Ueber lineare Complexgebilde.

I.

Ein linearer Plücker'scher Complex ist die Gesammtheit der geraden Linien, welche so im Raume vertheilt sind, dass durch jeden Punct desselben ein ebenes Strahlbüschel geht, dessen Ebene die zugeordnete Ebene des Punctes heisst. Aus dieser Definition lassen sich sofort die folgenden Eigenschaften der linearen Complexe ableiten:

Dem Puncte A entspreche die Ebene E, einem zweiten B die Ebene E'. Einem beliebigen Puncte C ihrer Durchschnittslinie l ist die Ebene ABC zugeordnet. Während also der Punct C die Linie l durchläuft, dreht sich die zugeordnete Ebene um eine Linie AB; durchläuft dagegen ein Punct die Gerade AB, so geht die zugeordnete Ebene stets durch l. Die Geraden l und AB entsprechen sich also gegenseitig und heissen daher conjugirte Polaren des Complexes. Daraus entspringt der Satz:

Rückt ein Punct auf einer Geraden fort, so dreht sich die zugeordnete Ebene um die conjugirte Polare derselben. Ist die Gerade eine Linie des Complexes selbst, so dreht sich nach der Definition die zugehörige Ebene um sie selbst; die Geraden des Complexes sind also aufzufassen als zusammenfallende conjugirte Polaren desselben. Zwei conjugirte Polaren l, l' können sich nicht schneiden. Denn träfen sich dieselben in einem Puncte b, so würde einem Puncte a der Geraden l die Ebene ll' entsprechen, also ab eine Linie des Complexes sein, mithin l und l' zusammen fallen.

Jede Gerade des Complexes, welche eine von zwei conjugirten Polaren schneidet, schneidet auch die andere. Denn bei Annahme des Gegentheils würde es Puncte geben, denen ein nicht ebenes Strahlbüschel entspräche.

Schneiden sich zwei Linien l, m im Puncte O, so schneiden sich ihre conjugirten Polaren l', m' in einem Puncte O'. Der letztere liegt in der Ebene lm, sowie O in der Ebene l'm'. Denn die zu m conjugirte Polare liegt in der Ebene welche dem Puncte O entspricht.

Geraden welche in einer Ebene liegen entsprechen conjugirten Polaren, welche sich in dem der Ebenen zugeordneten Puncte schneiden. Denn sind a, b zwei Puncte einer in der Ebene E (zugeordneter Punct e) liegenden Geraden, so gehen die zugeordneten Ebenen von a, b durch ae, ab; deren Schnitt also durch e. Hieraus folgt weiter dass einem ebenen Geradenbüschel ein ebenes Büschel conjugirter Polaren entspricht.

Einer Curve welche von Polaren in einer Ebene eingehüllt wird, entspricht also eine Kegelfläche, deren Spitze in dem der Ebene zugeordneten Puncte liegt. Die Classe der ersteren ist die Ordnung des letzteren und umgekehrt. Wenn nämlich eine beliebige Linie l die Curve in einem Puncte a schneidet, so entsprechen den beiden unendlich nahen Tangenten von a zwei unendlich nahe conjugirte Polaren, und der Linie l eine Polare l′. Es liegen also l′ und jene beiden Polaren in einer Tangentialebene des Kegels. Folglich ist die Zahl der Puncte a gleich der Zahl der Tangentialebenen welche durch l′ gehen. Das weitere hierher gehörige, mit der Theorie der Reciprocität zusammenhängende, zu behandeln ist nicht der Zweck der augenblicklichen Betrachtung.

Zwei Linien l, m im Unendlichen entsprechen zwei conjugirte Polaren l′, m′. Dieselben können sich nur im Unendlichen schneiden, da ihr Schnittpunct nach dem vorigen in der Ebene lm liegen muss, welches die unendlich entfernte Ebene ist. Allen Linien im Unendlichen entsprechen also parallele Polaren, welche Durchmesser heissen. Den Puncten eines Durchmessers entsprechen parallele Ebenen, deren zugeordnete Strahlbüschel durch den Durchmesser selbst gehen. Jedem Büschel von Geraden, dessen Centrum auf dem Durchmesser liegt, entsprechen conjugirte Polaren in der zugeordneten Ebene.

Unter allen Ebenen wird es eine geben, welche auf ihrem Durchmesser senkrecht steht. Letzterer erhält in Bezug auf diese Ebene den Namen Axe des Complexes; der Schnitt der Axe und einer der Ebenen kann als Centralpunct des Complexes bezeichnet werden. Die ebenen Geradenbüschel welche den Puncten der Axe zugeordnet sind, stehen senkrecht auf derselben und bilden die Normalebene des Complexes.

Einem System paralleler Geraden, welche eine Gerade des Complexes schneiden, entspricht ein ebenes Polaren-Büschel, dessen Centrum auf der genannten Geraden liegt. Die Ebene desselben ist bestimmt durch die dem unendlich fernen Punct der Parallelen zugeordnete, also dem eben bemerkten gemäss der Axe parallel. Hieran schliesst sich der wichtige Satz: Die durch die Richtungen zweier conjugirter Polaren bestimmte Ebene läuft stets der Axe parallel. Denn die durch einen Punct O der Polare m zu m′ parallel gelegte Gerade l ist Linie des Complexes. Der zugeordnete Punct der Ebene l, m liegt aber unendlich entfernt auf l, weil er durch die Ebene bestimmt ist, welche durch m′ parallel mit der Ebene lm gelegt ist. Folglich ist die Ebene lm der Axe parallel.

Einer Geraden welche drei Gerade des Complexes schneidet entspricht eine conjugirte Polare, welche dieselben schneidet. Es entsprechen nämlich den drei Schnittpuncten a a′ a″ der Geraden l mit den Geraden m m′ m″ des Complexes drei durch m m′ m″ gehende sich in l′ schneidende Ebenen. Während die Geraden l ein Hyperboloid mit den Leitlinien m m′ m″ bilden, und Erzeugende desselben von der ersten Art sind, bilden ihre conjugirten Polaren die Erzeugenden desselben Hyperboloids von der zweiten Art. Hieraus ergibt sich noch der Satz: Die zwei Geraden welche vier Geraden des Complexes schneiden, sind conjugirte Polaren desselben.

Alle Geraden des Complexes, welche zwei beliebige Gerade m, n schneiden, bilden ein Hyperboloid. Denn construire ich die Polare n′ von n so werden alle Geraden, welche m, n, n′, schneiden, dem Complexe angehören. Jede derselben schneidet selbstverständlich auch die Polare m′ von m.

Drei beliebige Gerade werden im allgemeinen nur von zwei Geraden des Complexes geschnitten. Den Puncten einer beliebigen Geraden des Complexes gehören Ebenen an, welche das durch diese Gerade und irgend zwei conjugirte Polaren bestimmte Hyperboloid berühren. Alle Hyperboloide welche durch eine Gerade des Complexes und zwei conjugirte Polaren derselben bestimmt sind, haben also längs der ersten dieselben Tangentialebenen.

