Analytisch-geometrische Untersuchungen

von

Dr. A. Gleue.

Vorbemerkung.

Bei Gelegenheit des von mir ertheilten Unterrichts in der analytischen Geometrie kam es mir unter andern auch darauf an, Aufgaben zusammenzustellen, welche dem Schüler Gelegenheit geben sollten, die Ableitung der Gleichungen gewisser Curven aus den zu ihrer Construction gegebenen Bedingungen zu üben und soweit möglich aus der gefundenen Gleichung den Lauf der Curve abzuleiten. Dies führte mich auch auf eine Classe von Curven, die in ähnlicher Weise construiert doch eine Menge verschiedener Formen gewähren. Einige derselben sind nun im ersten Theile dieser Arbeit zusammengestellt und obigem Zwecke entsprechend bearbeitet, während im zweiten Theile eine von ihnen mit Hülfe der Differential- und Integral-Rechnung näher untersucht ist.

I.

§. 1.

Es sei BC Fig. 1 eine gegebene Grade und A ein fester Punkt, von welchem aus alle Graden nach BC gezogen seien, und auf jeder z. B. AC sei von C aus ein in den einzelnen Fällen näher zu bestimmendes Stück $r = CE$ abgetragen, so sollen diese Punkte E Punkte der zu untersuchenden Curve sein.

Sei zunächst das Coordinatensystem so bestimmt, dass A Anfangspunkt, das Loth von A auf BC die positive X-Achse und das Loth auf der X-Achse in A die Y-Achse ist, dann ist das Loth $EF = y$ und $AF = x$. Sei ausserdem die constante Entfernung $AB = a$, $CB = p$ und $EC = r$ so ist

$$\frac{p}{y} = \frac{a}{x} \text{ oder } p = \frac{ay}{x} \qquad 1.$$

$$\text{und } \frac{EC}{FB} = \frac{AE}{AF} \text{ d. h. } \frac{r}{a-x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \text{ oder } r = \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2} \qquad 2.$$

§. 2.

Ist das abzutragende Stück $CE=r$ constant $=b$, so ist nach 2

3. $$b = \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{oder} \quad b^2x^2=(a-x)^2(x^2+y^2)$$

Dies ist die Gleichung der gewöhnlichen Conchoide (des Nicomedes); meistens legt man bei dieser Linie den Anfangspunkt des Coordinatensystems nach B und vertauscht x und y; thut man dieses in Gleichung 3, nachdem $x+a$ statt x gesetzt ist, so erhält man die gewöhnliche Gleichung. Gleichung 3 nach y aufgelöst gibt

$$y = \mp \frac{x}{a-x}\sqrt{b^2-(a-x)^2}$$

Es gehören also zu jedem x zwei gleich grosse einander entgegengesetzte Werthe von y d. h. die Curve liegt zu beiden Seiten der X-Achse gleichmässig. Bei der weitern Untersuchung sind nun die 3 Fälle zu unterscheiden, ob $b \gtreqless a$ ist. Ist $b < a$, so bleibt für positive x y so lange imaginär als

$a-x > b$ oder $x < a-b$; wenn $x=a-b$, so ist $y=o$, wird $x > a-b$ aber $< a$, so nimmt mit wachsendem x $a-x$ ab, also die Wurzel zu, ebenso nimmt der Zähler x zu und der Nenner $a-x$ ab, also wird y mit wachsendem x grösser; wird $x=a$, so ist $y=\infty$.

Wird $x > a$, so wird $(a-x)^2$ mit wachsendem x grösser also die Wurzel immer kleiner bis zur 0; $\frac{x}{a-x}$ oder $\frac{1}{\frac{a}{x}-1}$ dagegen nähert sich der bestimmten Grenze -1, also der ganze Werth von y nimmt ab; wenn $x=a+b$, so ist $y=0$, für $x > a+b$ wird y wieder imaginär; ebenso wird für negative x $a-x > b$, also y imaginär.

Die Curve hat mithin die Gestalt von Fig. 2. Aehnlich ist die Untersuchung für die Fälle, wenn $a \leqq b$ ist.

§. 3.

Ist das abzutragende Stück $r=CB$, also $r=p$, so ist nach 1 und 2

$$\frac{ay}{x} = \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$a^2y^2 = x^2(a-x)^2(x^2+y^2)$$
$$a^2y^2 = a^2x^2-2ax^3+x^4+a^2y^2-2axy^2+x^2y^2$$

4. $$y^2 = \frac{x^3-2ax^2+a^2x}{2a-x} = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$$

Diese Curve soll im 2. Theile näher untersucht werden.

§. 4.

Halbiert man Winkel A Fig. 1, nennt D den Durchschnittspunkt der Halbierenden mit BC und macht $r = CD$, so ist

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \text{ d. i. } \frac{r}{p-r} = \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{a} \text{ also nach 1 und 2}$$

$$\frac{a(a-x)}{x}\sqrt{x^2+y^2} = \left[\frac{ay}{x} - \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2}\right]\sqrt{a^2+\frac{a^2y^2}{x^2}}$$
$$\frac{a(a-x)}{x} = \left[\frac{ay}{x} - \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2}\right]\frac{a}{x}$$
$$x(a-x) = ay - (a-x)\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(a-x)\sqrt{x^2+y^2} = ay - ax + x^2 \text{ quadriert und gehoben}$$
$$-2axy^2+x^2y^2 = 2ax^2y - 2a^2xy$$
$$xy - 2ay = 2ax - 2a^2$$
$$y = \frac{2a(x-a)}{x-2a} = \frac{2a\left(1-\frac{a}{x}\right)}{1-\frac{2a}{x}}. \qquad 5.$$

Dies ist also die Gleichung der Curve, die nun näher zu untersuchen. Für $x=a$ wird $y=o$, mit abnehmendem x wächst y so lange $x > o$, denn

$$\frac{x-a}{x-2a} < \frac{x-d-a}{x-d-2a} \text{ denn}$$
$$(x-a)(x-d-2a) < (x-d-a)(x-2a)$$
$$(x-a)(x-2a)-(x-a)d < (x-a)(x-2a)-(x-2a)d$$

$x-a$ und $x-2a$ sind negativ, mithin alle 4 Summanden im Resultat positiv, der erste ist gleich dem 3ten und der 2te kleiner als der 4te; also y mit abnehmendem x wachsend. Für $x=o$ wird $y=a$; für negative x wächst y noch mehr, bis es für $x=-\infty$ den Werth 2a erreicht, wie aus der 2ten Form von 5 unmittelbar folgt.

Für $x \begin{smallmatrix} > a \\ < 2a \end{smallmatrix}$ wird der Zähler positiv, der Nenner bleibt negativ, also wird y negativ und mit wachsendem x negativ zunehmend, denn

$$\frac{x+d-a}{x+d-2a} < \frac{x-a}{x-2a} \text{ da}$$
$$(x-2a)(x-a)+d(x-2a) < (x-a)(x-2a)+d(x-a)$$

die beiden ersten Glieder sind negativ, ebenso das 3te = dem ersten, das 4te positiv, also die rechte Seite > die linke. Für $x > 2a$ ist y wieder positiv und nimmt ab mit wachsendem x denn

$$(x+d-a)(x-2a) < (x-a)(x+d-2a)$$
$$(x-a)(x-2a)+d(x-2a) < (x-a)(x-2a)+(x-a)d$$

alle Glieder sind positiv, das erste = dem 3ten, das 4te grösser als das 2te, also die rechte Seite grösser als die linke. Für $x=3a$ wird $y=4a$, für $x=4a$ $y=3a$, für $x=\infty$ $y=2a$. Der letzte Werth folgt wieder aus der 2ten Form von Gleichung 5.

Dieser Theil der Curve entsteht, wenn man den Aussenwinkel von A halbiert. Die ganze Curve hat also die Gestalt von Fig. 3. Setzt man statt x $x+2a$ und $y+2a$ statt y, so erhält man aus Gleichung 5

$$xy = 2a^2 \qquad 6.$$

d. i. die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die beiden Asymptoten.

§. 5.

Ist r so construirt, dass CA mittlere Proportionale zwischen r und p ist, so ist

$$CA^2 = a^2 + p^2 = rp \quad \text{also nach 1 und 2}$$

$$a^2 + \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{ay}{x}\left(\frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = ay\,(a-x)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$a\sqrt{x^2+y^2} = y\,(a-x)$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 = y^2a^2 - 2y^2ax + y^2x^2$$

$$a^2x^2 = y^2(x^2-2ax)$$

7. $$y^2 = \frac{a^2x}{x-2a} = \frac{a^2}{1-\frac{2a}{x}}$$

Für $x = o$ wird auch $y = o$, für positive x wird y imaginär, so lange $x < 2a$, für $x = 2a$ wird $y \mp \infty$. Für $x > 2a$ wird y reell und hat 2 gleich grosse einander entgegengesetzte Werthe. Mit steigendem x fällt y, denn

$$\frac{x}{x-2a} > \frac{x+d}{x+d-2a} \quad \text{da}$$

$$x^2+dx-2ax > x^2+dx-2ax-2ad$$

wird $x = \infty$, so wird nach der 2ten Form in Gleichung 7 $y = \mp a$. Für negative x wird y wieder reell und hat 2 gleich grosse einander entgegengesetzte Werthe, und zwar nimmt y zu mit wachsendem negativen x, denn

$$\frac{-x}{-x-2a} < \frac{-x-d}{-x-d-2a}$$

$$x^2+xd+2ax < x^2+dx+2ax+2ad$$

Für $x = -\infty$ wird wieder nach der 2ten Form in 7 $y = \mp a$. Die Curve hat mithin die Gestalt von Fig. 4.

