Functiones
logarithmicae et circulares, integralibus definitae.

Scripsit R. Weiss.

Introductio.

I.

Significet x variabilem independentem, R functionem huius variabilis rationalem integram secundum gradum non superantem, ita ut sit

$$R = a + bx + cx^2$$

ubi sunt a, b, c numeri constantes reales quicunque; deinde significet f functionem rationalem sive integram sive fractam; haec integratio:

$$\int f\,(x,\ \sqrt{R})\ dx$$

si per functiones algebraicas effici non potest, desiderabit unam vel alteram functionem transcendentem.

II.

Quum f significet functionem rationalem, functio

$$f\,(x,\ \sqrt{R})$$

in universum hanc habebit formam:

$$\frac{A + B\sqrt{R}}{C + D\sqrt{R}},$$

ubi A, B, C, D sunt functiones rationales integrae variabilis x. Quae functio transit in hanc:

$$M + N\sqrt{R}$$

si numeratorem et denominatorem illius multiplicaveris per

$$C - D\sqrt{R},$$

eruntque functiones M et N rationales et in universum fractae. Itaque si functiones transcendentes desiderantur ad integrationem

$$\int f\,(x,\ \sqrt{R})\ dx$$

vel quod idem est:

$$\int \frac{A + B\sqrt{R}}{C + D\sqrt{R}}\ dx$$

efficiendam, eaedem debent desiderari ad has duas integrationes:

$$(1)\qquad \int M\ dx \quad \text{et} \quad (2)\ \int N\sqrt{R}\ dx$$

efficiendas. Fieri enim non potuit, ut in transitu illo, qui a functione

$$\frac{A + B\sqrt{R}}{C + D\sqrt{R}},\ \text{ad hanc}\quad M + N\sqrt{R}$$

per operationem algebraicam conficiebatur, ulla functio transcendens removeretur.

III.

Primo loco consideremus alterum integrale

$$\int M\, dx.$$

Functio M quum sit ex praecedentibus functio rationalis fracta et in universum impropria, aequari poterit per operationem algebraicam, scilicet divisionem, summae duarum functionum, quarum altera sit functio rationalis integra P, altera functio rationalis fracta propria $\frac{P'}{Q}$, ita ut omnes functiones transcendentes, quas integrale $\int M\, dx$ desideret, eaedem desiderentur ab his duobus integralibus:

$$\int P\, dx \quad \text{et} \quad \int \frac{P'}{Q}\, dx.$$

Quorum integralium alterum functiones transcendentes non requirit, quum P sit functio rationalis integra, omnesque termini integrandi habeant formam

$$\int a x^m\, dx,$$

a significante numerum constantem, m positivum integrum.

In altero autem integrali $\int \frac{P'}{Q}\, dx$ omnes termini integrandi, qui obviam fieri possunt comprehensi sunt in his duabus formis:

$$(3)\qquad \int \frac{A\, dx}{(x-r)^m} \quad \text{et} \quad (4)\ \int \frac{A x + B}{(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^m}\, dx$$

ubi A, B, α, β, r significant constantes quoscunque reales, m numerum constantem positivum integrum. Perducimur enim ad integralia illius formae per discerptionem functionis $\frac{P'}{Q}$ in fractiones partiales, eruntque aut r, aut $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, radices aequationis $Q = o$.

1. Integratio prior

$$\int \frac{A\, dx}{(x-r)^m}$$

facile perficitur algebraice, ut manifestum est, nisi $m = 1$. Ponendo enim $x - r = z$ sequitur

$$\int \frac{A\, dx}{(x-r)^m} = \int \frac{A\, dz}{z^m} = \frac{A z^{-m+1}}{1-m}$$

ubi apparet hunc solum casum $m = 1$ illudere integrationi algebraicae.

Sic restat in hoc solo casu integratio

$$\int \frac{A\,dx}{x - r} \quad \text{vel} \quad \int \frac{dz}{z}$$

proficiscens ex integrali $\int \frac{A\,dx}{(x - r)^m}$ alia via efficienda.

2) Integratio posterior

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 - 2\,\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^m}\,dx = \int \frac{Ax + B}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^m}\,dx$$

ponendo $x - \alpha = z$ transit in hanc:

$$\int \frac{Az + A\alpha + B}{(z^2 + \beta^2)^m}\,dz$$

quae dirimitur, ut manifestum est, in haec duo integralia:

$$\int \frac{Az\,dz}{(z^2 + \beta^2)^m} \quad \text{et} \quad \int \frac{A'\,dz}{(z^2 + \beta^2)^m}$$

ubi A' constantem significat.

a. Quorum integralium alterum, priori loco collocatum, substitutione $(z^2 + \beta^2) = u$, $\left(z\,dz = \frac{du}{2}\right)$ perducitur ad hoc:

$$\frac{A}{2} \int \frac{du}{u^m}$$

quod plane idem est atque illud integrale $\int \frac{dz}{z^m}$ supra iam consideratum. Sequitur inde ut integratio sola algebraice ibi non efficienda, etiam hic aliam viam maneat.

b. Quod attinet ad alterum integrale posteriori loco collocatum hoc:

$$\int \frac{A'\,dz}{(z^2 + \beta^2)^m},$$

operationes algebraicae frustra student integratione partiali exponentem m diminuere ita ut denique tollatur. Formula in hunc finem instituta (cf. Lacroix traité de calc. diff. et intégr. 5me édition p. 304):

$$\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^m} = \frac{1}{(2m - 2)\,\beta^2} \cdot \frac{z}{(z^2 + \beta^2)^{m-1}} + \frac{2m - 3}{(2m - 2)\,\beta^2} \int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{m-1}}$$

perhorrescit solum casum ubi $m = 1$. Quum autem hic casus nullo modo circumiri possit, sed pro quovis numeri m valore integro positivo, qualis hic est, demum occurrat, restat sola integratio

$$\int \frac{dz}{z^2 + \beta^2}$$

proficiscens ex integratione

$$\int \frac{A' \, dz}{(z^2 + \beta^2)^m}$$

alia via efficienda.

Ceterum ponendo $z\beta$ loco z integrale illud hanc simpliciorem induit formam:

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{dz}{1 + z^2}$$

Itaque integratio $\int M \, dx$, quam modo in hac tertia introductionis parte consideravimus, desiderat integrationes has duas:

$$\int \frac{dz}{z} \text{ et } \int \frac{dz}{1 + z^2}$$

easque solas, algebraicis functionibus non efficiendas.

IV.

Secundo loco consideremus in hac parte quarta integrationem alteram partis secundae hanc:

$$\int N \sqrt{R} \, dx$$

vel quod idem est, integrationem

$$\int \frac{N R}{\sqrt{R}} \, dx$$

atque distinguamus inter casus ubi in functione $R = a + bx + cx^2$ (cf. I) sit:

1) $b^2 - 4 \, ac = o$

2) $b^2 - 4 \, ac > o$

3) $b^2 - 4 \, ac < o$

1. In conditione priori expleta hac: $b^2 - 4 \, ac = o$ functio R habet duas aequales et reales factores, ita ut sit

$$R = (r - x)^2$$

ubi r significat constantem numerum realem. Exinde erit $\sqrt{R} = r - x$, et expressio integranda $\int N \sqrt{R} \, dx$ accipiet hanc formam: $\int N (r - x) \, dx$. At functio $N (r - x)$ nihil aliud est nisi functio rationalis fracta formae M in parte praecedenti iam consideratae.

2. In conditione altera expleta hac: $b^2 - 4 \, ac > o$ functio R habet reales factores, ita ut sit $R = (x - r)(r' - x)$, ubi r et r′ significant reales radices aequationis $R = o$. Ponatur in hoc casu $\sqrt{R}$ i. e.

$$\sqrt{(x - r)(r' - x)} = (x - r) z$$

(ubi z significat novum variabilem substitutum realem) atque locum habebunt, ut notum est, (cf. Lacroix l. l. p. 278) hae relationes:

$$x = \frac{r z^2 + r'}{z^2 + 1}, \quad dx = \frac{2 (r - r') z \, dz}{(z^2 + 1)^2},$$

$$\sqrt{R} = \frac{(r' - r)\, z}{z^2 + 1}$$

Quibus expressionibus differentiale irrationale $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ mutatur in rationale et reale hoc: $-\frac{2\, dz}{1 + z^2}$. Per eandem autem substitutionem, qua ista mutatio est effecta, dico substitutionem $x = \frac{r z^2 + r'}{z^2 + 1}$ genus functionis NR, quae in universum est rationalis fracta non mutatur. Quamobrem omne differentiale considerandum $\frac{NR}{\sqrt{R}}\, dx$ vel $N \sqrt{R}\, dx$ in supra posita conditione per indicatam substitutionem novi variabilis z reductum est in formam supra iam explicatam M dz, ubi M est functio rationalis fracta.

3. In postrema conditione expleta hac: $b^2 - 4\, ac < o$ functio R factores reales non habet et utetur aut forma $+ a + bx + cx^2$
aut forma $- a + bx - cx^2$
ubi a et c sunt numeri positivi, b autem sive negativus sive positivus.

α. Si prior forma locum habet, ponatur $\sqrt{R}$, i. e.

