Aus den Sectiones conicae des De la Hire.

Drittes Buch.

Die Apollonische Gleichung und ihre Anwendung.

Lehrsatz I.

Die Quadrate der Ordinaten eines Parabeldurchmessers verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen.

Zieht man von dem Punkte E des Durchmessers EA eine Sekante EFI und die Tangente ET an die Parabel, und sind B, D, O die Fusspunkte der Ordinaten der Durchschnittspunkte der Sekante und des Berührungspunktes der Tangente, so hat man zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke und der Sätze des zweiten Buches, sowie des 7. Satzes im ersten Buche

$$\frac{ID^2}{FB^2} = \frac{ED^2}{EB^2} = \frac{AD}{AB}.$$

Erklärung.

Die dritte Proportionale*) zu Ordinate und Abscisse eines Parabelpunktes wird der Parameter (latus erectum, l. rectum)**) des zugehörigen Durchmessers genannt:

$$AP = \frac{BF^2}{AB},\ 2q = \frac{y^2}{x}.$$

Lehrsatz II.

Das Quadrat der Ordinate eines Parabeldurchmessers ist gleich dem Rechtecke des zugehörigen Parameters und der Abscisse (intercepta pars AD diametri inter ordinatam DI et terminum A).

Konstruktion der Parabel.

Lehrsatz III.

Die Quadrate der Ordinaten eines Ellipsendurchmessers verhalten sich wie die Rechtecke aus den zugehörigen Abschnitten des Durchmessers.

Sind DEF, DT Sekante und Tangente, beide vom Punkte D des Durchmessers AB an die Ellipse gelegt, und EH, FI, TO die entsprechenden Ordinaten, so hat man (Satz 6 des ersten Buches)

$$\frac{EH^2}{FI^2} = \frac{DH^2}{DI^2} = \frac{AH \cdot BH}{AI \cdot BI}.$$

---

*) In der üblichen Bedeutung und Reihenfolge: die zunächst genannte Strecke (hier die Ordinate des Parabelpunktes) ist die mittlere Proportionale der stetigen Proportion.

**) Apollonius I, 11.

Erklärungen.

Die dritte Proportionale zu einem Durchmesser der Ellipse und dem ihm konjugierten wird der Parameter des ersteren genannt.

$$AP = \frac{DR^2}{AB},\ q = \frac{b^2_1}{a_1}\left(= \frac{AP}{2}\right).$$

Das Rechteck eines Durchmessers und seines Parameters heisst die Figur des Durchmessers.

Zusatz.

Die Figur eines Durchmessers ist gleich dem Quadrate des konjugierten Durchmessers.

Konjugierte Durchmesser sind mittlere Proportionalen ihrer Parameter:

$$AP : DR = DR : AB = AB : DQ \text{ oder } AP : DQ = DR^3 : AB^3.$$

Lehrsatz IV.

*Das Quadrat der Ordinate eines Ellipsendurchmessers ist gleich dem Rechtecke aus einem Abschnitte des Durchmessers und dem Parameter desselben, vermindert um ein der Figur des Durchmessers ähnliches und ähnlich gelegenes Rechteck über jenem Abschnitte.**)

Ist ACB der Durchmesser, EH eine Ordinate desselben, AP der zugehörige Parameter, DCR der zu ACB konjugierte Durchmesser, Q der Schnittpunkt der durch H zu AP gezogenen Parallelen mit der Diagonale BTP der Figur und QN parallel AH, so hat man

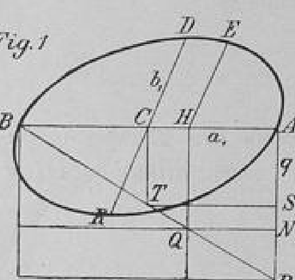
$$\frac{HQ}{BH} = \frac{CT}{BC} \text{ und } \frac{HQ \cdot HA}{CT \cdot CA} = \frac{BH \cdot HA}{BC \cdot CA} = \frac{HE^2}{CD^2} \quad (3).$$

und endlich nach dem Zusatz zur Definition des Parameters $CT. CA = CD^2$, und daher

$$HE^2 = HQ \cdot HA = NP \cdot HB. = 2q \cdot HA - (PQ) \text{ oder}$$

$$= 2q \cdot HA - 2q\,\frac{HA^2}{AB},$$

Fig. 1



wenn man berücksichtigt, dass

$$(PO) = HA \cdot NP = HA \cdot \frac{HA}{AB} \cdot 2q.$$

Zusatz.

$$\frac{HE^2}{BH.HA} = \frac{HQ.HA}{BH.HA} = \frac{HQ}{BH} = \frac{AP}{AB} = \frac{2q}{AB},$$

d. h.: Das Quadrat der Ordinate eines Ellipsendurchmessers verhält sich zu dem Rechtecke aus den Abschnitten desselben wie der zugehörige Parameter zu diesem Durchmesser.

Konstruktion der Ellipse.

Lehrsatz V.

Die Quadrate der Ordinaten eines begrenzten Hyperbeldurchmessers verhalten sich wie die Rechtecke aus den zugehörigen Abschnitten des Durchmessers.

Beweis wie in Satz 3.

---

*) Apollonius I, 13.

Erklärungen.

Verlängert man einen begrenzten Hyperbeldurchmesser um sich selbst und zieht die Ordinate des erhaltenen Punktes, so nennt man die dritte Proportionale zu dieser Ordinate und dem doppelten Durchmesser den **Parameter** desselben.*)

$$AP = \frac{Da^2}{2AB} = 2q.$$

Das Rechteck aus diesem Durchmesser und dem zugehörigen Parameter heisst die **Figur** des Durchmessers.

Lehrsatz VI.

Das Quadrat der Ordinate eines begrenzten Hyperbeldurchmessers ist gleich dem Rechtecke aus einem Abschnitte des Durchmessers und dem Parameter desselben, vermehrt um ein der Figur des Durchmessers ähnliches und ähnlich gelegenes Rechteck über jenem Abschnitte.