Ein Complex ist durch die Lage seiner Axe noch nicht bestimmt. Dasselbe findet erst dann statt, wenn ausserdem noch eine Linie gegeben ist, welche demselben angehören soll. Denn alsdann kann man zu jedem Puncte die zugehörige Ebene construiren. Ist nämlich die Axe und eine Linie l des Complexes gegeben, so kann man leicht die zugeordnete Polare m′ einer Geraden m construiren, welche durch den Centralpunct (d. h. einen beliebigen Punct der Axe) geht und l in einem Puncte O schneidet. Dem Centralpunct entspricht die durch ihn normal zur Axe gelegte Ebene, welche kurz als Normalebene bezeichnet werden mag, dem Puncte O die durch die von O auf die Axe gezogene Normale und l gelegte. Beide Ebenen bestimmen durch ihren Schnitt m′. Die einem beliebigen Puncte P zugeordnete Ebene ist dann bestimmt durch die von P auf die Axe gefällte Normale und diejenige Gerade, welche durch P und die conjugirten Polaren m, m′ gezogen werden kann. Hiernach ist man in den Stand gesetzt, zu jeder Geraden ihre zugeordnete Polare zu construiren, indem man die zugeordneten Ebenen zweier Puncte der ersten construirt. Uebrigens erhellt, wie ganz analoge Constructionen auch dann noch gelten, wenn ein Durchmesser und seine zugehörige Ebene anstatt der Axe gegeben ist. Denn ein Strahl in der Ebene eines beliebigen Punctes P geht stets durch den Durchmesser und läuft der genannten Ebene parallel.

Wird ein Complex parallel mit seiner Axe verschoben, so fallen sämmtliche Linien desselben mit anderen Complexlinien zusammen. Denn betrachtet man zwei in zwei zur Axe senkrechten Ebenen normal übereinander liegende Puncte P, P′, so sind die zugeordneten Ebenen derselben parallel, weil die conjugirte Polare von PP′ unendlich weit liegt. Folglich fallen die Strahlbüschel von P und P′ bei der Verschiebung zusammen. Weiter ist es leicht zu erweisen, dass der Complex ebenfalls keine Veränderung im Raume erleidet, wenn er um seine Axe gedreht wird. Es sei nämlich AO die Axe, OP die auf dieselbe von einem Puncte P gefällte Normale, PB eine Complexlinie; ferner BC die zu OP parallele Linie, in welcher die der Axe zugehörige Ebene von der zugeordneten von P geschnitten wird, d. h. die conjugirte Polare von AP. Endlich sei P′ ein Punct in der durch O zur Axe senkrecht gelegten Ebene, dessen Abstand P′O von der Axe gleich PO ist. Die Polare von AP′ geht dann durch einen Punct C, welcher in der Ebene APP′ liegt, und AC ist parallel zu PP′. Die zugeordnete Ebene von P′ ist daher bestimmt durch CB′ ‖ OP′. Für einen dritten Punct P″ welcher denselben Winkel mit OP′ macht, wie OP′ mit OP, erhält man C′B″ ‖ OP″, also auch AC = AC′. Hieraus ergiebt sich, dass, während der Punct P einen Kreis durchläuft, die zugehörigen Ebenen die auf der Axe senkrecht stehende in Linien schneiden, welche einen anderen Kreis einhüllen, also bei der Drehung jede Ebene mit einer anderen des Complexes zusammenfällt.

Es ist bereits gezeigt, wie zu jeder Geraden ihre conjugirte Polare bestimmt werden kann sobald der Complex bestimmt ist. Die folgende Lösung dieser Aufgabe erscheint aber besonders wichtig, weil aus ihr der Satz entspringt, mit Hülfe dessen es leicht ist, die gesammten Eigenschaften der Complexgebilde zu untersuchen. Es sei AO die Axe, DF eine Linie deren conjugirte gesucht wird; AF die kürzeste Linie zwischen beiden, durch welche die der Axe zugehörige Ebene geht. Dem Puncte F ist eine Ebene K zugeordnet, welche bestimmt ist durch AF und FX, welche senkrecht auf AF vorausgesetzt wird. Zieht man DO ⊥ AO und DE ‖ FX so ist ODE die zugeordnete Ebene von D; diese schneidet die Ebene K′ in der zugehörigen Polare BY ‖ FX. Daraus ergibt sich der Satz:

Die kürzeste Linie zweier conjugirter Polaren steht senkrecht auf der Axe und geht durch dieselbe.

Ziehe ich noch BZ || FD, so ist die Ebene ABZ dem Punct B zugeordnet und FX conjugirte Polare von ZB.

Mittelst des angeführten Satzes löst man leicht die Aufgabe, die Axe des Complexes zu construiren, sobald derselbe anderweitig bestimmt ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn eine Gerade l und zwei conjugirte Polaren m m′ derselben gegeben sind. m und m′ bestimmen dann eine kürzeste Linie welche die gesuchte Axe senkrecht schneidet. Es ist ferner leicht die Polare a′ einer Geraden a zu suchen, welche durch einen Punct O von l und einen Punct von m geht. Alsdann ist die Axe die kürzeste Linie zwischen den beiden kürzesten Linien, welche zwischen m m′, a a′, gezogen werden können. Da zwei conjugirte Polaren nach dem Vorigen bestimmt sind durch vier Geraden des Complexes, so liegt hierin zugleich die Construction für den Fall, dass der Complex durch 5 seiner Geraden bestimmt ist.

II.

In dem Folgenden sollen einige Relationen zwischen den Bestimmungsstücken eines Complexes entwickelt werden.

Es sei m der kürzeste Abstand der Linie FD von der Axe OA, ψ der Winkel derselben mit der zur Axe normalen Ebene, δ der Winkel, welchen die zugeordnete Ebene von F mit derselben bildet. Wird noch DH || der Projection von DF, DE || FX, endlich HF normal auf der zur Axe senkrechten Ebene gezogen, so ergibt sich für die Distanz n der conjugirten Polaren BY von FD, welche zu AF senkrecht steht und den Winkel δ mit der Normalebene bildet:

$$DH = AO \operatorname{cotg} \psi$$
$$HE = AO \operatorname{cotg} \psi \operatorname{tg} \delta$$
$$AF : AB = \operatorname{cotg} \psi \operatorname{tg} \delta : 1$$
$$1) \quad m \operatorname{tg} \psi = n \operatorname{tg} \delta$$

Die Gleichung 1) bestimmt, sowie m und tg δ gegeben ist, für jede Gerade ihre conjugirte Polare, oder auch die zugeordnete Ebene eines jeden Punctes und damit den ganzen Complex. Es wird daher die für den Complex characteristische Grösse

$$2) \quad \frac{\operatorname{tg} \delta}{m} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{n} = k$$

gesetzt. k heisst der Parameter des Complexes. Ist $k = \infty$, so ist tg $\delta = o$. Der Complex besteht dann aus unendlich vielen Strahlenbüscheln, welche in zu der Axe senkrechten Ebenen liegen. Für $k = o$ ist $\delta = 90^\circ$; der Complex besteht dann aus Strahlen, welche sämmtlich die Axe schneiden. Für zwei entgegengesetzt gleiche Werthe des Parameters entstehen zwei Complexe, welche von Plücker conjugirte genannt sind und von denen der eine als Spiegelbild des anderen bezeichnet werden kann.

Bestimmung derjenigen Polaren, welche die nämliche kürzeste Linie haben und einen gegebenen Winkel c mit einander bilden. — Im Puncte x sei eine Gerade unter dem Winkel ψ zur Normalebene senkrecht zur X Axe gezogen, deren Polare im Punct x′ unter dem Winkel δ zu derselben geneigt ist, woraus sich ergiebt

$$\frac{\operatorname{tg} \delta}{x} = \frac{1}{k} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{x'}$$
$$\psi - \delta = c$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg} c + \frac{x}{k}}{1 - \operatorname{tg} c \frac{x}{k}} = \frac{z}{y}$$

falls die Z Axe mit der Complexaxe zusammenfällt.