§. 6.

Ist r mittlere Proportionale zwischen p und AC also $r^2 = p\,.\,AC$ so ist

$$r^2 = p\sqrt{a^2+p^2} \quad \text{also nach 1 und 2}$$

$$\frac{(a-x)^2(x^2+y^2)}{x^2} = \frac{ay}{x}\cdot\frac{a}{x}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(a-x)^2\sqrt{x^2+y^2} = a^2y.$$

$$(a-x)^4x^2 = a^4y^2 - (a-x)^4y^2$$

8. $$y^2 = \frac{x^2(a-x)^4}{a^4-(a-x)^4}$$

Für negative x wird y imaginär, da der Zähler positiv wird, der Nenner dagegen negativ, weil bei negat. x $(a-x)^4 > a^4$ ist. Für $x = o$ wird auch $y = o$, ebenso für $x = a$ $y = o$, der Gang zwischen $x = o$ und $x = a$ ist so einfach nicht festzustellen, doch bleibt y immer reell, muss also an einer Stelle ein Maximum erreichen, und es hat immer 2 gleich grosse entgegengesetzte Werthe. Wird $x > a$, so wächst x^2, ebenso $(a-x)^4$, der Nenner dagegen nimmt ab, da der 2te Theil desselben wächst, mithin wächst der ganze Bruch also auch y; wird aber $x = 2a$, so wird der Nenner $a^4 - a^4 = o$, also $y = \infty$, für $x > 2a$ wird y imaginär. Die Curve hat also die Gestalt von Fig. 5. Sie entfernt sich vom Punkte A ausgehend zuerst auf beiden Seiten gleichmässig von der X-Achse, kehrt dann um und erreicht sie wieder im Punkte B, und entfernt sich dann wieder bis ins ∞ von der X-Achse, indem sie sich immer mehr dem in der Entfernung $x = 2a$ auf der X-Achse errichteten Lothe nähert, ohne es jemals zu erreichen.

§. 7.

Ist r so construiert, dass $rp = a . AC$ oder $\frac{p}{a} = \frac{AC}{r}$ so ist $pr = a\sqrt{a^2+p^2}$ also nach 1 und 2

$$\frac{ay}{x} \cdot \frac{a-x}{x} \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{a^2+\frac{a^2y^2}{x^2}}$$

$$ay(a-x)\sqrt{x^2+y^2} = ax\sqrt{a^2x^2+a^2y^2}$$

$$y(a-x) = ax$$

$$y = \frac{ax}{a-x} \qquad 9.$$

Setzen wir $y-a$ statt y und $x+a$ statt x d. h. verschieben wir den Anfangspunkt des Coordinatensystems um a nach der positiven Richtung der x und um a nach der negativen Richtung der y, so erhalten wir

$$y-a = \frac{a(x+a)}{a-x-a} \text{ d. h. } -yx = a^2$$

oder wenn wir auch die positiven und negativen y gegen einander vertauschen $xy = a^2$ d. h. die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel bezogen auf ihre beiden Asymptoten. Die Untersuchung der Gleichung 9 gibt: für $x = a$ wird $y = \infty$, für $x = o$ wird $y = o$, für $x \gtrless a$ wächst y mit wachsendem x, denn der Nenner nimmt ab, und der Zähler wächst. Für negative x wird y negativ und nähert sich $-a$, je grösser negativ x wird, denn

$$\frac{-ax}{a+x} > \frac{-ax-da}{a+x+d} \text{ weil}$$

$$-a^2x-ax^2-axd > -a^2x-ax^2-a^2d-adx$$

$$o > -a^2d$$

für $x = -\infty$ wird $y = \frac{ax}{a-x} = \frac{a}{\frac{a}{x}-1} = -a.$

Für $x > a$ wird y negativ und wächst mit wachsendem x, denn

$$\frac{ax}{a-x} < \frac{ax+ad}{a-x-d}$$

$$a^2x-ax^2-axd < a^2x-ax^2+a^2d-axd$$

$$o < a^2d.$$

Für $x = \infty$ erreicht y wieder den Werth $-a$, da wieder $y = \frac{a}{\frac{a}{x}-1} = -a.$

Die Curve hat also die Gestalt von Fig. 6. Sie kommt von einer zur X-Achse in der Entfernung a auf der negativen Seite der y parallel gezogenen Graden in ∞ Entfernung ausgehend, allmählich der X-Achse näher, durchschneidet dieselbe im Punkte A, geht nach der positiven Seite der Y über und entfernt sich immer mehr von der X-Achse, während sie sich dem in B auf der X-Achse errichteten Lothe immer mehr nähert, ohne es je zu erreichen. Ein zweiter Theil der Curve liegt ebenso in dem gegenüberliegenden Winkel des in B auf der X-Achse errichteten Lothes und der in der Entfernung a auf der negativen y-Seite zur X-Achse parallel gezogenen Graden.

§. 8.

Ist r so construiert, dass $ra = p \,.\, AC$ oder $\frac{r}{AC} = \frac{p}{a}$, so ist

$$ra = p\sqrt{a^2+p^2} \text{ also nach 1 und 2}$$

$$a \,.\, \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ay}{x}\sqrt{a^2+\frac{a^2y^2}{x^2}}$$

$$(a-x)\,x\sqrt{x^2+y^2} = y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2}$$

$$(a-x)\,x = ya$$

10. $$y = \frac{(a-x)x}{a}$$

Für negative x wird auch y negativ und nimmt bis $-\infty$ ab, wenn x bis $-\infty$ abnimmt, denn beide Factoren des Zählers wachsen, der eine positiv, der andere negativ, und der Nenner bleibt constant; für $x = o$ wird auch $y = o$. Für $x > o$ werden, so lange $x < a$, beide Factoren des Zählers positiv, also auch y positiv, und der Unterschied zwischen einem zu x und einem zu $x+d$ gehörigen y ist

$$\frac{(a-x)x}{a} - \frac{(a-x-d)(x+d)}{a} = \frac{ax-x^2-ax-ad+x^2+xd+xd+d^2}{a}$$

$$= \frac{-ad+2xd+d^2}{a} = \frac{d}{a}\,(d+2x-a).$$

Dies ist aber positiv, wenn $d+2x > a$ d. h. wenn $x > \frac{a}{2}$; negativ dagegen, wenn $2x+d < a$ d. h. wenn $x < \frac{a}{2}$; so lange also $x < \frac{a}{2}$ wächst y, für $x > \frac{a}{2}$ nimmt y wieder ab. Für $x = a$ wird y wieder $= o$, für $x > a$ wird $a-x$ negativ also auch y negativ und zwar mit wachsendem x immer grösser negativ, denn beide Factoren des Zählers wachsen, der eine positiv, der andere negativ. Die Curve hat die Gestalt von Fig. 7, sie kommt aus negativ ∞ Ferne in Bezug auf x und auf y, durchschneidet in A die X-Achse, entfernt sich an der positiven Seite bis zur Entfernung $y = \frac{a}{4}$, welchen Punkt sie bei $x = \frac{a}{2}$ erreicht, nähert sich dann wieder der X-Achse, durchschneidet dieselbe im Punkte B und entfernt sich dann wieder in Bezug auf x und y ins ∞.

Setzen wir in Gleichung 10 $y + \frac{a}{4}$ statt y und $x + \frac{a}{2}$ statt x, und vertauschen wir ausserdem die positiven y mit den negativen, so erhalten wir $x^2 = ay$ d. h. die Gleichung der Parabel bezogen auf ihren Scheitel.

§. 9.

Ist r so construiert, dass $r^2 = a . AC$, also r mittlere Proportionale zwischen a und AC ist, so ist $r^2 = a \sqrt{a^2 + p^2}$, also nach 1 und 2

$$\frac{(a-x)^2}{x^2}(x^2+y^2) = a \sqrt{a^2 + \frac{a^2y^2}{x^2}}$$
$$(a-x)^2(x^2+y^2) = ax \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2}$$
$$(a-x)^2 \sqrt{x^2+y^2} = a^2x$$
$$x^2+y^2 = \frac{a^4x^2}{(a-x)^4}$$
$$y^2 = \frac{a^4x^2 - x^2(a-x)^4}{(a-x)^4} = x^2 . \frac{a^4-(a-x)^4}{(a-x)^4} \qquad \textbf{11.}$$

Für negative x wird x^2 positiv, $a - x > a$ also $a^4 - (a-x)^4$ negativ, der Nenner $(a-x)^4$ positiv, also y imaginär. Für $x = o$ wird $y = o$, für $x = a$, $y = \infty$. Zwischen $x = o$ und $x = a$ ist $a - x$ immer positiv und wird mit wachsendem x kleiner, also $a^4 - (a-x)^4$ wächst, x^2 ebenfalls, der Nenner nimmt ab, also y^2 wächst fortwährend zwischen $x = o$ und $x = a$, also auch y selbst und zwar zu beiden Seiten der X-Achse gleichmässig. Für $x = 2a$ wird der Zähler $= o$ also auch $y = o$. Mit bis a abnehmendem x wird auch $(a-x)^4$ kleiner, also der Zähler grösser, der Nenner kleiner, bis für $x = a$ der Zähler $= a^4$, der Nenner $= o$ wird, der ganze Bruch wird allmählich von o bis ∞ wachsen; nun ist er noch mit dem abnehmenden aber positiv reell bleibenden Factor x^2 zu multiplicieren, wodurch aber das Zunehmen des Bruches, da es bis ins ∞ geschieht, nicht aufgehoben werden kann, es wächst also auch y.

