Die Berührungskegelschnitte der ebenen Kurven 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten.

Steiner hat alle 3 Systeme von Kegelschnitten behandelt, die 2 Kreise 4 mal berühren (wenn man das Hindurchgehen durch einen endlichen Schnittpunkt der Kreise als [uneigentliche] Berührung mitrechnet). Zwei dieser Systeme*) bestehen aus ähnlichen (nicht parallelaxigen) Kegelschnitten und sind vom Verf. für die bizirkulare Kurve 4. Ordnung verallgemeinert worden, wobei sich herausgestellt hat, dass diese Kurve 12 solcher Systeme („Σ") besitzt**). Das dritte System dagegen***) besteht aus parallelaxigen (nicht ähnlichen) Kegelschnitten. Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, dieses System nach derselben Richtung hin auf analytischem Wege zu verallgemeinern, nämlich so, dass an Stelle des Kreispaares die allgemeine bizirkulare Kurve 4. Ordnung tritt****). Hierbei zeigt sich, dass diese Kurve nur 1 solches System hat. Es soll kurz mit Γ bezeichnet werden.

Die 12 Systeme Σ hängen von 5 Konstanten P, A, B, μ, ψ ab†), von denen sich die erste, wenn die Gleichung der bizirkularen Kurve 4. Ordnung $\mathfrak{C}$ in der Normalform

$$(1.)\quad (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2+\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{y}^2+2\mathfrak{d}\mathfrak{x}+2\mathfrak{e}\mathfrak{y}+\mathfrak{f}=0$$

ist††), aus der für $P'=(8P+\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2$ kubischen Gleichung

$$P'^3-P'^2.[3\mathfrak{a}^2-2\mathfrak{a}\mathfrak{b}+3\mathfrak{b}^2+32\mathfrak{f}]+P'.\langle(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2(3\mathfrak{a}^2+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}+3\mathfrak{b}^2)-64.[3(\mathfrak{a}\mathfrak{d}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{e}^2)\\ -(\mathfrak{b}\mathfrak{d}^2+\mathfrak{a}\mathfrak{e}^2)]+128\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}+256\mathfrak{f}^2\rangle-\langle(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})[(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2-16\mathfrak{f}]+32(\mathfrak{d}^2+\mathfrak{e}^2)\rangle^2=0$$

bestimmt†††), während für die übrigen 4 Konstanten quadratische und lineare Gleichungen zu lösen sind. Das System Γ hängt ebenfalls von 5 Konstanten α, β††††), $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, C_0 ab, die sich aber aus lauter linearen Gleichungen berechnen lassen.

Die einzelnen Kegelschnitte des Systemes Γ mögen $\mathfrak{G}$, ihre Mittelpunkte M heissen. Der Koordinatenanfang bei der Normalform von $\mathfrak{C}$ heisse K. Es soll sich jetzt darum handeln, das System Γ aus folgenden Bedingungen zu bestimmen:

I) Γ soll eine Kurve 4. Ordnung einhüllen.

II) Die Mittelpunkte M der Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ sollen eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_0$ erfüllen.

III) Die Axen aller Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ sollen den Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ parallel sein.

---

*) Steiner, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 463 ff.

**) O. Richter, Über die Systeme der Kegelschnitte, die eine bizirkulare Kurve 4. Ordn. 4 mal berühren. Lpzg., B. G. Teubner. — Diese Abhandlung wird, weil auf sie im folgenden öfter verwiesen werden muss, kurz mit (A.) bezeichnet werden.

***) Steiner, Ges. Werke, Bd. II, S. 447 ff.

****) Vgl. hierzu Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., 1891, S. 191.

†) (A.) S. 6, 7, 8. ††) (A.) S. 14.

†††) wie nach längerer Rechnung aus (A.) S. 18 Gl. (51.) folgt.

††††) hier haben α, β eine andere Bedeutung als in (A.).

IV) Unter den Kegelschnitten $\mathfrak{G}$ sollen sich 4 befinden, die in je 2 Gerade zerfallen, und zwar sollen ihre Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 die Schnittpunkte von $\mathfrak{H}_0$ mit einer anderen gleichseitigen Hyperbel sein (vgl. Fig. 1).

V) Unter den Kegelschnitten $\mathfrak{G}$ soll es einen geben, dessen Axen beide unendlich gross sind, dessen Mittelpunkt aber ein im Endlichen liegender Punkt K auf $\mathfrak{H}_0$ ist.

VI) Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{G}$, deren Mittelpunkte die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{H}_0$ sind, sollen endliche Parabeln sein.

Nachdem dieses System bestimmt ist, wird sich zeigen, dass die eingehüllte Kurve eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung sein kann, und dass dann der in V) genannte Kegelschnitt als unendlich grosser Kreis erscheint, dessen Zentrum mit dem Mittelpunkte des Doppelbrennpunktsviereckes von $\mathfrak{C}$ zusammenfällt, so dass die Parallelen durch K zu den Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ die Axen von $\mathfrak{C}$ sind*).

Die Vermutung III) ist sehr naheliegend, da sie sich sowohl in dem Steinerschen Spezialfalle bestätigt findet, als auch mit dem Satze in Übereinstimmung steht, dass die Doppeltangenten einer bizirkularen Kurve 4. O. paarweise entgegengesetzt gleich gegen jede Kurvenaxe geneigt sind**), da die Doppeltangentenpaare als zerfallende Kegelschnitte in Γ auftreten müssen. Auch die Bedingungen V) und VI) werden vorläufig gerechtfertigt durch den genannten Spezialfall. Die II. Bedingung stützt sich auf den Satz, dass bei jeder bizirkularen Kurve 4. Ordnung $\mathfrak{C}$ die Mittelpunkte der 4 Doppeltangentenpaare (oder Brennpunktskreise) mit K eine gleichseitige Hyperbel bestimmen, deren Asymptoten den Axen von $\mathfrak{C}$ parallel sind, sowie auf den erwähnten Spezialfall. Die Bedingung IV) aber besagt nichts anderes, als dass die Mittelpunkte der 4 Doppeltangentenpaare ein Viereck bilden, worin jede Ecke der Höhenschnittpunkt des von den 3 übrigen Ecken gebildeten Dreieckes ist. Die Bedingung I) endlich bedarf keiner weiteren Erläuterung***).

§ 1.

Bestimmung des Systemes Γ.

Die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ muss nach IV) mit einer anderen gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$ zum Schnitt gebracht werden. Da es nun durch die Schnittpunkte zweier gegebenen gleichseitigen Hyperbeln stets eine gleichseitige Hyperbel giebt, deren Axen gegebene Richtungen haben, so darf man die Hyperbel $\mathfrak{H}$ beispielsweise so wählen, dass ihre Axen den Axen von $\mathfrak{C}$ parallel sind. Während die Koordinaten im Normalkoordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ sein sollen (I.), mögen die dazu parallelen Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ mit dem Mittelpunkte K_0 als x- und y-Axe bezeichnet werden. Die Koordinaten von K_0 in $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ seien $\mathfrak{x} = \alpha$, $\mathfrak{y} = \beta$ (s. Figur 1), daher $\mathfrak{H}_0$ in (x, y) und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$

$$(2^a.)\quad xy = \alpha\beta, \qquad (2^b.)\quad \mathfrak{x}\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\beta - \mathfrak{y}\alpha = 0.$$

Die Abszisse und Ordinate eines Punktes von $\mathfrak{H}_0$ in (x, y) sollen auch m und n heissen, so dass für einen solchen Punkt $mn = \alpha\beta$ und $x = m$, $y = n$ ist; dann ist die Parameterdarstellung von $\mathfrak{H}_0$

$$\text{in } (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) : (3^a.) \begin{cases} \mathfrak{x} = \alpha + m \\ \mathfrak{y} = \beta + \dfrac{\alpha\beta}{m}; \end{cases} \qquad \text{in } (x, y) : (3^b.) \begin{cases} x = m \\ y = \dfrac{\alpha\beta}{m}. \end{cases}$$

---

*) (A.) S. 37. **) (A.) S. 38.

***) Fast alle im folgenden aufgestellten Sätze lassen sich der Projektivität wegen sofort auf die allgemeine Plankurve 4. Ordnung vom Geschlechte 1 übertragen.

Endlich soll

$$(4.)\quad \frac{m}{\alpha} = w$$

gesetzt werden. Dann ist für $\mathfrak{H}_0$

$$(5^a.)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \alpha(1+w) \\ \mathfrak{y} = \beta\left(1+\frac{1}{w}\right) \end{cases} \quad \text{und} \quad (5^b.)\quad \begin{cases} x = \alpha w \\ y = \frac{\beta}{w}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente an $\mathfrak{H}_0$ in dem Punkte (5.) ist

$$(6^a.)\quad \mathfrak{x}\beta + \mathfrak{y}\alpha w^2 - \alpha\beta(1+w)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (6^b.)\quad x\beta + y\alpha w^2 - 2\alpha\beta w = 0.$$

Der Gegenpunkt von K auf $\mathfrak{H}_0$ sei K'; die unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{H}_0$ in der Richtung der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe sollen $\Omega_\mathfrak{x}$, $\Omega_\mathfrak{y}$ heissen. Dann hat man für die ausgezeichneten Punkte K, K', $\Omega_\mathfrak{x}$, $\Omega_\mathfrak{y}$:

$$(7.)\quad \begin{array}{lll} K: & m = -\alpha, & w = -1 \\ K': & m = +\alpha, & w = +1 \\ \Omega_\mathfrak{x}: & m = \infty, & w = \infty \\ \Omega_\mathfrak{y}: & m = 0, & w = 0. \end{array}$$

Die Gleichung irgend eines Kegelschnittes $\mathfrak{G}$ mit dem Mittelpunkte $x = m$, $y = n$ sei, auf seine eigenen Axen x', y' (parallel x, y nach III.) bezogen,

$$(8.)\quad \frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = 1.$$

Nun liegt die Aufgabe vor, auf Grund der Bedingungen I) bis VI) A und B als Funktionen von m zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sei als Gleichung von $\mathfrak{H}$ festgesetzt

$$(9^a.)\quad (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)^2 - (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0)^2 = C_0 \quad \text{oder} \quad (9^b.)\quad (x-\delta)^2 - (y-\varepsilon)^2 = C_0;$$

dann ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{H}$ in $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bez. (x, y)

$$(10^a.)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 \\ \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 \end{cases} \quad (10^b.)\quad \begin{cases} x = \delta \\ y = \varepsilon, \end{cases} \text{dabei} \quad (10^c.)\quad \begin{cases} \delta = \mathfrak{x}_0 - \alpha \\ \varepsilon = \mathfrak{y}_0 - \beta \end{cases}$$

(vgl. Fig. 1.). Aus (9^b.) und (3^b.) folgt für die Mittelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte (Bedingung IV)

$$(11.)\quad \Phi_4(m) \equiv m^4 - 2\delta m^3 + (\delta^2 - \varepsilon^2 - C_0)m^2 + 2\varepsilon\alpha\beta m - \alpha^2\beta^2 = 0.$$

Bezeichnet man mit A', B' zwei unbekannte Funktionen von m, so muss zufolge IV) und (8.) $A = A'\Phi_4$, $B = B'\Phi_4$ sein. Damit aber V) erfüllt werde, muss nach (7.) $A' = \frac{A''}{m+\alpha}$, $B' = \frac{B''}{m+\alpha}$ sein, wenn A'', B'' neue, für $m = -\alpha$ nicht verschwindende Funktionen von m sind. Nach VI) und (7.) muss für $m = \infty$ $\frac{B^2}{A}$, für $m = 0$ $\frac{A^2}{B}$ eine endliche Grösse sein (A und B selbst aber unendlich gross), denn diese Quotienten sind den Quadraten der Parameter der Parabeln proportional. Setzt man demgemäss $A'' = \frac{A'''}{m^\mathfrak{u}}$, $B'' = \frac{B'''}{m^\mathfrak{v}}$, so erhält man nach (11.) für $m = \infty$ $A = A'''.m^{3-\mathfrak{u}}$, $B = B'''.m^{3-\mathfrak{v}}$, also $\frac{B^2}{A} = \frac{B'''^2}{A'''}.m^{\mathfrak{u}-2\mathfrak{v}+3}$; für $m = 0$ aber $A = \frac{-\alpha\beta^2 A'''}{m^\mathfrak{u}}$, $B = \frac{-\alpha\beta^2 B'''}{m^\mathfrak{v}}$, daher $\frac{A^2}{B} = \frac{-\alpha\beta^2 A'''^2}{B'''}.m^{-2\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}$. Hiernach ergeben sich für die Exponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ die Gleichungen $\mathfrak{u} - 2\mathfrak{v} + 3 = 0$, $-2\mathfrak{u} + \mathfrak{v} = 0$, woraus $\mathfrak{u} = 1$, $\mathfrak{v} = 2$

folgt. Somit ist $A = \frac{A''' \Phi_4}{m(m+\alpha)}$, $B = \frac{B''' \Phi_4}{m^2(m+\alpha)}$, worin noch die Grössen A''', B''' zu bestimmen sind. Dazu genügen die Bedingungen I) und II). Nach II) ist mit Rücksicht auf (3^a.) und (8.) die Gleichung von $\mathfrak{G}$ $B(\mathfrak{x} - \alpha - m)^2 + A\left(\mathfrak{y} - \beta - \frac{\alpha\beta}{m}\right)^2 = AB$, oder mit den für A, B gefundenen Werten

$$(12.)\quad B''' m(m+\alpha)(\mathfrak{x} - \alpha - m)^2 + A'''(m+\alpha)(\mathfrak{y}m - \beta m - \alpha\beta)^2 - A''' B''' \Phi_4 = 0.$$