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = z - x \sqrt{c}$$

et eruantur exinde notissima via (cf. Lacroix l. l. p. 276) hae relationes:

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z \sqrt{c}}, \quad dx = \frac{2\, (a \sqrt{c} + bz + z^2 \sqrt{c})\, dz}{(b + 2z \sqrt{c})^2},$$

$$\sqrt{R} = \frac{a \sqrt{c} + bz + z^2 \sqrt{c}}{b + 2z \sqrt{c}}$$

Quibus expressionibus differentiale irratioale $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ mutatur in rationale et reale hoc: $\frac{2\, dz}{b + 2z \sqrt{b}}$. Omne autem differentiale considerandum $\frac{NR}{\sqrt{R}}\, dx$ vel $N \sqrt{R}\, dx$ transibit per indicatam substitutionem $x = \frac{z^2 - a}{b + 2z \sqrt{c}}$ sicuti antea in differentiale huius formae: M dz, ubi M significat functionem rationalem fractam variabilis z.

β. Si altera forma $\sqrt{R} = \sqrt{- a + bx - cx^2}$ locum habet, haec fiat mutatio:

$$\sqrt{R} = \sqrt{-1}\, \sqrt{a - bx + cx^2}$$

et tractetur deinde differentialis $\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{dx}{\sqrt{-1} \sqrt{a - bx + cx^2}}$ realis pars:

$\frac{dx}{\sqrt{a - bx + cx^2}}$ secundum data modo praecepta (3, *α*). Prodibit hac ratione:

$$\frac{dx}{\sqrt{a - bx + cx^2}} = \frac{2\,dz}{-b + 2z\sqrt{c}}$$

totumque differentiale considerandum $N\sqrt{R}\,dx$, ut facile intelligitur, eadem atque antea ratione reductum est ad formam $\sqrt{-1}\,M\,dz$ ubi M item est functio rationalis fracta variabilis z.

V.

Quae reductiones integralis

$$\int N\sqrt{R}\,dx \quad \text{ad} \quad \text{hoc:} \int M\,dz,$$

ubi M significat functionem rationalem fractam, effectae sunt substitutionibus functionum mere algebraicarum et propterea fieri non potuit ut in eiusmodi transitu ab una integralis forma ad alteram ulla functio transcendens removeretur. Integrale igitur hoc: $\int N\sqrt{R}\,dx$ non potest alias functiones transcendentes desiderare quam quae desiderentur ab altero $\int M\,dz$. Quum autem intellexerimus, integrationem $\int M\,dz$ reduci (cf. III) ad integrationes has solas:

$$\int \frac{dz}{z}\ ,\quad \int \frac{dz}{1 + z^2}$$

algebraice, ut patet, non conficiendas, duae functiones transcendentes hac ratione postulatae necessariae erunt sufficientque ad integrationem $\int N\sqrt{R}\,dx$ efficiendam. Denique intelligitur (cf. II) easdem functiones transcendentes efficere etiam integrationem $\int f(x, \sqrt{R})\,dx$.

Functio transcendens altera una cum eius functione inversa comprehendetur nomine functionum logarithmicarum, altera autem una cum eius functione inversa nomine functionum circularium.

A. Functiones logarithmicae.

§ 1.

Accipiatur prius differentiale $\frac{dx}{x}$, quod in introductionis parte V. necessario considerandum exstitit, idque differentiale intelligatur descendens ab incognita functione, quae logarithmus ipsius variabilis x vocetur et

„log x"

significetur. Est igitur definitionis instar:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x \tag{1}$$

eodemque iure pro variabili y:

$$\int \frac{dy}{y} = \log y.$$

Componatur deinde aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = o$$

cuius integrale algebraicum patet esse:

(2) $$xy = c$$

c significante constantem.

Integrale autem transcendens est definitionis lege:

(3) $$\log x + \log y = C$$

C significante item constantem.

Ut denique ambae aequationes (2) et (3) idonea ratione iungantur, fiat haec evolutio:

$$\frac{1}{1 + (x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \ldots$$

multiplicetur utrinque per dx et integretur

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots\ldots$$

ubi integrationis constans accepit valorem -1. Qua ex evolutione cernitur integrale $\int \frac{dx}{x}$ evanescere pro $x = 1$, ita ut habeatur in auxilium vocata integralis definitione (1):

(4) $$\log 1 = o$$

Deinde quum pro $x = 1$ aequatio algebraica integrans (2) exhibeat $y = c$ et aequatio transcendens (3): $\log y = C$ erit $C = \log c$ et

(5) $$\log x + \log y = \log c$$

unde restituto ex aequatione (2) ipsius c valore prodit:

(6) $$\log x + \log y = \log xy\,.$$

Conditio, sub qua locum habet aequatio (5), permittit additionem constantis cuiusdam in evolutione integralis $\int \frac{dx}{x}$, supra effecta. Nam quum ista evolutio nil aliud praestare debeat nisi ut evanescat pro $x = 1$, idemque praestetur ab evolutione hac:

(7) $$\log x = \int \frac{dx}{x} = M\left(\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots\right)$$

ubi M significat constantem arbitrarium, liberi sumus in tali constantis additione.

Deinde determinetur constans M ita ut integrale $\int \frac{dx}{x}$ sive $\log x$ pro aliquo numero b aequale fiat unitati. Quibus positis debebit esse

$$1 = \log b = M\left(\frac{b-1}{1} - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - \ldots\ldots\right)$$

indeque

(8) $$M = \frac{1}{\frac{b-1}{1} - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - \ldots\ldots}$$

Quo constantis M valore in evolutione priori (7) substituto prodibit:

$$(9) \qquad \log x = \frac{\dfrac{x-1}{1} - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \ldots\ldots\ldots}{\dfrac{b-1}{1} - \dfrac{(b-1)^2}{2} + \dfrac{(b-1)^3}{3} - \ldots\ldots\ldots}$$

Indicatam hanc dependentiam logarithmi ab numero b, quam aequatio praecedens aperte docet volumus adscripta littera b ita notare ut sit

$$(10) \qquad \overset{b}{\log}\, x = \frac{\dfrac{x-1}{1} - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \ldots\ldots\ldots}{\dfrac{b-1}{1} - \dfrac{(b-1)^2}{2} + \dfrac{(b-1)^3}{3} - \ldots\ldots\ldots}$$

hunc autem numerum b basin, M (cf. (8)) modulum logarithmi vocabimus.

Exinde lex logarithmi aequationibus (6) et (4) modo expressa accuratius ita depingi debet:

$$(11) \qquad \overset{b}{\log}\, x + \overset{b}{\log}\, y = \overset{b}{\log}\, xy \qquad (12) \quad \overset{b}{\log}\, 1 = 0$$

eritque praeterea per aequationem (10):

$$(13) \qquad \overset{b}{\log}\, b = 1.$$

Annotatio. Logarithmus ipsius basis unitati (13); logarithmus unitatis nihilo aequalis est (12).

§ 2.

Ponendo yz loco y in aequatione (11) prodit:

$$\overset{b}{\log}\, x + \overset{b}{\log}\, y + \overset{b}{\log}\, z = \overset{b}{\log}\, (xyz)$$

et in universum:

$$(1) \qquad \overset{b}{\log}\, x + \overset{b}{\log}\, y + \overset{b}{\log}\, z + \overset{b}{\log}\, t + \ldots = \overset{b}{\log}\, (xyzt..)$$

unde proficiscitur

Theorema I. Datis numeris compluribus eorum logarithmorum summa aequari poterit uni logarithmo, qui est logarithmus producti illorum numerorum, siquidem dicti logarithmi ratione habita unius eiusdemque basis sumuntur.

Ponendo $x = y = z = t =$ etc. ex aequatione praecedenti (1) prodit haec:

$$(2) \qquad n\, \overset{b}{\log}\, x = \overset{b}{\log}\, x^n$$

ubi n per naturam considerationis est numerus positivus integer. Sit autem

$$x^n = y \quad \text{unde} \quad x = y^{\frac{1}{n}}$$

atque habebitur pro aequatione (2) huius paragraphi haec:

$$\overset{b}{\log} \left(y^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n}\, \overset{b}{\log}\, y$$

ex qua ponendo y^m loco y prodit haec:

$$\overset{b}{\log}\left(y^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}\overset{b}{\log} y.$$

Deinde quum sit ex aequatione (11) paragraphi praecedentis pro $y = \frac{1}{x}$

$$\overset{b}{\log} x + \overset{b}{\log}\frac{1}{x} = \overset{b}{\log} 1 \text{ i. e } = o$$

(cf. aequ. 12. § praec.) erit:

(3) $$-\overset{b}{\log} x = \overset{b}{\log}\left(x^{-1}\right)$$

unde ponendo $x^{\frac{m}{n}}$ loco x, adhibita aequatione (2) prodibit haec formula:

$$-\frac{m}{n}\overset{b}{\log} x = \overset{b}{\log}\left(x^{-\frac{m}{n}}\right)$$

Itaque valent haec:

Theorema II. Logarithmus cuiusvis potestatis, integrae sive fractae, positivae sive negativae, aequalis est logarithmo radicis multiplicato per exponentem, siquidem dicti logarithmi ratione habita unius eiusdemque basis sumuntur.

Denique quum sit per aequationem modo exhibitam (3):

$$-\overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log}\frac{1}{y}$$

erit utrinque addendo logarithmo numeri x:

$$\overset{b}{\log} x - \overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log}\frac{1}{y} + \overset{b}{\log} x$$

cuius aequationis dextrum membrum per theorema I ita mutatur, ut sit:

(4) $$\overset{b}{\log} x - \overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log}\left(\frac{x}{y}\right) \text{ i. e.}$$

Theorema III. Logarithmus fractionis aequat logarithmum numeratoris minutum logarithmo denominatoris, siquidem dicti logarithmi ratione habita unius eiusdemque basis sumuntur.