Die Geraden, welche mit ihren conjugirten Polaren den Winkel c bilden, sind also auf der Linienfläche zweiten Grades

$$3)\quad z - zx\frac{\operatorname{tg} c}{k} = y \operatorname{tg} c + \frac{yx}{k}$$

angeordnet, welcher die Fläche

$$z + zx'\frac{\operatorname{tg} c}{k} = -y \operatorname{tg} c + \frac{x'y}{k}$$

entspricht. Für $c = 0^0, 90^0$ entsteht $z = \frac{yx}{k}$ $y = \frac{zx}{k}$. Schreibt man die Gleichung 3) zu der Form

$$z - \frac{yx}{k} - \operatorname{tg} c\left(y + \frac{zx}{k}\right) = 0$$

so ergibt sich, dass für sämmtliche Winkel c die entsprechenden Flächen ein Büschel bilden, dessen Basis bestimmt ist durch diejenigen Flächen, welche den Winkeln 0^0 und 90^0 entsprechen.

Bestimmung der Geraden, welche durch einen gegebenen Punct P gehen und mit ihren conjugirten Polaren einen gegebenen Winkel c bilden.

Die Axe des Complexes bilde wie vorhin die z-Axe; die von P auf dieselbe gefällte Normale die x-Axe. Eine der gesuchten Linien sei PC, die kürzeste Linie zwischen dieser und der Axe CE, endlich CD senkrecht auf der xy Ebene. Für $\angle APD = \varphi$, $AP = x$ ergibt sich dann, wenn $\angle CPD$ mit ψ und der entsprechende Winkel der conjugirten Polare von PC mit δ bezeichnet werden:

$$\operatorname{tg}(\psi - c) = \operatorname{tg}\delta = \frac{EC}{k}$$

$$CE = AD = x \sin\varphi.$$

Bezeichnen X, Y, Z, die Coordinaten eines Punctes der Geraden PC, sowie ϱ den Abstand der Projection desselben auf die xy Ebene vom Puncte P so ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{z}{\varrho}$$

also

$$4)\quad \frac{\frac{z}{\varrho} - \operatorname{tg} c}{1 + \frac{z}{\varrho}\operatorname{tg} c} = \frac{x \sin\varphi}{k}$$

die Polargleichung in Bezug auf den Anfang P eines Schnittes der die gesuchten Geraden enthaltenden Kegelfläche, welcher durch eine der xy Ebene parallele gebildet wird. Die Gleichung des Kegels in gewöhnlichen Coordinaten ist

$$5)\quad \sqrt{X^2 + Y^2}\,\frac{(kZ - xY)}{k(X^2 + Y^2) + xZY} = \operatorname{tg} c$$

also im Allgemeinen vom vierten Grade. Der Kegelfläche entspricht eine Curve vierter Classe, welche von den Polaren eingehüllt wird und in der zugeordneten Ebene von P liegt.

Für $c = 90^0$ erhält man

$$6)\quad k(X^2 + Y^2) + xZY = o.$$

Die der xy Ebene parallelen Schnitte sind also Kreise mit dem Radius $\frac{xZ}{2k}$, deren Mittelpunctscoordinaten x und $-\frac{xZ}{2k}$ sind. Für den Neigungswinkel w der Geraden, welche das Centrum mit P verbindet erhält man

$$\operatorname{tg} w = -\frac{2k}{x}$$

Für $x = o$ ist die Gleichung des Kegels

$$\left(\frac{Z}{\operatorname{tg} c}\right)^2 = X^2 + Y^2$$

Während also die durch den Centralpunct gehenden Geraden einen Kreiskegel, dessen Axe die des Complexes ist, beschreiben, umhüllen ihre conjugirten Polaren einen Kreis, dessen Centrum der Centralpunct ist. Was die Gleichung 5) betrifft, so ist es leicht, sich eine Vorstellung von der Beschaffenheit des durch sie dargestellten Kegels zu machen. Letzterer ist für Punct $k = x$ immer der nämliche, welches auch der Werth des Parameters sein mag.

III.

Nachdem gezeigt ist, dass ein Complex vollständig durch fünf seiner Geraden bestimmt ist, soll untersucht werden, welcher Art die Unbestimmtheit ist, welche stattfindet, wenn nur vier, drei, zwei oder eine Gerade des Complexes gegeben ist. Der letzte Fall erledigt sich von selbst durch die Bemerkung, dass jede beliebige Gerade Axe eines die gegebene enthaltenden Complexes sein kann, dessen Parameter dann bestimmt ist. Die drei anderen Fälle geben Veranlassung zu einem Complexbüschel, einem Complexnetze und einer Schaar von Complexen. Ein Complexbüschel ist die Gesammtheit aller Complexe welche vier Gerade gemeinschaftlich haben. Da aber vier Gerade zwei conjugirte Polaren bestimmen (vergl. oben), so ist die Basis eines Complexbüschels, d. h. der Inbegriff der gemeinschaftlichen Elemente aller Complexe des Büschels, das Gebilde derjenigen Geraden, welche die beiden Polaren schneiden, nach Plücker eine Congruenz. Weiter wird sich ergeben dass die Basis eines Netzes eine Fläche zweiter Ordnung, einer Complexschaar zwei Gerade sind, sowie auch dass die Basis eines Büschels und damit das Büschel selbst bestimmt ist durch den Schnitt von zwei Complexen, die Basis eines Netzes oder einer Schaar durch den Schnitt von drei, respective vier Complexen.

Zwei Complexe, bestimmt durch ihre Axen und ihre Parameter k, k' besitzen nämlich ein einziges System conjugirter Polaren, welches beiden gemeinschaftlich ist. Dieselben müssen jedenfalls die zwischen den Axen gezogene kürzeste Linie schneiden. Einem jeden Puncte derselben entsprechen in beiden Complexen zwei Ebenen. Da dieselben zwei Büschel bilden, welche der Punctreihe auf der kürzesten Linie homographisch sind, so gibt es zwei Puncte A, A' denen in beiden Complexen die nämliche Ebene entspricht. Dem senkrecht auf der kürzesten Linie stehenden Strahlenbüschel mit dem Centrum A entsprechen zwei homographische Systeme paralleler Polaren, in denen zwei entsprechende durch den Punct A' gehen, (während die zwei anderen entsprechenden durch A gehen und selbst Linien der Complexe sind). Es gibt also nur zwei durch A, A' gehende beiden Complexen angehörende conjugirte Polaren. Dieselben heissen nach Plücker Directricen der Congruenz.

Nenne ich den Winkel der Axen 2Θ, die Länge der kürzesten Linie $2a$, nehme ich den Coordinatenanfang in der Mitte derselben und die z Axe so, dass sie den Winkel 2Θ halbiert, während die x Axe durch die kürzeste Linie gebildet wird so, ist für eine Linie, welche in beiden Complexen dieselbe zugeordnete Polare hat und die Winkel ψ, ψ' mit den Normalebenen der Complexe bildet

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x - a}{k}$$

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{x + a}{k'}$$

$$\psi - \Theta = \psi' + \Theta$$

woraus sich eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von x ergibt

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \operatorname{tg} (\psi - \psi') = \frac{x (k' - k) - a (k' + k)}{k k' + x^2 - a^2}$$

welche aber auf Grund der Reciprocität der Polaren nur ein einziges System derselben liefert.