Diese Gleichung ist nach (11.) von der Form

$$B''' m^4 (1 - A''') + m^3 \mathfrak{f}_2 + m^2 \mathfrak{f}_1 + m\mathfrak{f}_0 + \alpha^2\beta^2 A''' (\alpha + B''') = 0,$$

wo die $\mathfrak{f}$ Funktionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sind. Die linke Seite muss aber nach I) in m vom 2. Grade sein; und das geschieht unter der einfachsten Annahme für A''', B''', nämlich dass diese Grössen Konstanten sind, dann, wenn die Koeffizienten von m^4 und m^0 verschwinden. Dies giebt $A''' = 1$, $B''' = -\alpha$. Setzt man diese Werte in A, B ein, so erhält man endgiltig

$$(13.)\quad A = \frac{\Phi_4(m)}{m(m+\alpha)},\quad B = -\frac{\alpha \Phi_4(m)}{m^2(m+\alpha)}.$$

Weiter wird [vgl. (4.)]

$$(14.)\quad \frac{B}{A} = -\frac{\alpha}{m} = -\frac{1}{w}.$$

Die Gleichung von $\mathfrak{G}$ aber wird nach gehöriger Ordnung zufolge (12.)

$$(15.)\quad w^2 \mathfrak{K}_1 + w\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0,$$

worin, wenn die Abkürzung

$$(16.)\quad \delta^2 - \varepsilon^2 - C_0 = C$$

eingeführt wird,

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_1 = -\mathfrak{y}^2 - 2\mathfrak{x}\alpha + 2\mathfrak{y}\beta + 3\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\delta \\ \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 - 4\mathfrak{x}\alpha + 4\mathfrak{y}\beta + 3\alpha^2 - 3\beta^2 - C \\ \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{x}^2 - 2\mathfrak{x}\alpha + 2\mathfrak{y}\beta + \alpha^2 - 3\beta^2 - 2\beta\varepsilon \end{cases}$$

ist. Die Gleichung der eingehüllten Kurve $\mathfrak{C}$ aber ist $\mathfrak{K}^2_2 - 4\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_3 = 0$ oder

$$(18.)\quad \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2 \\ -2\mathfrak{x}^2[3\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\delta + C] - 2\mathfrak{y}^2[\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\beta\varepsilon - C] \\ \qquad + 8(\mathfrak{x}\alpha - \mathfrak{y}\beta)[\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\delta - 2\beta\varepsilon + C] \\ -4(\alpha^2 - \beta^2)[\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\delta - 2\beta\varepsilon + C] + (\alpha^2 - \beta^2 - C)^2 + 16\alpha\beta(\alpha + \delta)(\beta + \varepsilon) \end{array}\right\} = 0.$$

Die Vergleichung mit (1.) ergiebt, dass die eingehüllte Kurve wirklich eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung und Gl. (18.) ihre Normalform ist. Hiermit ist z. B. von neuem bewiesen, dass die 8 Doppeltangenten einer solchen Kurve paarweise entgegengesetzt gleich gegen die Axen geneigt sind. Der Nachweis, dass nur die vorhin gemachte Annahme über A''', B''' auf eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung führt, kann hier übergangen werden.

Nach (10^c.) und (16.) können die Gleichungen (17.), (18.) auch so geschrieben werden:

$$(19.)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_1 = -\mathfrak{y}^2 - 2\mathfrak{x}\alpha + 2\mathfrak{y}\beta + \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\mathfrak{x}_0 \\ \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 - 4\mathfrak{x}\alpha + 4\mathfrak{y}\beta + 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\mathfrak{x}_0 - 2\beta\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + C_0 \\ \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{x}^2 - 2\mathfrak{x}\alpha + 2\mathfrak{y}\beta + \alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\mathfrak{y}_0, \end{cases}$$

$$(20.)\quad \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)^2 \\ -2\mathfrak{x}^2[\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{y}_0^2 + 2\alpha\mathfrak{x}_0 + 2\beta\mathfrak{y}_0 - C_0] + 2\mathfrak{y}^2[\mathfrak{x}_0^2 - 2\alpha\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{y}_0^2 - 2\beta\mathfrak{y}_0 - C_0] \\ \qquad + 8(\mathfrak{x}\alpha - \mathfrak{y}\beta)(\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{y}_0^2 - C_0) \\ -4(\alpha^2 - \beta^2)(\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{y}_0^2 - C_0) + [2\alpha\mathfrak{x}_0 - 2\beta\mathfrak{y}_0 - (\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{y}_0^2 - C_0]^2 + 16\alpha\beta\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 \end{array}\right\} = 0.$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$(21.)\quad 2\alpha\mathfrak{x}_0=\mathfrak{X},\ 2\beta\mathfrak{y}_0=\mathfrak{Y},\ \mathfrak{x}_0^2-\mathfrak{y}_0^2-C_0=\mathfrak{Z},\ \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}-\mathfrak{Z}=-\mathfrak{W}$$

lautet endlich die Gleichung von $\mathfrak{C}$

$$(22.)\quad (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2-2\mathfrak{x}^2(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z})-2\mathfrak{y}^2(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}-\mathfrak{Z})+8(\mathfrak{x}\alpha-\mathfrak{y}\beta)\mathfrak{Z}$$
$$-4(\alpha^2-\beta^2)\mathfrak{Z}+\mathfrak{W}^2+4\mathfrak{X}\mathfrak{Y}=0.$$

Ist nun $\mathfrak{C}$ gegeben und auf die Normalform (1.) gebracht, so hat man zur Bestimmung der Systemkonstanten α, β, $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, C_0 folgendes Gleichungssystem:

$$(23.)\quad \begin{array}{ll} \mathfrak{a}=-2(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}, & \mathfrak{b}=-2(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}-\mathfrak{Z}), \\ \mathfrak{d}=4\alpha\mathfrak{Z}, & \mathfrak{e}=-4\beta\mathfrak{Z} \\ \multicolumn{2}{l}{\mathfrak{f}=(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})^2-2(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})\mathfrak{Z}+\mathfrak{Z}^2-4(\alpha^2-\beta^2)\mathfrak{Z}.} \end{array}$$

Die beiden ersten Gleichungen liefern:

$$(24.)\quad \mathfrak{X}+\mathfrak{Y}=-\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{4},\ \mathfrak{Z}=-\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{4};$$

darauf die dritte und vierte

$$(25.)\quad \alpha=-\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}},\ \beta=\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}.$$

Die Einsetzung dieser Werte in die fünfte Gleichung giebt

$$(26.)\quad \mathfrak{X}-\mathfrak{Y}=\frac{2}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\left[\mathfrak{f}-\frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}{8}-\frac{\mathfrak{d}^2-\mathfrak{e}^2}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\right].$$

Aus (24.) und (26.) folgt

$$(27.)\quad \mathfrak{X}=\frac{(4\mathfrak{f}-\mathfrak{a}^2)(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-4\mathfrak{d}^2+4\mathfrak{e}^2}{4(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2},\ \mathfrak{Y}=-\frac{(4\mathfrak{f}-\mathfrak{b}^2)(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-4\mathfrak{d}^2+4\mathfrak{e}^2}{4(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2},$$

und nach (21.), (24.), (27.) ist

$$(28.)\quad \mathfrak{W}=-\frac{(4\mathfrak{f}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-4\mathfrak{d}^2+4\mathfrak{e}^2}{2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2}.$$

Schliesslich wird nach (21.), (25.), (24.)

$$(29.)\quad \mathfrak{x}_0=\frac{(\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{f})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+4\mathfrak{d}^2-4\mathfrak{e}^2}{8(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\mathfrak{d}},\ \mathfrak{y}_0=\frac{(\mathfrak{b}^2-4\mathfrak{f})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+4\mathfrak{d}^2-4\mathfrak{e}^2}{8(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\mathfrak{e}},\ C_0=\mathfrak{x}_0^2-\mathfrak{y}_0^2+\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{4}.$$

Die Gl. (25.) und (29.) enthalten die Lösung der Aufgabe, das System Γ zu bestimmen, wenn $\mathfrak{C}$ gegeben ist. Das Ergebnis ist, dass, wie vorauszusehen war, einer gegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ nur 1 System Γ zukommt. —

§ 2.

Eigenschaften von Γ.

Nach (14.) hat man folgenden Satz:

Alle Kegelschnitte $\mathfrak{G}$, deren Mittelpunkte mit K auf demselben Aste von $\mathfrak{H}_0$ liegen, sind Ellipsen; die $\mathfrak{G}$, deren Mittelpunkte auf dem anderen Aste liegen, sind Hyperbeln. Beide Gruppen werden getrennt durch die beiden Parabeln, deren Mittelpunkte $\Omega_{\mathfrak{x}}$, $\Omega_{\mathfrak{y}}$ sind (vgl. Fig. 6).

Von besonderen Kegelschnitten sind ausser den Parabeln $\mathfrak{P}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{y}}$ noch 6 zu erwähnen. Die Gleichungen von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{y}}$ sind nach (15.) und (4.)

$$(30.)\quad \mathfrak{P}_{\mathfrak{x}}(m=\infty):\ \mathfrak{K}_1=0;\qquad \mathfrak{P}_{\mathfrak{y}}(m=0):\ \mathfrak{K}_3=0.$$

Ihre Scheitel sind also in (x, y) $x=\delta+\frac{\alpha}{2}$, $y=0$ bez. $x=0$, $y=\varepsilon+\frac{\beta}{2}$, ihre Parameter 2α bez. 2β.

Unter den $\mathfrak{G}$ ist 1 Kreis $\mathfrak{K}$, nämlich nach (14.) zu $m = -\alpha$ gehörig; d. h. er fällt mit dem unendlich grossen $\mathfrak{G}$ zusammen, da sein Mittelpunkt K ist. In der That ist die linke Seite seiner Gleichung (für $w = -1$) $\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0$ eine Konstante, nämlich $\mathfrak{Z}$ (21.) Dagegen ist der Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt K' ist ($m = \alpha$), eine (und zwar die einzige) gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{R}$. Ihre Gleichung ($w = 1$) ist $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0$.

Dazu kommen noch die 4 zerfallenden Kegelschnitte, deren Mittelpunkte sich aus der Gleichung $\Phi_4(m) = 0$ (11.) ergeben. Da man eine gleichseitige Hyperbel ($\mathfrak{H}_0$) niemals durch eine andere gleichseitige Hyperbel ($\mathfrak{H}$) so schneiden kann, dass auf jedem Aste eine gerade Anzahl von Schnittpunkten liegt, so ergiebt sich aus dem obigen Satze sofort:

Die Anzahl der reellen Doppeltangentenpaare einer reellen bizirkularen Kurve 4. Ordnung ist stets ungerade (1 oder 3) (die Anzahl der reellen Mittelpunkte der Doppeltangentenpaare aber gerade).