Die Curve ist mithin so beschaffen (Fig. 8), dass sie von $x = o$ und $x = 2a$ von der X-Achse ausgehend nach beiden Seiten sich bis ins ∞ von derselben entfernt, sich dabei aber mit beiden Armen dem in B errichteten Lothe immer mehr nähert ohne es je zu erreichen.

§. 10.

Halbiert man den Winkel C Fig. 1 und errichtet in dem Punkte, wo die Halbierungslinie AB schneidet, ein Loth, bis es AC trifft, so soll dieser Durchschnittspunkt E ein Punkt der Curve sein. Es ist dann $r = y$ mithin nach 1 und 2

$$\frac{a-x}{x}\sqrt{x^2+y^2} = y$$
$$(a^2-2ax+x^2)(x^2+y^2) = x^2y^2$$
$$(a-x)^2x^2 + (a^2-2ax)y^2 = o$$
$$y^2 = \frac{x^2(a-x)^2}{2ax-a^2} \qquad \textbf{12.}$$

Für $x = o$ wird auch $y = o$ (isolierter Punkt), für $x > o$ aber $< \frac{a}{2}$ wird der Zähler des Bruches positiv, der Nenner dagegen negativ, also y^2 negativ d. h. y imaginär.

Für $x = \frac{a}{2}$ wird der Nenner $= o$, also $y = \infty$. Für $x > \frac{a}{2}$ aber $< a$ werden Zähler und Nenner positiv, also wird y reell und hat 2 gleich grosse einander entgegengesetzte Werthe, und zwar nimmt y mit wachsendem x ab, da der Nenner wächst und der Zähler abnimmt; letzteres ist der Fall, weil

$(a-x)^2x^2 > (a-x-d)^2(x+d)^2$, wenn $x = \frac{a}{2}$ gesetzt wird, denn es wird

$$\frac{a^2}{4} \cdot \frac{a^2}{4} > \left(\frac{a}{2}-d\right)^2\left(\frac{a}{2}+d\right)^2$$

$$\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 > \left(\frac{a^2}{4}-d^2\right)^2$$

Für $x=a$ wird $y=o$. Für $x>a$ wächst Zähler und Nenner, aber schreibt man y^2 in der Form: $y^2 = \frac{(a-x)^2x}{2a-\frac{a^2}{x}}$ so sieht man, dass der Nenner mit wachsendem x sich nur der bestimmten Grenze 2a nähert, während der Zähler unbeschränkt wächst, d. h. y nimmt für $x>a$ unbeschränkt zu und hat 2 gleich grosse entgegengesetzte Werthe für jedes x.

Die Curve hat die Gestalt von Fig. 9, sie kommt von dem in der Mitte von AB errichteten Lothe aus ∞-Ferne, nähert sich allmählich der X-Achse, die sie im Punkte B erreicht, und entfernt sich dann nach beiden Seiten wieder ins ∞ in Bezug auf x und y.

§. 11.

Ist r so construiert, dass es mittlere Proportionale zwischen a und p also $r^2=ap$ ist, so ist nach 1 und 2

$$\frac{(a-x)^2}{x^2}(x^2+y^2) = a \cdot \frac{ay}{x}$$

$$(a-x)^2x^2+(a-x)^2y^2 = a^2xy$$

$$y^2 - \frac{a^2x}{(a-x)^2}\,y = -x^2$$

$$y = \frac{a^2x}{2(a-x)^2} \mp \sqrt{\frac{-4x^2(a-x)^4+a^4x^2}{4(a-x)^4}}$$

13. $$y = \frac{a^2x \mp x\sqrt{a^4-4(a-x)^4}}{2(a-x)^2}$$

Für negative x wird $a-x$ positiv, also die Wurzel imaginär, also auch y; für $x=o$ wird auch $y=o$, für $x>o$ wird y wieder imaginär, (A ist also isolierter Punkt) so lange $a^4 < 4(a-x)^4$ oder $\frac{a}{\sqrt{2}} < a-x$ oder $x < \frac{a\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}}$ oder $x < \frac{2a-a\sqrt{2}}{2}$; wird $x = \frac{2a-a\sqrt{2}}{2}$, so wird die Wurzel $=o$, also

$$y = \frac{a^2 \cdot \frac{2a-a\sqrt{2}}{2}}{2\left(a-\frac{2a-a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a^2(2a-a\sqrt{2})}{4\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a^2(2a-a\sqrt{2})}{2a^2}$$

$$y = \frac{2a-a\sqrt{2}}{2} \text{ d. h. } = x$$

wird $x >$ dieser Werth, so wird der 2te Summand unter dem Wurzelzeichen $< a^4$ mithin die Wurzel immer grösser und zwar allmählich zunehmend, bis sie für $x=a$ zu a^2 wird. Nehmen wir nun zunächst das posit. Zeichen vor der Wurzel, so sehen wir, dass der Zähler des Bruches wächst, der Nenner a−x bis zu 0 abnimmt, d. h. es wächst von jenem Punkte an y stetig bis ins ∞, welchen Werth es bei $x = a$ erreicht; wird $x > a$, so wächst $(a-x)^4$ wieder, der Radicand nimmt ab, bis er zu 0 wird, wenn $a - x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ d. h. wenn $x = a + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2a + a\sqrt{2}}{2}$, dann wird y auch $= \frac{2a + a\sqrt{2}}{2}$; für grössere Werthe von x wird y imaginär. Nehmen wir jetzt das negative Zeichen vor der $\sqrt{}$, so ist für $x = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2}$ wie oben $y = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2}$; für wachsende x wird nun aber der Zähler kleiner und der Nenner ebenso, man kann also nicht entscheiden, ob der ganze Bruch ab- oder zunimmt, für $x = a$ wird $y = \frac{0}{0}$, eine Form, deren Werth mit Hülfe der Differentialrechnung in diesem Falle $= 0$ gefunden wird, d. h. dieser Theil der Curve trifft bei B die X-Achse. Der Werth von y für diesen Fall kann auch auf folgende Weise gefunden werden; man berechne zuerst:

$$\sqrt{a^4 - 4(a-x)^4} = a^2 - \frac{2(a-x)^4}{a^2} - \frac{2(a-x)^8}{a^6} - \ldots$$

$$\begin{array}{l|l}
 & a^4 \\
2a^2 - \frac{2(a-x)^4}{a^2} & -4(a-x)^4 \\
 & -4(a-x)^4 + \frac{4(a-x)^8}{a^4} \\
\hline
 & \qquad - \frac{4(a-x)^8}{a^4}
\end{array}$$

also $$y = \frac{x}{2(a-x)^2}\left[a^2 - a^2 + \frac{2(a-x)^4}{a^2} + \frac{2(a-x)^8}{a^6} + \ldots\right]$$

$$y = x\left[\frac{(a-x)^2}{a^2} + \frac{(a-x)^6}{a^6} + \ldots\right], \text{ für } x = a$$

$$y = a \, . \, o = o$$

Für $x > a$ wird die Wurzel allmählich zu 0, welchen Werth sie wie oben für $x = \frac{2a + a\sqrt{2}}{2}$ erreicht, d. h. die beiden Werthe von y nähern sich einander, bis sie bei $x = \frac{2a + a\sqrt{2}}{2}$ zusammenfallen; dieser Theil der Curve geht also von B nach dem Punkte, wo wir den andern Theil vorher verlassen haben. Die Curve hat die Gestalt der Fig. 10.

§. 12.

Ist $r = p - a$ oder nach 1 und 2 $\frac{a-x}{x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ay}{x} - a$

$$\text{so ist } (a-x)^2(x^2+y^2) = a^2(y-x)^2$$

$$a^2x^2 - 2ax^3 + x^4 + a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = a^2y^2 - 2a^2xy + a^2x^2$$

$$y^2(x^2 - 2ax) + y(2a^2x) = 2ax^3 - x^4$$

$$y^2 + \frac{2a^2}{x - 2a}\,y = \frac{2ax^2 - x^3}{x - 2a} = -x^2$$

$$y = \frac{a^2}{2a - x} \mp \sqrt{-x^2 + \frac{a^4}{(2a-x)^2}}$$

$$y = \frac{a^2 \mp \sqrt{a^4 - x^2(2a-x)^2}}{2a - x} \qquad 14.$$

Für negative x bleibt y so lange reell, bis

$$a^4 = x^2(2a+x)^2 \text{ oder } a^2 = x(2a+x) \text{ oder}$$
$$x^2 + 2ax = a^2$$
$$x = -a \mp a\sqrt{2}$$

Augenblicklich ist nur $-a+a\sqrt{2}$ zu gebrauchen, da sonst x positiv würde; so lange also x negativ nicht $= -a+a\sqrt{2}$ wird, d. h. so lange $x > a-a\sqrt{2}$, so lange bleibt y reell; wenn $x = a-a\sqrt{2}$, so wird $y = \frac{a^2}{2a-a+a\sqrt{2}} = \frac{a^2}{a+a\sqrt{2}} = \frac{a^2(a-a\sqrt{2})}{a^2-2a^2} = a\sqrt{2}-a = -x.$

Wird x grösser, so erhält man 2 Werthe von y, es gehen also von jenem Punkte 2 Curvenzweige aus, wird $x = o$, so wird $y = \frac{a^2 \mp a^2}{2a}$ d. h. $y_{,} = o$ $\;y_{,,} = a$.