Es gibt aber unendlich viele Complexe, welche sich in derselben Congruenz schneiden. Es sollen die Parameter sämmtlicher dem Büschel angehörigen Complexe, sowie die Lage ihrer Axen bestimmt werden. Es seien AB, CD die Directricen der Congruenz, die Bestimmung des Coordinatensystems eben so gewählt, wie vorhin für die beiden Axen. Da AB, CD in Bezug auf jeden Complex des Büschels conjugirte Polaren sein müssen, so wird die Axe eines jeden durch die kürzeste Linie von AB, CD oder die x Axe gehen, und senkrecht auf derselben stehen. Die gesuchte Axe im Puncte x mache den Winkel ψ mit der xy Ebene. Die Winkel welche AB, CD mit der Normalebene des Complexes bilden sind dann

$$180^0 + \Theta - \psi, \qquad 180^0 - (\Theta + \psi)$$

Daraus ergibt sich

$$-(x - a) \operatorname{tg} (\Theta + \psi) = (x + a) \operatorname{tg} (\Theta - \psi)$$

oder

$$(x - a) \operatorname{tg} \Theta + (x + a) \operatorname{tg} \Theta$$
$$+ \operatorname{tg} \psi \left[\frac{x - a}{\cos^2\Theta} - (x + a)\right]$$
$$+ \operatorname{tg}^2\psi \left[(x - a) \operatorname{tg} \Theta + (x + a) \operatorname{tg} \Theta\right] = 0$$

oder nach sehr einfacher Reduction

$$7)\quad \operatorname{tg}^2\psi - \operatorname{tg} \psi \frac{2a}{x \sin 2\Theta} + 1 = 0$$

Die Gleichung derjenigen Linienfläche welche durch sämmtliche Axen gebildet wird ist daher, $\operatorname{tg} \psi = \frac{z}{y}$ gesetzt,

$$8)\quad x (y^2 + z^2) - \frac{2zya}{\sin 2\Theta} = 0$$

Zur Bestimmung des Parameters k eines jeden Complexes hat man die Gleichung

$$-\frac{\operatorname{tg} (\Theta + \psi)}{x + a} = \frac{1}{k}$$

Wird hieraus der Werth von $\operatorname{tg} \psi$ in die Gleichung 7) eingesetzt, so entsteht nach einigen leichten Umformungen

$$9)\quad k^2 + (x^2 - a^2) + 2a \frac{k}{\operatorname{tg} 2\Theta} = 0.$$

Setzt man $k^2 = y^2 + z^2$, so entsteht die Gleichung einer Fläche welche die Endpuncte sämmtlicher Parameter enthält,

$$10)\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{y^2 + z^2}\ \frac{2a}{\operatorname{tg} 2\Theta} = 0.$$ Vgl. Plücker Neue Geom. §. 88.

Die Fläche 10) schneidet 8) in derjenigen Curve, welche durch die Endpuncte der Parameter gebildet wird. Die Gleichung der Fläche 8) hängt nur ab von $\frac{2a}{\sin 2\Theta}$. Sie ist daher dieselbe für unendlich viele Systeme von Directricen. Die Lage derselben ist gegeben durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{y}{z}$$

$$\frac{2x}{\sin 2\Theta'} = \frac{2a}{\sin 2\Theta}$$

$$\frac{x \cos^2\Theta'}{\cos^2\Theta' \sin\Theta' \cos\Theta'} = \frac{xz}{y}\left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) = \frac{2a}{\sin \Theta}$$

$$x\ (z^2 + y^2) = \frac{2ayz}{\sin 2\Theta}$$

Sämmtliche Systeme von Directricen, welche eine gewisse Linienfläche von Complexaxen bestimmen, liegen daher auf der letzteren selbst. Die Fläche 9) hängt dagegen ab von $\frac{2a}{\operatorname{tg} 2\Theta}$.

Für dieselbe erhält man

$$\frac{2x}{\operatorname{tg} 2\Theta'} = \frac{2a}{\operatorname{tg} 2\Theta} = \frac{x\ (1 - \operatorname{tg}^2\Theta')}{\operatorname{tg} \Theta'}$$

$$\frac{2a}{\operatorname{tg} 2\Theta} = \frac{x\ (z^2 - y^2)}{yz}$$

Von einer genaueren Discussion der Flächen 8) und 9) kann hier Abstand genommen werden. Vergl. über dieselben Plücker Neue Geometrie des Raumes §. 86.

IV.

Sind drei beliebige Gerade $l_1\ l_2\ l_3$ gegeben, so ist es leicht, die Basis des Complexnetzes zu bestimmen, welchem die genannten Geraden angehören. Die conjugirte Polare einer Geraden m, welche $l_1\ l_2\ l_3$ schneidet, schneidet dieselben ebenfalls, wie vorhin nachgewiesen wurde. Die Polaren von m in Bezug auf sämmtliche Complexe des Netzes bilden daher die Erzeugenden der ersten Art desjenigen Hyperboloids welches durch die drei Geraden bestimmt ist. Folglich sind alle Geraden welche die Erzeugenden der ersten Art schneiden, den Complexen des Netzes gemeinschaftlich. Die Basis desselben besteht daher aus den Erzeugenden der zweiten Art des genannten Hyperboloids. Schneiden sich zwei der gegebenen Geraden in einem Puncte O, während die dritte die Ebene derselben in O′ schneidet, so zerfällt die Basis in zwei Ebenen, in welchen die ebenen Strahlbüschel mit den Centren O, O′ liegen.

Es soll nun bestimmt werden, welches die Axen und zugehörigen Parameter desjenigen Complexes sind, welche dem Netze angehören.

Eine beliebige Ebene schneide $l_1\ l_2\ l_3$ in den Puncten $A_1\ A_2\ A_3$ die Projectionen von $l_1\ l_2\ l_3$ auf diese Ebene bilden dann ein Dreieck $B_1\ B_2\ B_3$ auf dessen Seiten die Puncte $A_1\ A_2\ A_3$ liegen. Ich betrachte nun die Ebene als Normalebene eines Complexes, dessen Centralpunct O ist während sein

Parameter durch k bezeichnet wird. Nennt man die Neigungswinkel der Ebenen Ol_1, Ol_2, Ol_3 zu der Normalebene $\varkappa_1$ $\varkappa_2$ $\varkappa_3$, so ist

$$k = \frac{OA_1}{\operatorname{tg}\varkappa_1} = \frac{OA_2}{\operatorname{tg}\varkappa_2} = \frac{OA_3}{\operatorname{tg}\varkappa_3}$$

Sind die Neigungswinkel der Geraden l_1 l_2 l_3 zur Normalebene ψ_1, ψ_2, ψ_3, die Winkel zwischen den Linien OA_1 OA_2 OA_3 und den Projectionen von l_1 l_2 l_3 beziehungsweise λ_1 λ_2 λ_3 so ist

$$\operatorname{tg}\varkappa_1 = \frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\sin\lambda_1}$$
$$\operatorname{tg}\varkappa_2 = \frac{\operatorname{tg}\psi_2}{\sin\lambda_2}$$
$$\operatorname{tg}\varkappa_3 = \frac{\operatorname{tg}\psi_3}{\sin\lambda_3}$$

Daraus ergibt sich, wenn

$$OA_1 \sin\lambda_1 = x_1$$
$$OA_2 \sin\lambda_2 = x_2$$
$$OA_3 \sin\lambda_3 = x_3$$

gesetzt wird, wo x_1 x_2 x_3 die Längen der von O auf die Seiten des Dreiecks B_1 B_2 B_3 gefällten Senkrechten bedeuten

$$\text{11)}\quad \begin{aligned} k \operatorname{tg}\psi_1 &= x_1 \\ k \operatorname{tg}\psi_2 &= x_2 \\ k \operatorname{tg}\psi_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen bestimmen eindeutig die Lage der Axe. Werden die Seiten des Dreiecks B_1 B_2 B_3 mit a_1 a_2 a_3, sein Inhalt mit $\triangle$ bezeichnet, so ist

$$k = \frac{2\triangle}{a_1 \operatorname{tg}\psi_1 + a_2 \operatorname{tg}\psi_2 + a_3 \operatorname{tg}\psi_3}$$

So lange also nur eine Ebene betrachtet wird ist die Grösse des Parameters und die Lage der Axe nur abhängig von den Richtungen der drei Geraden und der Lage ihrer Projectionen.

