schief geschnitten und beschreibt man in beide cylindrische Theilräume Kugeln, welche sowohl die Cylinderfläche, als auch die Schnittebene berühren, so erhellet zunächst, daß die Mittelpunkte beider Kugeln und die Berührungspunkte (F, F') derselben und der Schnittebene in einer und derselben Ebene liegen, welche durch die Axe der Cylinderfläche geht und auf der schneidenden Ebene senkrecht ist. Ferner erhellet, daß die Schnittlinie dieser beiden Ebenen den in Rede stehenden Schnitt in zwei congruente Hälften theilt und also eine Axe der entstandenen Kurve ist. Verbindet man nun aber einen beliebigen Punkt M dieser Kurve mit den beiden Punkten F und F' durch Gerade und zieht durch ihn zugleich die Seitenlinie der Cylinderfläche bis zu den Kreislinien, in welchen die beiden Kugeln die Cylinderfläche berühren, so findet man, weil alle Tangenten von einem Punkte außerhalb einer Kugel an dieselbe einander gleich sind, daß der Abstand MF gleich dem einen Stück der Seitenlinie durch M, welches auch Tangente an derselben Kugel, und daß der Abstand MF' gleich ist dem andern Stück derselben Geraden, welches ebenfalls Tangente an der andern Kugel ist. Folglich ist MF + MF' gleich dem ganzen Stück der Seitenlinie zwischen den beiden Berührungskreisen, somit auch gleich dem ganzen Stück jeder der beiden Seitenlinien, welche mit der Axe der Kurve in einerlei Ebene liegen, und daher der Axe selbst gleich, d. h. die Kurve ist eine Ellipse.

Schneidet man eine gerade Kegelfläche durch eine Ebene, welche alle Seitenlinien derselben schneidet, ohne durch die Spitze zu gehen, so ist der Schnitt eine Ellipse.

Denn beschreibt man in beide Theilräume, welche die schneidende Ebene macht, Kugeln, die sowohl die Kegelfläche, als auch die Ebene berühren, so liegen die Mittelpunkte beider Kugeln, sowie die Berührungspunkte (F und F') der letzteren und der Ebene offenbar in einerlei Ebene, welche auf der Schnittebene senkrecht ist und die Axe der Kegelfläche enthält. Die Schnittlinie beider Ebenen ist auch in diesem Fall eine Axe der Kurve. Zieht man nun wieder durch einen beliebigen Punkt M der Kurve die Seitenlinie der Kegelfläche bis zu den beiden Kreislinien, in welchen die Kugeln die Kegelfläche berühren, so findet man, wie vorhin, die Richtigkeit der Behauptung.

Schneidet man eine gerade Scheitel-Kegelfläche durch eine Ebene, welche alle Seitenlinien der Fläche schneidet, aber die einen in der einen, die andern in der andern Scheitelfläche, so ist der Schnitt eine Hyperbel.

Der Beweis ist ähnlich wie oben.

Schneidet man eine gerade Kegelfläche durch eine Ebene, welche alle Seitenlinien der Fläche bis auf eine einzige, zu der sie parallel ist, schneidet, so ist der Schnitt eine Parabel.

In diesem Falle kann man der Kegelfläche nur eine Kugel einbeschreiben, welche dieselbe und die Schnittebene zugleich berührt; ihr Mittelpunkt liegt offenbar in der Axe der Kegelfläche. Denkt man sich wieder die durch die Axe gehende und auf der Schnittebene senkrechte Ebene, so erhellet leicht, daß auch in diesem Falle die Schnittlinie derselben und der schneidenden Ebene eine Axe der entstandenen Kurve ist. Und verbindet man einen beliebigen Punkt M der Kurve mit dem Berührungspunkt F der Kugel und der Schnittebene durch eine Gerade, so ist diese gleich dem Stück der Seitenlinie durch M zwischen dem Punkte M und der Kreislinie, in welcher die Kegelfläche von der Kugel berührt wird. Nun nehme man 1) die Schnittlinie der Ebene des Berührungskreises und der Schnittebene, sie ist offenbar auf der Richtung der Kurvenaxe senkrecht; 2) die Schnittlinie der Ebene, welche durch die Seitenlinie durch M und die überhaupt nicht geschnittene Seitenlinie der Kegelfläche geht, und der Schnittebene, sie ist zur Axe der Kurve parallel, und 3) die Schnittlinie der Ebene der beiden genannten Seitenlinien und der Kreisebene. Dann erhellet leicht, daß das Stück der zweiten Schnittlinie zwischen dem Punkte M und der ersten Schnittlinie dem Stück der Seitenlinie durch M zwischen M und der Kreislinie gleich ist; mithin ist es auch gleich MF. Daraus folgt, daß der Kegelschnitt eine Parabel ist, von welcher der Punkt F der Brennpunkt und die Schnittlinie der Ebene des Berührungskreises mit der Schnittebene die Leitlinie ist.