Ist ACB der Durchmesser, HE eine Ordinate desselben, AP der zugehörige Parameter, Da die zu $aA = AB$ gehörige Ordinate, Q, p*) die Schnittpunkte der in H, a auf AB errichteten Senkrechten mit der Diagonale BP der **Figur** und QN parallel AH, so hat man

$$\frac{HQ}{BH} = \frac{ap}{Ba} \text{ und } \frac{HQ \,.\, HA}{ap \,.\, Aa} = \frac{BH \,.\, HA}{Ba \,.\, Aa} = \frac{HE^2}{Da^2} \quad (5),$$

und weil nach der Definition des Parameters

$$ap = \frac{Da^2}{Aa},$$

so findet man

$$\begin{aligned} HE^2 &= HQ \,.\, HA = NP \,.\, BH \\ &= 2q \,.\, HA + (PQ) \\ &= 2q \,.\, HA + 2q \frac{HA^2}{AB}, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} (PQ) &= HA \,.\, NP \\ &= HA \frac{HA}{AB} 2q. \end{aligned}$$

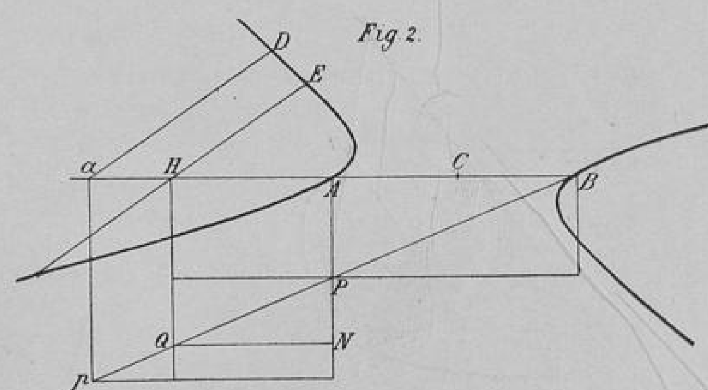


Fig. 2.

Zusatz:

$$\frac{HE^2}{BH.HA} = \frac{HQ}{BH} = \frac{ap}{Ba} = \frac{AP}{AB},$$

d. h. das Quadrat der Ordinate eines Hyperbeldurchmessers verhält sich zu dem Rechtecke aus den Abschnitten desselben wie der zugehörige Parameter zu diesem Durchmesser.

Konstruktion der Hyperbel.

Aufgabe.

Zu einem gegebenen Durchmesser eines Kegelschnittes den zugehörigen Parameter zu konstruieren.

1. **Lösung.** Man ziehe in einem Endpunkte B des gegebenen Durchmessers AB die Tangente an den Kegelschnitt, halbiere den von beiden Geraden eingeschlossenen Winkel und

*) Man beachte, auf welche einfache Weise De la Hire konjugierte Durchmesser und konjugierte Hyperbeln, sowie Wurzelgrössen hier und im folgenden vermeidet.

verbinde den andern Endpunkt A des Durchmessers mit dem Schnittpunkte D der Winkelhalbierenden und des Kegelschnittes durch eine Gerade, welche die Tangente in T schneide; alsdann ist BT der gesuchte Parameter.

Der Beweis folgt aus den vorhergehenden Lehrsätzen.

Dieselbe Konstruktion gilt für die Schnitte „kubischer, biquadratischer u. a. Kegel". Appendix S. 217.

2. Lösung (am Kegel). Man konstruiere (nach II, 39) einen Kegel AVB, auf welchem der gegebene Kegelschnitt liegt, und zwar so, dass die Sehnen des Grundkreises, welche die Ordinaten des gegebenen Durchmessers AC hervorbringen, diesen Ordinaten parallel laufen; zeichnet man alsdann denjenigen Kreis, welcher durch die Endpunkte A und B des Kreisdurchmessers hindurchgeht und eine Seite AV des Achsendreieckes in A berührt, so ist die Sehne AD, welche von dem Durchmesser AC abgeschnitten wird, der gesuchte Parameter.

Der Beweis ergiebt sich wie folgt:

a) für die Parabel. Da nach der Konstruktion die Scheitelebene den Kegel in der Kante des Achsendreieckes AVB berührt, so ist AC parallel VB, und legt man durch D*) eine der Basis parallele Ebene, welche die Kanten VA, VB des Kegels in M, K und die Parabel in T, T^1 schneidet, so sind die Dreiecke ABD und DAM ähnlich, da AM Tangente des Kreises, und man findet
$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DK}}, \text{ also } \mathrm{DA}^2 = \mathrm{MD}\,.\,\mathrm{DK} = \mathrm{DT}^2,$$
so dass $\mathrm{DA} = \mathrm{DT}$, woraus sich mit Rücksicht auf die Gleichung $\mathrm{DT}^2 = 2\mathrm{q}\,.\,\mathrm{DA}$ die Behauptung ergiebt.

Fig. 3

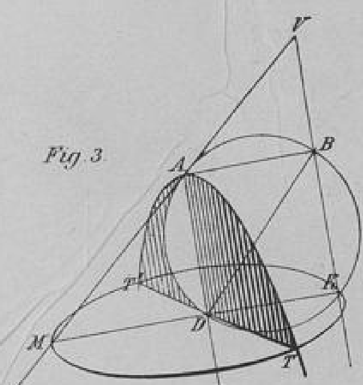
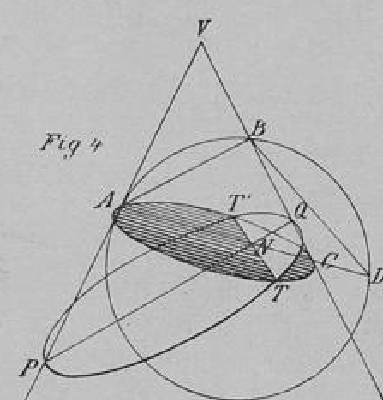


Fig. 4



b) für die Ellipse. Legt man durch einen Punkt N des gegebenen Durchmessers AC eine der Basis (AB) parallele Ebene, welche die Seiten VA, VB des Achsendreieckes AVB in P, Q und die Ellipse in T, T^1 schneidet, so hat man infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke PAN und BAD, sowie der Dreiecke BAC und QNC
$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NP}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}},\ \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NQ}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}},\ \frac{\mathrm{AN}\,.\,\mathrm{CN}}{\mathrm{PN}\,.\,\mathrm{NQ}} = \frac{\mathrm{AN}\,.\,\mathrm{CN}}{\mathrm{NT}^2} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AD}},$$
woraus durch Vergleichung mit Zusatz zu (4) $AD = 2q$ folgt.

*) Wird statt D ein beliebiger Punkt P der Parabelachse gewählt, so nimmt der Beweis den gleichen Gang (vgl. b).

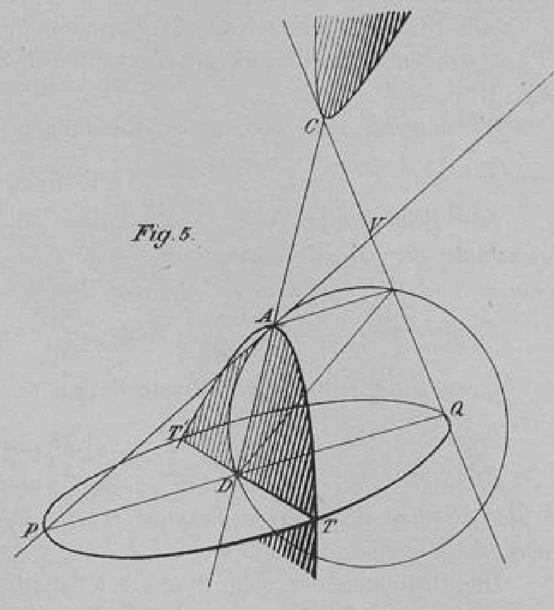
c) für die Hyperbel. Legt man die Hilfsebene *(PQ)* durch D parallel der Basis *(AB)* des Kegels, so erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{AD}{DP} = \frac{AB}{AD}, \frac{CD}{DQ} = \frac{CA}{AB}, \frac{AD \cdot CD}{DP \cdot DQ} =$$

$$\frac{AD \cdot CD}{DT^2} = \frac{CA}{AD},$$

in Übereinstimmung mit Zusatz zu 6, wenn $AD = 2q$ gesetzt wird.