Die Gleichungen 11) sollen nun dazu dienen einen allgemeinen Ausdruck für die Grösse des Parameters und die Lage des Centralpunctes O festzustellen in Bezug auf jede beliebige Ebene, welche die drei Geraden schneidet. Um die Symmetrie der Rechnung zu bewahren, sollen vorläufig keine speziellen Annahmen über die Lage des Coordinatensystems gemacht werden. Die Gleichungen der drei Linien l_1 l_2 l_3 seien

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r_1 a_1 \qquad & x &= x_2 + r_2 a_2 \qquad & x &= x_3 + r_3 a_3 \\ y &= y_1 + r_1 b_1 & y &= y_2 + r_2 b_2 & y &= y_3 + r_3 b_3 \\ z &= z_1 + r_1 c_1 & z &= z_2 + r_2 c_2 & z &= z_3 + r_3 c_3 \end{aligned}$$

wo die Grössen a b c die Richtungscosinus der Geraden vorstellen. Um für eine beliebige Ebene

$$\text{12)}\quad \alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$$

die Lage des Centralpunctes O und den Parameter k zu bestimmen, lege ich durch die Geraden, deren Cosinus ihrer Winkel mit der Normalen zu dieser Ebene

$$\text{12b)}\quad \begin{aligned} \cos\Theta_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \cos\Theta_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ \cos\Theta_3 &= \alpha c_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 \end{aligned}$$

sind, senkrechte Ebenen zu 12), deren Gleichungen in den Hesse'schen Normalformen sind

$$13)\quad x\,\frac{(\beta c_1 - \gamma b_1)}{t} + y\,\frac{(\gamma a_1 - c_1\alpha)}{t} + z\,\frac{(\alpha b_1 - \beta a_1)}{t} - p = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

$$p = \frac{x_1\,(\beta c_1 - \gamma b_1) + y_1\,(\gamma a_1 - c_1\alpha) + z_1\,(\alpha c_1 - \beta a_1)}{t} = \frac{h_1}{t}$$

$$t = \sqrt{(\beta c_1 - \gamma b_1)^2 + (\gamma a_1 - \alpha c_1)^2 + (\alpha b_1 - \beta a_1)^2} = \sin\Theta,$$

Da die linken Seiten von 13) die Längen der vom Punkte x y z, welcher der gesuchte Centralpunct sein möge, auf die Ebene 13) gefällten Senkrechten vorstellen, so erhält man nach 11)

$$14)\quad \begin{aligned} x\,(\beta c_1 - \gamma b_1) + y\,(\gamma a_1 - \alpha c_1) + z\,(\alpha b_1 - \beta a_1) &= k\cos\Theta_1 + h_1 \\ x\,(\beta c_2 - \gamma b_2) + y\,(\gamma a_2 - \alpha c_2) + z\,(\alpha b_2 - \beta a_2) &= k\cos\Theta_2 + h_2 \\ x\,(\beta c_3 - \gamma b_3) + y\,(\gamma a_3 - \alpha c_3) + z\,(\alpha b_3 - \beta a_3) &= k\cos\Theta_3 + h_3 \\ x\alpha + y\beta + z\gamma &= p \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 14) kann man leicht x y z elimiren und erhält zur Bestimmung von k die Determinantengleichung:

$$15)\quad \begin{vmatrix} \beta c_1 - \gamma b_1 & \gamma a_1 - \alpha c_1 & \alpha b_1 - a_1\beta & h_1 \\ \beta c_2 - \gamma b_2 & \gamma a_2 - \alpha c_2 & \alpha b_2 - a_2\beta & h_2 \\ \beta c_3 - \gamma b_3 & \gamma a_3 - \alpha c_3 & \alpha b_3 - a_3\beta & h_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta c_1 - \gamma b_1 & \gamma a_1 - \alpha c_1 & \alpha b_1 - \beta a_1 & \cos\Theta_1 \\ \beta c_2 - \gamma b_2 & \gamma a_2 - \alpha c_2 & \alpha b_2 - \beta a_2 & \cos\Theta_2 \\ \beta c_3 - \gamma b_3 & \gamma a_3 - \alpha c_3 & \alpha b_3 - \beta a_3 & \cos\Theta_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} k = 0.$$

Bezeichnet man den Factor von k mit $\triangle$, so ergibt sich aus dem Multiplicationstheorem von zwei Determinanten und aus 12 b) sofort, dass

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & -\gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man in der zweiten Determinante die drei ersten Verticalreihen mit $\alpha\ \beta\ \gamma$, die drei letzten Horizontalreihen mit $\gamma\ \beta\ \alpha$, so ergibt sich, da

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{also } \triangle = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die andere Determinante der Gleichung 15) in welcher der Factor von p, wie leicht zu sehen, verschwindet, hat eine bestimmte geometrische Bedeutung in Bezug auf die drei Linien $l_1\ l_2\ l_3$. Die Gleichung des Hyperboloids nämlich, welches durch dieselben bestimmt ist, findet man

$$16)\quad \odot = \begin{vmatrix} \zeta b_1 - c_1\eta + c_1 y_1 - z_1 b_1 & \xi c_1 - \zeta a_1 + z_1 a_1 - c_1 x_1 & \eta a_1 - \xi b_1 + x_1 b_1 - y_1 a_1 \\ \zeta b_2 - c_2\eta + c_2 y_2 - z_2 b_2 & \xi c_2 - \zeta a_2 + z_2 a_2 - c_2 x_2 & \eta a_2 - \xi b_2 + x_2 b_2 - y_2 a_2 \\ \zeta b_3 - c_3\eta + c_3 y_3 - z_3 b_3 & \xi c_3 - \zeta a_3 + z_3 a_3 - c_3 x_3 & \eta a_3 - \xi b_3 + x_3 b_3 - y_3 a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ersetzt man $\alpha\ \beta\ \gamma$ durch $\frac{\xi}{\varrho}\ \frac{\eta}{\varrho}\ \frac{\zeta}{\varrho}$, so erkennt man dass die Theile von $\odot$, welche $\xi\ \eta\ \zeta$ im zweiten Grade enthalten, vollständig mit der genannten Determinante übereinstimmen. Diejenigen Complexaxen, für welche der Parameter verschwindet, laufen daher den Erzeugenden des Asymptotenkegels der Fläche 16) parallel. Zugleich geht hervor, dass namentlich die Gleichung 15) sich bedeutend vereinfachen wird, falls $\odot$ auf ihre Hauptaxen bezogen ist. Zuvor sollen aber die Gleichungen 14) noch in einer anderen Richtung benutzt werden. Durch Elimination von $\alpha\ \beta\ \gamma$ aus den drei ersten erhält man die Determinante

$$17)\quad \begin{vmatrix} b_1(z-z_1) - c_1(y-y_1) - ka_1 & c_1(x-x_1) - a_1(z-z_1) - kb_1 & a_1(y-y_1) - b_1(x-x_1) - kc_1 \\ b_2(z-z_2) - c_2(y-y_2) - ka_2 & c_2(x-x_2) - a_2(z-z_2) - kb_2 & a_2(y-y_2) - b_2(x-x_2) - kc_2 \\ b_3(z-z_3) - c_3(y-y_3) - ka_3 & c_3(x-x_3) - a_3(z-z_3) - kb_3 & a_3(y-y_3) - b_3(x-x_3) - kc_3 \end{vmatrix} = 0.$$