Aus (14.) erkennt man, dass je zwei Kegelschnitte $\mathfrak{G}$, deren Parameter w, w' in der Beziehung

$$(31.)\quad ww' = 1$$

stehen, einander ähnlich sind. Aber sie liegen nicht ähnlich, sondern es bedarf der Drehung des einen um 90°, um sie in ähnliche Lage zu bringen. Nach (5ᵃ.) und (31.) hat man für die Mittelpunkte von 2 ähnlichen Kegelschnitten $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ $\mathfrak{x} = \alpha(1 + w)$, $\mathfrak{y} = \beta(1 + \frac{1}{w})$ bez. $\mathfrak{x}' = \alpha(1 + \frac{1}{w})$, $\mathfrak{y}' = \beta(1 + w)$. Die Verbindungslinie beider Punkte, nämlich

$$(32.)\quad \mathfrak{x}\beta + \mathfrak{y}\alpha - \alpha\beta\left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)^2 = 0$$

hat daher eine von w unabhängige Richtung. Ist $w = w'$, also nach (31.) $w = \mp 1$, so ist die Verbindungsgerade der dann zusammenfallenden Mittelpunkte die Tangente an $\mathfrak{H}_0$ in dem gemeinsamen Mittelpunkte. Da aber durch $w = \mp 1$ die beiden Punkte K, K' dargestellt werden, so gilt der Satz:

Je zwei Kegelschnitte $\mathfrak{G}$, deren Mittelpunkte auf einer Parallele zur Tangente an $\mathfrak{H}_0$ in K liegen, sind ähnlich. Insbesondere erscheinen als ähnliche Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{P}_{\mathfrak{y}}$.

Zwei beliebige Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ werden sich in 4 Punkten schneiden. Da sie aber parallelaxig sind, so muss jedes solche Schnittpunktviereck ein Kreisviereck sein. Bei näherer Untersuchung zeigt sich, dass die Umkreismittelpunkte aller dieser Kreisvierecke mit K zusammenfallen. Dies beruht darauf, dass sich $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ mit der Abkürzung $\mathfrak{L} = -2\mathfrak{x}\alpha + 2\mathfrak{y}\beta + \alpha^2 - \beta^2$ nach (19.) und (10ᶜ.) in der Form schreiben lassen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1 &= \phantom{\mathfrak{x}^2} - \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{L} + 2\alpha(\alpha + \delta)\\
\mathfrak{K}_2 &= \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 + 2\mathfrak{L} + \alpha^2 - \beta^2 - C\\
\mathfrak{K}_3 &= \mathfrak{x}^2 \phantom{- \mathfrak{y}^2} + \mathfrak{L} - 2\beta(\beta + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Sind w, w' die Parameter zweier beliebigen $\mathfrak{G}$, so erhält man für den Umkreis ihres Schnittpunktviereckes durch Subtraktion ihrer Gleichungen (15.) nach Multiplikation mit $(w' + 1)^2$ bez. $(w + 1)^2$

$$(33.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 2(\alpha\mathfrak{x}_0 + \beta\mathfrak{y}_0) - (\mathfrak{x}_0{}^2 - \mathfrak{y}_0{}^2 - C_0)\frac{ww' - 1}{(w + 1)(w' + 1)} = 0.$$

Hieraus folgt nach (31.):

Je zwei ähnliche Kegelschnitte des Systemes Γ schneiden sich auf einem und demselben Kreise

$$(34.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 2(\alpha\mathfrak{x}_0 + \beta\mathfrak{y}_0);$$

er enthält also insbesondere die Schnittpunkte der Parabeln $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ und mag kurz der Schnittpunktkreis von Γ heissen (vgl. Figur 6).

Da die gegenseitigen Schnittpunkte von zwei zusammenfallenden $\mathfrak{G}$ $(w' = w)$ die Berührungspunkte mit $\mathfrak{C}$ sind, so hat man weiter den Satz:

Die 4 Berührungspunkte eines beliebigen Kegelschnittes $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$ liegen auf einem Kreise um K:

$$(35.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 2(\alpha\mathfrak{x}_0 + \beta\mathfrak{y}_0) + (\mathfrak{x}_0{}^2 - \mathfrak{y}_0{}^2 - C_0) \cdot \frac{w-1}{w+1}$$

(vgl. (33.)). Der Schnittpunktkreis (34.) muss, da $\mathfrak{N}$ zwei zusammenfallende ähnliche $\mathfrak{G}$ darstellt, die Berührungspunkte der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{N}$ enthalten.

Die Kreise (35.) können zugleich als die Kegelschnitte durch die Berührungspunkte eines beliebigen $\mathfrak{G}$ (mit dem Parameter w) und die des unendlich grossen Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ $(w = -1)$ aufgefasst werden. Demgemäss kann jeder solche Kreis auch in der Form

$$(36.)\quad w\mathfrak{K}_1 + \frac{1-w}{2}\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_3 = 0$$

geschrieben werden (insbesondere für $w = 1$ der Schnittpunktkreis $\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_3 = 0$). Denn es lässt sich leicht zeigen, dass bei jedem Kegelschnittsysteme $w^2\mathfrak{K}_1 + w\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0$, welches eine Kurve 4. Ordnung einhüllt, der durch die 8 Berührungspunkte von 2 beliebigen dieser Kegelschnitte (w, w') gelegte Kegelschnitt T die Gleichung $ww'\mathfrak{K}_1 + \frac{1}{2}(w + w')\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0$ hat. Die Parameter w'', w''' von zwei solchen Systemkegelschnitten $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$, die sich gegenseitig auf T schneiden, sind dabei durch die Gleichung $w''w''' - \frac{1}{2}(w'' + w''')(w + w') + ww' = 0$ verbunden, die anzeigt, dass sich auch umgekehrt die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ auf dem Kegelschnitte S befinden, der die Berührungspunkte von $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$ bestimmt, nämlich $w''w'''\mathfrak{K}_1 + \frac{1}{2}(w'' + w''')\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0$, so dass jeder Kegelschnitt S, der mit $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ ein Büschel bildet, die Berührungspunkte von zwei anderen Systemkegelschnitten $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$ enthält. Daher ist im System Γ jeder Kreis (36.) der Ort der Schnittpunkte von je zwei Systemkegelschnitten, deren Parameter w'', w''' durch die Gleichung $w''w''' + \frac{1}{2}(w'' + w''')(1 - w) - w = 0$ verbunden sind (und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die durch den Schnittpunkt der in K und dem Mittelpunkte des durch w bestimmten $\mathfrak{G}$ an $\mathfrak{H}_0$ gelegten Tangenten läuft*)). Die

*) In Übereinstimmung mit einem für jedes Kegelschnittsystem, das eine Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten erzeugt, geltenden Satze: Ist g die Verbindungsgerade der Doppelpunkte, $\mathfrak{M}$ der Kegelschnitt, der die Pole von g enthält, P, P' die Pole von g mit Beziehung auf 2 beliebige Systemkegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{Q}$ der die 8 Berührungspunkte von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ enthaltende Kegelschnitt, so wird jede Gerade durch den Pol von PP' mit Beziehung auf $\mathfrak{M}$ die Pole P'', P''' von g mit Beziehung auf 2 neue Systemkegelschnitte $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ bestimmen, die sich gegenseitig auf $\mathfrak{Q}$ schneiden. — Ausser diesem Satze wird im folgenden noch ein anderer benutzt: Sind P'' P''' die Pole von g für 2 Systemkegelschnitte $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$, und P, P' die Pole von g für 2 andere $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ von solcher Beschaffenheit, dass der durch ihre 8 Berührungspunkte gehende Kegelschnitt $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ ein Büschel bildet, so werden P, P' mit

die Berührungspunkte der $\mathfrak{S}$ bestimmenden Kreise erscheinen in (36.) als ein Büschel $w(\mathfrak{K}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{K}_2) + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_3\right) = 0$, das durch die beiden besonderen Kreise ($w = \infty$, $w = 0$) $2\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 = 0$, $\mathfrak{K}_2 - 2\mathfrak{K}_3 = 0$ oder

$$(37.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 2(\alpha\mathfrak{x}_0 + \beta\mathfrak{y}_0) \pm (\mathfrak{x}_0{}^2 - \mathfrak{y}_0{}^2 - C_0)$$

bestimmt wird, nämlich die Kreise durch die Berührungspunkte der beiden Parabeln $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$.

Die Kegelschnitte durch die Berührungspunkte von $\mathfrak{R}$ und eines beliebigen $\mathfrak{S}$ sind

$$(38.)\quad w\mathfrak{K}_1 + \frac{1+w}{2}\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 = 0.$$

Unter ihnen befindet sich der Schnittpunktkreis ($w = -1$) und $\mathfrak{R}$ selbst ($w = 1$).

Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_a$ durch die Berührungspunkte von je zwei ähnlichen Kegelschnitten sind

$$(39.)\quad (\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_3) + \frac{1+w^2}{2w}\mathfrak{K}_2 = 0,$$

d. h. sie bilden ein Büschel. Dieses Büschel wird durch die Kegelschnitte

$$(40^a.)\quad \mathfrak{K}_2 = 0 \quad \text{und} \quad (40^b.)\quad \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_3 = 0$$

bestimmt. Beide sind mit $\mathfrak{R}$ koaxiale gleichseitige Hyperbeln; der erste ($w = \infty, w = 0$) enthält die Berührungspunkte der beiden Parabeln $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$, der andere ($w = \pm\sqrt{-1}$) die Berührungspunkte der beiden imaginären Kegelschnitte, deren Mittelpunkte auf der durch K_0 gehenden Geraden $\beta x + \alpha y = 0$ liegen*).

Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{S}$, deren Mittelpunkte Gegenpunkte auf $\mathfrak{H}_0$ (Endpunkte eines Durchmessers von $\mathfrak{H}_0$) sind, mögen kurz entgegengesetzte Systemkegelschnitte heissen. Dann sind z. B. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ entgegengesetzte Kegelschnitte. Für entgegengesetzte Kegelschnitte ist

$$(41.)\quad w + w' = 0.$$

Die Kreise durch die Schnittpunkte von je zwei entgegengesetzten Kegelschnitten sind

$$(42.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 2\ (\alpha\mathfrak{x}_0 + \beta\mathfrak{y}_0) - (\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{y}_0^2 - C_0) \cdot \frac{1+w^2}{1-w^2}.$$

Die Gleichungen der Kreise um K lassen sich nach (33.), (34.), (35.), (42.) mit Hilfe von (21.) so zusammenfassen:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = (\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}) + \mathfrak{Z} \cdot f\ (w,\ w')$$

oder nach (24.)

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = -\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{4} - \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{4} \cdot f(w, w').$$

---

dem Pole von P'', P''' für $\mathfrak{M}$ in gerader Linie liegen. Dreht sich dann PP' um den zuletzt genannten Pol, so läuft $\mathfrak{Q}$ beständig durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}''$ mit $\mathfrak{K}'''$. — Auf den Beweis dieser Sätze kann hier der Kürze halber nicht eingegangen werden.

*) Vgl. S. 8. Die Kegelschnitte T durch die Berührungspunkte von je 2 Systemkegelschnitten $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ müssen offenbar ein Büschel bilden, sobald die Parameter von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ z. B. eine der Gleichungen $ww' = \text{const.}$ oder $\frac{1}{2}(w + w') = \text{const.}$, oder $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w'}\right) = \text{const.}$ erfüllen. Das Büschel (39.) entspricht der Gleichung $ww' = 1$. Für $w' = w$ ergiebt sich $w = \pm 1$, d. h. die Büschelpunkte werden durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{K}$ bestimmt, deren Schnittpunkte in der That mit denen der beiden Kegelschnitte (40^a.), (40^b.) zusammenfallen.

Dabei ist

$$f(w,w')=\frac{ww'-1}{(w+1)(w'+1)} \text{ für 2 beliebige } \mathfrak{G},$$
$$f(w,w')=0 \quad \text{„ „ ähnliche } \mathfrak{G},$$
$$f(w,w')=\frac{w^2+1}{w^2-1} \quad \text{„ „ entgegengesetzte } \mathfrak{G},$$
$$f(w,w')=\frac{w-1}{w+1} \quad \text{„ „ benachbarte } \mathfrak{G}.$$

Die vorhin genannten 2 imaginären Kegelschnitte sind die einzigen Systemkegelschnitte, die zugleich ähnlich und entgegengesetzt sind. Der Büschelpunkt eines jeden Geradenbüschels, das die Mittelpunkte von je zwei solchen Systemkegelschnitten bestimmt, die sich auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_a$ schneiden, liegt auf der Geraden KK_0K'. Hervorzuheben ist unter diesen Büscheln dasjenige, dessen Büschelpunkt K_0 ist, und dessen Gerade die Mittelpunkte von je zwei solchen Systemkegelschnitten enthalten, die sich auf dem durch die Berührungspunkte von $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ gehenden Kegelschnitte begegnen. Dieser Kegelschnitt ist die Hyberbel (40ª.). Daher gilt der Satz:

Je zwei entgegengesetzte Kegelschnitte des Systemes Γ schneiden sich auf der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{K}_2=0$, deren Mittelpunkt K' ist, deren Axen den Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ parallel sind, und die die Berührungspunkte der Parabeln $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ enthält. In der That ist ja jede von diesen Parabeln als ein Paar zusammenfallender entgegengesetzter Kegelschnitte zu betrachten (s. S. 8).