Annotatio. Logarithmus signum mutat, si variabilis reciprocum valorem induit (3).

§ 3.

Aequatio (7) § 1. haec:

$$\log x = M\left(\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots\ldots\right)$$

adhibita aequatione (8) eiusdem § docet, sicuti iam commemoravimus, logarithmum pendere non solum ex variabili quantitate x, sed etiam e numero constanti b, de cuius magnitudine hucusque nihil decretum est. Sed apparet, logarithmum quam simplicissimam habiturum esse expressionem, ubi talis valor numeri b cognitus erit, qualis logarithmi modulum M unitati aequalis reddat.

Exstat autem realis quidam numerus „e" positivus, diversus ab unitate, minor quam 3, pro quo modulus logarithmi unitati aequalis fit.

Nam aequatio praeposita haec:

$$\overset{b}{\log}\, x = M\left(\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots\right)$$

mutando x in x + 1 mutatur in hanc:

$$\log(1+x) = M\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right)$$

et haec ipsa ponendo — x loco x transit in hanc:

$$\log(1-x) = -M\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

Subtrahendo aequationem hanc posteriorem ab antecedenti et respiciendo ad legem logarithmi (Theor. III. § 2) erit

(1) $$\overset{b}{\log}\,\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right)$$

unde haec nascitur moduli M expressio:

$$M = \frac{\overset{b}{\log}\,\dfrac{1+x}{1-x}}{2\left(\dfrac{x}{1} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right)}$$

Ponatur denique $\frac{1+x}{1-x} = b$, unde $x = \frac{b-1}{b+1}$ eritque

(2) $$M = \frac{1}{2\left(\dfrac{b-1}{b+1} - \dfrac{(b-1)^3}{3(b+1)^3} + \dfrac{(b-1)^5}{5(b+1)^5} - \ldots\ldots\right)}$$

Qua transformatione moduli effecta, quaestio pro quali valore numeri b fieri possit M = 1 reducitur ad hanc: pro quali valore numeri b series infinita

(3) $$\frac{b-1}{b+1} + \frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3} + \frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5} + \ldots\ldots\ldots$$

fieri possit $= \frac{1}{2}$. Quae series, ut facile intelligitur, quum fiat = o pro b = 1 et maior sit quam $\frac{1}{2}$ pro b = 3, et inde ab b = 1 usque ad b = 3 convergat, luce clarius est intra b = 1 et b = 3 exstare realem quantitatem positivam „e", qua series ista (3) fiat $= \frac{1}{2}$.

Erit igitur

$$\frac{1}{2\left(\dfrac{e-1}{e+1} + \dfrac{(e-1)^3}{3(e+1)^3} + \dfrac{(e-1)^5}{5(e+1)^5} + \ldots\right)} = 1 = M.$$

Conclusio. Ponere basin = e idem est ac ponere modulum = 1. Alterum alterius necessaria consequentia.

§ 4.

Numerus realis e, qui secundum paragraphum praecedentem satisfacit realiter aequationi (2) § praec. et formaliter aequationi

$$M = \frac{1}{\frac{e-1}{1} - \frac{(e-1)^2}{2} + \frac{(e-1)^3}{3} - \ldots\ldots} = 1 \text{ (cf. 8 § 1)}$$

transmutat aequ. (7) § 1 revera in hanc:

(1) $$\overset{e}{\log}\, x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots\ldots$$

et aequ. (1) § praec. in hanc:

(2) $$\frac{1}{2}\, \overset{e}{\log}\, \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots$$

Logarithmi pro hac basi „e" sumpti vocentur naturales, ceteri artificiales.

Quibus positis aequatio (10) § 1, iuncta cum aequatione (1) huj. § repraesentatur ita:

(3) $$\overset{b}{\log}\, x = \frac{\overset{e}{\log}\, x}{\overset{e}{\log}\, b}$$

et aequatio (7) § 1, iuncta cum eadem aequatione (1):

(4) $$\overset{b}{\log}\, x = M\, \overset{e}{\log}\, x$$

Theorema. Logarithmus artificialis numeri alicuius aequalis est logarithmo naturali huius numeri, diviso per logarithmum naturalem basis alterius (3); vel multiplicato per modulum logarithmi artificialis (4).

Conclusio. Reciprocus moduli valor est logarithmus naturalis ipsius basis logarithmicae (cf. aequ. in fronte huj. §).

§ 5.

Si ponitur

$$\overset{b}{\log}\, x = u$$

et consideratur x explicite pendens ex numero u, talis inversio mera collocatione litterarum b et u indicetur ita:

$$x = b^{u}$$

littera x, ratione habita variabilis u, quantitas exponentialis vocetur, numerus b autem etiam hic basis nomen conservet. Sequitur deinde ut sit:

$$y = b^{v} \quad \text{si est} \quad \overset{b}{\log}\, y = v\,.$$

Quum autem per aequationem (11) § 1. sit invertendo:

$$xy = b^{u+v}$$

sequitur denique restitutis pro x et y valoribus:

(1) $$b^{u} \, b^{v} = b^{u+v};$$

simili ratione ex aequatione (4) § 2:

(2) $$\frac{b^{u}}{b^{v}} = b^{u-v}.$$

Denique invertenda aequatione (2) § 2 erit:

$$x^{n} = b^{n \overset{b}{\log} x}$$

unde restitutis pro x et $\overset{b}{\log} x$ valoribus habebitur:

(3) $$\left(b^{u}\right)^{n} = b^{nu}.$$

Complectitur hasce tres aequationes (1) (2) (3) hoc

Theorema. Quantitas exponentialis in multiplicando, dividendo, ad potestates elevando potentiarum more se gerit.

§ 6.

Inversione facta in aequatione (4) § 4 prodibit

$$x = b^{M \overset{e}{\log} x}$$

Quae aequatio ponendo

$$\overset{e}{\log} x = u'$$

indeque inversionem faciendo

$$x = e^{u'}$$

transit in hanc:

(1) $$e^{u'} = b^{Mu'}$$

cohaerentiam moduli cum quantitate exponentiali docentem.

§ 7.

Ponatur $$\int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = 2K$$

eritque, ubi est $i = \sqrt{-1}$, ex natura integralis, eiusque per aequationem (7) § 1 data evolutione

$$K = Mi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\right).$$

Patet deinde esse K numerum imaginarium, si modulus M est realis, ita ut posito $M = 1$ simpliciter habeatur

$$K = i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\right)$$

Repraesentetur valor seriei praecedentis signo $\frac{\pi}{4}$ eritque

$$K = \frac{\pi}{4}\, i \quad \text{pro } M = 1$$

$$\text{et } K = \frac{M\pi}{4}\, i \text{ pro alio modulo } M.$$

Quibus positis aequatio princeps huius paragraphi mutatur

in hanc $$\int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\, i \quad \text{pro } M = 1$$

et in hanc $$\int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = \frac{M\pi}{2}\, i \quad \text{pro alio modulo M.}$$

Sed quum ex definitione functionis logarithmi (aequatio (1) § 1) et ex natura integralis singularis ambae aequationes praecedentes depingantur sic:

$$\overset{e}{\log}\,(1 + i) - \overset{e}{\log}\,(1 - i) = \frac{\pi}{2}\, i$$

$$\overset{b}{\log}\,(1 + i) - \overset{b}{\log}\,(1 - i) = \frac{M\,\pi}{2}\, i \quad \text{(cf. § 1)}$$

quae aequationes ipsae ex theoremate III § 2 scribi debent ita:

$$\overset{e}{\log}\,\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{\pi}{2}\, i$$

$$\text{et } \overset{b}{\log}\,\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{M\pi}{2}\, i,$$

erit denique inversione facta

$$\frac{1 + i}{1 - i} = e^{\frac{\pi}{2} i}$$

$$\text{et } \frac{1 + i}{1 - i} = b^{\frac{M\pi}{2} i}$$

Expeditius autem scribuntur aequationes praecedentes sic:

(1) $$i = e^{\frac{\pi}{2} i}$$

(2) $$\text{et} \quad i = b^{\frac{M\pi}{2} i}$$

unde erit comparando

(3) $$e^{\frac{\pi}{2} i} = b^{\frac{M\pi}{2} i}$$

id quod in universum coincidit cum aequatione (1) § 6.

Deinde resumatur aequatio praecedens (2) haec:

$$i = b^{\frac{M\pi}{2} i}$$

et erit elevando utrinque ad alteram potestatem

$$-1 = b^{M\pi i}$$

nec fugiet observationem, infra alteram potestatem nullam exstare positivam, quae istam quantitatem exponentialem $b^{\frac{M\pi}{2} i}$ positivae vel negativae unitati aequalem reddat. Iterum elevando formulam posteriorem ad alteram potestatem prodibit

$$+1 = b^{2M\pi i}$$

et quum infra alteram potestatem etiam hic nulla exstet, quae illum transitum ab -1 ad $+1$ efficiat, numerus $2M\pi i$ erit minimus, qui efficiat ut sit

(4) $$+1 = b^{2M\pi i};$$

altera parte numerus $M\pi i$ erit minimus, qui faciat

(5) $$-1 = b^{M\pi i}.$$

Quibus conclusionibus iterum iterumque ad potestates quascunque positivas elevando satis continuatis, nec non in negativas potestates extensis, pervenitur denique ad hoc

Theorema I. Omnes valores exponentis, quibus quantitas exponentialis positivae vel negativae unitati aequalis fiat, comprehenduntur in his duabus formis:

(6) $$+1 = b^{2\varkappa M\pi i}$$

(7) $$-1 = b^{(2\varkappa + 1) M\pi i}$$

ubi $\varkappa$ significat numerum integrum.