oder

$$18)\quad k^3\triangle + k^2\triangle' + k\triangle'' + \triangle''' = 0.$$

Die Gleichung 18) zeigt, dass durch jeden Punct des Raumes drei durch eine cubische Gleichung bestimmte Axen von Complexen hindurchgehen. Betrachtet man die Coefficienten $\triangle, \triangle', \triangle'', \triangle'''$ etwas genauer so ergibt sich dass $\triangle$ mit der schon oben betrachteten Determinante identisch ist. Auch $\triangle'$ ist eine Constante; $\triangle''$ enthält dagegen die Coordinaten $x\ y\ z$ in derjenigen Weise wie die linke Seite der Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunct mit dem Mittelpunct von $\odot = 0$ zusammenfällt. Endlich ist $\triangle'''$ identisch mit $\odot$. Die Summe der drei einem jeden Puncte zugehörigen Parameter ist also constant. Für Puncte der Axen der Complexe des Netzes ist daher die Summe der beiden nicht der Richtung der Axe zugehörigen Parameter constant. Die Summe der Quadrate der drei Parameter ist constant auf concentrischen Kugelflächen, deren Centrum der Mittelpunct von $\odot = 0$ ist. In jedem Puncte von $\odot = 0$ selbst ist einer der Parameter gleich Null. Da aber für einen solchen Werth des Parameters die Axe des Complexes die drei Geraden $l_1\ l_2\ l_3$ schneiden muss, so ist die Richtung derselben bestimmt durch die in diesem Puncte die genannte Bedingung erfüllende Erzeugende von $\odot$. Dies entspricht dem bekannten Satze, dass die Kanten des Asymptotenkegels den Erzeugenden parallel sind, und aus der Schlussbemerkung dieses §. leuchtet ein, dass derselbe nicht nur für das eine System von Erzeugenden sondern auch für das andere gilt.

Unter der Voraussetzung nun dass das Coordinatensystem so gewählt ist, dass die Axen derselben Hauptaxen des Hyperboloids sind, lassen sich die obigen Gleichungen weiter vereinfachen. Zu diesem Zwecke multiplicire ich die Gleichungen 14) mit den aus der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

genommenen Unterdeterminanten. Man erhält so

$$x \begin{vmatrix} \beta c_1 - \gamma b_1 & b_1 c_1 \\ \beta c_2 - \gamma b_2 & b_2 c_2 \\ \beta c_3 - \gamma b_3 & b_3 c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \gamma a_1 - \alpha c_1 & b_1 c_1 \\ \gamma a_2 - \alpha c_2 & b_2 c_2 \\ \gamma a_3 - \alpha c_3 & b_3 c_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \alpha b_1 - a_1\beta & b_1 c_1 \\ \alpha b_2 - a_2\beta & b_2 c_2 \\ \alpha b_3 - a_3\beta & b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} \cos\Theta_1 & b_1 & c_1 \\ \cos\Theta_2 & b_2 & c_2 \\ \cos\Theta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

also die neuen Gleichungen

$$\gamma y - z\beta = k\alpha + \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\alpha + A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma$$

$$\textbf{19)}\quad -z\alpha + x\gamma = k\beta + \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\beta + A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma$$

$$x\beta - y\alpha = k\gamma + \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix} = k\gamma + A_3\alpha + B_3\beta + C_3\gamma$$

Durch Multiplication derselben mit $\alpha\beta\gamma$ entsteht

$$0 = k + \alpha^2 A_1 + \beta^2 B_2 + \gamma^2 C_3 + \alpha\beta\,(B_1 + A_2) + \alpha\gamma\,(C_1 + A_3) + \beta\gamma\,(C_2 + B_3)$$

so dass also

$$B_1 + A_2 = 0, \qquad C_1 + A_3 = 0, \qquad C_2 + B_3 = 0$$

zu setzen ist.

In den k nicht enthaltenden Gliedern der Determinante

$$\begin{vmatrix} k + A_1 & B_1 + z & C_1 - y \\ A_2 - z & k + B_2 & C_2 + x \\ A_3 + y & B_3 - x & k + C_3 \end{vmatrix} = 0$$

müssen ferner die Coefficienten von x y z verschwinden, dies führt auf die Bedingungen

$$C_2 - B_3 = 0 \qquad B_1 - A_2 = 0 \qquad A_3 - C_1 = 0.$$

Demnach verschwinden sämmtliche Grössen $A_2\, A_3\, B_1\, B_3\, C_1\, C_2$ und die Gleichungen 19) reduciren sich auf

$$\textbf{20)}\quad \begin{aligned} \gamma y - z\beta &= \alpha\,(k + A_1) \\ z\alpha - x\gamma &= \beta\,(k + B_2) \\ x\beta - y\alpha &= \gamma\,(k + C_3) \end{aligned}$$

Die Gleichung 18) erhält die Form:

$$\textbf{21)}\quad k^3 + k^2\,(A_1 + B_2 + C_3) + k\,(x^2 + y^2 + z^2 + A_1B_2 + A_1C_3 + B_2C_3) + x^2A_1 + y^2B_2 + z^2C_3 + A_1B_2C_3 = 0$$

oder auch

$$1 + \frac{x^2}{(k+B_2)(k+C_3)} + \frac{y^2}{(k+A_1)(k+C_3)} + \frac{z^2}{(k+A_1)(k+B_2)} = 0$$

Durch Multiplication von 20) mit x y z entsteht unter Berücksichtigung von 12)

$$\textbf{22)}\quad kp + A_1\alpha x + B_2\beta y + C_3\gamma z = 0$$

also die Gleichung einer Ebene, welche stets den in 12) liegenden Centralpunct O enthält. Endlich hat man

$$\textbf{23)}\quad k + A_1\alpha^2 + B_2\beta^2 + C_3\gamma^2 = 0 \quad \text{und}$$

$$\textbf{24)}\quad x^2A_1 + y^2B_2 + z^2C_3 + A_1\,B_2\,C_3 = 0$$

als Gleichung des Hyperboloids, welches die Basis des Complexnetzes bestimmt.

Man hat nun für einen Durchmesser ϱ des Hyperboloids

$$x = \varrho\alpha$$
$$y = \varrho\beta$$
$$z = \varrho\gamma$$
$$\alpha^2 A_1 + \beta^2 B_2 + \gamma^2 C_3 = -\frac{A_1 B_2 C_3}{\varrho^2}$$
$$k = \frac{A_1 B_2 C_3}{\varrho^2}$$

Der Parameter ist also umgekehrt dem Quadrate des Durchmessers des Hyperboloids proportional, welchem er parallel läuft. Da die Summe der Quadrate dreier conjugirter Durchmesser einer Fläche zweiten Grades eine Constante ist so erhält man den Satz:

Die Summe der reciproken Werthe von drei Parametern von Complexen des Netzes, deren Axen dreien conjugirten Durchmessern der Basis desselben parallel laufen, ist constant. Plücker nennt drei solche Complexe des Netzes conjugirte.

Die Gleichung der Ebene 22) wird dadurch:

$$\frac{A_1 B_2 C_3}{\varrho^2} p + A_1\alpha x + B_2\beta y + C_3\gamma z = 0$$

Die Tangentialebene des Hyperboloids im Puncte $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$ ist dagegen

$$\frac{A_1 B_2 C_3}{\varrho} + A_1\alpha x + B_2\beta y + C_3\gamma z = 0.$$

Die Ebene 22) welche nebst 12) den Centralpunct O enthält, läuft daher der Tangentialebene in dem Puncte parallel, in welchem das Hyperboloid von der aus dem Anfangspunct auf 12) gezogenen Normale geschnitten wird. Zur Construction des einer beliebigen Ebene 12) entsprechenden Centralpunctes O kann man sich überhaupt der Gleichungen

$$25)\ \begin{cases} \gamma p - z = \alpha\beta\,(A_1 - B_2) \\ \beta p - y = \alpha\gamma\,(C_3 - A_1) \\ \alpha p - x = \beta\gamma\,(B_2 - C_3) \end{cases}$$

bedienen, welche man leicht durch Elimination von k aus 20) erhält. Setzt man $p = 0$, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, so entsteht

$$- z = \alpha\beta\,(A_1 - B_2)$$
$$- y = \alpha\gamma\,(C_3 - A_1)$$
$$- x = \beta\gamma\,(B_2 - C_3)$$

$$26)\quad - xyz = (A_1 - B_2)(C_3 - A_1)(B_2 - C_3)(\alpha\beta\gamma)^2$$

ferner

$$\gamma = \frac{A_1 - B_2}{-z}\,\alpha\beta\gamma$$
$$\alpha = \frac{B_2 - C_3}{-x}\,\alpha\beta\gamma$$
$$\beta = \frac{C_3 - A_1}{-y}\,\alpha\beta\gamma$$

woraus durch Quadriren und Addiren, unter Benutzung von 26)

$$27)\quad xyz\,(A_1-B_2)(B_2-C_3)(C_3-A_1) + y^2x^2\,(A_1-B_2)^2 + z^2y^2\,(B_2-C_3)^2 + (C_3-A_1)^2\,x^2z^2 = 0.$$