Fig. 5.



Lehrsatz VIII.

Das Rechteck aus der Abscisse eines Ellipsen- oder Hyperbelpunktes und der Strecke des Durchmessers zwischen dem Centrum und dem Schnittpunkte der Tangente ist dem Quadrate des Halbmessers gleich: $CO \cdot CD = CA^2$.

Beweis mit Hilfe von II, 9 und I, 2.

Lehrsatz IX und X.

$$BD \cdot AD = CD \cdot OD = BO \cdot AO = CO \cdot DO.$$
$$OA \cdot BD = OD \cdot BC = BO \cdot AD.$$

Beweis mit Hilfe von I, 3 bis 5.

Lehrsatz XI und XII.

Werden zwei in den Endpunkten eines Ellipsendurchmessers gezogene Tangenten von einer beliebigen dritten Tangente geschnitten, so ist das Rechteck der auf den ersteren entstandenen Abschnitte gleich dem Quadrate des dem Diameter konjugierten Halbmessers oder gleich dem vierten Teile der Figur des ersteren.

In der letzteren Fassung gilt der Satz auch für die Hyperbel.*)

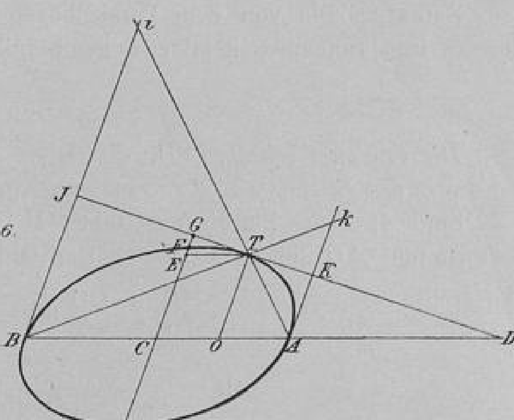
Trifft die dritte Tangente den Durchmesser AB in D, die beiden parallelen Tangenten in I, K und den Kegelschnitt in T und schneidet der zu AB konjugierte Halbmesser CF die Tangente TD in G und eine durch T zu AB parallele Gerade in E, so hat man infolge der Harmonie der Punkte D, O, A, B (nach 9)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DO}{DA} \text{ und daher auch } \frac{BI}{CG} = \frac{OT}{AK}$$

oder

$$BI \cdot AK = CG \cdot OT = CG \cdot CE = CF^2 \ (8).$$

Fig. 6.



*) Die konjugierten Hyperbeln werden von de la Hire im vierten Buche behandelt.

Zusatz. Werden die parallelen Tangenten AK, BI von den Sehnen BT, AT in k, i geschnitten, so ist das Rechteck der Tangentenabschnitte AK und Bi gleich der Figur des zugehörigen Durchmessers AB.

Nach (8) ist $T\ (DOAB)$ ein harmonisches Strahlenbüschel, und da Ak und Bi parallel OT, so werden erstere durch die Tangenten DT in K und I halbiert, oder man hat $Ak \,.\, Bi = 4 AK \,.\, Bi$.

BT und AT sind konjugierte Richtungen. — Supplementarsehnen. Vgl. V, 17.

Lehrsatz XIII.

Die Entfernungen des Schnittpunktes einer Ellipsentangente und eines Durchmessers vom Fusspunkte der Berührungsordinate und dem Centrum verhalten sich wie die Quadrate der Ordinate und des zu jenem konjugierten Du. chmessers.

$$\frac{DC}{DO} = \frac{CF^2}{TO^2}.$$

Beweis mit Hilfe von Lehrsatz 8 und 3.

Lehrsatz XIV.

Zieht man von einem Punkte eines Parabeldurchmessers die Tangenten und eine Sekante, so ist die Abscisse des Berührungspunktes die mittlere Proportionale zwischen den Abscissen der Durchschnittspunkte der Sekante.

Die Ordinaten der Schnittpunkte teilen die Strecke des Durchmessers zwischen dem Ausgangspunkte der Tangenten und der Berührungssehne harmonisch; die Strecke selbst wird von der Parabel halbiert; folglich u. s. w.

Lehrsatz XV.

Zieht man in den Endpunkten zweier Parabeldurchmesser die Tangenten, so bestimmen die Verlängerungen der ersteren mit den Tangenten kongruente Dreiecke.

Man ziehe durch die Berührungspunkte Parallelen (Ordinaten) zu den Tangenten (II, 20).

Zusatz. Die von dem Parabelbogen und den in seinen Endpunkten gezogenen Durchmessern und Tangenten gebildeten gemischtlinigen Dreiecke sind flächengleich.

Lehrsatz XVI.

*Die von zwei beliebigen Durchmessern einer Ellipse oder Hyperbel (oder in Gegenschnitten) und den in den Endpunkten der ersteren gezogenen Tangenten schliessen flächengleiche Dreiecke ein.**)

Sind A, T die Berührungspunkte, B, D die Schnittpunkte der Tangenten mit den Durchmessern und AO die zu TCE gehörige Ordinate, so hat man

$$\frac{CT}{CB} = \frac{CO}{CT}\,(8) = \frac{CA}{CD},\quad CA \,.\, CB = CT \,.\, CD.$$

Lehrsatz XVIII.

Zieht man zu einer Parabeltangente eine parallele Sehne, so ist die Ordinate des Berührungspunktes das arithmetische Mittel der Ordinaten der Sehnenendpunkte.

---

*) Apollonius III, 1.

Die Ordinate des Berührungspunktes kann als Mittellinie (zwischen den nichtparallelen Seiten oder den Diagonalen) eines Trapezes angesehen werden. — Berücksichtigung der Zeichenregel für die Ordinaten der Kurve.

Lehrsatz XIX.

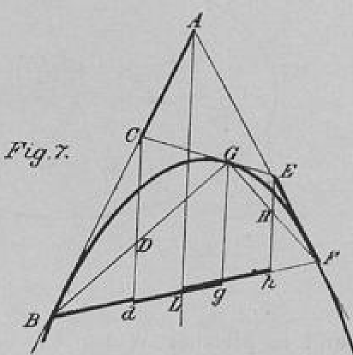
Die Subnormale der Parabel ist gleich dem halben Parameter der Achse.