Conclusio I. Ratione habita conclusionis § 3 omnes solutiones aequationis

(8), (9) $$\left.\begin{array}{l} e^{vi} = +1 \\ e^{vi} = -1 \end{array}\right\} \text{erunt} \left\{\begin{array}{l} v = 2\varkappa\pi \\ v = (2\varkappa + 1)\pi. \end{array}\right.$$

Interea etiam animadvertamus solutiones aequationis $e^{vi} = \pm i$.

Aequatio (2) supra collocata elevando utrinque ad quintam, nonam, tertiam decimam etc. potestatem dat $+i = b^{(4\varkappa + 1)\frac{M\pi}{2} i}$ et elevando eandem aequationem (2) utrinque ad tertiam, septimam, undecimam etc. potestatem dat $-\,i = b^{(4\varkappa + 3)\frac{M\pi}{2} i}$, ubi facile est intellectu, quartam quamque potestatem demum efficere, ut quantitas exponentialis semel aequalis facta $+\,i$ vel $-\,i$, denuo aequalis fiat $+\,i$ vel $-\,i$. Itaque stat.

Theorema II. Omnes valores exponentis, quibus quantitas exponentialis positivae vel negativae unitati $\sqrt{-1}$ aequalis fiat, comprehenduntur in his duabus formis:

$$+\,i = b^{(4\varkappa + 1)\frac{M\pi}{2} i} \tag{10}$$

$$-\,i = b^{(4\varkappa + 3)\frac{M\pi}{2} i} \tag{11}$$

ubi $\varkappa$, ut antea, significat numerum integrum.

Conclusio II. Ratione habita conclusionis § 3 omnes solutiones aequationis

$$\left.\begin{aligned} e^{vi} &= +\,i \quad (12) \\ e^{vi} &= -\,i \quad (13) \end{aligned}\right\} \text{ erunt } \left\{\begin{aligned} v &= (4\varkappa + 1)\frac{\pi}{2} \\ v &= (4\varkappa + 3)\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right.$$

§ 8.

Invertendis aequationibus (6) et (7) paragraphi praecedentis erit:

$$\overset{b}{\log}\,(+\,1) = 2\varkappa M\pi i \tag{1}$$

$$\overset{b}{\log}\,(-\,1) = (2\varkappa + 1)\,M\pi i. \tag{2}$$

Hinc natura logarithmorum accuratius cognoscetur. Transibit enim per aequationem priorem (1) aequatio (11) § 1 pro $y = 1$ in hanc:

$$\overset{b}{\log}\,x = \overset{b}{\log}\,x + 2\varkappa M\pi i. \tag{3}$$

Ponendo autem $y = -\,1$ et respiciendo ad aequationem posteriorem (2):

$$\overset{b}{\log}\,(-\,x) = \overset{b}{\log}\,x + (2\varkappa + 1)\,M\pi i. \tag{4}$$

Quae aequationes (3) et (4) haec dicunt:

Theorema. Logarithmus numeri alicuius habet infinite multos valores, quorum unus est realis, si logarithmus positivi numeri consideratur, nullus autem realis in considerando logarithmo negativi numeri: logarithmorum modulo ubique sumpto reali.

Formulae praecedentes (3) et (4) ope conclusionis § 3 erunt:

$$\overset{e}{\log}\,x = \overset{e}{\log}\,x + 2\varkappa\pi i \tag{5}$$

$$\overset{e}{\log}\,(-\,x) = \overset{e}{\log}\,x + (2\varkappa + 1)\,\pi i \tag{6}$$

§ 9.

Etiam quantitas exponentialis ex eadem paragrapho 7 accuratius intelligitur. Nam quum sit ex aequatione (1) § 5:

$$b^u \, b^v = b^{u+v}$$

ponendo $(2\varkappa + 1) M\pi i$ loco v habebitur, in auxilium vocata aequatione (7) § 7

(1) $$- b^u = b^{u + (2\varkappa + 1) M\pi i};$$

altera parte ponendo $2\varkappa M\pi i$ loco v, in auxilium vocata aequatione (6) § 7 erit

(2) $$b^u = b^{u + 2\varkappa M\pi i}$$

id quod eodem redit ac si variabilis u in aequatione priori (1) denuo auctus esset numero $M\pi i$.

Jungendis duabus aequationibus posterioribus erit

(3) $$- b^{u + 2\varkappa M\pi i} = + b^{u + (2\varkappa + 1) M\pi i}$$

et pro $\varkappa = o$:

(4) $$- b^u = b^{u + M\pi i}$$

transibunt autem aequationes praecedentes lege conclusionis § 3 in hasce:

(5) $$- e^u = e^{u + (2\varkappa + 1)\pi i}$$

(6) $$e^u = e^{u + 2\varkappa\pi i}$$

(7) $$- e^{u + 2\varkappa\pi i} = + e^{u + (2\varkappa + 1)\pi i}$$

(8) $$- e^u = + e^{u + \pi i}$$

Complectitur omnes aequationes praecedentes hoc

Theorema. Quantitas exponentialis est functio periodica (2) (6). Periodus est numerus imaginarius $2M\pi i$ pro reali basi b, et $2\pi i$ pro basi e.

Annotatio. Si variabilis dimidia periodi parte augetur, quantitas exponentialis signum mutat (4) (8).

§ 10.

Ut quantitas exponentialis, sicuti logarithmus, etiam per seriem infinitam cognoscatur, volumus ponere:

$$b^u = C + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 + \ldots\ldots$$

ubi litterae C non pendeant ex variabili u. Deinde quum sit per theorema § 5 vel eius aequationem (3):

$$(b^u)^2 = b^{2u}$$

erit

$$(C + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 + \ldots\ldots)^2 = C + 2\,C_1 u + 2^2 C_2 u^2 + 2^3 C_3 u^3 + \ldots\ldots$$

unde perspecta lege coefficientium C, proficiscitur eorum determinatio talis:

$$C = C$$

$$C_2 = \frac{C_1^{\,2}}{1 \,.\, 2}$$

$$C_3 = \frac{C_1^{\,3}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$C_4 = \frac{C_1^{\,4}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \quad \text{etc.}$$

C determinatur casu u = o, unde fit C = 1. C_1 determinationem ad tempus fugit, et habebitur interea:

$$b^u = 1 + C_1 \frac{u}{1} + C_1{}^2 \frac{u^2}{1.2} + C_1{}^3 \frac{u^3}{1.2.3} + C_1{}^4 \frac{u^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Sed manifestum est constantem C_1 commune aliquid habiturum esse cum basi b, quum haec ipsa nondum in seriem dominetur. Itaque hanc communionem ut comperiamus, demamus in aequatione praecedenti utrinque unitatem et dividamus semel per variabilem u, unde fiet:

$$\frac{b^u - 1}{u} = C_1 + C_1{}^2 \frac{u}{1.2} + C_1{}^3 \frac{u^2}{1.2.3} + C_1{}^4 \frac{u^3}{1.2.3.4} + \dots\dots$$

et per casum u = o haec determinatio constantis C_1:

$$\lim. \frac{b^u - 1}{u} = C_1$$

ratione habita quantitatis u evanescentis. Evolvendo autem quantitatem

$$\Big(1 + (b-1)\Big)^u = b^u$$

secundum theorema binomiale, subtrahendo utrinque unitatem et dividendo per u erit in evanescente quantitate u:

$$\lim. \frac{b^u - 1}{u} = C_1 = \frac{b-1}{1} - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - \dots\dots$$

Statim cognoscitur, praesertim in auxilium vocata aequatione (1) § 4 esse:

$$\lim. \frac{b^u - 1}{u} = C_1 = \overset{e}{\log}.\ b\,.$$

Transibit igitur quantitatis exponentialis supra posita evolutio in hanc:

(1) $$b^u = 1 + \overset{e}{\log}.\ b\ \frac{u}{1} + \Big(\overset{e}{\log}.\ b\Big)^2 \frac{u^2}{1.2} + \Big(\overset{e}{\log}.\ b\Big)^3 \frac{u^3}{1.2.3} + \dots\dots$$

Deinde si decernitur ut sit b = e, adamabimus hanc evolutionem:

(2) $$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \dots\dots$$

Denique numerus e ipse (cf. § 3) ex data modo evolutione functionis e^u (2) pro u = 1 accuratius ita cognoscitur:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots\dots = 2,\ 71\,..$$

B. Functiones circulares.

§ 11.

Alterum integrale

$$\int \frac{dx}{1 + x^2},$$

cuius consideratio in introductionis parte III necessaria exstitit, nunc resumatur, et functio hoc integrali indicata vocetur **Arcustangens**, ita ut breviori ratione scribendi sit:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tang } x.$$

Sequitur inde ut sit

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \text{Arc tang } y.$$

Componatur deinde aequatio differentialis

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = o$$

eaque integretur primum per functionem transcendentem:

(1) $$\text{Arc tang } x + \text{Arc tang } y = C$$

C significante constantem. Deinde integretur algebraice, et habebitur:

(2) $$\frac{x+y}{1-xy} = c$$

c significante etiam constantem.