Für $x = a$ werden beide Werthe von y wieder $= a$, da kommen also beide Zweige wieder zusammen. Für $x > a$ bis $2a$ wird der Nenner allmählich zu 0, der Zähler zu $a^2 \mp a^2$, also y zu $\frac{2a^2}{0}$ oder zu $\frac{0}{0}$ d. h. $y_{,} = \infty$ $\;y_{,,} = o$, wie ähnlich wie in §. 11 oder durch Differentialrechnung zu finden. Wird nun $x > 2a$, so wird der Nenner negativ, der Zähler positiv, denn die Wurzel ist $< a^2$ also beide Werthe von y negativ, der eine $= o$ bei $x = 2a$, der andere $= -\infty$; für $x = a+a\sqrt{2}$ werden wieder beide gleich, wie aus der Gleichung $a^4 = x^2(2a-x)^2$ oder $x^2-2ax = a^2$ folgt; und zwar wird $y = -(a+a\sqrt{2})$ d. h. $= -x$.

Es hat also die Curve (Fig. 11) folgende Gestalt: Von dem in $x = 2a$ auf der X-Achse errichteten Lothe in positiv ∞ Ferne ausgehend, erreicht sie bei $y = a$ das in der Entfernung $x = a$ auf der X-Achse errichtete Loth, geht von da nach A, geht dann bei negativen x wieder von der X-Achse fort, bis es in $x = a\sqrt{2}-a$ am weitesten von der Y-Achse entfernt ist, geht dann von da nach dem Punkte, wo sie vorher das in $x = a$ errichtete Loth durchschnitt, nähert sich dann wieder der X-Achse, die sie in $x = 2a$ durchschneidet, entfernt sich noch mehr von der Y-Achse, bis es die grösste Entfernung für $x = a+a\sqrt{2}$ erreicht, kehrt dann zurück und nähert sich in $-\infty$ Ferne immer mehr dem in $x = 2a$ errichteten Lothe.

§. 13.

Ist a mittlere Proportionale zwischen r und p, also $a^2 = rp$, so ist nach 1 und 2

$$ay\frac{(a-x)}{x^2}\sqrt{x^2+y^2} = a^2$$
$$a^2y^2x^2 + a^2y^4 = \frac{a^4x^4}{(a-x)^2}$$
$$y^4 + x^2y^2 = \frac{a^2x^4}{(a-x)^2}$$
$$y^2 = -\frac{x^2}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2x^4}{(a-x)^2} + \frac{x^4}{4}} = -\frac{x^2}{2} \mp \frac{x^2}{2(a-x)}\sqrt{4a^2+(a-x)^2}$$

15. $$y^2 = -\frac{x^2}{2} \mp \frac{x^2}{2(a-x)}\sqrt{5a^2-2ax+x^2}$$

Damit y nicht imaginär wird, ist immer der 2te Summand positiv zu nehmen, weil er immer grösser als der erste. Für negative x lautet die Gleichung

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2(a+x)}\sqrt{5a^2+2ax+x^2}$$

darin ist aber $\sqrt{5a^2+2ax+x^2} > a+x$, also der 2te Summand grösser als der erste; und zwar nähert sich der Ausdruck $\frac{\sqrt{5a^2+2ax+x^2}}{a+x}$ immer mehr der Einheit, je grösser x ist, weil der Unterschied von $5a^2$ und $1a^2$ dann immer weniger in Betracht kommt. Um nun zu berechnen, welchen Werth y^2 für $x = \infty$ erhält, berechne man $\sqrt{5a^2+2ax+x^2}$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{x^2+2ax+5a^2} = x+a+\frac{2a^2}{x} - \frac{2a^3}{x^2} + \frac{4a^5}{x^4} + \dots \\
 & \underline{x^2+2ax+a^2} \\
2x+2a+\frac{2a^2}{x} & \Big| \; 4a^2 \\
 & \;\;\; \underline{4a^2 + \frac{4a^3}{x} + \frac{4a^4}{x^2}} \\
2x+2a+\frac{4a^2}{x} - \frac{2a^3}{x^2} & \Big| \; -\frac{4a^3}{x} - \frac{4a^4}{x^2} \\
 & \;\;\; \underline{-\frac{4a^3}{x} - \frac{4a^4}{x^2} - \frac{8a^5}{x^3} + \frac{4a^6}{x^4}} \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \frac{8a^5}{x^3} - \frac{4a^6}{x^4}
\end{array}$$

$$\text{Mithin}\quad \frac{\sqrt{x^2+2ax+5a^2}}{x+a} - 1 = \frac{2a^2}{x(x+a)} - \frac{2a^3}{x^2(x+a)} + \frac{4a^5}{x^4(x+a)} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\text{also}\quad y^2 &= \frac{x^2}{2}\left\{\frac{2a^2}{x(x+a)} - \frac{2a^3}{x^2(x+a)} + \frac{4a^5}{x^4(x+a)} + \dots\right\} \\
&= \frac{a^2x}{x+a} - \frac{a^3}{x+a} + \frac{2a^5}{x^2(x+a)} + \dots\dots \\
&= \frac{a^2}{1+\frac{a}{x}} - \frac{a^3}{x+a} + \frac{2a^5}{x^2(x+a)} + \dots\dots
\end{aligned}$$

also für $x = \infty$

$$y^2 = a^2 \qquad y = \mp a$$

Für $x = o$ wird y auch $= o$; für $x > o$ aber $< a$ wird die Wurzel stetig kleiner, denn

$$(5a^2-2ax+x^2) - [5a^2-(2ax+2ad)+(x+d)^2] = 2ad-2xd-d^2$$

Dies ist aber negativ, so lange $x > a$; ist $x < a$, so wird es positiv, da d beliebig klein; d. h. so lange $x < a$ nimmt die Wurzel stetig ab, erreicht bei $x = a$ ihren kleinsten Werth 2a und nimmt für $x > a$ wieder zu; der Nenner $a-x$ nähert sich aber von $x = o$ bis $x = a$ immer mehr der o, d. h. der ganze Ausdruck für y^2 nähert sich immer mehr dem Werthe ∞, je mehr $x = a$; wird $x > a$, so nähert sich die Wurzel wieder immer mehr dem Ausdrucke $a-x$ und y immer mehr wie oben dem Werthe a. Zu der ganzen Ableitung ist nun noch zu bemerken, dass jedem Werthe von x zwei gleich grosse einander entgegengesetzte Werthe von y entsprechen.

Die Curve hat also die Gestalt von Fig. 12.

§. 14.

Ist p mittlere Proportionale zwischen a und r also $p^2 = ar$ so ist nach 1 und 2

$$\frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a(a-x)}{x}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$a^4y^4 = a^2x^2(a-x)^2(x^2+y^2)$$

$$y^4 - \frac{x^2y^2}{a^2}(a-x)^2 = \frac{x^4}{a^2}(a-x)^2$$

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)^2}{2a^2} \mp \sqrt{\frac{x^4(a-x)^2}{a^2} + \frac{x^4(a-x)^4}{4a^4}}$$

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)^2}{2a^2} \mp \frac{x^2(a-x)}{2a^2}\sqrt{4a^2+(a-x)^2}$$

16. $$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{2a^2}\left[a-x \mp \sqrt{5a^2-2ax+x^2}\right]$$

Es ist also im ganzen bei diesen Curven die Gestalt ohne Hülfe der Differential- und Integral-Rechnung zu finden; will man aber ein näheres Urtheil über ihre Beschaffenheit haben, so ist freilich die höhere Analysis zu Hülfe zu nehmen. Darnach soll nun die oben §. 3 bereits angegebene Curve näher untersucht werden.

II.

Die Gleichung der zu untersuchenden Curve ist nach 4

4. $$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$$

§. 15.

Gestalt der Curve.

Aus Gleichung 4 folgt, dass jedem x 2 gleich grosse aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe von y entsprechen, d. h. es liegt die Curve symmetrisch zu beiden Seiten der X-Achse; was also von der einen Hälfte der Curve gilt, gilt ebenso von der andern; um daher die Untersuchung zu vereinfachen, soll im folgenden immer nur der eine Werth von y berücksichtigt werden, wenn nicht ausdrücklich der andere mitgenannt wird; und zwar soll immer der Werth

17. $$y = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

genommen werden.