Lehrsatz XX.

*Drei Parabeltangenten teilen einander in gleichen Verhältnissen. — Entstehung ähnlicher Punktreihen.**)

Zieht man sowohl durch die Schnittpunkte als durch die Berühungspunkte der Tangenten die Durchmesser der Parabel, so werden auf jeder Berührungssehne zweimal drei gleiche Strecken erzeugt, welche von den Durchmessern auf die Tangenten parallel projiziert werden: Bd = dg = Lh u. s. w.

Fig. 7.



Lehrsatz XXI.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Berührungssehne zweier Parabeltangenten Parallelen zu den letzteren, so bestimmen die Schnittpunkte der Parallelen mit den Tangenten eine dritte Parabeltangente, deren Berührungspunkt auf dem Durchmesser jenes Punktes liegt.

Umkehrung von Lehrsatz 20.

Lehrsatz XXII.

Legt man an einen Kegelschnitt zwei beliebige Tangenten ED, BL mit dem gemeinsamen Schnittpunkte Y und zieht zu diesen durch einen beliebigen Punkt G der Kurve Parallelen GH, GM, welche die Berührungsradien CB, CE in H, E und die Tangenten DE, BL in Z, X schneiden, so ist das Trapez $GXLM$ dem Dreiecke BXH flächengleich. (Lemma zu dem folgenden Satze.)

Zieht man die Ordinate EF, und ist K der Schnittpunkt von MG und AB, so hat man

$$\frac{\triangle FED}{\triangle KGH} = \frac{EF^2}{GK^2} = \frac{AF \cdot FB}{AK \cdot KB} = \frac{BC^2 - CF^2}{BC^2 - CK^2} =$$

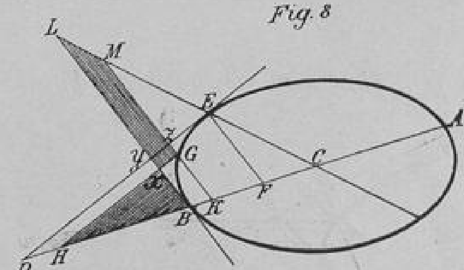
$$\frac{\triangle CBL - \triangle CFE}{\triangle CBL - \triangle CKM} = \frac{FELB}{KMLB},$$

und da (16)

$$\triangle BYD = \triangle EYL, \ \triangle FED = FELB,$$

so ist

Fig. 8



$$\triangle KGH = KMLB \text{ und } \triangle BXH = GXLM.$$

Lehrsatz XXIX.

Zieht man an einen Kegelschnitt oder an Gegenschnitte zwei Sekanten und konstruiert die diesen parallelen Tangenten, so verhalten sich die Rechtecke der Sekantenabschnitte wie die Quadrate der parallelen Tangenten. — Newtons Potenzsatz.

*) Dieser Satz wird gewöhnlich Halley zugeschrieben; er findet sich indes schon bei Apollonius (III, 41).

Sind EHA, EBD die beiden Sekanten, FL, LI die zu ihnen parallelen Tangenten, CMF, CNI die den Ordinaten AH, BD zugehörigen Halbmesser, welche die Tangenten LI, FL in den Punkten Q, G schneiden und von den Sekanten EBD, EHA in K, V getroffen werden, und zieht man noch durch H, B zu LI, FL Parallelen, welche die Halbmesser CF CI in P, O schneiden, so findet man der Reihe nach

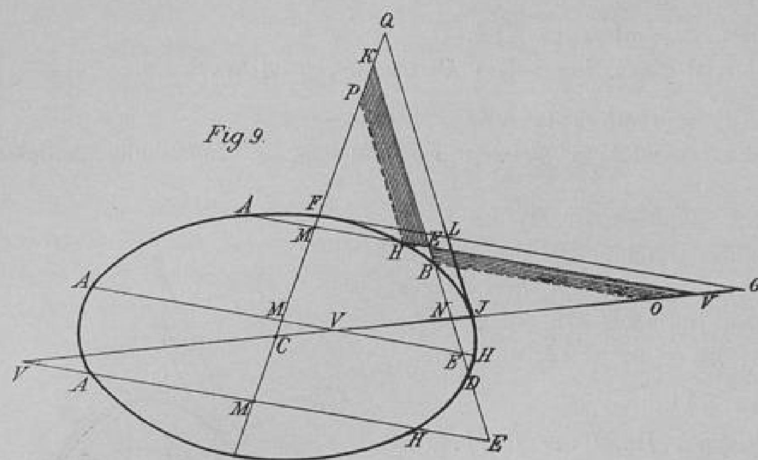


Fig. 9

$$\frac{BN^2}{EN^2}=\frac{\triangle BNO}{\triangle ENV}, \quad \frac{BN^2}{BN^2-EN^2}=\frac{\triangle BNO}{\triangle BNO-\triangle ENV},$$

$$\frac{BN^2}{ED.EB}=\frac{\triangle BNO}{BEVO},$$

$$\frac{BN^2}{IL^2}=\frac{\triangle BNO}{\triangle LIG}, \quad \frac{IL^2}{\triangle LIG}=\frac{LD.EB}{BEVO}$$

und in gleicher Weise
$$\frac{FL^2}{\triangle LFQ}=\frac{AE.EH}{EHPK};$$

ferner ist (15, 16) $\triangle LFQ=\triangle LIG$ und (22), $EHPK=BEVO$, so dass

$$\frac{ED.EB}{EH.EA}=\frac{IL^2}{FL^2}.\ ^{*)}$$

Viertes Buch.

Die Asymptoten.

Lehrsatz I.

Zieht man von beliebigen Punkten einer Hyperbel (oder von Gegenschnitten) je zwei von den Asymptoten begrenzte Strecken, welche zwei festen Richtungen parallel laufen, so ist das Rechteck aus zwei solchen Strecken konstant.

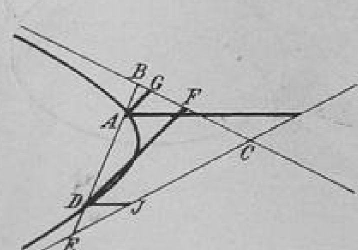


Fig. 10

Schneidet die Sehne AD die Asymptoten in B, E, und sind AG, AH und DF, DI die Strecken zwischen den Hyperbelpunkten und den Asymptoten, und zwar sei DF parallel AG, DI parallel AH, so hat man (II, 14)

$$\frac{AG}{DF}=\frac{BA}{BD}=\frac{ED}{EA}=\frac{DI}{AH},$$

also auch $AG.AH=DI.DF$. — Die folgenden drei Sätze sind in diesem inbegriffen.