Evolutio integralis $\int \frac{dx}{1+x^2}$ haec:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots$$

ubi integrationis constans accepit valorem o, aeque ac supra in logarithmi evolutione, demonstrat: integrale $\int \frac{dx}{1+x^2}$ evanescere pro $x = o$, ita ut habeatur in auxilium vocata integralis definitione:

(3) $$\text{Arc tang } (o) = o:$$

Deinde quum pro eodem ipsius x valore aequatio algebraica integrans (2) exhibeat $y = c$, erit in aequatione transcendenti integranti (1):

$$C = \text{Arc tang } c + \text{Arc tang } (o)$$

vel propter aequationem (3):

$$C = \text{Arc tang } c,$$

unde per comparationem patet esse:

(4) $$\text{Arc tang } x + \text{Arctang } y = \text{Arctang } c$$

et restituendo ipsius c valore ex aequatione (2):

(5) $$\text{Arc tang } x + \text{Arc tang } y = \text{Arc tang } \frac{x+y}{1-xy}.$$

Deinde manifestum est, si in acquirendae huius formulae methodo i. e. in componenda supra aequatione differentiali, pro differentialium summa eorundem differentiam posuissemus, incidissemus denique in hanc aequationem:

(6) $$\text{Arc tang } x - \text{Arc tang } y = \text{Acc tang } \frac{x-y}{1+xy}.$$

Quae facile perspiciuntur. Itaque statim complectendo sensum aequationum praecedentium scribamus:

Theorema. Duorum Arcustangentium summa sive differentia aequari poterit uni Arcustangenti (5), (6).

Annotatio. Arcustangens signum mutat simul cum variabili; id quod ex praecedenti aequatione (6) ponendo $x = \bar{o}$ et respiciendo ad aequationem (3) sequitur; erit enim exinde

(7) $$-\operatorname{Arctang} y = \operatorname{Arctang}(-y).$$

§ 12.

Ponatur in aequatione (5) § praec. $x = y$ et erit:

(1) $$2 \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{2x}{1 - x^2}$$

qua formula denuo componenda cum aequatione illa modo adhibita erit:

(2) $$3 \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

et ita progrediendo prodeunt hae formulae:

(3) $$4 \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{4x - 4x^3}{1 - 6x^2 + x^4}$$

(4) $$5 \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$$

$$6 \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{6x - 20x^3 + 6x^5}{1 - 15x^2 + 15x^4 - x^6}$$

et in universum si n est numerus par:

(5) $$n \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{\overset{1}{B}_n x - \overset{3}{B}_n x^3 + \overset{5}{B}_n x^5 - \dots\dots\dots \mp \overset{n-1}{B}_n x^{n-1}}{1 - \overset{2}{B}_n x^2 + \overset{4}{B}_n x^4 - \overset{6}{B}_n x^6 + \dots\dots \pm \overset{n}{B}_n x^n}$$

(6) $$(n+1) \operatorname{Arctang} x = \operatorname{Arctang} \frac{\overset{1}{B}_{n+1} x - \overset{3}{B}_{n+1} x^3 + \overset{5}{B}_{n+1} x^5 - \dots \pm \overset{n+1}{B}_{n+1} x^{n+1}}{1 - \overset{2}{B}_{n+1} x^2 + \overset{4}{B}_{n+1} x^4 - \overset{6}{B}_{n+1} x^6 + \dots \mp \overset{n}{B}_{n+1} x^n}$$

ubi $\overset{\varkappa}{B}_n$ significat coefficientem ordinis $\varkappa$ in evolutione n^{tae} potestatis binomii. Formulae modo institutae, valentes pro $n = 1, 2, 3$ etc., per conclusionem usitatissimam ab n ad $n + 2$ pro omnibus numeris integris positivis facile probantur.

Longum est dictas formulas verbis penitus exprimere; interea haec dicamus:

Theorema. Unumquodque multiplex integrum positivum functionis Arcustangentis uno Arcustangenti exprimitur, cuius variabilis est functio rationalis fracta variabilis alterius.

§ 13.

Sit

$$\text{Arctang } x = u$$

et significetur x explicite pendens ex u ita:

$$x = \text{tang } u,$$

ubi signum „tang" functionem Arcustangenti inversam indicat et tangens vocabitur. Variabilem tangentis lubet interdum arcum appellare.

Deinde si ponitur

$$\text{Arctang } y = v$$

erit

$$y = \text{tang } v,$$

atque aequationes (5) et (6) § 11, transibunt inversione facta in hasce:

(1) $$\text{tang } (u + v) = \frac{\text{tang } u + \text{tang } v}{1 - \text{tang } u.\ \text{tang } v}$$

(2) $$\text{tang } (u - v) = \frac{\text{tang } u - \text{tang } v}{1 + \text{tang } u.\ \text{tang } v}$$

Ceterum dat aequatio (3) § 11:

$$o = \text{tang } o$$

unde mutatur formula antecedens (2) pro u = o in hanc:

(3) $$\text{tang } (- v) = - \text{tang } v$$

Annotatio. Functio tangentis simul cum variabili signum mutat.

Quibus formulis accedunt ex § praec. aequationes (1) (2) (3) (4) etc. simili ratione inversae:

(4) $$\text{tang } 2u = \frac{2 \text{ tang } u}{1 - \text{tang } u^2}$$

$$\text{tang } 3u = \frac{3 \text{ tang } u - \text{tang } u^3}{1 - 3 \text{ tang } u^2}$$

etc. etc.

et si n est numerus par:

(5) $$\text{tang } nu = \frac{\overset{1}{B}_n \text{ tang } u - \overset{3}{B}_n \text{ tang } u^3 + \overset{5}{B}_n \text{ tang } u^5 - \dots\dots\dots \mp \overset{n-1}{B}_n \text{ tang } u^{n-1}}{1 - \overset{2}{B}_n \text{ tang } u^2 + \overset{4}{B}_n \text{ tang } u^4 - \dots\dots\dots\dots \pm \overset{n}{B}_n \text{ tang } u^n}$$

(6) $$\text{tang } (n + 1)\, u = \frac{\overset{1}{B}_{n+1} \text{ tang } u - \overset{3}{B}_{n+1} \text{ tang } u^3 + \overset{5}{B}_{n+1} \text{ tang } u^5 - \dots \pm \overset{n+1}{B}_{n+1} \text{ tang } u^{n+1}}{1 - \overset{2}{B}_{n+1} \text{ tang } u^2 + \overset{4}{B}_{n+1} \text{ tang } u^4 - \overset{6}{B}_{n+1} \text{ tang } u^6 + \dots \mp \overset{n}{B}_{n+1} \text{ tang } u^n}$$

Talis est multiplicatio tangentis. Eadem simul demonstrat theorema antecedenti analogum, quod penitus verbis exprimere longum est.

§ 14.

Comparemus deinde functionis Arcustangentis evolutionem § 11 exhibitam:

$$\text{Arctang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots$$

cum evolutione logarithmica § 4 exhibita:

$$\frac{1}{2} \overset{e}{\log} \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots$$

et animadvertamus, posteriorem transire in priorem mutando x in xi et dividendo per i:

(1) $$\frac{1}{2i} \overset{e}{\log} \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

unde per comparationem postremae formulae cum priori procedit haec aequatio symbolica:

(2) $$\text{Arctang } x = \frac{1}{2i} \overset{e}{\log} \frac{1+xi}{1-xi}$$

Quae aequatio significat: Arcustangens realis variabilis per logarithmum imaginarii variabilis exprimitur. Iterum ponendo xi loco x in aequatione (2) probatur haec expressio:

(3) $$2i \text{ Arctang } xi = \overset{e}{\log} \frac{1-x}{1+x}$$

§ 15.

Ponatur

(1) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

ubi numerus π congruit cum illo, quem iam § 7 exhibuimus; sicuti integralis evolutio haec:

(2) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots \text{ (cf. § 11)},$$

comparata cum evolutione § 7 data, demonstrat.

Deinde quum sit

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctang } x$$

erit ex natura integralis singularis:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctang } 1 - \text{Arctang } o$$

et quum sit per aequationem (3) § 11 Arctang o = o accipietur pro aequatione praecedenti haec:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \text{Arctang } 1, \tag{3}$$

quae comparata cum aequatione (1) dat:

$$\text{Arctang } 1 = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

§ 16.

Est ex aequatione (2) § 14 pro $x = 1$

$$\text{Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \overset{e}{\log} \frac{1 + i}{1 - i}$$

vel expeditius:

$$\text{Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \overset{e}{\log}\, i. \tag{1}$$

Multiplicetur aequatio praecedens per omnes deinceps numeros integros et proprie animadvertatur priorum numerorum multiplicatio haec:

$$1 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \overset{e}{\log}\, i$$

$$2 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log (-1) \text{ cf. (2) § 2}$$

$$3 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log (-i)$$

$$4 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log 1$$

$$5 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log i$$

$$6 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log (-1)$$

$$7 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log (-i)$$

$$8 \text{ Arctang } 1 = \frac{1}{2i} \log 1.$$

unde non solum apparet esse:

$$\text{Arctang } 1 = 5 \text{ Arctang } 1$$

$$2 \text{ Arctang } 1 = 6 \text{ Arctang } 1$$

$$3 \text{ Arctang } 1 = 7 \text{ Arctang } 1$$

$$4 \text{ Arctang } 1 = 8 \text{ Arctang } 1$$

sed etiam (propter cognitam legem potestatum numeri i) pro quovis numero n integro:

$$n \text{ Arctang } 1 = (n + 4) \text{ Arctang } 1. \tag{2}$$

Quum autem per paragraphum 12, aequationes (1), (2), (3), sit:

$$2 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } \infty$$
$$3 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } (-1)$$
$$4 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } o$$

erit per comparationem harum trium formularum cum praecedentibus:

$$5 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } 1$$
$$6 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } \infty$$
$$7 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } (-1)$$
$$8 \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } o$$

et in universum:

n Arctang $1 =$ Arctang 1 si n habet formam $4\varkappa + 1$
n Arctang $1 =$ Arctang ∞ . . . . $4\varkappa + 2$
n Arctang $1 =$ Arctang (-1) . . . . $4\varkappa + 3$
n Arctang $1 =$ Arctang o . . . . $4\varkappa$.