Weiter hat man (s. d. Anm. S. 8) den Satz:

Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_0$ durch die Berührungspunkte von je 2 entgegengesetzten Systemkegelschnitten bilden ein Büschel.

Die Grundpunkte des Büschels werden durch die Systemkegelschnitte $w=0$, $w=\infty$, d. h. durch die Parabeln $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ bestimmt. Dieses Büschel $\mathfrak{K}_0$ hat die Gleichung

$$(43.)\quad w^2\mathfrak{K}_1-\mathfrak{K}_3=0.$$

Sind M, M' die Mittelpunkte von 2 entgegengesetzten Kegelschnitten $\pm w$, so wird (vgl. d. Anm. S. 7) der durch die 8 Berührungspunkte gehende $\mathfrak{K}_0$ (43.) der Ort der Schnittpunkte von je 2 solchen Systemkegelschnitten sein, deren Mittelpunkte auf einer Parallelen zu den Tangenten in M, M' an $\mathfrak{H}_0$ liegen.

Als besonderen Fall erhält man hieraus den Satz über die Schnittpunkte von je 2 ähnlichen Kegelschnitten (wenn M, M' mit K, K' zusammenfallen). Von dem Büschel (39.) ist noch zu erwähnen, dass es darin einen zerfallenden Kegelschnitt K_a giebt, nämlich die Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$.

Auf dieselbe Weise lassen sich leicht die Kegelschnittbüschel durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{K}$ verfolgen.

§ 3.

Die Asymptoten der Systemkegelschnitte $\mathfrak{G}$.

Die Gleichung des Asymptotensystemes $\mathfrak{A}$ eines Systemkegelschnittes $\mathfrak{G}$ auf seine Axen bezogen ist nach (8.) $Bx'^2+Ay'^2=0$, oder in den Koordinaten $(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ und (x,y): $B(\mathfrak{x}-\alpha-m)^2+A\left(\mathfrak{y}-\beta-\frac{\alpha\beta}{m}\right)^2=0$, $B(x-m)^2+A\left(y-\frac{\alpha\beta}{m}\right)^2=0$; oder zufolge (13.):

$$(44^a.)\quad \alpha m(\mathfrak{x}-\alpha-m)^2-(\mathfrak{y}m-\beta m-\alpha\beta)^2=0,$$
$$(44^b.)\quad \alpha m(x-m)^2-(ym-\alpha\beta)^2=0,$$

oder endlich in (x', y') (s. (4.))

$$(44^c.)\quad x'^2 - w y'^2 = 0.$$

Hiernach sind die Asymptotensysteme $\mathfrak{A}$, falls man sich die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ und den Punkt K gegeben denkt, im übrigen völlig unabhängig von der eingehüllten Kurve $\mathfrak{C}$, die erst durch Festlegung der Mittelpunkte der 4 zerfallenden Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ (durch die Konstanten $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, C_0$) bestimmt wird. Dadurch gewinnt die Frage nach der von den $\mathfrak{A}$ eingehüllten Kurve $\mathfrak{T}$ noch an Interesse. Diese Kurve mag kurz die Asymptotenkurve von Γ heissen.

Zunächst erhebt sich, wie bei den $\mathfrak{G}$ selbst, die Frage nach den Kreisen durch die Schnittpunkte von irgend zwei $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$; denn ebenso, wie die $\mathfrak{G}$, sind die $\mathfrak{A}$ parallelaxige Kegelschnitte, je zwei $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ bilden demnach ein Kreisviereck. Aus $(44^a.)$ erhält man für den Kreis, der zu $\mathfrak{A}(m)$ und $\mathfrak{A}'(m')$ gehört, indem man die Gleichung von $\mathfrak{A}$ mit $m'(\alpha + m')$, die von $\mathfrak{A}'$ mit $m(\alpha + m)$ multipliziert und dann eine von der andern abzieht,

$$(45.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \frac{(\alpha + m)(\alpha + m')(mm' + \beta^2)}{mm'} = 0.$$

Daher (ebenso wie bei den $\mathfrak{G}$) der Satz:

Zwei beliebige Asymptotensysteme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ schneiden sich auf einem Kreise, der K zum Mittelpunkte hat.

Der Radius dieses Kreises hat den Wert Null, wenn

$$(46.)\quad ww' = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$$

ist. Die Mittelpunkte von zwei solchen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ sind $x = \alpha w$, $y = \frac{\beta}{w}$; $x' = -\frac{\beta^2}{\alpha w}$, $y' = -\frac{\alpha^2 w}{\beta}$; die Gleichung der Verbindungslinie ist $x\alpha - y\beta - \frac{\alpha^2 w^2 - \beta^2}{w} = 0$, sie ist also (unabhängig von w) entgegengesetzt wie ein Lot auf KK_0K' gegen die Axen geneigt, oder parallel der Normale von $\mathfrak{H}_0$ in K. Daher der Satz:

Die Asymptotensysteme von je zwei Kegelschnitten $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$, deren Zentrale parallel zur Normale von $\mathfrak{H}_0$ in K ist, schneiden sich auf dem Nullkreise K.

Aus (45.) erhält man ferner die besonderen Sätze:

Die Asymptotensysteme von je zwei ähnlichen Kegelschnitten schneiden sich auf den Kreisen

$$(47^a.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{(1 + w)^2}{w},$$

die von je zwei entgegengesetzten Kegelschnitten auf den Kreisen

$$(47^b.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = (\alpha^2 w^2 - \beta^2) \cdot \frac{1 - w^2}{w^2};$$

der Kreis durch den Mittelpunkt und durch die Berührungspunkte von $\mathfrak{A}$ mit der Asymptotenkurve $\mathfrak{T}$ $(w' = w)$ hat die Gleichung

$$(47^c.)\quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = (\alpha^2 w^2 + \beta^2) \cdot \left(\frac{1 + w}{w}\right)^2.$$

Hieraus lässt sich leicht die Gleichung der Berührungssehne s eines Asymptotensystemes $\mathfrak{A}$ ableiten. Denn sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ zwei benachbarte und dann zusammenfallende Asymptotensysteme, so wird die Verbindungslinie q ihrer Mittelpunkte M, M' die Tangente in M an $\mathfrak{H}_0$ sein, und einer der durch ihre 4 Schnittpunkte gelegten zerfallenden Kegelschnitte aus der Tangente t in

M an den Kreis (47^c.) und der Berührungssehne s bestehen. Nach (47^c.) und (5^a.) wird t dargestellt durch

$$(48^{a}.)\quad \mathfrak{x}\alpha \mathrm{w}+\mathfrak{y}\beta=\frac{1+\mathrm{w}}{\mathrm{w}}(\alpha^2\mathrm{w}^2+\beta^2).$$

Da sich die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und (s, t) auf dem Kreise (47^c.) schneiden, so sind sie parallelaxig, folglich sind s und t entgegengezetzt gleich gegen jede Axe geneigt. Demnach muss s von der Form $\mathfrak{x}\alpha\mathrm{w}-\mathfrak{y}\beta=\varphi$ sein, und da sich die Gleichung von $\mathfrak{A}$ selbst nach (44^a.) schreiben lässt $\mathrm{w}\cdot(\mathfrak{x}-\alpha(1+\mathrm{w}))^2-(\mathfrak{y}\mathrm{w}-\beta(1+\mathrm{w}))^2=0$, so muss die Identität

$$\frac{\alpha^2\mathrm{w}^2+\beta^2}{\mathrm{w}(1+\mathrm{w})}\Big[\mathrm{w}(\mathfrak{x}-\alpha(1+\mathrm{w}))^2-(\mathrm{y}\mathrm{w}-\beta(1+\mathrm{w}))^2\Big]+\frac{\alpha^2\mathrm{w}^3-\beta^2}{1+\mathrm{w}}\Big[\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-\Big(\frac{1+\mathrm{w}}{\mathrm{w}}\Big)^2(\alpha^2\mathrm{w}^2+\beta^2)\Big]$$
$$\equiv\Big[\mathfrak{x}\alpha\mathrm{w}+\mathfrak{y}\beta-\frac{1+\mathrm{w}}{\mathrm{w}}(\alpha^2\mathrm{w}^2+\beta^2)\Big]\Big[\mathfrak{x}\alpha\mathrm{w}-\mathfrak{y}\beta-\varphi\Big]$$

stattfinden. Daraus ergiebt sich $\varphi=\frac{1-\mathrm{w}}{\mathrm{w}}(\alpha^2\mathrm{w}^2+\beta^2)$. Also ist die Berührungssehne s

$$(48^{b}.)\quad \mathfrak{x}\alpha\mathrm{w}-\mathfrak{y}\beta=\frac{1-\mathrm{w}}{\mathrm{w}}(\alpha^2\mathrm{w}^2+\beta^2.)$$

Diese Gleichung erhält man aber auch durch Vertauschung von w mit — w aus (48^a.). D. h.: bezeichnet man für den entgegengesetzten Kegelschnitt die Berührungssehne und die Tangente an den entsprechenden Kreis (durch den Mittelpunkt und die Berührungspunkte des Asymptotensystemes) im Mittelpunkte des Kegelschnittes mit s′, t′, so fällt s′ mit t und t′ mit s zusammen. Oder mit anderen Worten:

Sind M, M′ die Mittelpunkte von zwei entgegengesetzten Systemkegelschnitten, so sind $s\equiv t'$ und $t\equiv s'$ die Lote auf KM′, KM in M′, M.

Hieran knüpft sich eine Reihe bemerkenswerter Sätze, von denen einige hervorgehoben werden mögen. Für den Schnittpunkt von s und t erhält man aus (48^{a, b}.)

$$(48^{c}.)\quad \begin{cases} \mathrm{x}=\dfrac{\beta^2}{\alpha\mathrm{w}^2}, \\[2ex] \mathrm{y}=\dfrac{\alpha^2\mathrm{w}^2}{\beta}. \end{cases}$$

Also ist $\mathrm{xy}=\alpha\beta$. Das heisst:

Die Geraden s, t schneiden sich in einem Punkte M″ der Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$; oder:

Die Berührungssehnen der Asymptotensysteme entgegengesetzter Kegelschnitte treffen sich auf $\mathfrak{H}_0$.

Dadurch wird jedem Durchmesser MM′ von $\mathfrak{H}_0$ ein Punkt M″ auf $\mathfrak{H}_0$ zugeordnet. Nun fragt es sich, welches die Asymptoten des Systemkegelschnittes $\mathfrak{S}''$ sind, der M″ zum Mittelpunkte hat. Sind x″, y″ die zu x, y parallelen Axen durch M″, so ist die Gleichung des Asymptotensystemes von $\mathfrak{S}''$ nach (44^c.) $\mathrm{x}''^2-\mathrm{w}''\mathrm{y}''^2=0$, worin zufolge (48^c.) und (5^b.) $\mathrm{w}''=\frac{\beta^2}{\alpha^2\mathrm{w}^2}$ zu setzen ist, so dass das Asymptotensystem von $\mathfrak{S}''$ durch $(\alpha\mathrm{w}\mathrm{x}'')^2-(\beta\mathrm{y}'')^2=0$ dargestellt werden kann, und weil $\mathrm{x}''=\mathfrak{x}-\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha\mathrm{w}^2}$, $\mathrm{y}''=\mathfrak{y}-\beta-\frac{\alpha^2\mathrm{w}^2}{\beta}$ ist (nach (48^c.)), die Asymptoten von $\mathfrak{S}''$ in $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ die Gleichungen $\alpha\mathrm{w}\Big(\mathfrak{x}-\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha\mathrm{w}^2}\Big)\pm\beta\Big(\mathfrak{y}-\beta-\frac{\alpha^2\mathrm{w}^2}{\beta}\Big)=0$ haben. Diese beiden Gleichungen stimmen aber völlig mit denen von t, s (48^{a, b}.) selbst überein. Folglich:

Die Geraden s, t sind die Asymptoten eines Systemkegelschnittes.

Umgekehrt:

Die Asymptoten irgend eines Systemkegelschnittes 𝔖" treffen die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ in den Mittelpunkten M, M' von zwei entgegengesetzten Kegelschnitten und sind die Berührungssehnen für deren Asymptotensysteme.