Für $x = o$ wird auch $y = o$, ebenso für $x = a$; für zwischenliegende Werthe dagegen wird $a-x$ positiv, die Wurzel reell, also y positiv; es liegt also der Curvenzweig zwischen A und B auf der positiven Seite der y; wird $x > a$, so bleibt auch die Wurzel noch reell, so lange $x < 2a$, und $a-x$ ist negativ, also auch y negativ; d. h. der Curvenzweig geht bei B durch die X-Achse nach der negativen Seite hinüber und entfernt sich hier zwischen $x = a$ und $x = 2a$ immer weiter von der X-Achse, denn sei einmal $x = a+b$, ein ander Mal $x = a+b+c$

so ist 1) $y = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

2) $y = (b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{a-b-c}}$

Der 2te Werth ist aber grösser als der erste, weil der Bruch einen grössern Zähler und kleinern Nenner hat und der Factor vor dem Bruche auch grösser ist.

Für $x = 2a$ wird $y = -\infty$ und für $x > 2a$ wird y imaginär, so dass die Curve also zwischen $x = o$ und $x = 2a$ liegt, da y für neg. x imaginär wird.

Bedenken wir nun, dass dasselbe für den 2ten Werth von y gilt, dass also der 2te Arm der Curve von A auf der negativen Seite der X-Achse nach B geht und von da auf der positiven Seite sich ins ∞ verliert, welchen Werth er für $x = 2a$ erreicht, so haben wir als ganze Gestalt der Curve die Fig. 13, sie geht von B auf beiden Seiten der X-Achse aus und nähert sich immer mehr dem in der Entfernung $x = 2a$ errichteten Lothe ohne es jemals zu erreichen und bildet zwischen A und B eine Schleife.

Die Gleichung der in verlangter Weise construierten Curve ist also $y=(a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$; ist nun auch jede durch diese Gleichung dargestellte Curve in obiger Weise construiert?

Sei E Fig. 1 ein solcher Punkt, dessen Coordinaten $EF = y$ und $AF = x$ in Bezug auf die X-Achse AB mit A als Anfangspunkt jener Gleichung Genüge leisten, so ist, wenn man von A durch E eine Gerade zieht bis zu einem in irgend einem Punkte B auf der X-Achse errichteten Lothe, $EC + AE = \sqrt{AB^2+BC^2}$ und $\frac{BC}{AB} = \frac{y}{x}$ also

$$EC = \sqrt{AB^2+\frac{AB^2y^2}{x^2}} - \sqrt{x^2+y^2} = \frac{AB}{x}\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$EC = \frac{AB-x}{x}\sqrt{x^2+y^2} \text{ und da } y^2 = (a-x)^2\,\frac{x}{2a-x}$$

$$EC = \frac{AB-x}{x}\sqrt{x^2+\frac{(a-x)^2x}{2a-x}} = \frac{AB-x}{x}\sqrt{\frac{a^2x}{2a-x}} = a\,.\,\frac{AB-x}{x}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

Ferner ist $BC = AB\,.\,\frac{y}{x} = AB\,.\,\frac{a-x}{x}\,.\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$

d. h. $EC = BC$, wenn $AB = a$, oder die durch obige Gleichung dargestellte Curve ist auf die angegebene Weise construiert.

§. 16.

Maxima und Minima.

Soll der zu irgend einem x gehörende Werth von y ein Maximum oder Minimum sein, so muss zunächst $\frac{dy}{dx} = o$ sein und dann bei einem stattfindenden Maximum $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, bei einem Minimum $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv sein.

$$y = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{x}{2a-x}} + (a-x)\,\frac{2a-x+x}{2\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,(2a-x)^2} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}\left[\frac{-x}{2a-x} + \frac{(a-x)a}{(2a-x)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}\left[\frac{-2ax+x^2+a^2-ax}{(2a-x)^2}\right]$$

18. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+a^2-3ax}{\sqrt{x(2a-x)^3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{x(2a-x)^3}\,(2x-3a) - (x^2+a^2-3ax)\left[\frac{(2a-x)^3-3x(2a-x)^2}{2\sqrt{x(2a-x)^3}}\right]}{x(2a-x)^3}$$

$$= \frac{2x(2a-x)^3(2x-3a) - (x^2+a^2-3ax)\left[(2a-x)^3-3x(2a-x)^2\right]}{2x(2a-x)^3\sqrt{x(2a-x)^3}}$$

$$= \frac{2x(2a-x)(2x-3a) - (x^2+a^2-3ax)\left[2a-4x\right]}{2x(2a-x)\sqrt{x(2a-x)^3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4ax^2-2x^3-6a^2x+3ax^2-x^2a-a^3+3a^2x+2x^3+2a^2x-6ax^2}{x(2a-x)\sqrt{x(2a-x)^3}}$$

19. $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a^2x-a^3}{x(2a-x)\sqrt{x(2a-x)^3}} = -a^2\cdot\frac{x+a}{\sqrt{x^3(2a-x)^5}}$$

Also nach 18

$$x^2-3ax = -a^2$$

$$x = \frac{3a}{2} \mp \sqrt{-a^2+\frac{9a^2}{4}}$$

20. $$x_{,} = \frac{3a+a\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_{,,} = \frac{3a-a\sqrt{5}}{2}$$

Da $x_{,} > 2a$, für welchen Werth von x y imaginär ist, so bleibt noch allein $x_{,,}$ zu untersuchen. Setzen wir diesen für $x_{,,}$ gefundenen Werth in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein, so erhalten wir, da x positiv ist, also der Bruch positiv wird, für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen negativen Werth, d. h. in dem Punkte $x = \frac{3a-a\sqrt{5}}{2}$ wird y ein Maximum, bei dem gegenüberliegenden Curvenzweige ein Minimum.

Ist in Fig. 13 D dieser Punkt, so ist also $DA = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$

$$BD = a - \frac{3a - a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}.$$

$$BD^2 = \frac{6a^2 - 2a^2\sqrt{5}}{4} = \frac{3a^2 - a^2\sqrt{5}}{2}.\ \text{ebenso ist}$$

$$AD\,.\,AB = \frac{3a^2 - a^2\sqrt{5}}{2}.\ \text{also}\ BD^2 = AD\,.\,AB. \qquad \mathbf{21.}$$

d. h. AB ist in D nach stetiger Proportion getheilt und zwar so, dass AD der kleinere Abschnitt ist. Um die Grösse von y in diesem Punkte zu erhalten, setze man den Werth

$$x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}\ \text{in die Gleichung 17 ein}$$

$$y = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{a\sqrt{5}-a}{2}\sqrt{\frac{3a - a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$$

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{18-12\sqrt{5}+10}{1+\sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \qquad \mathbf{22.}$$

§. 17.

Lage der Curve gegen die X-Achse.

Ausgezeichnete Punkte und Wendepunkte hat die Curve nicht, denn für solche müsste $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ werden, dies findet aber nur statt, wenn $x = -a$, d. h. in der Curve garnicht.

$\frac{dy}{dx}$ wird für $x = 2a$ und $x = o$ zu ∞, d. h. in diesen beiden Punkten bilden die Tangenten Winkel von 90^0 mit der X-Achse, oder sie sind parallel der Y-Achse, im letztern Punkte ist es die Y-Achse selber. Für $x = a$ wird $\frac{dy}{dx} = -1$, d. h. die Tangente in diesem Punkte bildet mit der X-Achse einen Winkel von 135^0. Berechnen wir für den andern Curvenzweig, für den $y = (x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$ ist, $\frac{dy}{dx}$ so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3ax - a^2 - x^2}{\sqrt{x(2a-x)^3}}\ (\text{für}\ x = a) = 1$$

d. h. die Tangente an diesem Zweige macht mit der X-Achse einen Winkel von 45^0. Im Punkte $x = a$ stehen also die beiden Curvenzweige senkrecht auf einander.

Von $x = o$ bis $x = a$ ist y positiv und $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ; d. h. die Curve kehrt hier der X-Achse ihre concave Seite zu; wird $x > a$, so wird y negativ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ bleibt auch negativ, d. h. die Curve kehrt hier der X-Achse die convexe Seite zu; es ist aber in $x = a$ kein Wendepunkt, da die Curve hier von der einen Seite der X-Achse auf die andere übergeht.

§. 18.

Gleichungen der Tangente und Normale, Länge der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale.

Die Gleichung der Tangente einer Curve im Punkte $x_{,}$ $y_{,}$ ist:

23. $$y - y_{,} = \frac{dy_{,}}{dx_{,}}\,(x - x_{,})$$

also nach 18

$$y - (a - x_{,})\sqrt{\frac{x_{,}}{2a - x_{,}}} = \frac{x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}\,(x - x_{,})$$

$$y = \frac{x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}\,x + \frac{(a - x_{,})(2a - x_{,})x_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}} - \frac{x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}\,x_{,}$$

24. $$y = \frac{x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}\,x + \frac{a^2 x_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}.$$

also Gleichung der im Punkte $x = a$ gezogenen Tangente:

$$y = -x + a$$

d. h. sie bildet einen Winkel von 135^0 mit der X-Achse und schneidet die Y-Achse in der Entfernung a vom Anfangspunkte, wie auch aus der geometrischen Betrachtung der Figur ohne weiteres folgt.