Deinde quum infra quartum quemque numerum in multiplicatione illa supra effecta nullus exstet medius, integer vel fractus, qui transitum vel ab log 1 ad log 1 vel ab log $(+ i)$ ad log $(+ i)$, vel ad log (-1) ab log (-1), vel ab log $(-i)$ ad log $(-i)$ efficiat, nullus etiam exstare potest numerus medius integer vel fractus infra quartum quemque, qui efficiat transitum vel ab Arctang o ad Arctang o, vel ab Arctang 1 ad Arctang 1, vel ab Arctang ∞ ad Arctang ∞, vel ab Arctang (-1) ad Arctang (-1) i. e:

Omnes valores numeri n, quibus efficitur, ut fiat n Arctang $1 =$ Arctang 1 comprehensi sunt forma $4\varkappa + 1$, ita ut sit pro quovis numero $\varkappa$ integro:

$$(4\varkappa + 1) \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } 1$$
$$(4\varkappa + 2) \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } \infty$$
$$(4\varkappa + 3) \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } (-1)$$
$$4\varkappa \text{ Arctang } 1 = \text{Arctang } o$$

Denique quum sit: Arctang $1 = \frac{\pi}{4}$ (aequ. (4) § 15) transibunt aequationes praecedentes in has:

(3) $$(4\varkappa + 1) \frac{\pi}{4} = \text{Arctang } 1$$

(4) $$(2\varkappa + 1) \frac{\pi}{2} = \text{Arctang } \infty$$

(5) $$(4\varkappa + 3) \frac{\pi}{4} = \text{Arctang } (-1)$$

(6) $$\varkappa\pi = \text{Arctang } o,$$

quibus aequationibus inversis prodeunt hae:

$$1 = \text{tang } (4\varkappa + 1) \frac{\pi}{4}$$

$$\infty = \text{tang } (2\varkappa + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$-1 = \text{tang}\,(4\varkappa + 3)\,\frac{\pi}{4}$$

$$o = \text{tang}\,\varkappa\pi$$

et erunt eodem iure ut autea, omnes solutiones aequationis

(7) $\text{tang x} = 1$ hae : $x = (4\varkappa + 1)\,\frac{\pi}{4}$

(8) $\text{tang x} = \infty$ „ $x = (2\varkappa + 1)\,\frac{\pi}{2}$

(9) $\text{tang x} = -1$ „ $x = (4\varkappa + 3)\,\frac{\pi}{4}$

(10) $\text{tang x} = o$ „ $x = \varkappa\pi.$

Habebimus igitur haec theoremata:

Theorema I. Omnes valores arcus, quibus functio tangentis infinita redditur, sunt imparia multiplicia quaeque arcus $\frac{\pi}{2}$ (8).

Theorema II. Omnes valores arcus, quibus functio tangentis evanescit, sunt multiplicia quaeque arcus π (10).

Theorema III. Omnes valores arcus, quibus functio tangentis negativae vel positivae unitati aequalis fit, sunt imparia multiplicia quaeque arcus $\frac{\pi}{4}$ (7), (9).

§ 17.

Quum sit lege aequationis (5) § 11:

$$\text{Arctang x} + \text{Arctang y} = \text{Arctang}\,\frac{x + y}{1 - xy}$$

erit e paragrapho praecedenti (6) pro $y = o$:

(1) $\text{Arctang x} + \varkappa\pi = \text{Arctang x}.$

Inversa autem aequatione praecedenti erit:

(2) $\text{tang}\,(u + \varkappa\pi) = \text{tang u}$

ubi positum fuerat Arctang $x = u$ i. e. $x = \text{tang u}$.

Docent autem aequationes ambae praecedentes (1) (2), quum pro quovis numero $\varkappa$ integro valeant (cf. § 16), sequentia:

Theorema I. Functio Arcustangentis habet infinite multos valores reales, differentes inter se multiplici integro numeri π (1).

Theorema II. Functio tangentis est functio periodica. Periodus est numerus π (2).

§ 18.

Expressio functionis tang nu, quam in § 13 aequ. (5) posuimus, demonstrat esse pro pari numero n:

$$(1) \qquad \text{tang nu} = \frac{\text{C. tang u. f(tang u}^2)}{\varphi(\text{tang u}^2)},$$

ubi f et φ indicant functiones rationales integras, scilicet gradus $(n-2)\frac{ti}{}$ et $n\frac{ti}{}$, ratione habita variabilis tang u. C significat constantem.

Si cognoscuntur omnes valores arcus u vel functionis tang u, quibus fit

$$\text{tam f(tang u}^2) = 0$$
$$\text{quam } \varphi(\text{tang u}^2) = 0$$

sive quod idem est: si cognoscuntur omnes valores arcus nu, quibus fit

$$\text{tam tang nu} = 0$$
$$\text{quam tang nu} = \infty$$

facile habebimus evolutionem functionis tang nu per productum, ea tamen conditione, ut inter valores infinite multos illos, quibus tangentis functio tam evanescit quam fit infinita (§ 16), eligantur altera parte valores $n-2$, quorum bini signis inter se diversi sint, eademque ratione altera parte valores n; nullus tamen valor unius partis valori alterius sit aequalis. Hac enim conditione non posita f revera non poterat esse functio $(n-2)\frac{ti}{}$ gradus, neque φ gradus $n\frac{ti}{}$. Sunt autem omnes solutiones aequationis

$$\text{tang nu} = 0$$

ex § 16, II hae:

$$\text{nu} = \varkappa\pi$$
$$\text{u} = \frac{\varkappa\pi}{n},$$

ubi $\varkappa$ significat numerum quemlibet integrum. Dentur deinde numero $\varkappa$ omnes valores integri, inde ab $\varkappa = -\frac{n-2}{2}$ usque ad $\varkappa = +\frac{n-2}{2}$ excepto valore $\varkappa = 0$, et erunt

$$\begin{array}{ll}
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{\pi}{n} & , \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{\pi}{n} \\
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{2\pi}{n} & , \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{2\pi}{n} \\
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{3\pi}{n} & , \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{3\pi}{n} \\
\vdots & \quad\vdots \\
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{n} & , \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{n}
\end{array}$$

factores functionis tang nu, vel proprie functionis f(tang u²), ita ut sit, factoribus signo diversis inter se idonea ratione unitis:

$$\text{tang nu} = \frac{\text{C. tang u}\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{\pi^2}{n}\right)\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{2\pi^2}{n}\right)\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{3\pi^2}{n}\right)\cdots\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi^2}{n}\right)}{\varphi(\text{tang u}^2)}.$$

Omnes solutiones aequationis

$$\text{tang nu} = \infty$$

ex § 16, I sunt hae:

$$\text{nu} = \frac{\overset{,}{\varkappa}\pi}{2}$$

$$\text{u} = \frac{\overset{,}{\varkappa}\pi}{2\text{n}}$$

ubi $\overset{,}{\varkappa}$ significat numerum imparem quemlibet. Dentur deinde numero $\overset{,}{\varkappa}$ omnes valores impares, inde ab $\varkappa = -(\text{n}-1)$ usque ad $\overset{,}{\varkappa} = +(\text{n}-1)$ eruntque similiter, ut antea:

$$\begin{array}{ll}
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{\pi}{2\text{n}} & ,\ \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{\pi}{2\text{n}} \\
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{3\pi}{2\text{n}} & ,\ \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{3\pi}{2\text{n}} \\
\text{tang u} - \text{tang}\,\frac{5\pi}{2\text{n}} & ,\ \text{tang u} + \text{tang}\,\frac{5\pi}{2\text{n}} \\
\vdots & \quad\vdots \\
\text{tang u} - \text{tang}\,(\text{n}-1)\,\frac{\pi}{2\text{n}} & ,\ \text{tang u} + \text{tang}\,(\text{n}-1)\,\frac{\pi}{2\text{n}}
\end{array}$$

alii factores functionis tang nu, vel proprie factores functionis $\varphi(\text{tang u}^2)$, ita ut, factoribus ut antea unitis inter se, evolutio praecedens mutetur in hanc:

$$\text{tang nu} = \frac{\text{C. tang u}\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{\pi^2}{\text{n}}\right)\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{2\pi^2}{\text{n}}\right)\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{3\pi^2}{\text{n}}\right)\cdots\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{\text{n}-2}{2}\cdot\frac{\pi^2}{\text{n}}\right)}{\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{\pi^2}{2\text{n}}\right)\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{3\pi^2}{2\text{n}}\right)\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,\frac{5\pi^2}{2\text{n}}\right)\cdots\cdots\left(\text{tang u}^2 - \text{tang}\,(\text{n}-1)\frac{\pi^2}{2\text{n}}\right)}$$

Constans C determinatur casu $\text{u} = \pi$, postquam utrinque per tang u divisio est facta et postquam expressionis $\frac{\text{tang nu}}{\text{tang u}}$ (per indicatam divisionem orientis) verus valor est quaesitus, ope aequationis (5) § 13, exhibentis:

$$\frac{\text{tang n}\pi}{\text{tang }\pi} = \overset{1}{\text{B}}_{\text{n}} = \text{n}.$$