Also nach dem Satze S. 11 (zwischen (48^b.) u. (48^c.):

Der Kreis über der Verbindungslinie von K mit dem Mittelpunkte irgend eines Systemkegelschnittes trifft die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ in den Endpunkten eines Durchmessers von $\mathfrak{H}_0$; die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Mittelpunkte sind die Asymptoten des Systemkegelschnittes (vgl. Fig. 2).

Und weiter:

Ist M der Mittelpunkt irgend eines Systemkegelschnittes, 𝔄 sein Asymptotensystem, M' der Mittelpunkt des entgegengesetzten Kegelschnittes, so ist die Berührungssehne s von 𝔄 das Lot in M' auf KM'.

Die Verbindungslinie von M" mit dem festen Punkte K' ist ein Lot auf MM'. Denn nach (48^c.) wird M"K', da K' die Koordinaten $x = \alpha$, $y = \beta$ hat, durch die Gleichung $x\alpha w^2 + y\beta = \alpha^2 w^2 + \beta^2$ dargestellt. Demnach erzeugt der Fusspunkt des vom Mittelpunkt M" auf die beständig durch K_0 laufende Gerade MM' gefällten Lotes den Kreis über dem Durchmesser K_0K', dessen Mittelpunkt K_0' die Mitte von K_0K' ist. Ist M''' der Gegenpunkt von M" auf $\mathfrak{H}_0$, so ist das Lot auf KM''' in M''' die Berührungssehne s" desjenigen Systemkegelschnittes 𝔖", dessen Mittelpunkt M" ist; das Lot auf KM" in M", d. h. die Tangente an den Kreis KMM"M' in M", ist die zugehörige Tangente t"; d. h. dieser Kreis und der Berührungskreis von 𝔄" berühren sich in M"; und da K der Mittelpunkt des letzteren ist, so hat er doppelt so grossen Radius als jener. Hieraus folgt weiter, dass die Berührungssehne s" parallel MM' ist und einen doppelt so grossen Abstand von M" hat als MM'.

Die einfachste Konstruktion der Asymptoten s, t irgend eines Systemkegelschnittes 𝔖" mit dem Mittelpunkte M" (ohne Benutzung von $\mathfrak{H}_0$) ist die folgende:

Man zeichne den Kreis über K_0K' als Durchmesser. Dann wird M"K' diesen Kreis in einem Punkte N" treffen; die Verbindungslinie $N''K_0$ bestimmt auf dem über KM" als Durchmesser gezogenen Kreise zwei Punkte M, M'. Dann sind M"M und M"M' die Asymptoten von 𝔖".

Es mag nur noch auf folgende nunmehr einleuchtende Sätze hingewiesen werden:

Die Verbindungslinie der Fusspunkte der Lote, die von K auf 2 zusammengehörende Doppeltangenten gefällt sind, geht durch K_0 und wird hier gehälftet.*)

Die Asymptotensysteme 𝔄 hüllen dieselbe Kurve 𝔗 ein, wie ihre Berührungssehnen.

Die Asymptotenkurve 𝔗 ist der Ort der Lote, die in den Endpunkten der von K nach $\mathfrak{H}_0$ gehenden Radienvektoren errichtet werden. —

Endlich mag noch der Satz Erwähnung finden:

Ist P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 ein beliebiger Punkt, und schneidet irgend eine durch ihn hindurchgehende Gerade g die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ in den Punkten

*) Vgl. (A.) S. 38, II.

M, M', so wird, wenn sich g um P_1 dreht, der Ort des Schnittpunktes der beiden Berührungssehnen, die zu M, M' (als Mittelpunkten von Asymptotensystemen) gehören, eine Hyperbel sein, deren Mittelpunkt P_1' gefunden wird, indem man P_1K_0 um sich selbst über K_0 hinaus verlängert. Ihre Asymptoten sind den Berührungssehnen der Asymptoten derjenigen Systemkegelschnitte parallel, deren Mittelpunkte M_x, M_y auf den Parallelen durch P_1 zu den Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ liegen. Sie geht durch den Punkt M_1, wo das Lot von K auf M_xM_y die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ trifft.

Insbesondere:

Die Berührungssehnen der Asymptotensysteme von je zwei **ähnlichen** Systemkegelschnitten $\mathfrak{S}$ treffen sich auf der Geraden, die parallel KK' ist und durch den Punkt geht, wo das Lot in K auf KK' zum zweiten Male $\mathfrak{H}_0$ trifft. Die Berührungssehne des Asymptotensystemes der rechtwinkligen Hyperbel $\mathfrak{R}$. ist die Verbindungslinie des eben genannten Punktes mit K.

Um $\mathfrak{T}$ näher zu untersuchen, denke man sich Fig. 2 für den besonderen Fall gezeichnet, dass KM'' die Normale von $\mathfrak{H}_0$ in M'' ist (vgl. Fig. 3). Solcher besonderen Punkte M'' giebt es 3 auf $\mathfrak{H}_0$. Da nun die Tangente in einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel entgegengesetzt wie die Verbindungslinie des Punktes mit dem Mittelpunkte gegen eine Asymptote geneigt ist, und da dasselbe auch von den Verbindungslinien eines Punktes der Hyperbel mit den Endpunkten eines Durchmessers gilt, so ist für einen beliebigen Punkt M'' auf $\mathfrak{H}_0$, wenn H der Schnittpunkt der Tangente in M'' mit der x-Axe ist, $\sphericalangle KM''K_0 = \sphericalangle K'M''H$ und $\sphericalangle KM''H = \sphericalangle K'M''K_0$; für einen der drei genannten besonderen Punkte M'' ist daher, weil dann $\sphericalangle KM''H = R$ ist, auch $\sphericalangle K'M''K_0 = R$. Hiernach sind diese 3 Punkte die Punkte, wo der Kreis K'_0 (durch K_0 und K', s. Fig. 2) $\mathfrak{H}_0$ trifft (abgesehen von K').

Für einen solchen Punkt muss offenbar N'' mit M'', M mit M'', M' mit M''' zusammenfallen. s' wird die Tangente an $\mathfrak{H}_0$ in M'', s die Gerade $M''K_0$ selbst, t'' fällt mit s', und s'' mit s zusammen. s'' ist aber die Berührungssehne des Asymptotensystemes (s, s') vom Systemkegelschnitt M''; demnach ist dann M'' selbst der Berührungspunkt von s' mit $\mathfrak{T}$, während der von s, wie früher bewiesen, der Schnittpunkt S mit dem Kreise um K durch M'' ist. Dieser Punkt S ist die Grenzlage des Schnittpunktes von s und s''; und da auch s'' als Berührungssehne eine Tangente von $\mathfrak{T}$ ist, so fallen 2 Tangenten von $\mathfrak{T}$ zusammen. Da KM'' als Normale nach $\mathfrak{H}_0$ unter allen benachbarten Linien von K nach $\mathfrak{H}_0$ ein Minimum oder Maximum ist, so lässt sich leicht zeigen, dass beim Fortrücken von M'' auf $\mathfrak{H}_0$ sowohl nach der einen als nach der anderen Seite hin sich der Schnittpunkt von s'' mit s von S aus nach derselben Richtung hin bewegt; so dass der Punkt S eine Spitze von $\mathfrak{T}$ ist. Andererseits wird $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{T}$ in M'' berührt. Entsprechend den 3 Lagen von M'' hat $\mathfrak{T}$ also 3 Spitzen und mit $\mathfrak{H}_0$ 3 Berührungspunkte (je 2 davon sind imaginär). Alles das ist analytisch leicht zu bestätigen. (Im Koordinatensysteme (x, y) ist die Gleichung von $\mathfrak{T}$ $x^2y^2 + 4\alpha x^3 + 4\beta y^3 + 18\alpha\beta xy - 27\alpha^2\beta^2 = 0$). Schliesslich kommt man zu folgendem Ergebnis (vgl. Fig. 4): Die Kurve $\mathfrak{T}$ ist von der 4. Ordnung*). Die Verbindungslinie je zweier Berührungspunkte von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}_0$ ist parallel der Tangente im dritten, die Verbindungslinie je zweier Spitzen von $\mathfrak{T}$ senkrecht zur dritten Spitzentangente; und die Verbindungslinien der Berührungspunkte sind den Verbindungslinien der Spitzen paarweise parallel. Auf diese Weise wird jedem Berührungspunkte eine Spitze zugeordnet; zwei so

*) Die beiden noch fehlenden Schnittpunkte von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}_0$ liegen im Unendlichen.

einander zugeordnete Punkte liegen mit K_0 in gerader Linie und sind gleichweit von K entfernt. Die 3 Berührungspunkte liegen mit K' und K_0 auf einem Kreise (um K'_0), zusammen mit K und K_0 auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt H'_0 die Mitte von KK_0 ist und deren Axen den Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ parallel sind. Die 3 Spitzen befinden sich mit K_0 erstens auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt K''_0 man durch Verlängerung von H'_0K um sich selbst über K hinaus erhält, und zugleich zweitens auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt H''_0 auf KK' so liegt, dass $H''_0K_0 = K''_0K_0$ ist, und deren Axen den Asymptoten von $\mathfrak{H}_0$ parallel sind.

§ 4.

Brennpunkt- und Polarenkurven etc.

Da die Gleichung eines Systemkegelschnittes $\mathfrak{G}$ auf seine eigenen Axen bezogen nach (8.) $\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = 1$ ist, wobei, wenn zur Abkürzung $\frac{\Phi_4(m)}{m^2(m+\alpha)} = M$ gesetzt wird, A, B die Bedeutungen haben (vgl. (13.)): $A = mM$, $B = -\alpha M$, während die Koordinaten des Mittelpunktes nach (3^b.) $x = m$, $y = \frac{\alpha\beta}{m}$ sind, so haben die auf der x'-Axe liegenden Brennpunkte von $\mathfrak{G}$ die Koordinaten $x = m \pm \sqrt{M(m+\alpha)}$, $y = \frac{\alpha\beta}{m}$, oder

$$(49^a.)\quad x = m \pm \frac{1}{m}\sqrt{\Phi_4(m)},\; y = \frac{\alpha\beta}{m},$$

dagegen die auf der y'-Axe liegenden Brennpunkte

$$(49^b.)\quad x = m,\; y = \frac{\alpha\beta}{m} \pm \sqrt{-\Phi_4(m)}.$$

Durch Elimination von m ergeben sich hieraus als Gleichungen der Brennpunktkurven $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$

$$(50^a.)\quad y(x^2+y^2) - 2\varepsilon y^2 - 2\alpha\beta x - Cy + 2\alpha\beta\delta = 0,$$
$$(50^b.)\quad x(x^2+y^2) - 2\delta x^2 + Cx - 2\alpha\beta y + 2\alpha\beta\varepsilon = 0$$

(vgl. (11.), (16.)), also 2 zirkulare Kurven 3. Ordnung. Die reelle Asymptote von $\mathfrak{B}_x$ ist die x-Axe, die von $\mathfrak{B}_y$ die y-Axe. Beide müssen selbstverständlich durch die Mittelpunkte der 4 zerfallenden Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ gehen und hier Tangenten haben, die bei $\mathfrak{B}_x$ parallel der x-Axe, bei $\mathfrak{B}_y$ parallel der y-Axe sind. Sie schneiden sich also in diesen 4 Punkten rechtwinklig. Sie sind aber überhaupt konfokal, schneiden sich also auch in den 3 übrigen endlichen gemeinsamen Punkten Q_1, Q_2, Q_3 Fig. 5 (zwei gemeinsame Punkte sind die Kreispunkte im Unendlichen) unter rechtem Winkel. Denn stellt man die Bedingungen auf, unter denen die Gerade $x - \xi = (y - \eta)\sqrt{-1}$ die Kurve $\mathfrak{B}_x$ oder $\mathfrak{B}_y$ berührt, so findet man beidemal völlig übereinstimmende Gleichungen. Die genannten 3 noch übrigen Schnittpunkte von $\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{B}_y$ sind aber die Mittelpunkte der 3 Paare zu einander lotrechter Geraden, von denen jedes die Mittelpunkte der 4 zerfallenden Systemkegelschnitte auf $\mathfrak{H}_0$ bestimmt, oder die Diagonalpunkte des durch die letzteren 4 Punkte dargestellten Viereckes. Denkt man sich nämlich die Mittelpunkte der 4 zerfallenden Systemkegelschnitte nicht durch die Hyperbel $\mathfrak{H}$ (vgl. (9.)), sondern durch ein Paar zu einander rechtwinkliger Geraden $\mathfrak{x} + \vartheta\mathfrak{y} = \zeta$, $\vartheta\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \omega$ dargestellt, deren Schnittpunkt Q_1 $\mathfrak{x} = \frac{\zeta + \omega\vartheta}{1+\vartheta^2}$, $\mathfrak{y} = \frac{\zeta\vartheta - \omega}{1+\vartheta^2}$ ist, so erhält man nach