Aus 23 folgt als Gleichung der Normale:

$$y - y_{,} = -\frac{dx_{,}}{dy_{,}}\,(x - x_{,})$$

$$y - (a - x_{,})\sqrt{\frac{x_{,}}{2a - x_{,}}} = -\frac{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}{x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,}}\,(x - x_{,})$$

25. $$y = \frac{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}{3ax_{,} - a^2 - x_{,}^2}\,x + \frac{a^3 x_{,}}{(x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,})\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})}}$$

Es schneidet also die im Punkte $y_{,}$ $x_{,}$ gezogene Tangente die Y-Achse in der Entfernung $\frac{a^2 x_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}$ und die X-Achse, wenn $y = o$ ist, d. h. wenn

$$o = \frac{x_{,}^2 + a^2 - 3ax_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}}\,x + \frac{a^2 x_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a - x_{,})^3}} \text{ oder}$$

$$x = \frac{a^2 x_{,}}{3ax_{,} - a^2 - x_{,}^2}.$$

Es schneidet z. B. die im Punkte $x_{,} = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$ gezogene Tangente die Y-Achse in der Entfernung

$$\frac{a^3\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)}{\frac{a + a\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{3a - a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a + a\sqrt{5}}{2}}} = a.\sqrt{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}}.$$ Das ist aber

das zu $x_{,}$ gehörige $y_{,}$ d. h. die Tangente in diesem Punkte ist $\parallel$ der X-Achse, wie auch schon aus §. 16 folgt.

Die im Punkte $x_{,}$ $y_{,}$ gezogene Normale schneidet die X-Achse, wenn in Gleichung 25 $y = o$ ist, also

$$o = \frac{\sqrt{x_{,}(2a-x_{,})^3}}{3ax_{,}-a^2-x_{,}^2}\, x + \frac{a^3 x_{,}}{(x_{,}^2+a^2-3ax_{,})\sqrt{x_{,}(2a-x_{,})}} \text{ d. h.}$$

$$x\sqrt{x_{,}(2a-x_{,})^3} = \frac{a^3 x_{,}}{\sqrt{x_{,}(2a-x_{,})}}$$

$$x = \frac{a^3}{(2a-x_{,})^2} \qquad \textbf{26.}$$

So trifft z. B. die im Punkte $x_{,} = \frac{3a-a\sqrt{5}}{2}$ gezogene Normale die X-Achse, wenn

$$x = \frac{a^3}{\left(\frac{a+a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{4a}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2a}{3+\sqrt{5}} = \frac{2a(3-\sqrt{5})}{4}$$

$$x = \frac{3a-a\sqrt{5}}{2} = x_{,}$$

d. h. die Normale steht senkrecht auf der X-Achse, wie ebenfalls aus §. 16 und dem Obigen folgt.

Nach dem in 26 gefundenen Resultate lässt sich nun leicht in jedem Punkte der Curve eine Tangente ziehen.

Es ist $\frac{x}{a} = \frac{a^2}{(2a-x_{,})^2}$; man construiere also Fig. 14 über $GL = 2a-x$, einen Halbkreis, trage von G aus a als Sehne hinein, fälle das Loth $HK \perp AL$ und ziehe $MK \parallel HL$, so ist GM gleich der Entfernung des Punktes A von dem Durchschnittsp. der Normale mit der X-Achse; denn

$$\frac{GM}{GH} = \frac{GK}{GL} \text{ oder da } \frac{GK}{GL} = \frac{GH^2}{GL^2}$$

$$GM = \frac{a^3}{(2a-x_{,})^2}$$

Macht man also $AN = GM$ und errichtet auf ON im Punkte O ein Loth, so hat man die Tangente in O.

Die Länge der **Tangente** ist

$$t = \frac{y}{p}\sqrt{1+p^2} \quad \text{wenn } p = \frac{dy}{dx}, \text{ also}$$

$$t = \frac{(a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}}{x^2+a^2-3ax}\sqrt{x(2a-x)^3}\,.\,\sqrt{1+\frac{(x^2+a^2-3ax)^2}{x(2a-x)^3}}$$

$$t = \frac{(a-x)x.(2a-x)}{x^2+a^2-3ax}\sqrt{\frac{8a^3x-12a^2x^2+6ax^3-x^4+x^4+a^4+9a^2x^2+2a^2x^2-6ax^3-6a^3x}{x(2a-x)^3}}$$

$$t = \frac{x(a-x)}{x^2+a^2-3ax}\sqrt{\frac{2a^3x-a^2x^2+a^4}{x(2a-x)}}$$

27. $$t = \frac{ax(a-x)}{x^2+a^2-3ax}\sqrt{\frac{2ax+a^2-x^2}{x(2a-x)}}$$

z. B. im Punkte $x = \frac{a}{2}$ ist

$$t = -a\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Die Länge der **Subtangente** st ist:

$$st = \frac{y}{p} = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \cdot \frac{\sqrt{x(2a-x)^3}}{x^2+a^2-3ax}$$

28. $$st = \frac{(a-x)x(2a-x)}{x^2+a^2-3ax}$$

Dieselbe wird also o wenn $x = o$, $x = 2a$, und $x = a$ ist; im ersten und dritten Falle geht die Curve durch die X-Achse und im 2ten Falle steht die Tangente senkrecht auf der X-Achse; letztere ist für $x = 2a$ ∞

Für $x = \frac{a}{2}$ wird $st = \frac{3a}{2}$

Die Länge der **Subnormale** sn ist $= yp$ also:

$$sn = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \cdot \frac{x^2+a^2-3ax}{\sqrt{x(2a-x)^3}}$$

29. $$sn = \frac{(a-x)(x^2+a^2-3ax)}{(2a-x)^2}$$

Die Länge der **Normale** n ist $= y\sqrt{1+p^2}$ also:

$$n = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \cdot \sqrt{\frac{2a^3x-a^2x^2+a^4}{x(2a-x)^3}}\ .\ \text{cf. } 27.$$

30. $$n = (a-x)\sqrt{\frac{2a^3x-a^2x^2+a^4}{(2a-x)^4}} = (a-x)a \cdot \frac{\sqrt{2ax-x^2+a^2}}{(2a-x)^2}$$

---

§. 19.

Krümmungsradius und Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts; Evolute.

Es ist der Krümmungsradius $\varrho = \mp \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ wenn $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ und zwar negativ, wenn die Curve der X-Achse die concave Seite zukehrt und man die Richtung von der Curve nach der X-Achse als die positive ansehen will; also

$$\varrho = \left[1+\frac{(x^2+a^2-3ax)^2}{x(2a-x)^3}\right]^{3/2} \cdot \frac{\sqrt{x^3(2a-x)^5}}{-a^2.(x+a)} = \left[\frac{a^2(a^2+2ax-x^2)}{x(2a-x)^3}\right]^{3/2} \frac{\sqrt{x^3(2a-x)^5}}{-a^2.(x+a)}$$

31. $$\varrho = \left[\frac{a^3(a^2+2ax-x^2)}{-a^2.(x+a)}\right]^{3/2} \frac{\sqrt{x^3(2a-x)^5}}{\sqrt{x^3(2a-x)^9}} = -\frac{a.(a^2+2ax-x^2)^{3/2}}{(x+a)(2a-x)^2}$$

z. B. für $x = o$ $\varrho = -\frac{a}{4}$

da aber in $x = o$ die Curve ihre concave Seite der X-Achse zukehrt, so ist das Zeichen von ϱ umzukehren, also $\varrho = \frac{a}{4}$. Für $x = 2a$ wird $\varrho = \infty$; es nähert sich die Curve ja auch immer mehr dem in $x = 2a$ errichteten Lothe, d. h. immer mehr einer graden Linie. Für das

Maximum der Curve in $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$ wird $\varrho = \frac{a\left(a^2 + 3a^2 - a^2\sqrt{5} - \frac{14a^2 - 6a^2\sqrt{5}}{4}\right)^{3/2}}{\frac{5a - a\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{a + a\sqrt{5}}{2}\right)^2}$

$$\varrho = \frac{a(4a^2 + 12a^2 - 4a^2\sqrt{5} - 14a^2 + 6a^2\sqrt{5})^{3/2}}{(5a - a\sqrt{5})(a + a\sqrt{5})^2}$$

$$\varrho = \frac{a(2 + 2\sqrt{5})^{3/2}}{(5 - \sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})} = \frac{a\sqrt{8 + 24\sqrt{5} + 120 + 40\sqrt{5}}}{30 - 6\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10} = \frac{a\sqrt{128 + 64\sqrt{5}}}{20 + 4\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{2a\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{5 + \sqrt{5}} = 2a\sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{30 + 10\sqrt{5}}} = 2a\sqrt{\frac{60 + 30\sqrt{5} - 20\sqrt{5} - 50}{900 - 500}}$$

$$\varrho = 2a\sqrt{\frac{10 + 10\sqrt{5}}{400}} = a\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{10}}$$