Habebitur denique constantis tota expressione hac:

$$\text{C} = \text{n}\,\frac{-\text{tang}\,\frac{\pi^2}{2\text{n}}\cdot -\text{tang}\,\frac{3\pi^2}{2\text{n}}\cdot -\text{tang}\,\frac{5\pi^2}{2\text{n}}\cdots\cdots\cdots -\text{tang}\,(\text{n}-1)\frac{\pi^2}{2\text{n}}}{-\text{tang}\,\frac{\pi^2}{\text{n}}\cdot -\text{tang}\,\frac{2\pi^2}{\text{n}}\cdot -\text{tang}\,\frac{3\pi^2}{\text{n}}\cdots\cdots\cdots -\text{tang}\,\frac{(\text{n}-2}{2}\,\frac{\pi^2}{\text{n}}}$$

idonea ratione iuncta cum cetera parte evolutionis tang nu praecedentis, talis expressio:

$$(2)\ \operatorname{tang} nu = n \frac{\operatorname{tang} u\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{\pi^2}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{2\pi^2}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{3\pi^2}{n}}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{n-2}{2} \cdot \dfrac{\pi^2}{2}}\right)}{\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{\pi^2}{2n}}\right)\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{3\pi^2}{2n}}\right)\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{5\pi^2}{2n}}\right) \cdots\cdots \left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} (n-1) \dfrac{\pi^2}{2n}}\right)}.$$

Restat ut confirmetur, positam supra conditionem in evolutione data praecedenti expletam esse, i. e. ut quivis numeratoris factor:

$$1 - \frac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{\varkappa\pi}{n}^2}$$

diversus sit ab factore denominatoris quocunque:

$$1 - \frac{\operatorname{tang} u^2}{\operatorname{tang} \dfrac{\varkappa'\pi}{2n}^2}$$

sive quod idem est, ut aequatio

$$\operatorname{tang} \frac{\varkappa\pi}{n} = \operatorname{tang} \frac{\varkappa'\pi}{2n}$$

locum non habeat, numeris $\varkappa$ et $\varkappa'$ supra indicatos valores servantibus.

Ut existentiam huius posterioris aequationis merito negemus, hoc meminerimus: in assumpta existentia illius aequationis debebat esse:

$$\frac{\varkappa\pi}{n} - \frac{\varkappa'\pi}{2n} = m\pi \text{ (cf. § 17, II.)}$$

sive quod idem est:

$$\left(\varkappa - \frac{\varkappa'}{2}\right)\frac{\pi}{n} = m\pi,$$

ubi m numerum integrum significabat. Sed ista aequatio revera non exstat. Nam quum in dicta numerorum $\varkappa$ et $\varkappa'$ conditione tam $\varkappa$ quam $\dfrac{\varkappa'}{2}$ sit $< \dfrac{n}{2}$, ne fieri quidem potest, ut differentia $\varkappa - \dfrac{\varkappa'}{2}$ quantitatem n assequatur, quo casu primum satisfieret aequationi illi postremae. Itaque omnino non satisfit illi aequationi et hanc ob rem fieri non potest, ut satisfiat aequationi:

$$\operatorname{tang} \frac{\varkappa\pi}{n} = \operatorname{tang} \frac{\varkappa'\pi}{2n}$$

i. e. fieri non potest, ut in evolutione functionis tang nu (2) factor aliquis numeratoris:

$$1 - \frac{\text{tang u}}{\text{tang} \frac{\varkappa\pi}{n}^2}$$

factori cuidam denominatoris:

$$1 - \frac{\text{tang u}}{\text{tang} \frac{\varkappa\pi'}{2n}^2}$$

aequalis sit. Est igitur evolutio illa tangentis per productum (2) ex omni parte confirmata.

§ 19.

In evolutione tangentis (2) § 18 ponatur

$$\text{nu} = \text{x}$$

$$\text{u} = \frac{\text{x}}{\text{n}}$$

et efficiatur, ut finitam quantitatem servante arcu x, numerus n in infinitum augeatur. Abibit inde evolutio dicta in infinitum: tam numeratoris quam denominatoris factorum grex innumerabilis erit; ita ut (pro tangenti arcuum $\frac{x}{n}$, $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\pi}{2n}$ etc., infinite parvorum, ipsis arcubus scriptis*) denique habeatur:

(1) $$\text{tang x} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\ldots\ldots \text{ in inf.}}{\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{7^2\pi^2}\right)\ldots\ldots \text{ in inf.}}$$

Talis est evolutio tangentis per productum infinitum.

Ex qua evolutione pro $x = \frac{\pi}{4}$ i. e. tang x = 1, cf. § 16 III, nascetur expressio quaedam numeri π:

(2) $$\frac{\pi}{4} = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 7^2}\right)\ldots\ldots}{\left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2 \cdot 4^2}\right)\ldots\ldots}$$

§ 20.

Per aequationem (2) § 14 hanc:

(1) $$\overset{e}{\log} \frac{1 + xi}{1 - xi} = 2i \text{ Arctang x}$$

erit ponendo 2Arctang x = z et invertendo aequationem inde nascentem:

$$\overset{e}{\log} \frac{1 + xi}{1 - xi} = zi$$

* Quae venia porrigitur tam Arcustangentis consideratione accuratiori (§ 11), quam ex annotatione sequenti § 22.

e lege § 5:

$$e^{zi} = \frac{1 + xi}{1 - xi},$$

et dextro aequationis membro in formam magis idoneam reducto:

(2) $$e^{zi} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2}\, i$$

Quum autem sit 2Arctang $x = z$,

$$\text{Arctang } x = \frac{z}{2}$$

et invertendo prodeat:

$$x = \text{tang } \frac{z}{2}$$

erit:

(3) $$e^{zi} = \frac{1 - \text{tang } \frac{z^2}{2}}{1 + \text{tang } \frac{z^2}{2}} + \frac{2 \text{ tang } \frac{z}{2}}{1 + \text{tang } \frac{z^2}{2}}\, i.$$

§ 21.

Praecedens aequatio symbolica accuratius hic consideranda est.

Quamobrem exprimatur quantitas exponentialis e^{zi} per seriem infinitam (cf. § 10, (2)):

(1) $$e^{zi} = \begin{cases} 1 - \frac{z^2}{1 \,.\, 2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots \\ + i \left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots \right) \end{cases}$$

et significetur realis pars evolutionis signo „cos z", imaginaria signo „sin z", ita ut sit definitionis instar:

(2) $$e^{zi} = \cos z + i \sin z$$

et separatim:

(3) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1 \,.\, 2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

(4) $$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots..$$

Vocentur denique ista signa cosinus et sinus. Variabilis z vocabitur arcus, sicuti in tangenti. Quibus positis aequationes symbolicae (3) § 20 et (2) huius paragraphi inter se comparatae praebent hanc relationem:

(5) $$\frac{1 - \text{tang } \frac{z^2}{2}}{1 + \text{tang } \frac{z^2}{2}} = \cos z$$

(6) $$\frac{2 \operatorname{tang} \frac{z}{2}}{1 + \operatorname{tang} \frac{z^2}{2}} = \sin z.$$

Talis relatio versatur inter functionem tangentis et functiones modo introductas, cosinus et sinus.

Aequationibus praecedentibus divisis inter se erit:

(7) $$\frac{2 \operatorname{tang} \frac{z}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{z^2}{2}} = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Quum autem sit per aequationem (4) § 13:

$$\frac{2 \operatorname{tang} \frac{z}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{z^2}{2}} = \operatorname{tang} z$$

habebimus denique per comparationem posterioris cum antecedenti aequatione hanc formulam:

(8) $$\frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tang} z$$

Itaque Arcustangentis inversa functio tangens hac formula (8) expressa est per novas duas introductas functiones, cosinum et sinum, quarum ipsarum relatio in sequentibus indicabitur.

Interea statuenda est haec

Annotatio: Cosinus infinite parvi arcus unitati aequalis est (3); sinus eiusmodi arcus ipsi arcui (4). Inde sequitur per aequationem (8): tangens infinite parvi arcus aequalis est ipsi arcui.

§ 22.

Ex definitione est:

$$e^{ui} = \cos u + i \sin u, \text{ cf. § 21. (2)}$$

et mutando u in — u erit

(1) $$e^{-ui} = \cos u - i \sin u, \text{ cf. § 21. (3), (4)}.$$

Ex quibus aequationibus duabus praecedentibus erit per additionem:

(2) $$\frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2} = \cos u$$

et per substractionem:

(3) $$\frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i} = \sin u.$$

Tali ratione (2), (3) cohaerent functiones introductae cum quantitate exponentiali.

Utroque aequationum (2) et (3) membro in alteram potestatem elevato, erit per additionem inde nascentium aequationum:

(4) $$\cos u^2 + \sin u^2 = 1.$$

Annotatio. Per aequationem praecedentem (4) et aequationem (8) § 21 ab una functione circulari ad alteram sine negotio transitur.

§ 23.

Est porro per definitionem (2) § 21; (1) § 22:

$$e^{ui}\, e^{\pm vi} = (\cos u + i \sin v)\, (\cos u \pm i \sin v)$$

et per aequationem (1) § 5 aequatio praecedens congruit cum hac:

$$e^{(u \pm v)\, i} = (\cos u + i \sin v)\, (\cos u \pm i \sin v)$$

vel sinistro membro ex definitione resoluto:

$$\cos (u \pm v) + i \sin (u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v + (\sin u \cos v \pm \cos u \sin v)\, i,$$

unde per separationem realis et imaginariae partis erit:

(1) $$\cos (u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

(2) $$\sin (u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v.$$

Talis est notissima lex functionum cosinus et sinus pro summa sive differentia arcuum.