*) Der „Newtonsche Potenzsatz" findet sich bereits bei Archimedes περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων (Heiberg I, S. 324 u. f. und Nizze S. 165), sowie bei Apollonius III, 16—23 (Ausg. v. Richard S. 309 u. f., Balsam S. 105 u. f.). Der obige Beweis ist dem des Apollonius nachgebildet. Folgerungen giebt de la Hire in V, 5 und 7.

Lehrsatz II.

Zieht man von beliebigen Punkten einer Hyperbel (oder von Gegenschnitten) Parallelen zu den Asymptoten, so sind die entstandenen Parallelogramme flächengleich. — Umkehrung.

Lehrsatz III.

Das Quadrat der halben von den Asymptoten begrenzten Strecke der Hyperbeltangente ist der gemeinsame Wert aller Rechtecke aus den Abschnitten, in welche eine der Tangente parallele Sekante durch die Asymptoten und einen Hyperbelpunkt zerfällt: $AG.AH = DI^2$.

Lehrsatz IV.

Das Quadrat eines Hyperbelhalbmessers ist der gemeinsame Wert aller Rechtecke aus den Abschnitten, welche auf einer dem Halbmesser parallelen Sekante durch einen Hyperbelpunkt und je eine Asymptote bestimmt werden.

Lehrsatz V.

Die Tangenten der Hyperbel (oder an Gegenschnitten) schneiden von dem Asymptotenwinkel flächengleiche Dreiecke ab.

Konstruktion der Hyperbel Punkt für Punkt und Tangente für Tangente.

Lehrsatz VI.

Das Quadrat eines Hyperbeldurchmessers verhält sich zu dem Quadrate der in seinem Endpunkte gezogenen und von den Asymptoten begrenzten Tangente wie der Durchmesser zu seinem Parameter.

Ist BCD der Durchmesser, CAE eine Asymptote, AD die Tangente und FH eine dieser parallele Sehne, welche die Asymptote in E und den Durchmesser in G schneidet, so hat man (s. Fig. zu Lehrsatz 8)

$EF.FI = EG^2 - FG^2$, $GB.GD = CG^2 - CD^2$ und (3) $EF.FI = DA^2$, und daher

$$\frac{EF.FI + FG^2}{BG.GD + CD^2} = \frac{EG^2}{CG^2} = \frac{DA^2}{CD^2},$$

$$\frac{DA^2 + FG^2}{DA^2} = \frac{BG.GD + CD^2}{CD^2},$$

$$\frac{FG^2}{DA^2} = \frac{BG.GD}{CD^2} \text{ und nach (III, 6) } \frac{BG.GD}{FG^2} = \frac{BD}{AP},$$

so dass auch

$$\frac{CD^2}{DA^2} = \frac{BD}{AP}.$$

Zusatz. Das Quadrat der von den Asymptoten begrenzten Tangente ist gleich der Figur des zugehörigen Durchmessers: $DA^2 = \frac{1}{2} AP.CD$.

Der konjugierte Durchmesser wird hier durch die Tangente ersetzt.

Aufgabe.

Die Asymptoten einer gegebenen Hyperbel zu konstruieren.

Mit Hilfe einer beliebigen Sekante findet man der Reihe nach einen Durchmesser, dessen Parameter, das Centrum und die Tangente im Endpunkte des ersten. Die von den Asymptoten begrenzte Strecke der Tangente ist nach (6) mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und seinem Parameter.

Lehrsatz VIII.

Zieht man zu einem Durchmesser BCD einer Hyperbel eine Parallele, welche die Asymptoten in L, K und die Hyperbel in H schneidet und durch H eine zur Tangente in D parallele Sekante, welche den Durchmesser CD in G trifft, und wird endlich LK von M halbiert, so ist $MK^2 = BG \,.\, GD$.

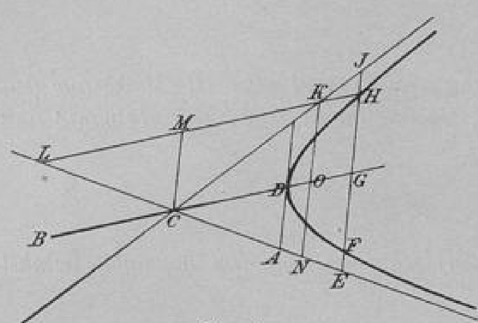


Fig. 11.

Da M, C die Mitten von LK, BD, so hat man $LH \,.\, HK = MH^2 - MK^2$, $BG \,.\, GD = CG^2 - CD^2 = MH^2 - CD^2$, weil MC parallel GH, und (4) $LH \,.\, HK = CD^2$, so dass $BG \,.\, GD = MK^2$.

Lehrsatz IX.

Schneidet die Sekante HG die Asymptoten in I, E, so verhalten sich die Rechtecke HK . HL und HI . HE zu einander wie der Durchmesser BD zu seinem Parameter.

Lehrsatz X.

Die Quadrate von KM und der Ordinate GH verhalten sich zu einander wie der Durchmesser BD zu seinem Parameter.

Lehrsatz XI.

Die Achse der Hyperbel halbiert den Winkel der Asymptoten.

Lehrsatz XIV.

Konstruiert man zwei durch die Asymptoten und je einen Hyperbelpunkt bestimmte Parallelogramme, so geben die Diagonalen des beiden gemeinsamen Parallelogrammes konjugierte Richtungen an, nämlich die der Sehne und des zugehörigen Durchmessers.

Beweis mit Hilfe von (2) und des Satzes über die Ergänzungsparallelogramme.

Lehrsatz XXVIII.

Die Differenz der Quadrate eines Halbmessers der Hyperbel und der halben (von den Asymptoten begrenzten Strecke der) Tangente, welche die Kurve im Endpunkte des Halbmessers berührt, ist konstant.

Sind CA, CB zwei beliebige Hyperbelhalbmesser, FG, DE die Tangenten der Punkte A, B und AI, BH, EL, FK normal zu einer Asymptote CD, so findet man

$$CB^2 - BD^2 = CH^2 - HD^2 = CD \,.\, CL,$$
$$CA^2 - GA^2 = CI^2 - IG^2 = CG \,.\, CK,$$
$$\frac{CF}{CE} = \frac{CK}{CL} = \frac{CD}{CG} \; (5),$$

folglich

$$CD \,.\, CL = CG \,.\, CK \text{ und } CB^2 - BD^2 = CA^2 - GA^2.$$

Vgl. IV, 42.

Zusatz: Sind Durchmesser und Tangentenabschnitt einander gleich, so ist der Asymptotenwinkel ein Rechter. Gleichseitige Hyperbel. Vgl. V, 13.