Sind die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes α und β, so ist

$$\alpha = x - \frac{p(1 + p^2)}{q} \text{ und } \beta = y + \frac{1 + p^2}{q}$$

also hier:

$$\beta = (a - x)\sqrt{\frac{x}{2a - x}} - \frac{a^2(a^2 + 2ax - x^2)\sqrt{x^3(2a - x)^5}}{x(2a - x)^3 a^2 . (x + a)}$$

$$\beta = (a - x)\sqrt{\frac{x}{2a - x}} - \frac{a^2 + 2ax - x^2}{x + a} . \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\left[\frac{a^2 - x^2 - a^2 - 2ax + x^2}{x + a}\right] = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\left[\frac{-2ax}{x + a}\right] \qquad 32.$$

$$\alpha = x + \frac{(x^2 + a^2 - 3ax)\sqrt{x^3(2a - x)^5}}{\sqrt{x(2a - x)^3} . a^2 . (x + a)} \cdot \frac{a^2(a^2 + 2ax - x^2)}{x(2a - x)^3}$$

$$\alpha = x + \frac{(x^2 + a^2 - 3ax)(a^2 + 2ax - x^2)}{(x + a)(2a - x)^2} = \frac{(x^2 + ax)(2a - x)^2 + (x^2 + a^2 - 3ax)(a^2 + 2ax - x^2)}{(x + a)(2a - x)^2}$$

$$\alpha = \frac{a^4 + 3a^3x - 6a^2x^2 + 2ax^3}{(x + a)(2a - x)^2} = \frac{a(a - x)(a^2 + 4ax - 2x^2)}{(x + a)(2a - x)^2} \qquad 33.$$

Es sind also die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts für

$$x = 0; \quad \alpha = \frac{a}{4}, \quad \beta = 0.$$

34. $$x = a; \quad \alpha = 0, \quad \beta = -a.$$

$$x = 2a; \quad \alpha = -\infty, \beta = -\infty.$$

Um die Gleichung der Evolute abzuleiten, müsste nun aus Gleichung 32 und 33 x eliminiert werden, doch würde dies auf Gleichungen höherer Grade führen, und wollen wir uns hier damit begnügen, den ungefähren Lauf der Curve nach den in 34 gemachten Angaben anzugeben. Sie geht von der X-Achse in der Entfernung $x = \frac{a}{4}$ aus, durchschneidet in der Entfernung $y = -a$ die negative Y-Achse und geht dann ins $-\infty$ sowohl in Bezug auf x als auf y. Ein 2ter congruenter Arm liegt auf der positiven Seite der X-Achse.

Nach 33 scheint es, als ob die Evolute die Y-Achse noch einmal schneiden müsste, da der Ausdruck für α nicht bloss, wenn $x = a$ ist, zu 0 wird, sondern auch für

$$a^2 + 4ax - 2x^2 = 0 \quad \text{d. h. wenn}$$

$$x = a \mp \sqrt{\frac{3a^2}{2}}$$

aber hier ist der eine Werth negativ, der andere $> 2a$, also beides Punkte, für die es keinen Curvenpunkt gibt.

§. 20.

Polargleichung der Curve.

$y = r.\sin\varphi$. $x = r.\cos\varphi$. nach 17 ist

$$r^2.\sin\varphi^2 = (a - r.\cos\varphi)^2.\frac{r.\cos\varphi}{2a - r.\cos\varphi}$$

$$(r^2 - r^2\cos\varphi^2)(2a - r.\cos\varphi) = (a^2 - 2ar\cos\varphi + r^2.\cos\varphi^2)r.\cos\varphi$$

$$2ar^2 - 2ar^2\cos\varphi^2 - r^3\cos\varphi + r^3.\cos\varphi^3 = a^2.r.\cos\varphi - 2ar^2.\cos\varphi^2 + r^3.\cos\varphi^3$$

$$2ar^2 - r^3\cos\varphi = a^2 r\cos\varphi$$

$$2ar = a^2.\cos\varphi + r^2.\cos\varphi$$

35. $$\cos\varphi = \frac{2ar}{a^2 + r^2}$$

oder: $r^2.\cos\varphi - 2ar = -a^2.\cos\varphi$

$$r^2 - 2r.\frac{a}{\cos\varphi} = -a^2$$

36. $$r = \frac{a}{\cos\varphi} \mp \sqrt{\frac{-a^2.\cos\varphi^2 + a^2}{\cos\varphi^2}} = \frac{a \mp a\sin\varphi}{\cos\varphi} = a.\frac{1 \mp \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

§. 21.

Quadratur der Curve.

$$\text{Es ist } F = \int_{x_,}^{x_{,,}} y\,dx = \int_{x_,}^{x_{,,}} (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$$

Setzen wir hier $\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = z$, so ist $x = 2az^2 - xz^2$

oder $x = \frac{2az^2}{1+z^2}$

$$dx = \frac{(1+z^2)4az - 4az^3}{(1+z^2)^2}\,dz = \frac{4azdz}{(1+z^2)^2}$$

$$F = \int \frac{a-az^2}{1+z^2} \cdot z \cdot \frac{4azdz}{(1+z^2)^2} = 4a^2 \int \frac{z^2(1-z^2)}{(1+z^2)^3}\,dz$$

$$F = 4a^2 \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^3} - 4a^2 \int \frac{z^4dz}{(1+z^2)^3}$$

$$F = 4a^2 \int \frac{1+z^2-1}{(1+z^2)^3}\,dz + 4a^2 \int \frac{-z^4-1+1}{(1+z^2)^3}\,dz$$

$$F = 4a^2 \left[\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int \frac{dz}{(1+z^2)^3} + \int \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz - \int \frac{dz}{(1+z^2)^3}\right]$$

$$F = 4a^2 \left\{-\int \frac{2dz}{(1+z^2)^3} + \int \frac{2-z^2-1+1}{(1+z^2)^2}\,dz\right\}$$

$$F = 4a^2 \left\{-\int \frac{2dz}{(1+z^2)^3} + \int \frac{3dz}{(1+z^2)^2} - \int \frac{dz}{1+z^2}\right\}$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{1-3z^2+3+3z^2}{(1+z^2)^3}\,dz = \frac{1}{4} \int \frac{1-3z^2}{(1+z^2)^3}\,dz + \frac{3}{4} \int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^2} + {}^3/_4 \int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1-z^2+1+z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = \frac{1}{2} \int \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc. tg. } z.$$

$$F = 4a^2\left(-\frac{\frac{1}{2}z}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{z}{1+z^2} + \frac{3}{4}\,\text{arc.tg.}z - \text{arc.tg.}z\right)$$

$$F = a^2\left(\frac{-2z}{(1+z^2)^2} + \frac{3z}{(1+z^2)} - \text{arc.tg.}z\right)$$

$$F = a^2\left(\frac{z+3z^3}{(1+z^2)^2} - \text{arc.tg.}z\right) \text{ oder } z = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

$$F = a^2\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{2a-x}} + \frac{3x}{2a-x}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}}{\left(\frac{2a}{2a-x}\right)^2} - \text{arc.tg.}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\right)$$

$$F = a^2\left(\frac{2a+2x}{(2a-x)\left(\frac{2a}{2a-x}\right)^2}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} - \text{arc.tg.}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\right)$$

37. $$F = \left(\frac{(a+x)(2a-x)}{2}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} - a^2.\text{arc.tg.}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\right)_{x,}^{x,,}$$

Mithin für $x_, = o$ bis $x_{,,} = a$

38. $$F = a^2 - a^2.\frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{4}(4-\pi) = 0{,}214602a^2.$$

also der Inhalt der ganzen Schleife

$$2F = 0{,}429204.a^2.$$

Nehmen wir die Polargleichung 35 $\cos\varphi = \frac{2ar}{a^2+r^2}$ so ist $F = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$

Gleichung 35 differ. gibt

$$-\sin\varphi d\varphi = \frac{(a^2+r^2)2a - 4ar^2}{(a^2+r^2)^2}\,dr = \frac{2a^3-2ar^2}{(a^2+r^2)^2}\,dr$$

Nun ist aber nach 35 $\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{4a^2r^2}{(a^2+r^2)^2}} = \frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}$

also $d\varphi = \frac{2a(a^2-r^2)}{(a^2+r^2)^2}\cdot\frac{a^2+r^2}{a^2-r^2}\,dr = \frac{2adr}{a^2+r^2}$

$$F = a\int\frac{r^2dr}{a^2+r^2} = a\int\frac{r^2+a^2-a^2}{a^2+r^2}\,dr = a\int dr - a^3\int\frac{dr}{a^2+r^2}$$

39. $$F = ar - a^2\int\frac{d\frac{r}{a}}{1+\frac{r^2}{a^2}} = \left(ar - a^2.\text{arc.tg.}\frac{r}{a}\right)_{r,}^{r,,} \text{ (ohne Constante.)}$$

also F für $r_{,} = o$ bis $r_{,,} = a$

$$F = a^2 - a^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{4}(4-\pi) \text{ . cf. 38.} \qquad 40.$$

§. 22.

Schwerpunkt der Fläche.