§ 24.

Quum sit ex definitione:

$$e^{nvi} = \cos nv + i \sin nv$$

nec non:

$$e^{nvi} = (\cos v + i \sin v)^n = \left(e^{vi} \right)^n \quad (\text{cf. § } 5),$$

erit:

(1) $$\cos nv + i \sin nv = (\cos v + i \sin v)^n$$

pro quovis numero n. Evolvendo autem dextro aequationis (1) membro pro positivo numero n pari, erit re vera:

$$\cos nv + i \sin nv = \begin{cases} \cos v^n - \overset{2}{B}_n \cos v^{n-2} \sin v^2 + \overset{4}{B}_n \cos v^{n-4} \sin v^4 - \ldots \pm \sin v^n \\ + i \left(\overset{1}{B}_n \cos v^{n-1} \sin v - \overset{3}{B}_n \cos v^{n-3} \sin v^3 + \overset{5}{B}_n \cos v^{n-5} \sin v^5 - \ldots \mp \overset{n-1}{B}_n \cos v \sin v^{n-1} \right) \end{cases}$$

Qua aequatione symbolica partita, nascentur hae ambae:

(2) $$\cos nv = \cos v^n - \overset{2}{B}_n \cos v^{n-2} \sin v^2 + \overset{4}{B}_n \cos v^{n-4} \sin v^4 - \ldots \pm \sin v^n$$

(3) $$\sin nv = \overset{1}{B}_n \cos v^{n-1} \sin v - \overset{3}{B}_n \cos v^{n-3} \sin v^3 + \ldots \mp \overset{n-1}{B}_n \cos v \sin v^{n-1}.$$

In auxilium vocata aequatione

$$\cos v^2 + \sin v^2 = 1 \ (\text{§ } 22)$$

poterit tam cos nv quam sin nv per solos cosinus vel per solos sinus exprimi.

§ 25.

Per definitionem est:

$$e^{(u + 2\varkappa\pi) i} = \cos(u + 2\varkappa\pi) + i \sin(u + 2\varkappa\pi)$$

et per aequationem (6) § 9:

$$e^{(u + 2\varkappa\pi) i} = e^{ui}$$

unde per comparationem sequitur fore:

$$e^{ui} = \cos(u + 2\varkappa\pi) + i \sin(u + 2\varkappa\pi).$$

Rursus adhibita definitione in sinistro membro aequationis praecedentis erit:

$$\cos u + i \sin u = \cos(u + 2\varkappa\pi) + i \sin(u + 2\varkappa\pi).$$

Qua aequatione symbolica diremta prodeunt hae:

(1) $$\cos u = \cos(u + 2\varkappa\pi)$$

(2) $$\sin u = \sin(u + 2\varkappa\pi).$$

Deinde quum per dictam § 9 aequ. (8) sit etiam:

$$e^{u} = - e^{u + \pi i}$$

erit pro u = ui:

$$e^{ui} = - e^{(u + \pi) i}$$

id quod ex definitione (§ 21) idem est ac:

$\cos u + i \sin u = - \cos(u + \pi) - i \sin(u + \pi)$, vel diremtione instituta:

(3) $$\cos u = - \cos(u + \pi)$$

(4) $$\sin u = - \sin(u + \pi).$$

Itaque functiones cosinus et sinus sunt functiones periodicae (1), (2). Periodus est realis numerus 2π. Si variabilis dimidia periodi parte augetur illae functiones signum mutant (3), (4).

§ 26.

Transimus ad eos arcus quaerendos, quibus tam cosinus quam sinus evanescat.

Quamobrem animadvertamus relationem § 22 institutam hanc: $\cos v^2 + \sin v^2 = 1$, monere, ut omnes solutiones aequationis

$$\sin v = o$$

coincidere debeant cum solutionibus aequationis

$$\cos v = \pm 1.$$

Sic fieri nequit, ut harum aequationum altera sine altera constare possit. Habebuntur igitur simul omnes solutiones tam unius quam alterius aequationis, si habentur omnes solutiones aequationis

$$\cos v + i \sin v = \pm 1.$$

Quum autem per definitionem aequatio praecedens idem significet atque haec:

$$e^{vi} = \pm 1$$

congruent solutiones quaesitae cum solutionibus huius posterioris aequationis.

Sunt autem per conclusionem I, § 7 omnes solutiones aequationis

$$e^{vi} = \pm 1 \text{ hae: } v = \varkappa\pi,$$

ubi $\varkappa$ significat numerum quemlibet integrum. Erunt igitur omnes solutiones aequationis

$$\left.\begin{array}{l} \text{tam } \sin v = o \\ \text{quam } \cos v = \pm 1 \end{array}\right\} \text{hae: } v = \varkappa\pi,$$

ita ut simul locum habeant aequationes:

(1) $$\sin \varkappa\pi = o$$

(2) $$\cos \varkappa\pi = \pm 1.$$

Ceterum ex indicato loco manifestum est, valere positivum signum pro pari numero $\varkappa$, negativum pro impari. E. g. erit:

(3) $$\sin o = o \quad \cos o = +1$$

(4) $$\sin \pi = o \quad \cos \pi = -1.$$

Habetur igitur

Theorema I. Omnes solutiones aequationis $\sin v = o$ sunt: $v = \varkappa\pi$ (1), ubi $\varkappa$ significat numerum quemlibet integrnm.

Altera ex parte omnes solutiones aequationum simul locum habentium harum:

$$\sin v = \pm 1$$
$$\cos v = o$$

exhauriuntur solutionibus aequationis

$$\cos v + i \sin v = \pm i$$

vel:

$$e^{vi} = \pm i.$$

Sunt autem per conclusionem II, § 7 omnes solutiones aequationis praecedentis hae:

$$v = (2\varkappa + 1)\frac{\pi}{2},$$

ubi $\varkappa$ significat numerum quemlibet integrnm. Itaque erunt omnes solutiones aequationis

$$\left.\begin{array}{l} \text{tam } \sin v = \pm 1 \\ \text{quam } \cos v = o \end{array}\right\} \text{hae: } v = (2\varkappa + 1)\frac{\pi}{2},$$

ita ut simul locum habeant aequationes:

(5) $$\sin (2\varkappa + 1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

(6) $$\cos (2\varkappa + 1)\frac{\pi}{2} = o,$$

ubi pro pari numero $\varkappa$ valet potitivum, pro impari negativum signum. E. g. erit:

(7) $$\sin \frac{\pi}{2} = +1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = o$$

(8) $$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Habetur igitur

Theorema II. Omnes solutiones aequationis $\cos v = 0$ sunt: $v = (2x + 1)\frac{\pi}{2}$, ubi x significat numerum quemlibet integrum.

§ 27.

Quibus rebus accedit consideratio singularium arcuum. Quum sit per aequationes (1), (2) § 23:

$$\sin (u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$
$$\cos (u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

ponendo $u = \frac{\pi}{2}$ nec non rationem habendo aequationum (7) § 26 procedunt:

(1) $$\sin \left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$$

(2) $$\cos \left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v.$$

Deinde si arcus $\frac{\pi}{2} - v$, hoc loco consideratus, qui cum arcu v arcum $\frac{\pi}{2}$ complet, arcus complementarius ipsius arcus v vocatur, aequationes duae praecedentes expedite sic pronuntiantur:

Cosinus cuiusvis arcus aequalis est sinui arcus complementarii. Sinus cuiusvis arcus aequalis est cosinui arcus complentarii.

Si in aequationibus frontem huius paragraphi occupantibus positum fuisset $u = \pi$, et ratio habita fuisset aequationum (4) § 26, exstitissent loco aequationum (1), (2) hae analogae:

(3) $$\sin (\pi - v) = + \sin v$$

(4) $$\cos (\pi - v) = - \cos v.$$

Similiter ut antea, si arcus singularis $\pi - v$, qui cum arcu v supplet arcum π, supplementarius arcus ipsius arcus v nominatur, aequationes duae modo institutae (3), (4) haec dicunt:

Sinus cuiusvis arcus sinui arcus supplementarii aequalis est; cosinus autem aequalis est negativo cosinui arcus supplementarii.

Accipiuntur similia, si in aequationibus paene iisdem ut antea his:

$$\sin (u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$
$$\cos (u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

(cf. § 23) ponitur quum $u = \frac{\pi}{2}$ tum $u = \pi$, et respicitur ad quatuor aequationes (4), (7) § 26. Sed ut haec breviter absolvamus statim scribimus aequationes inde nascentes:

$$\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = \cos v$$

$$\cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin v$$

$$\sin(v + \pi) = -\sin v$$

$$\cos(v + \pi) = -\cos v.$$

Satis instructi sumus hoc loco formulis idoneis, quibus tam sinum quam cosinum per productum tam finitum quam infinitum evolvere possimus, sicuti haec in tangenti facta sunt. Sed longum est easdem conclusiones repetere et in usum vocare, praesertim quum istarum functionum evolutiones per infinitum productum in evolutione tangentis iam obviam sint factae. Brevitatis causa praeterimus ea quoque, quae de inversis sinui et cosinui functionibus et de earum ceterarumque cum circulo cohaerentia dicenda fuerant.