(3ᵃ.) für die Mittelpunkte der 4 zerfallenden Kegelschnitte die Gleichungen $m^2 + m(\alpha + \vartheta\beta - \zeta) + \vartheta\alpha\beta = 0$, $\vartheta m^2 + m(\vartheta\alpha - \beta - \omega) - \alpha\beta = 0$, und dann ist nach S. 4

$$(51.)\quad \Phi_4(m) = \frac{1}{\vartheta}\left(m^2 + m(\alpha + \vartheta\beta - \zeta) + \vartheta\alpha\beta\right)\left(\vartheta m^2 + m(\vartheta\alpha - \beta - \omega) - \alpha\beta\right).$$

Der Punkt Q_1 hat in (x, y) die Koordinaten

$$(52.)\quad x = \frac{\zeta + \omega\vartheta}{1 + \vartheta^2} - \alpha,\ y = \frac{\zeta\vartheta - \omega}{1 + \vartheta^2} - \beta$$

(vgl. S. 3). Durch einfache Ausrechnung zeigt man die Übereinstimmung von (52.) mit (49ᵃ.) oder (49ᵇ.). Setzt man z. B., um zu beweisen, dass der Punkt Q_1 auf $\mathfrak{B}_x$ liegt, $y = \frac{\alpha\beta}{m} = \frac{\zeta\vartheta - \omega}{1 + \vartheta^2} - \beta$, woraus $m = \frac{\alpha\beta(1 + \vartheta^2)}{-(\omega + \beta) + \zeta\vartheta - \beta\vartheta^2}$ folgt, und setzt man diesen Wert von m mit Benutzung von (51.) in x unter (49ᵃ.) ein, nämlich $x = m - \frac{1}{m}\sqrt{\Phi_4(m)}$, so erhält man gerade den Wert von x in (52.). Vgl. Fig. 5.

Daraus, dass die Tangenten an $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$ in den Schnittpunkten mit $\mathfrak{H}_o$ parallel einer Asymptote sind, folgt, dass diese zirkularen Kurven 3. Ordnung gemeinsam $\mathfrak{H}_o$ als Grundhyperbel haben. Die beiden anderen (imaginären) Asymptoten von $\mathfrak{B}_x$ haben als reellen Schnittpunkt $x = 0$, $y = \varepsilon$, die von $\mathfrak{B}_y$ $x = \delta$, $y = 0$; denn setzt man z. B. in (50ᵃ.) $y = px + q$, so findet man $x^3p(1 + p^2) + x^2(q + 3p^2q - 2p^2\varepsilon) + \ldots = 0$, also abgesehen von $p = 0$, $q = 0$ noch $p = \pm\sqrt{-1}$, $q = \varepsilon$. Jene Punkte sind daher zugleich die endlichen Doppelbrennpunkte von $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$. Sie sind aber zugleich die endlichen Schnittpunkte von $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_x$ mit ihren reellen Asymptoten ($x = 0$, $y = 0$) und mithin die Brennpunkte der Systemparabeln $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$, $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$. Sie sind endlich zugleich die Fusspunkte der Lote, die vom Mittelpunkte der Hyperbel $\mathfrak{H}$ (vgl. S. 3, und (9.), (10.)) auf die y- und x-Axe gefällt sind. —

Ist im Koordinatensysteme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ P_1 $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ ein beliebiger fester Punkt, so ist seine Polarenkurve für Γ eine Parabel, denn unter seinen Polaren befindet sich auch die unendlich ferne Gerade, nämlich die Polare für den unendlich grossen Kreis $\mathfrak{K}$ (vgl. S. 6). Es lässt sich leicht zeigen, dass die Axe dieser Parabel stets senkrecht auf P_1K steht. —

Die Gleichung der Polare ist nach (15.) und (17.)

$$\mathfrak{x}_1[\mathfrak{x}(w+1) - \alpha(w+1)^2] - \mathfrak{y}_1[\mathfrak{y}w(w+1) - \beta(w+1)^2] - (w+1)^2[\mathfrak{x}\alpha - \mathfrak{y}\beta - \alpha^2 + \beta^2]$$
$$+ (w+1)[2w\alpha(\alpha - \delta) - 2\beta(\beta - \varepsilon)] + w(C_o - \mathfrak{x}_o{}^2 + \mathfrak{y}_o{}^2) = 0.$$

Nennt man ψ den Winkel, den eine Polare mit der $\mathfrak{x}$-Axe bildet, so ist zufolge der Polarengleichung $\tan\psi = -\frac{(\mathfrak{x}_1 - \alpha) - w\alpha}{\beta - w(\mathfrak{y}_1 - \beta)}$. Hieraus ergiebt sich, dass ψ unabhängig von w ist, wenn $\frac{\mathfrak{x}_1 - \alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\mathfrak{y}_1 - \beta}$ ist; d. h. nach (2ᵇ.): Die Polaren eines jeden Punktes von $\mathfrak{H}_o$ mit Beziehung auf alle Systemkegelschnitte sind einander parallel. Da dann zugleich $\tan\psi = -\frac{x_1}{\beta} = -\frac{\alpha}{y_1}$ wird, so steht die Richtung der Polaren senkrecht auf der Verbindungslinie des Poles mit K. Insbesondere sind die Polaren von K oder K' den Normalen von $\mathfrak{H}_o$ in K, K' parallel. Im übrigen möge hier noch der Fall betrachtet werden, dass der Pol im Unendlichen liegt. Wird $\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1} = \sigma$ gesetzt, so wird sich die Polare $(\mathfrak{x} - \alpha + \beta\sigma)$

$-w(\mathfrak{y}\sigma - \beta\sigma + \alpha) = 0$ oder $(x + \beta\sigma) - w(y\sigma + \alpha) = 0$ des im Unendlichen liegenden Punktes P_1 um den festen Punkt P_2 $x = -\beta\sigma$, $y = -\frac{\alpha}{\sigma}$ drehen, wenn sich w ändert; dieser Punkt P_2 aber ist der zweite Schnittpunkt des in K auf der Richtung σ errichteten Lotes mit $\mathfrak{H}_0$. Die Polare selbst ist natürlich die Verbindungslinie von P_2 mit dem Mittelpunkte des Systemkegelschnittes. Fasst man alles zusammen, so ergiebt sich hieraus:

Die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ bildet zusammen mit der unendlich fernen Geraden die **Jacobi**'sche Kurve des Kegelschnittsystemes Γ (und überhaupt des Kegelschnittnetzes $\lambda\mathfrak{K}_1 + \mu\mathfrak{K}_2 + \nu\mathfrak{K}_3 = 0$); die Verbindungslinien von zwei einander zugeordneten Punkten (von denen hier der eine stets im Unendlichen liegt) mit K stehen aufeinander senkrecht. Hieraus folgt noch: Verbindet man die Schnittpunkte von irgend zwei Systemkegelschnitten oder die Berührungspunkte irgend eines Systemkegelschnittes, so treffen sich diese Verbindungslinien paarweise auf $\mathfrak{H}_0$. —

Was endlich die Cayley'sche Kurve des Systemes Γ (oder allgemein des Netzes $\lambda\mathfrak{K}_1 + \mu\mathfrak{K}_2 + \nu\mathfrak{K}_3 = 0$) betrifft, so gehören zu den gemeinsamen Sehnen (Wechselsehnen) je zweier Systemkegelschnitte insbesondere die sämmtlichen Berührungssehnen; aber auch z. B. die Verbindungslinien der Schnittpunkte des unendlich grossen Kreises $\mathfrak{K}$ mit einem beliebigen $\mathfrak{G}$, also auch die Asymptoten von $\mathfrak{G}$. Hieraus folgt:

Die **Cayley**'sche Kurve ist mit der Asymptotenkurve $\mathfrak{T}$ identisch. Verbindet man daher die Schnittpunkte von irgend zweien der Systemkegelschnitte oder die Berührungspunkte irgend eines Systemkegelschnittes, so berühren diese Verbindungslinien die Kurve $\mathfrak{T}$.

(In der That ist ja $\mathfrak{T}$ von der 3. Klasse, da die Ordnung 4 und die Spitzenzahl 3 ist). Weil jede solche Verbindungslinie $\mathfrak{T}$ berührt, so kann als ihre Gleichung die von t in (48ᵃ.) genommen werden: $\mathfrak{x}\alpha w_0 + \mathfrak{y}\beta = \frac{1 + w_0}{w_0}(\alpha^2 w_0^2 + \beta^2)$. Der (auf $\mathfrak{H}_0$ liegende) Fusspunkt T des Lotes von K auf t mag kurz der Hauptpunkt von t heissen; er ist $\mathfrak{x}_T = \alpha(1 + w_0)$, $\mathfrak{y}_T = \beta\frac{1 + w_0}{w_0}$. Nach (15.), (17.) ergiebt sich für die Abszissen der Schnittpunkte von t mit einem beliebigen $\mathfrak{G}$ nach gehöriger Reduktion $\mathfrak{x}^2 - 2\alpha(1 + w_0)\mathfrak{x} + \cdots = 0$. Nennt man also $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ diese Abszissen, so ist $\frac{1}{2}(\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'') = \alpha(1 + w_0) = \mathfrak{x}_T$. Also:

Die Schnittpunkte irgend eines Systemkegelschnittes mit einer beliebigen Tangente von $\mathfrak{T}$ (oder mit der Verbindungslinie von zwei Schnittpunkten zweier beliebigen Systemkegelschnitte) liegen symmetrisch zum Hauptpunkte der Tangente*).

Weiter folgt aus der obigen nicht vollständig angegebenen Gleichung für die Abszisse $\mathfrak{x}$: Für jede Tangente t giebt es zwei Systemkegelschnitte, die sie (und zwar im Hauptpunkte T) berühren, so dass KT die gemeinsame Normale beider Kegelschnitte in

*) Einen Spezialfall dieses Satzes (mit Beziehung auf die Doppeltangenten von $\mathfrak{C}$) habe ich schon früher erwähnt, (A.) S. 36, S. 38 II, III. — Fasst man insbesondre bei der Geraden t die zwei Systemkegelschnitte ins Auge, von denen sie je 2 Berührungspunkte bestimmt, so erhält man den Satz: Die Grundhyperbel $\mathfrak{H}_0$ ist der Ort der Mitten der Sehnen, die von $\mathfrak{C}$ auf den Geraden t bestimmt werden. So liegen z. B. die Mitten der von den Berührungspunkten begrenzten Strecken der Doppeltangenten auf $\mathfrak{H}_0$.

T ist*). Denn das absolute Glied jener Gleichung hat die Form $\frac{hw^2 + kw + l}{(1+w)(\beta^2 - \alpha^2 w_o{}^2 w)}$, wobei sich h, k, l aus w_o und den 5 Systemkonstanten zusammensetzen. Das ist in Übereinstimmung mit den Sätzen, dass durch jeden Punkt der Ebene zwei $\mathfrak{G}$ hindurchgehen, und dass die Schnittpunkte zweier $\mathfrak{G}$ stets auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt K ist.

Dieses Ergebnis lässt sich auch so fassen:

Die Normalen eines beliebigen Systemkegelschnittes in seinen Schnittpunkten mit $\mathfrak{H}_o$ gehen alle vier durch K.

Nimmt man dagegen für t die Verbindungslinie zweier Berührungspunkte irgend eines $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$, so erhält man für die Berührungspunkte selbst den Satz: Das Mittellot zwischen zwei Berührungspunkten eines beliebigen Systemkegelschnittes mit $\mathfrak{C}$ läuft durch K. Wenn daher zwei solche Berührungspunkte zusammenfallen, oder der Kegelschnitt $\mathfrak{G}$ die Kurve $\mathfrak{C}$ hyperoskuliert, so muss die Hyperoskulationsstelle auf $\mathfrak{H}_o$ liegen und ihre Normale durch K gehen. Daher der Satz:

Im Systeme Γ giebt es 8 Kegelschnitte, die die Kurve $\mathfrak{C}$ hyperoskulieren; die Hyperoskulationsstellen sind die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{H}_o$, die zugehörigen Normalen treffen sich in K.