Um die Coordinaten des Schwerpunkts einer Fläche zu bestimmen, die von zwei in x, und $x_{,,}$ errichteten Ordinaten, der zwischenliegenden Abscissenachse und dem zwischenliegenden Curvenbogen begrenzt wird, hat man die Gleichungen

$$t \int_{x_{,}}^{x_{,,}} y dx = \int_{x_{,}}^{x_{,,}} xy dx \quad \text{und} \quad u \int_{x_{,}}^{x_{,,}} y dx = \frac{1}{2} \int_{x_{,}}^{x_{,,}} y^2 dx$$

wenn t das x und u das y des Schwerpunkts bedeutet.

$$\int xy dx = \int x(a-x) \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \, . \, dx$$

Man setze nun $\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = z$ also $x = \frac{2az^2}{1+z^2}$ und $dx = \frac{4azdz}{(1+z^2)^2}$

so ist $\int xy dx = 8a^3 \int \frac{z^4 - z^6}{(1+z^2)^4} dz.$

Nun ist aber $\int \frac{z^6 dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{z^4 + z^6 - z^4}{(1+z^2)^m} dz = \int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^m}$

und ebenso $\int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m}$

und $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int \frac{dz}{(1+z^2)^m}$

also
$$\int \frac{z^4 - z^6}{(1+z^2)^4} dz = 2\int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^4} - \int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^3}$$
$$= 2\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^3} - 2\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^4} - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} + \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^3}$$
$$= 3\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} - 3\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} - 2\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} + 2\int \frac{dz}{(1+z^2)^4} - \int \frac{dz}{1+z^2} + \int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$
$$= 2\int \frac{dz}{(1+z^2)^4} - 5\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} + 4\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int \frac{dz}{1+z^2}$$

Nun ist $\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^m} dz = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int z \,.\, \frac{z.dz}{(1+z^2)^m}$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \frac{1}{2}\int \frac{z d(1+z^2)}{(1+z^2)^m} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} + \frac{1}{2}\int z \,.\, d \frac{1}{(m-1)(1+z^2)^{m-1}}$$

$$= \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} + \frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}$$

$$= \frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}$$

also $\int \frac{z^4-z^6}{(1+z^2)^4} dz = \frac{z}{3(1+z^2)^3} - \frac{10}{3}\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} + 4\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int \frac{dz}{1+z^2}$

$$= \frac{z}{3(1+z^2)^3} - \frac{5z}{6(1+z^2)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{z}{3(1+z^2)^3} - \frac{5z}{6(1+z^2)^2} + \frac{3z}{4(1+z^2)} - \frac{1}{4} \text{ arc.tg.z.}$$

$$= \frac{3+8z^2+9z^4}{12(1+z^2)^3} z \,. - \frac{1}{4} \text{ arc.tg.z}$$

$$\int xydx = 8a^3 \left(\frac{3(2a-x)^3+8x(2a-x)^2+9x^2(2a-x)}{96a^3} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} - \frac{1}{4} \text{ arc.tg.} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \right)$$

$$= \frac{24a^3-4a^2x+4ax^2-4x^3}{12} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} - 2a^3 \text{.arc.tg.} \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

41. $$t = \left[\frac{\left(2a^3 - \frac{1}{3}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} - 2a^3\text{. arc.tg.}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}}{\frac{(a+x)(2a-x)}{2}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} - a^2\text{.arc.tg.}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}} \right]_{x_,}^{x_{,,}}$$

Also für die Fläche von $x = o$ bis $x = a$

42. $$t = \frac{\frac{5}{3}a^3 - \frac{a^2\pi}{2}}{\frac{a^2}{4}(4-\pi)} = a \,.\, \frac{\frac{20}{3} - 2\pi}{4-\pi} = 0{,}446736a.$$

Um u zu bestimmen, haben wir $u \int ydx = \frac{1}{2}\int y^2dx$.

$$\int y^2dx = \int \frac{(a-x)^2x}{2a-x} dx = \int \frac{a^2x-2ax^2+x^3}{2a-x} dx$$

43. $$= \int \left(-x^2 - a^2 + \frac{2a^3}{2a-x}\right) dx = -\frac{x^3}{3} - a^2x - 2a^3\text{.log.}(2a-x) + C.$$

$$u = \left[\frac{-\frac{x^3}{6} - \frac{a^2x}{2} - a^3 . \log. \text{nat.}\, (2a-x) + C}{\frac{(a+x)(2a-x)}{2}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} - a^2 . \text{arc.tg.}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}} \right]_{x_,}^{x_{,,}} \qquad 44.$$

Mithin für die Fläche von $x = o$ bis $x = a$

$$u = \frac{a^3 . \log. \text{nat.}\, 2a - \frac{2a^3}{3} - a^3 . \log. \text{nat.}\, a}{\frac{a^2}{4}(4-\pi)} = a . \frac{\log. \text{nat.}\, 2 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{\pi}{4}}$$

$$u = 0{,}12339 . a.$$

§. 23.

Quadratur der Rotationsoberfläche.

Die Ebene der Curve drehe sich um die X-Achse, so ist die Oberfläche des dadurch gebildeten Körpers

$$O = 2\pi \int_{x_,}^{x_{,,}} y\sqrt{1+p^2}\ dx . \text{ wo p wieder } = \frac{dy}{dx}$$

$$O = 2a\pi \int (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\sqrt{\frac{a^2+2ax-x^2}{x(2a-x)^3}}\ dx = 2a\pi \int \frac{a-x}{(2a-x)^2}\sqrt{a^2+2ax-x^2} . dx$$

$$O = 2a\pi \int \frac{(a-x)(a^2+2ax-x^2)}{(2a-x)^2\sqrt{a^2+2ax-x^2}} dx = 2a\pi \int \frac{(a^3+a^2x-3ax^2+x^3)dx}{(2a-x)^2\sqrt{a^2+2ax-x^2}}$$

$$= 2a\pi \int \left(x+a+\frac{a^2x-3a^3}{(2a-x)^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{a^2+2ax-x^2}}$$

$$= -2a\pi \int \frac{(a-x-2a)dx}{\sqrt{a^2+2ax-x^2}} + 2a^3\pi \int \frac{(x-3a)dx}{(2a-x)^2\sqrt{a^2+2ax-x^2}}$$

$$= -2a\pi\sqrt{a^2+2ax-x^2} + 4a^2\pi \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+2ax-x^2}} - 2a^2\pi \int \frac{a^2+2ax-x^2+2a^2-3ax+x^2}{(2a-x)^2\sqrt{a^2+2ax-x^2}} dx$$

oder wenn im ersten $\int$ $y + a = x$ gesetzt wird

$$O = -2a\pi\sqrt{a^2+2ax-x^2} + 4a^2\pi \int \frac{dy}{\sqrt{2a^2-y^2}} - 2a^2\pi \int \left[\frac{\sqrt{a^2+2ax-x^2}}{(2a-x)^2} + \frac{a-x}{(2a-x)\sqrt{a^2+2ax-x^2}}\right] dx$$

$$O = -2a\pi\sqrt{a^2+2ax-x^2} + 4a^2\pi \int \frac{d . \frac{y}{a\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{2a^2}}} - 2a^2\pi \int \left[\sqrt{a^2+2ax-x^2} . d\frac{1}{2a-x} + \frac{1}{2a-x} d . \sqrt{a^2+2ax-x^2}\right]$$

$$O = -2a\pi\sqrt{a^2+2ax-x^2} + 4a^2\pi.\text{arc. sin.}\frac{y}{a\sqrt{2}} - 2a^2\pi.\frac{\sqrt{a^2+2ax-x^2}}{2a-x} + C$$

$$O = -2a\pi\sqrt{a^2+2ax-x^2} + 4a^2\pi.\text{arc. sin.}\frac{x-a}{a\sqrt{2}} - 2a^2\pi\frac{\sqrt{a^2+2ax-x^2}}{2a-x} + C$$

45. $$O = -2a\pi\sqrt{a^2+2ax-x^2} - 4a^2\pi.\text{arc. sin.}\frac{a-x}{a\sqrt{2}} - 2a^2\pi.\frac{\sqrt{a^2+2ax-x^2}}{2a-x} + C$$

für $x = o$ ist auch $O = o$ also

46. $$o = -2a^2\pi - a^2\pi^2 - a^2\pi + C \text{ also } C = 3a^2\pi + a^2\pi^2.$$

Ferner ist für $x = o$ bis $x = a$

$$O = -2a^2\pi\sqrt{2} - 2a^2\pi\sqrt{2} + 2a^2\pi + a^2\pi^2 + a^2\pi$$

47. $$O = 3a^2\pi + a^2\pi^2 - 4\sqrt{2}.a^2\pi = 0{,}48475a^2\pi = 1{,}52284a^2$$

---

§. 24.

Cubatur der Rotationskörper.

Drehe sich wieder die Ebene der Curve um die X-Achse, so ist der cubische Inhalt des entstehenden Körpers

$$J = \pi\int y^2dx \quad \text{hier also}$$

$$J = \pi\int\frac{(a-x)^2x}{2a-x}dx = \pi\left(-\frac{x^3}{3} - a^2x - 2a^3.\text{log. nat.}(2a-x)\right) + C. \quad \text{cf. 43.}$$

Für $x = o$ muss J auch $= o$ sein, also

$$o = -2a^3\pi.\text{log. nat.}2a + C \quad \text{d. h. } C = 2a^3\pi\text{log. nat.}2a \quad \text{also}$$

48. $$J = \pi\left[2a^3\text{log. nat.}\frac{2a}{2a-x} - \frac{x^3}{3} - a^2x\right]_{x_{,}}^{x_{,,}}$$

also von $x = o$ bis $x = a$

49. $$J = \pi\left[2a^3.\text{log. nat.}2 - \frac{a^3}{3} - a^3\right] = 2a^3\pi\left(\text{log. nat.}2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$J = 0{,}05296a^3\pi = 0{,}166.a^3.$$