Diese Fläche vierten Grades enthält also sämmtliche Centralpuncte, welche den durch den Anfangspunct gehenden Ebenen entsprechen. Setzt man $x = \varrho\alpha$ etc., so ergibt sich, dass sie im Anfang einen dreifachen Punct besitzt. Sie wird daher von den beiden Ebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$
$$\alpha A_1 x + \beta_1 B_2 y + \gamma C_3 z = 0$$

in einem einzigen vierten Puncte geschnitten.

Dreht sich die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ um eine Linie, deren Richtungscosinus $\alpha' \beta' \gamma'$ sind, so ist

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \quad \text{oder}$$
$$\frac{A_1 - B_2}{z}\gamma_1 + \frac{B_2 - C_3}{x}\alpha_1 + \frac{C_3 - A_1}{y}\beta_1 = 0.$$

Der zugehörige Punct $x y z$ durchläuft dann eine Curve, welche durch den Schnitt dieser letzteren Kegelfläche mit der Fläche vierten Grades bestimmt ist. Dieser Schnitt ist dann eine ebene Curve, wenn die absoluten Werthe von $\alpha' \beta' \gamma'$ gleich sind, wie sich leicht aus der Verbindung mit der Gleichung jener Fläche ergiebt. Trägt man auf der jedesmaligen Richtung $\alpha\beta\gamma$ die zugehörige Länge des Parameters k vom Anfangspunct aus ab, so bestimmt der Endpunct derselben eine Fläche, deren Gleichung

$$28)\quad (x^2 + y^2 + z^2)^3 + (A_1 x^2 + B_2 y^2 + C_3 z^2)^2 = 0.$$

Vgl. über diese Fläche Plücker Neue Geom. des Raumes §. 130.

Man erhält ferner als Lösung der cubischen Gleichung 21) im Anfangspuncte

$$k_1 = -A_1$$
$$k_2 = -B_2$$
$$k_3 = -C_3$$

welchen Werthen die folgenden für die Richtungen der zugehörigen Axen entsprechen:

$$\alpha_1 = 1 \quad \beta_1 = 0 \quad \gamma_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0 \quad \beta_2 = 1 \quad \gamma_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0 \quad \beta_3 = 0 \quad \gamma_3 = 1$$

Durch den Anfangspunct oder das Centrum der Basis des Netzes gehen daher drei auf einander senkrecht stehende Axen von Complexen desselben. Für einen beliebigen Punct auf einer der Hauptaxen der Basis, z B $x = 0 \quad y = 0$, ist $k_3 = -C_3 \quad \gamma_3 = 1$ während die beiden anderen Parameter gegeben sind durch die Gleichungen

$$-z\beta = (k + A_1)\,\alpha$$
$$+z\alpha = (k + B_2)\,\beta, \quad \gamma = 0.$$
$$\text{woraus:}\quad -z = (A_1 - B_2)\,\alpha\beta$$

Setzt man $\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ so entsteht als Gleichung derjenigen Linienfläche, welche die Axen sämmtlicher Complexe bestimmt, deren Centralpunct auf der Z Axe liegt:

$$-z\,(x^2 + y^2) = x y\,(A_1 - B_2)$$

welche der Form nach ganz mit derjenigen übereinstimmt, welche bei der Bestimmung der Complexe eines Büschels sich ergab.

Für jeden Punct des Hyperboloids 24) ist einer der Parameter gleich Null. Zwei derselben verschwinden, wenn der Punct x y z auf dem Durchschnitt der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + A_1 B_2 + B_2 C_3 + C_3 A_1 = 0$$

mit dem Hyperboloid gewählt ist. Im speciellen Falle $A_1 + B_2 + C_3 = 0$ sind für einen jeden Punct des Hyperboloids die beiden anderen Parameter von gleichem entgegengesetzten Werthe, alle drei aber Null auf dem ebenerwähnten Durchschnitte. Die Bestimmung der drei durch einen Punct $x y z$ gehenden Complexaxen hängt im Allgemeinen von der Lösung der cubischen Gleichung 21) ab. Man kann dieselbe auch als Gleichung von concentrischen Flächen zweiten Grades betrachten, von denen ähnlich wie bei confocalen je drei durch ein und denselben Punct hindurchgehen. Die Richtungscosinus der Tangentialebenen im Puncte x y z sind proportional mit

$$x\,(k + A_1), \qquad y\,(k + B_2), \qquad z\,(k + C_3)$$

Schreibt man 22) in der Form

$$\alpha x\,(k + A_1) + \beta y\,(k + B_2) + \gamma z\,(k + C_3) = 0$$

so erkennt man, dass die drei Axen Tangenten an jene drei Flächen sind. Zur geometrischen Bestimmung der drei Axen hat man übrigens:

$$\textbf{28)}\quad \alpha A_1 x + \beta B_2 y + \gamma C_3 z - (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,(A_1 \alpha^2 + B_2 \beta^2 + C_3 \gamma^2) = 0$$

sowie durch Multiplication von 25) mit x y z

$$\textbf{29)}\quad (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \alpha\beta\,(A_1 - B_2)\,z + \alpha\gamma\,(C_3 - A_1)\,y + \beta\gamma\,(B_2 - C_3)\,x = 0$$

Die letzteren beiden Flächen 28) und 29) stellen zwei Kegel vom dritten und zweiten Grade vor, falls $\alpha\,\beta\,\gamma$ ersetzt werden durch xt yt zt wo

$$t = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Da denselben die drei Coordinatenaxen gemeinschaftlich sind, so scheiden sie sich ausserdem noch in drei weiteren Kanten, den Richtungen der durch den gegebenen Punct x y z gehenden Complexaxen.

Man sieht endlich, wie bei gleichzeitiger Vertauschung der Zeichen von A_1 B_2 C_3 24) ungeändert bleibt, während die 3 aus 21) zu bestimmenden Parameter die entgegengesetzten Zeichen annehmen. Da die Gleichungen 20) im Wesentlichen ungeändert bleiben, so gehören zu jeder Fläche 24) zwei Complexnetze, welche sich durch gleiche aber entgegengesetzte Parameterwerthe in jedem Puncte characterisiren. Da dem zweiten Netze nicht dasjenige System der Erzeugenden als Basis zugeordnet sein kann, welches bisher ins Auge gefasst wurde, so ist demselben das zweite System der Erzeugenden von 24) angehörig.

V.