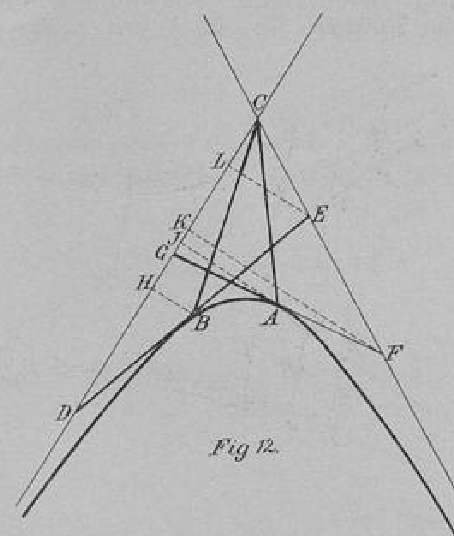


Fig 12.

Aufgabe.

In den Asymptotenwinkel eine gegebene Strecke einzutragen, welche die Hyperbel berührt.

Man ziehe eine beliebige Tangente an die Hyperbel und wende (28) an.

Erklärung.

Zwei Paare von Gegenschnitten, von welchen das eine Paar den Nebenwinkel des andern zum Asymptotenwinkel hat, heissen Neben- oder Folgeschnitte (sectiones inter se sequentes).

Lehrsatz XXXI.

Zwischen Nebenschnitten enthaltene Strecken, welche einer oder beiden Asymptoten parallel laufen, werden von diesen in gleichem Verhältnisse geteilt.

Man konstruiere die durch die Endpunkte G, K, E, O der Strecken GAK, ENO und die Asymptotenrichtungen AC, BC bestimmten Parallelogramme (CE), (CG), (CO), (KC); alsdann ist nach (2)

$$(CE) = (GC),\; (CO) = (KC)$$

und daher

$$\frac{EN}{NO} = \frac{GA}{AK}.$$

Lehrsatz XXXII.

Legt man von einem Punkte einer Asymptote der Nebenschnitte an dieselben Tangenten, so verhalten sich die durch diese und das Centrum auf der anderen Asymptote bestimmten Abschnitte wie diejenigen der zwischen den Nebenschnitten enthaltenen und einer Asymptote parallelen Strecken; die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte der Tangenten ist der Asymptote parallel.

Sind DX, DL die Tangenten, CX, CL die Abschnitte der Asymptote, FM die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte und I ihr Schnittpunkt mit der Asymptote, so ist (5)

$$\frac{\triangle\, ICD}{\triangle\, XCD} = \frac{(CE)}{(CO)} = \frac{EN}{NO} = \frac{LC}{CX} = \frac{FI}{IM} \;\text{(II, 13 u. IV, 31).}$$

Lehrsatz XXXIV.

Zieht man von Punkten eines Nebenschnittes parallele Sekanten durch den andern, so sind die Rechtecke der durch den zweiten Nebenschnitt erzeugten Abschnitte der Sekanten einander gleich, und zwar gleich dem Quadrate der halben parallelen Tangente.

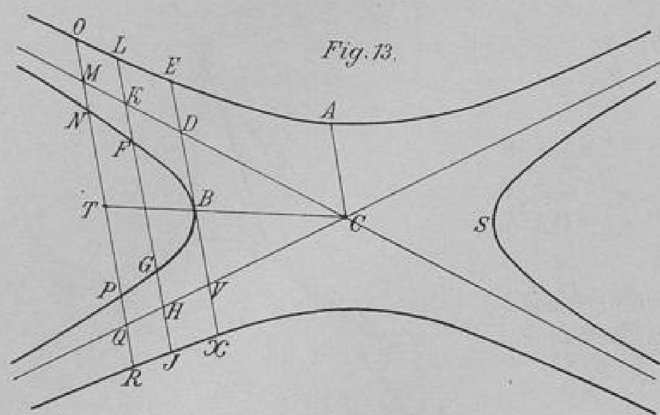


Fig. 13.

Die Sekante werde von dem einen Nebenschnitte in O, R, von dem anderen in N, P, von den Asymptoten in M, Q und die parallele Tangente EBX von den Asymptoten in D, V getroffen; AC sei der ihr parallele Halbmesser. Da $NT = TP$ und $MT = TQ$, so ist

$$ON \cdot NR = ON \cdot OP = OM \cdot OQ + MN \cdot MP = AC^2 + BD^2 \ (4) = ED \cdot EV + BD^2 = EB^2.$$

Lehrsatz XXXV.

Gegen- und Nebenschnitte besitzen wechselseitig dieselben Paare konjugierter Durchmesser: ein begrenzter Durchmesser QI der Gegenschnitte liegt in dem unbegrenzten Durchmesser der Nebenschnitte, und umgekehrt enthält der dem ersten konjugierte unbegrenzte Durchmesser der Gegenschnitte den dem ersten konjugierten begrenzten Durchmesser SN der Nebenschnitte.

Ist KIL die von den Asymptoten begrenzte Tangente, SN der ihr parallele Durchmesser, MP die zu dem konjugierten Durchmesser ICQ durch den Schnittpunkt N des ersten Durchmessers und des Nebenschnittes gezogene Parallele, so folgt aus der Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{NC}{NP}, \frac{IK}{IC}, \frac{IL}{IC} \text{ und } \frac{NC}{NM}$$

die Gleichheit der Strecken NM und NP, und MP berührt den Nebenschnitt in N.

Zusatz. Ist in Nebenschnitten ein Durchmesser des einen Paares gleich der ihm parallelen (von den Asymptoten begrenzten Strecke der) Tangente des anderen Paares, so heissen sie konjugierte Schnitte (konjugierte Hyperbeln, bei Apollonius *τομαὶ συζυγεῖς*).

Strecken zwischen konjugierten Schnitten werden von den Asymptoten halbiert (31).

Zieht man von einem Punkte einer Asymptote konjugierter Schnitte Tangenten an die Kurve, so wird die von diesen auf der andern Asymptote bestimmte Strecke vom Centrum halbiert (32, 35). U. s. w.

Lehrsatz XLII..

Die Differenz der Quadrate zweier konjugierter Hyperbeldurchmesser ist konstant, und zwar gleich der Differenz der Quadrate der beiden (konjugierten) Achsen. — $a_1{}^2 - b_1{}^2 = a^2 - b^2$.

Beweis mit Hilfe von (34) und (28).

Lehrsatz XLIII.

Parallelogramme, welche konjugierten Hyperbeln umbeschrieben sind und deren Seiten konjugierten Durchmessern parallel laufen, besitzen gleichen Flächeninhalt. — Das Rechteck der konjugierten Achsen. — Beweis mit Hilfe von (34) und (5).

Aus dem fünften Buche.

Lehrsatz XIII.

Wenn in einer Hyperbel ein Durchmesser seinem Parameter gleich ist, so sind alle Durchmesser ihren Parametern gleich, und die Asymptoten schneiden sich unter rechtem Winkel. Eine solche Hyperbel heisst gleichseitig.