Diese Sätze sind auch leicht direkt analytisch zu beweisen; denn wird die Gleichung von $\mathfrak{C}$ kurz mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ bezeichnet, so liegen die Fusspunkte der von K nach $\mathfrak{C}$ gezogenen Normalen auf der Kurve $\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathfrak{x}} = 0$, d. i. nach (18.) $\mathfrak{x}\mathfrak{y} - \beta\mathfrak{x} - \alpha\mathfrak{y} = 0$, also $\mathfrak{H}_o$; und die Fusspunkte der von K nach $\mathfrak{G}$ gezogenen Normalen nach (15.), (17.) auf der Kurve $\mathfrak{x}(-w\mathfrak{y} + (w+1)\beta) - \mathfrak{y}(\mathfrak{x} - (w+1)\alpha) = 0$ oder wieder $\mathfrak{H}_o$ (vgl. (2^b.)). —

Auf die Polkurven ebenso wie auf viele erwähnenswerte andere Einzelheiten kann hier der Kürze wegen nicht eingegangen werden.

§ 5.

Besondere Gestaltungen des Systemes Γ.

Hervorzuheben sind die Fälle, dass die Hyperbel $\mathfrak{H}$ (vgl. (9.)) I.) durch K geht, dass II.) K_o im Unendlichen liegt; dass die Kurve $\mathfrak{C}$ III.) zu einer, IV.) zu zwei Axen symmetrisch ist, V.) das Geschlecht Null hat (oder was dasselbe ist, eine Fusspunktkurve eines Kegelschnittes ist), VI.) in die unendlich ferne Gerade und eine zirkulare Kurve 3. Ordnung zerfällt. Die Behandlung dieser Spezialfälle im Einzelnen muss, da sie eine überaus grosse Menge von Sätzen liefern, einer gesonderten Darstellung vorbehalten bleiben. Es mag erwähnt werden, dass im I. Falle $\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_3$, demnach Γ ein Kegelschnittbüschel ist, während $\mathfrak{C}$ zu einem Doppelkreise ($(\mathfrak{K}_1' - \mathfrak{K}_3)^2 = 0$) wird. Der II. Fall liefert die Cartesischen Ovale, unter anderen also auch das von Steiner behandelte Kreispaar. Hier sollen nur noch die Fälle III., IV. im Anschluss an S. 5 kurz betrachtet werden.

Damit $\mathfrak{C}$ zu einer Axe (z. B. zur $\mathfrak{x}$-Axe) symmetrisch sei, ist die Bedingung $\beta = 0$ nach (22.) hinreichend. Dies zieht notwendig — soll nicht K ins Unendliche rücken — das Zer-

*) $\mathfrak{H}_o$ ist der geometrische Ort aller Punkte, wo sich zwei Systemkegelschnitte berühren (abgesehen von den uneigentlichen Berührungen, nämlich den Schnittpunkten der $\mathfrak{G}$ mit der doppelt gezählten unendlich fernen Geraden oder dem unendlich grossen Systemkreise $\mathfrak{K}$).

fallen der Grundhyperbel in die x- und y-Axe nach sich. Also fällt die $\mathfrak{x}$-Axe mit der x-Axe zusammen. Aus (30.) und (17.) ergiebt sich für die Systemparabel $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}\ (\mathfrak{x}-\alpha)^2=0$; und aus (11.) zur Bestimmung der Mittelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte $m^2=0$ und $m^2-2\delta m+(\delta^2-\varepsilon^2-C_0)=0$; d. h. $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ würde dann als Systemkegelschnitt doppelt, mithin die y-Axe $(\mathfrak{x}=\alpha)$ als Doppeltangente vierfach zählen. $\mathfrak{C}$ müsste also in 2 Kreise zerfallen mit der y-Axe als Potenzlinie. Man findet leicht als Gleichungen der Kreise

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2\pm 2\mathfrak{x}\sqrt{\mathfrak{Z}}\mp 2\alpha\sqrt{\mathfrak{Z}}+\mathfrak{X}-\mathfrak{Z}=0.$$

Hieraus erkennt man, dass man, um den allgemeinsten Fall zu erhalten, wo $\mathfrak{C}$ zu einer Axe symmetrisch ist, nicht bloss $\beta=0$ zu nehmen hat, sondern gleichzeitig $\mathfrak{y}_0=\infty$ und daher (wegen des Wertes von $\mathfrak{K}_2$, (19.)) auch $C_0=\infty$ setzen muss, so aber, dass $\beta\mathfrak{y}_0$ oder $\mathfrak{Y}$ (21.) und $\mathfrak{y}_0{}^2+C_0$ endliche Grenzwerte besitzen. Dann erhält man nach (17.) und (21.)

$$(53.)\quad \begin{aligned}\mathfrak{K}_1&=-\mathfrak{y}^2-2\mathfrak{x}\alpha+\alpha^2+\mathfrak{X},\\ \mathfrak{K}_2&=\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2-4\mathfrak{x}\alpha+2\alpha^2-\mathfrak{W},\\ \mathfrak{K}_3&=\mathfrak{x}^2-2\mathfrak{x}\alpha+\alpha^2-\mathfrak{Y};\end{aligned}$$

und als Gleichung von $\mathfrak{C}$ nach (22.)

$$(54.)\quad \begin{aligned}&(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2-2\mathfrak{x}^2(2\mathfrak{X}+\mathfrak{W})-2\mathfrak{y}^2(2\mathfrak{Y}-\mathfrak{W})+8\mathfrak{x}\alpha(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}+\mathfrak{W})\\ &-4\alpha^2(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}+\mathfrak{W})+\mathfrak{W}^2+4\mathfrak{X}\mathfrak{Y}=0.\end{aligned}$$

Der zerfallende Kegelschnitt $w=0$ (zugleich Parabel $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$) wird nach (30.) und (53.) $\mathfrak{x}=\alpha\pm\sqrt{\mathfrak{Y}}$. Hierdurch werden also die zur Symmetrieaxe lotrechten Doppeltangenten von $\mathfrak{C}$ dargestellt. Die Mittelpunkte der 3 übrigen zerfallenden Kegelschnitte findet man nach (11.), (10^c.) und (21.) aus der Gleichung

$$(55.)\quad m^3-2(\mathfrak{x}_0-\alpha)m^2+(\alpha^2+\mathfrak{W})m+\alpha\mathfrak{Y}=0.$$

Die Asymptotenkurve $\mathfrak{T}$ aber zerfällt in die doppelt gezählte y-Axe und die Parabel $y^2+4\alpha x=0$, deren Brennpunkt K ist, und die die y-Axe in K_0 berührt; die Brennpunkte der $\mathfrak{G}$ liegen teils auf der x-Axe, teils auf einer zirkularen Kurve 3. Ordnung, die die y-Axe als Asymptote hat und auf der x-Axe die durch (55.) dargestellten Punkte enthält. Zwei entgegengesetzte Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ sind jetzt solche, deren Mittelpunkte auf der x-Axe symmetrisch zu K_0 liegen $(m'+m=0)$, zwei ähnliche aber solche, deren Mittelpunkte zugeordnete harmonische Punkte mit Beziehung auf den Kreis um K_0 durch K sind $(m'm=\alpha^2)$.

In der Gleichung von $\mathfrak{C}$ (1.) ist jetzt $\mathfrak{c}=0$:

$$(56.)\quad (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2+\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{y}^2+2\mathfrak{d}\mathfrak{x}+\mathfrak{f}=0;$$

dann hat man zur Bestimmung von Γ nach (25.), (27.), (28.)

$$(57.)\quad \alpha=-\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}},$$

$$\mathfrak{X}=-\frac{(\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{f})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+4\mathfrak{d}^2}{4(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2},\quad \mathfrak{Y}=\frac{(\mathfrak{b}^2-4\mathfrak{f})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+4\mathfrak{d}^2}{4(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2},\quad \mathfrak{W}=\frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-4\mathfrak{f})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+4\mathfrak{d}^2}{2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2}.$$

Wenn endlich $\mathfrak{C}$ auch noch zur $\mathfrak{y}$-Axe symmetrisch sein soll, so hat man $\alpha=0$ einzuführen und $\mathfrak{X}$ als endlichen Grenzwert zu betrachten. Die $\mathfrak{y}$-Axe fällt auf die y-Axe, die Punkte K und K' fallen zusammen auf K_0. Die Werte von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ und die Gleichung von $\mathfrak{C}$ werden:

$$(58.)\quad \begin{aligned}\mathfrak{K}_1&=-\mathfrak{y}^2+\mathfrak{X},\\ \mathfrak{K}_2&=\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2-\mathfrak{W},\\ \mathfrak{K}_3&=\mathfrak{x}^2-\mathfrak{Y};\end{aligned}$$

$$(59.)\quad (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2 - 2\mathfrak{x}^2(2\mathfrak{X}+\mathfrak{W}) - 2\mathfrak{y}^2(2\mathfrak{Y}-\mathfrak{W}) + \mathfrak{W}^2 + 4\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = 0.$$

Auch $\mathfrak{P}_\mathfrak{x}$ (ebenso wie vorhin $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$) wird jetzt zu einem der 4 zerfallenden Kegelschnitte $\mathfrak{y} = \pm\sqrt{\mathfrak{X}}$, während $\mathfrak{P}_\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{x} = \pm\sqrt{\mathfrak{Y}}$ dargestellt wird; alle übrigen $\mathfrak{G}$ sind konzentrisch, und der Parameter w ist als Grenzwert zu betrachten. Die beiden übrigen zerfallenden Kegelschnitte ergeben sich nach (55.) aus der Gleichung

$$(60.)\quad w^2\mathfrak{X} - w\mathfrak{W} - \mathfrak{Y} = 0$$

(denn man hat (55.) durch α zu dividieren und dann $m = 0$, $\alpha = 0$ zu setzen).

Die Gleichung von $\mathfrak{C}$ in der Normalform ist nun ($\mathfrak{d} = 0$)

$$(61.)\quad (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{b}\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{f} = 0$$

und zur Bestimmung von Γ hat man

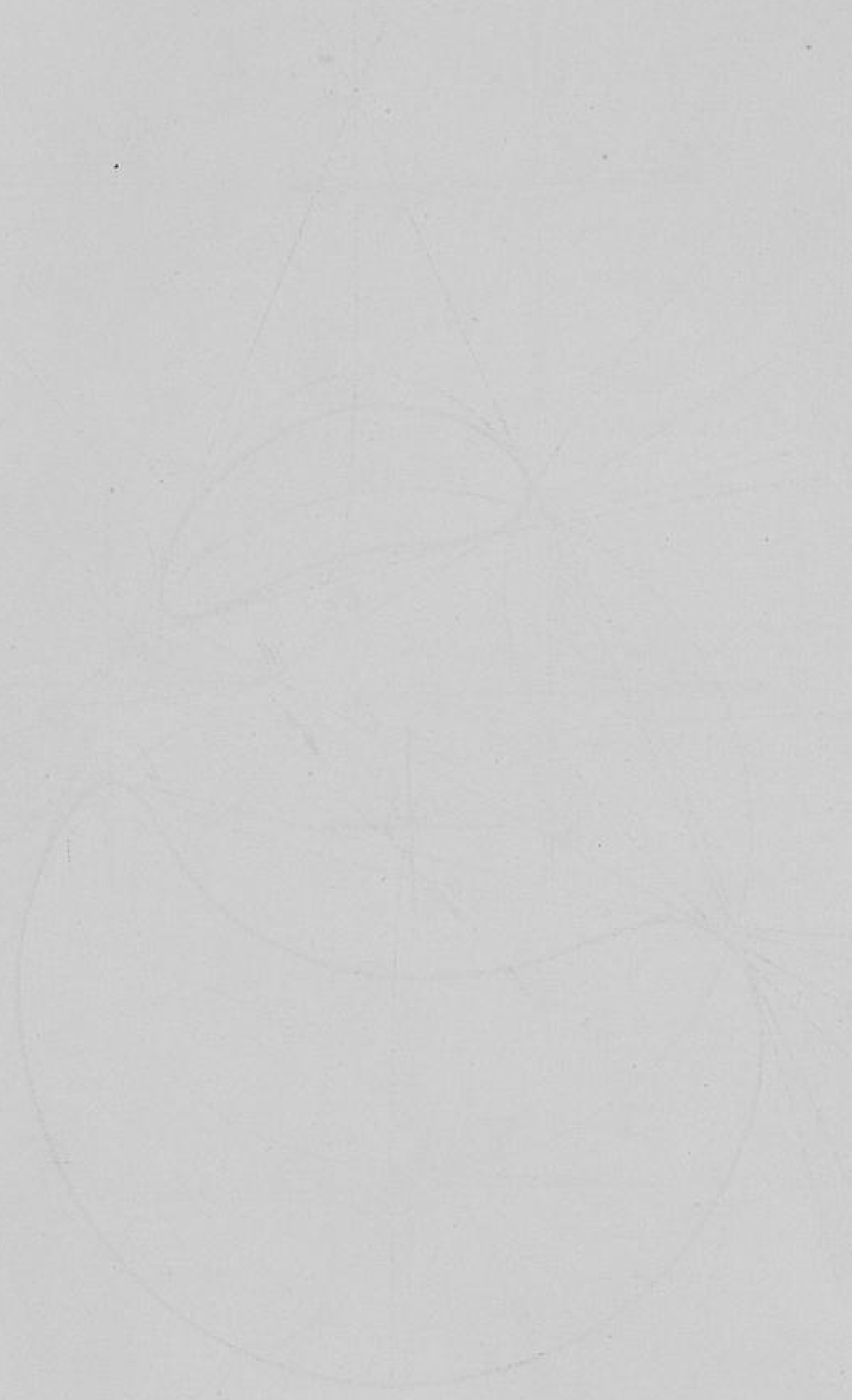
$$(62.)\quad \mathfrak{X} = -\frac{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{f}}{4(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})},\quad \mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{b}^2-4\mathfrak{f}}{4(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})},\quad \mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}-4\mathfrak{f}}{2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}. \text{ —}$$