Nachdem die Eigenschaften der Complexe untersucht sind, welche 5, 4, 3 Linien gemeinschaftlich haben, bleibt noch übrig, solche Complexe zu betrachten, denen nur 2 Linien angehörig sind. Dieselben bilden eine Schaar. Jeder Ebene im Raume entspricht eine in ihr liegende Linie, der Ort der Centralpuncte sämmtlicher Complexe, deren Axen auf jener Ebene senkrecht stehen (vgl. die Gleichungen 11). So lange als die beiden Linien sich nicht schneiden, gehören ausser ihnen keine der Schaar an; in dem genannten speciellen Falle selbstverständlich das ganze durch sie bestimmte ebene Strahlbüschel. Ferner gehören drei Complexe stets zu einem Netze. Denn zwei von ihnen bilden eine Plücker'sche Congruenz, aus welcher durch den dritten ein System von Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades ausgesondert wird. Nehme ich nun eine der Erzeugenden der zweiten Art, so wird sie von sämmtlichen eben genannten geschnitten. Die conjugirte Polare derselben in Bezug auf einen vierten Complex schneidet die Fläche zweiten Grades in zwei Puncten, durch welche je eine Linie geht, welche allen vier Complexen angehört. Je vier Complexe gehören demnach im allgemeinen zu einer Schaar.

Wird nun das Coordinatensystem so angenommen, dass die X Axe mit der kürzesten Linie zwischen den beiden gegebenen zusammenfällt, die Z Axe den Winkel $2\,\Theta$ derselben halbiert, während der Anfang auf der Mitte der kürzesten Linie liegt, so sind die Gleichungen der Basis:

$$\begin{array}{ll} z = rc & z = rc \\ y = rb & y = -rb \\ x = x' & x = -x' \end{array}$$

Demnach nach 14) für die Ebene 12)

$$k\gamma = x\beta - y\alpha + \frac{b}{c}\,\gamma x'$$

$$k\beta = -x\gamma + z\alpha - \frac{c}{b}\,\beta x'$$

woraus durch Elimination von k

$$30)\quad x - \alpha p + \frac{x'\gamma\beta}{bc} = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt, wenn die Ebene 12) gegeben ist, eine in ihr liegende der ZY Ebene parallele Gerade als Ort der Centralpuncte. In der Form

$$x\,(\beta^2 + \gamma^2) - y\alpha\beta - z\alpha\gamma + \frac{x'\gamma\beta}{bc} = 0$$

geschrieben zeigt sie dass jedem Puncte x y z ein System von Ebenen entspricht, deren Normalen eine Kegelfläche

$$x\,(\xi^2 + \eta^2) - y\eta\xi - z\zeta\xi + \frac{x'\eta\zeta}{bc} = 0$$

bilden, während

$$p = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Die den Ebenen entsprechenden Linien bilden ein durch den Punct x y z gehendes der Z Y Ebene paralleles Büschel. Den Puncten einer beliebigen Geraden entsprechen Kegel, welche ein Büschel bilden. Da unter denselben sich drei in Ebenen zerfallende finden, so gibt es auf jeder geraden Linie im Raume drei Puncte, für welche die Normalen derjenigen Ebenen, deren entsprechende Linie durch den betreffenden geht, in zwei Ebenen liegen, also die den Puncten entsprechenden Ebenen sich um zwei verschiedene Gerade drehen. Der Parameter k ergibt sich aus der Gleichung

$$k\,(\beta^2 + \gamma^2) = \alpha\,(z\beta - \gamma y) + \left(\frac{b^2\gamma^2 - c^2\beta^2}{bc}\right) x'$$

Umgekehrt geht durch jede der ZY Ebene parallele Gerade

$$x = h$$
$$ym + nz = 1$$

nur eine einzige Ebene, für welche jene Gerade Ort der Centralpuncte ist, deren Gleichung für

$$q = \frac{x'm}{h\,n\,b\,c} + 1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2h^2}$$

ist $$31)\quad h\,(xn^2qh + ym + zn) - (x + n^2h^3q) = 0.$$

Setzt man, wie auch vorhin geschehen $p = 0$, so ist aus 30)

$$32)\quad x = \frac{-x'\beta\gamma}{bc}$$

Diejenigen Ebenen, deren entsprechende Gerade in der Ebene $x = h$ liegt, während sie selbst durch den Anfang gehen, sind daher bestimmt durch 32), welche als Gleichung der von ihren Normalen im Anfangspuncte bestimmten Fläche den Kegel

$$32\,b)\quad h\,(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x'yz}{bc} = 0 \text{ gibt.}$$

Die Gleichung der von den Linien $ym + nz = 1$ in der Ebene $x = h$ eingehüllten Curve findet man in 31) aus der Bedingung

$$q = 0$$

oder auch aus 32):

$$33)\quad 4\left(\frac{yzx'}{bc} - h\,(z^2 + y^2)\right) = h\left(2h + \frac{x'}{bc}\right)\left(2h - \frac{x'}{bc}\right)$$

Dreht man die positive Y Axe um den Winkel 45^0 nach der positiven Z Axe hin, so ist

$$y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2$$

$$yz = \frac{z'^2 - y'^2}{2}$$

also Gleichung 33) mit Weglassung der Indices

$$34)\quad -2\left(\frac{y^2}{2h - \frac{x'}{bc}} + \frac{z^2}{2h + \frac{x'}{bc}}\right) = h$$

Während also die durch den Anfangspunct gehenden Ebenen zu den Kanten des Kegels 32 b) senkrecht stehen, hüllen die in ihnen liegenden Orte der Centralpuncte Linien zweiten Grades ein, deren Hauptaxen unveränderliche Richtungen haben, während ihr Centrum auf der X Axe liegt. Sämmtliche Linien bilden zusammen eine Fläche

$$-2\left(\frac{y^2}{2x - \frac{x'}{bc}} + \frac{z^2}{2x + \frac{x'}{bc}}\right) = x$$

Dieselbe schneidet die yz Ebene in $y^2 - z^2 = 0$, d. h. in den beiden Axen des ursprünglichen Coordinatensystems, die xy Ebene in $y^2 = \frac{xx'}{2bc} - x^2$, also in einem Kreise dessen Radius $\frac{x'}{4bc}$ ist. Die Curven 34) sind reelle Hyperbeln so lange $\frac{x'}{bc} > 2h$ oder $\frac{x'}{\sin 2\Theta} > h$ für positives h. Für negatives h erhält man genau dieselben Hyperbeln, aber mit um 90^0 gedrehten Axen. Die Asymptoten derselben bilden eine Linienfläche deren Gleichung für $h = x$ ist

$$\frac{y}{z} = \pm\sqrt{\frac{\frac{x'}{2bc} - x}{\frac{x'}{2bc} + x}}$$

oder in Bezug auf die ursprünglichen Axen

$$x(z^2 + y^2) - \frac{2x'}{\sin 2\Theta} yz = 0$$

also dieselbe, welche schon bei verschiedenen Gelegenheiten bei der Betrachtung der Complexgebilde hervorgetreten ist.

Zieht man durch den Anfang eine beliebige Linie l, so entsprechen jedem Puncte $x_0\, y_0\, z_0$ derselben Ebenen, deren Richtungsnormalen eine Kegelfläche

$$h(x^2 + y^2 + z^2) = x(xx_0 + yy_0 + zz_0) - \frac{x'yz}{bc}$$

bilden, falls die zugehörigen Linien der Centralpuncte in der Ebene $x = h$ liegen. Sämmtliche Kegel bilden ein Büschel. Die entsprechenden eingehüllten Curven in der Ebene $x = h$ sind bestimmt durch die Gleichung

$$qn^2h^2(x_0 - h) + h(y_0 m + z_0 n) - x_0 = 0$$

bilden also ein System von Kegelschnitten, welche dem aus den beiden Asymptoten von 34) und den beiden, vom Schnittpuncte der Ebene $x = h$ mit der Geraden l ausgehenden Tangenten von 34), gebildeten Viereck eingeschrieben sind.

Lingen, 30. Januar 1872.

A. Voss.