Sei EF eine Tangente, CA ihr Berührungsradius.

Aus den Gleichungen

$$\frac{AC^2}{AF^2} = \frac{AB}{AP} (6)$$

und $AB = AP = 2q$ fliesst $AC = AF = AE$, und Winkel ECF ist recht. Jede beliebige andere Tangente ist gleich dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Durchmesser.

Lehrsatz XIV.

In der Ellipse sind nur diejenigen konjugierten Durchmesser einander gleich, welche ihren Parametern gleich sind.

Zieht man zu den Seiten des durch die Achsen AB, DE der Ellipse bestimmten Rhombus parallele Durchmesser FG, HI, so sind dieselben konjugiert. — Fällt man vom Endpunkte H des einen auf die Achse AB die Normale, welche die Ellipse zum zweiten Male in g treffe, so sind die Dreiecke COH und COg gleich und ähnlich, aber auch die Dreiecke ACN und ACL decken sich, und CA halbiert die Winkel HCg und HCG, und es ist $CG = CH$. — Dass ausser diesem Durchmesserpaare kein zweites die angegebene Eigenschaft besitzt, wird indirekt gezeigt (III, 4 und II, 32).

Lehrsatz XVI.

Zieht man von den Endpunkten eines Paares konjugierter Durchmesser Ordinaten zu einem zweiten Paare konjugierter Durchmesser, so entstehen 16 einander flächengleiche Dreiecke.

Zieht man in einem Endpunkte A des Durchmessers ACB die Tangente bis zum Durchschnitt N mit einem Durchmesser GCH des anderen Paares und führt die Ordinaten HL zu AB und AM parallel GH, so hat man (III, 8)

$$\frac{CM}{CH} = \frac{CH}{CN} = \frac{CL}{CA} \text{ oder } CA \,.\, CM = CH \,.\, CL,$$

d. i. $\triangle ACM = \triangle HCL = \triangle ACm = \triangle ECI$ u. s. f.

Lehrsatz XVII.

Die zwischen zwei konjugierten Ellipsendurchmessern enthaltene Strecke einer Tangente wird durch den Berührungspunkt so geteilt, dass das Rechteck ihrer Abschnitte gleich dem Quadrate des der Tangente parallelen Halbmessers ist.

Sind AB, OD die konjugierten Durchmesser, CH der der Tangente EG parallele Halbmesser der Ellipse, F der Berührungspunkt, FL, HI Ordinaten zu AB, und ist FM parallel AB, so findet man

$$\frac{\triangle ELF}{\triangle FLC} = \frac{EL}{LC} = \frac{EL}{FM} = \frac{FL}{MG} = \frac{CM}{MG} = \frac{\triangle FLC}{\triangle FMG}$$

oder (16)

$$\frac{\triangle ELF}{\triangle CIH} = \frac{\triangle CIH}{\triangle FMG}$$

und wegen der Ähnlichkeit dieser Dreiecke

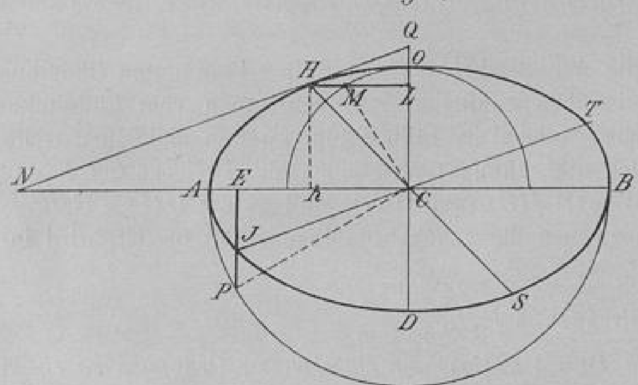
$$\frac{EF}{CH} = \frac{CH}{FG}.^{*)}$$

Zusatz. $\frac{EF^2}{CH^2} = \frac{EL}{LC}$.

Lehrsatz XVIII.

Beschreibt man über den Achsen der Ellipse als Durchmesser Kreise und fällt von den Endpunkten zweier konjugierter Durchmesser Senkrechte auf die Achsen, so sind die so erhaltenen Ordinaten der Ellipse und des kleinen Kreises der Reihe nach gleich den Ordinaten des grossen Kreises und der Ellipse.

Fig. 14



Seien ACB, OCD die Achsen, HCS, ICT zwei konjugierte Durchmesser, HL, IE senkrecht zu OC, AC und M, P die Schnittpunkte der Kreise mit HL, IE; zieht man alsdann in H die Tangente, welche AB, OD in N, Q schneidet, und ist Hh normal zu AC, so hat man

$$\frac{EC}{Ch} = \frac{EC}{HL} = \frac{IC}{HQ} = \frac{NH}{IC} (17) = \frac{Nh}{EC},$$

oder

$$EC^2 = Nh \,.\, Ch = Ah \,.\, Bh \text{ (II, 10)} = CA^2 - Ch^2 = CA^2 - HL^2;$$

aber auch

$$CE^2 = CA^2 - EP^2,$$

also

$$EP = HL$$

Aus (III, 3) folgt

$$\frac{EP^2}{EI^2} = \frac{CA \,.\, CB}{CO \,.\, CD} = \frac{CA^2}{CD^2} \text{ oder } \frac{EP}{EI} = \frac{CA}{CD}^{**)} \text{ und ähnlich } \frac{LH}{LM} = \frac{CA}{CD},$$

so dass auch

$$EI = LM.$$

Lehrsatz XIX.

Die Summe der Quadrate zweier konjugierter Durchmesser einer Ellipse ist konstant, und zwar gleich der Summe der Quadrate der beiden Achsen. — $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$.

Beweis mit Hilfe von (18).

---

*) Ein kürzerer Beweis gründet sich auf III, 11.

**) $\frac{y_1}{y} = \frac{a}{b}$. Dieses Theorem, welches hier ganz beiläufig zu Tage tritt, dient jetzt umgekehrt meist als Ausgangssatz einer besonderen Gruppe von Sätzen und Aufgaben.

Lehrsatz XXI.

Der Flächeninhalt der einer Ellipse umbeschriebenen Parallelogramme, deren Seiten je zwei konjugierten Durchmessern parallel laufen, ist konstant, und zwar gleich dem Rechtecke der Achsen. — $a_1 b_1 \sin\gamma = a b$.

De la Hire stützt den Beweis auf (III, 16).

Die Theoreme 24 und 25 dieses Buches enthalten die Lehrsätze, auf welche Archimedes die Quadratur der Parabel gründet.*)

Die Lehrsätze 29 bis 34 behandeln Gleichheiten von Summen und Differenzen der Ordinaten von Punkten, in denen ein Kreis oder eine Parabel von andern Kegelschnitten getroffen werden.

Siebentes Buch.

Das Normalenproblem.