Die allgemeinen Gleichungen (27.), 28.), (29.) werden nur dann unbrauchbar, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist. Dann sind die Doppelpunkte von $\mathfrak{C}$ Spitzen, und Γ geht in eines der 4 Kreissysteme über, die eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung einhüllen*). Es ist dann zweckmässig, die Mittelpunkte der $\mathfrak{G}$ nicht von K_0, sondern von K aus zu bestimmen und demgemäss $m = k - \alpha$ zu setzen, wo nun k die Abszisse eines Mittelpunktes M in ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) bedeutet. α, β, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{W}$ werden unendlich gross, mithin fällt K_0 ins Unendliche, und zwar in der Richtung $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}}$. $\mathfrak{H}_0$ zerfällt folglich in die unendlich ferne Gerade und die Tangente an $\mathfrak{H}_0$ in K, d. h. die endliche Gerade $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}}$. Daher wird $\mathfrak{C}$ zu dieser Geraden symmetrisch. Deshalb kann der Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ mit unter $\mathfrak{e} = 0$ behandelt werden. —

Schliesslich mag noch hervorgehoben werden, dass Γ nicht bloss in ein Büschel (vgl. S. 17.), sondern auch in eine Kegelschnittschaar ausarten kann. Dies wird dann und nur dann geschehen, wenn $\mathfrak{C}$ in 4 Gerade zerfällt, die natürlich paarweise durch die Kreispunkte im Unendlichen gehen, mithin ein hyperbolisches Quadrat als Schnittpunktviereck haben werden. Hieraus folgt sofort, dass ein solches System doppelt symmetrisch sein und die Ecken des genannten Viereckes zu festen Brennpunkten haben muss: Γ ist also dann eine Schaar konfokaler Kegelschnitte. Die analytische Bedingung dafür ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 0$; denn dann ist die Gleichung von $\mathfrak{C}$ nach (59.) $(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^2 - 2(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)\,\mathfrak{W} + \mathfrak{W}^2 = 0$, die sich sowohl in der Form $[(\mathfrak{x}-\sqrt{\mathfrak{W}})^2+\mathfrak{y}^2][(\mathfrak{x}+\sqrt{\mathfrak{W}})^2+\mathfrak{y}^2] = 0$ als $[\mathfrak{x}^2+(\mathfrak{y}-\sqrt{-\mathfrak{W}})^2][\mathfrak{x}^2+(\mathfrak{y}+\sqrt{-\mathfrak{W}})^2] = 0$ schreiben lässt, so dass die 4 gemeinsamen Brennpunkte $\mathfrak{x} = \pm\sqrt{\mathfrak{W}}$, $\mathfrak{y} = 0$; $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm\sqrt{-\mathfrak{W}}$ sind. Die Gleichung eines Kegelschnittes der Schaar ist nach (53.), (15.) $\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 w - \frac{w}{w+1}\mathfrak{W} = 0$, also der Kegelschnitt für $w > 0$ Hyperbel, für $w < 0$ Ellipse. Ist bloss $\mathfrak{X} = 0$ oder bloss $\mathfrak{Y} = 0$, so zerfällt $\mathfrak{C}$ in zwei kongruente Kreise. —

*) Während gleichzeitig 3 von den Kegelschnittsystemen Σ mit den 3 anderen Kreissystemen zusammenfallen; vgl. (A.) II. Abschn. § 4.

Inhalt.



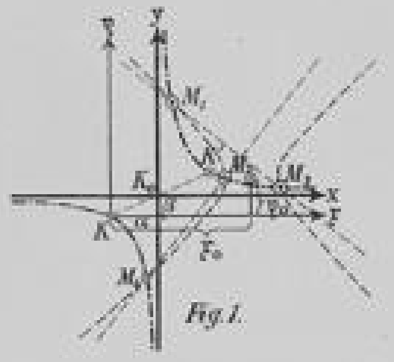


Fig. 1.

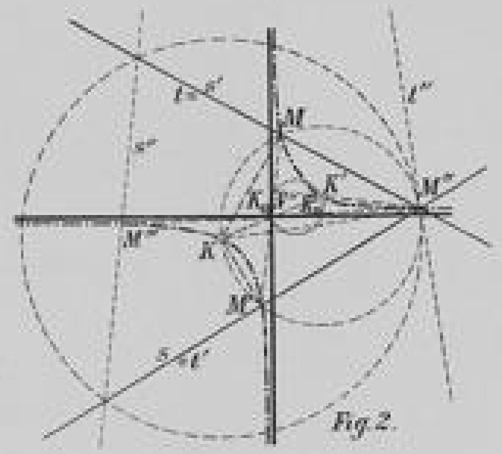


Fig. 2.

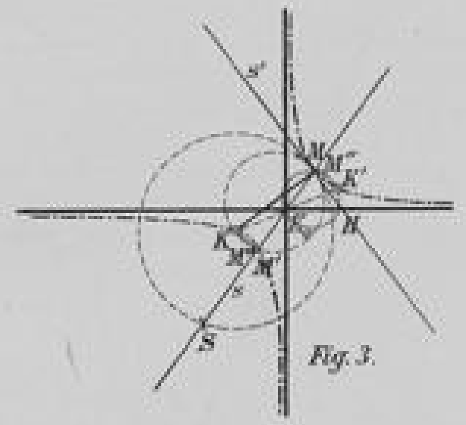


Fig. 3.

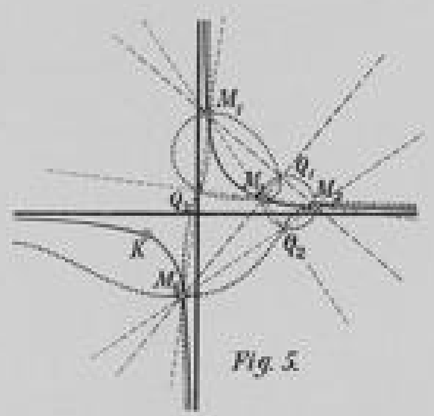


Fig. 5.

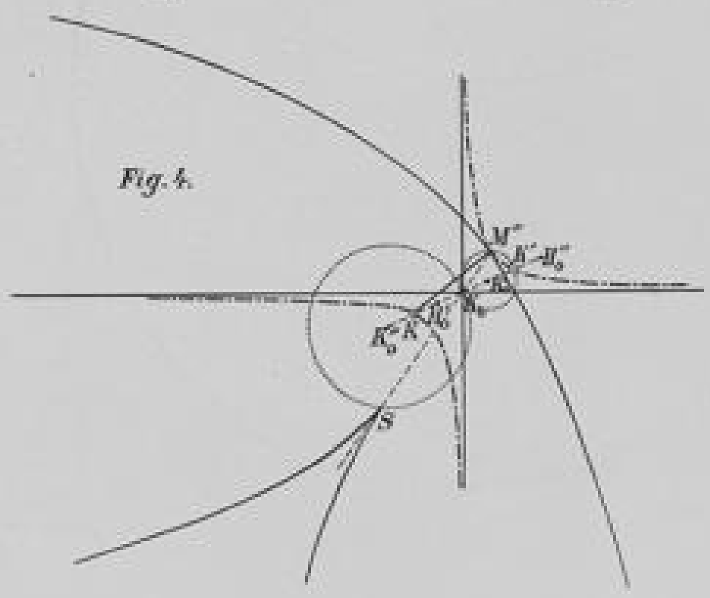


Fig. 4.

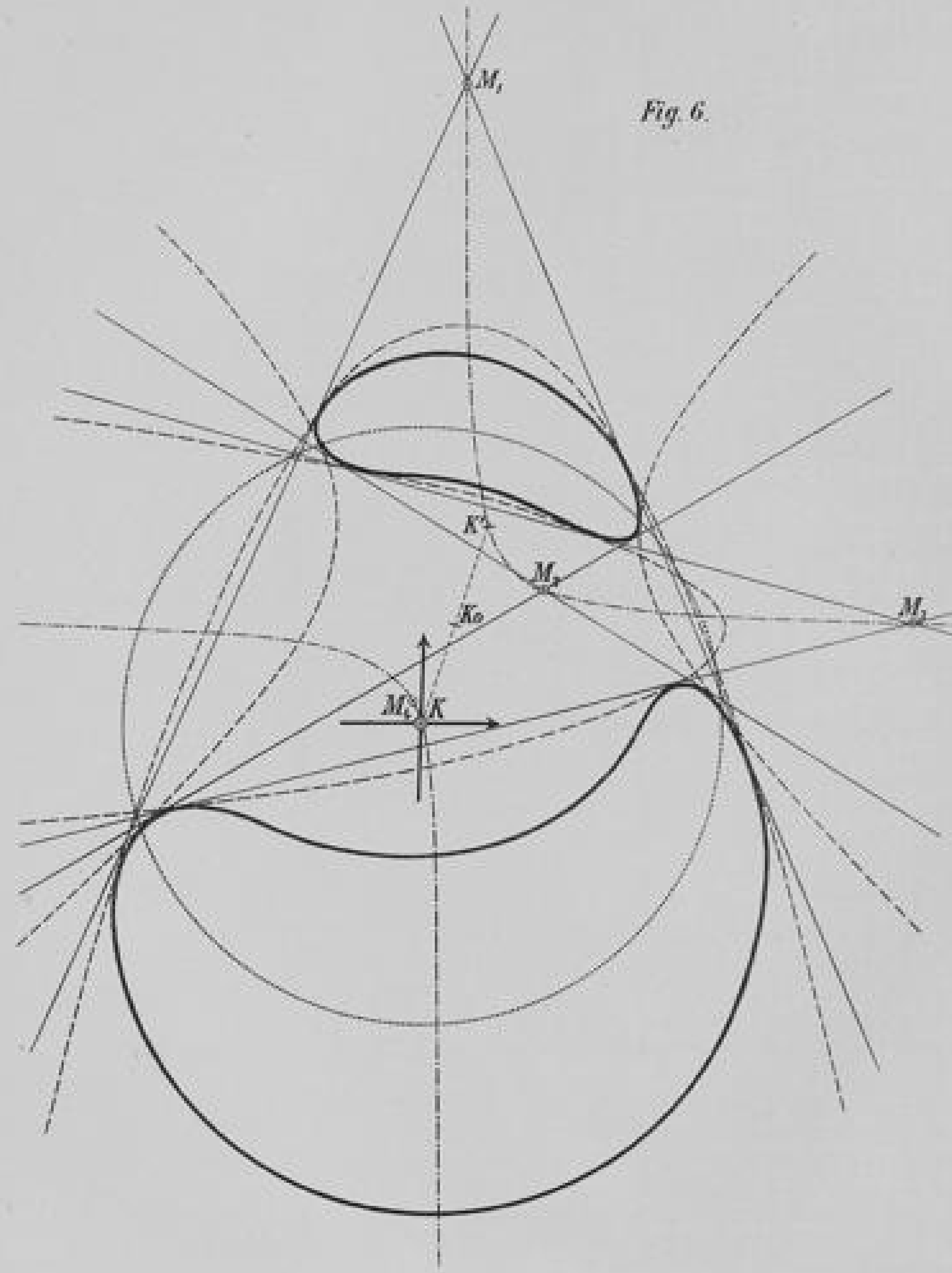


Fig. 6.