Lehrsatz I.

Die kleine Achse der Ellipse (die begrenzte der Hyperbel) ist der kleinste, die grosse Achse der grösste aller Durchmesser.

Vgl. I, 36.

Zusatz. Die der grossen Achse der Ellipse benachbarten Durchmesser sind grösser als die entfernteren.

Beweis indirekt: Der über dem entfernteren Durchmesser geschlagene Kreis würde die Kurve in acht Punkten schneiden, was unmöglich ist.

Lehrsatz II.

Trägt man auf der Achse der Parabel vom Scheitel aus den halben Parameter der Achse auf, so ist diese Strecke die kürzeste Linie, welche von dem erhaltenen Punkte der Achse nach dem Umfange der Parabel gezogen werden kann.

Ist T der Scheitel der Parabel, P der von ihm um p entfernte Punkt der Achse, A ein beliebiger Punkt der Kurve und AO seine Ordinate, so hat man

$$PA^2 = AO^2 + PO^2 = 2TP \,.\, TO + PO^2 \text{ (III, 2)} = 2TO \,.\, TP + (PT - TO)^2 = PT^2 + TO^2,$$

d. h.

$$PA > PT.$$

Zusatz 1. Das Quadrat der Strecke PA übertrifft das des halben Parameters um das Quadrat der zugehörigen Abscisse.

Zusatz 2. Ist TM gleich TP und normal zur Achse, so ist MO gleich PA.

Zusatz 3. Der mit dem halben Parameter als Radius um P beschriebene Kreis berührt die Parabel im Scheitel und liegt ganz innerhalb derselben.

Erklärung.

Konstruiert man über der Achse der Ellipse (oder der Hyperbel) die Differenz (bei der Hyperbel die Summe) des Quadrates der Achse und der Figur derselben (III, 3) und ein dem entstandenen Rechtecke ähnliches und ähnlich liegendes, so nennt man das letztere das Bild (exemplar) des ersteren.

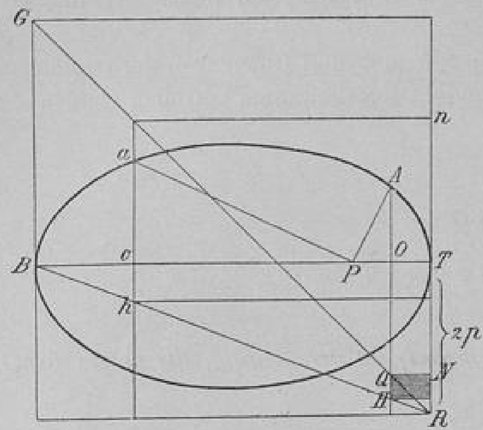
---

*) Archimedes, Ausg. von Nizze Seite 13, Satz 4 und 5.

Lehrsatz III.

Trägt man auf der grossen Achse der Ellipse (oder auf der begrenzten Achse der Hyperbel) vom Scheitel aus den halben Parameter der grossen Achse auf, so ist diese Strecke die kürzeste Linie, welche von dem erhaltenen Punkte der Achse nach dem Umfange der Kurve gezogen werden kann.

Fig. 15.



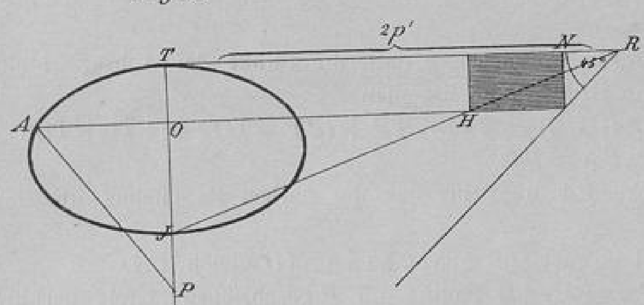
Sei (BR) die Figur, (GR) das Quadrat der grossen Achse BT, auf welcher PT gleich p, ferner A ein beliebiger Punkt der Kurve und AO seine Ordinate; die verlängerte AO schneide die Diagonale BR in H und GR in Q, und endlich sei QN parallel und gleich OT; alsdann ist (HN) das zur Strecke OT gehörige Bild, und man hat $PA^2 = AO^2 + PO^2 = (TH) + PO^2$ (III, 4 und 6) $= OT \,.\, TN + (HN) + PO^2$, und weil $PT^2 - PO^2 = OT \,.\, TN$, so ist $PA^2 = PT^2 + (HN)$, d. h. $PA > PT$.

Zusatz. Ein Kreis mit dem Centrum P und dem Radius p trifft die Ellipse (Hyperbel) nur im Scheitel und liegt ganz innerhalb derselben.

Lehrsatz IV.

Trägt man auf der kleinen Achse der Ellipse vom Scheitel aus den halben Parameter der kleinen Achse auf, so ist diese Strecke die grösste Gerade, welche von dem erhaltenen Punkte der Achse nach dem Umfange der Ellipse gezogen werden kann.

Fig. 16.



Benutzt man die entsprechenden Bezeichnungen: $TP = p'$ u. s. w., so ergiebt sich ähnlich wie in (3) $PA^2 = PT^2 - (HN)$, d. h. $PA < PT$.

Zusatz. Ein Kreis mit dem Centrum P und dem Radius p' trifft die Ellipse nur im Scheitel T der kleinen Achse und umschliesst die Kurve.

Lehrsatz V.

Zieht man von einem Punkte der Parabelachse, dessen Abstand vom Scheitel grösser ist als der halbe Parameter, Gerade nach dem Umfange der Parabel, so ist diejenige Strecke eine Minimallinie der Parabel, deren Normalprojektion auf die Achse dem halben Parameter gleich ist und zwischen den Ausgangspunkt P und den Scheitel T fällt.

Ist die Strecke TP der Achse grösser als die Projektion OP (p) von AP, B ein beliebiger anderer Parabelpunkt und BD seine Ordinate, so findet man

$$PA^2 = PO^2 + AO^2 = PO^2 + 2PO \,.\, OT,\ PB^2 = BD^2 + PD^2 = 2PO \,.\, TD + PD^2 = 2PO \,.\, TD + (PO + OD)^2 = 2PO \,.\, OT + PO^2 + OD^2 = PA^2 + OD^2, \text{ d. h. } PB > PA.$$

Zusatz 1. Errichtet man in O die Normale Op gleich PA, so ist Dp gleich PB.

Zusatz 2. Ein Kreis mit dem Centrum P und dem Radius PA trifft die Parabel nur in A und dem in Bezug auf die Achse zu ihm symmetrisch gelegenen Punkte A' und befindet sich ganz innerhalb der Parabel (II, 31).

Lehrsatz VI.

Zieht man von einem Punkte der grossen Achse der Ellipse (oder der begrenzten Achse der Hyperbel), dessen Abstand von dem benachbarten Scheitel der grossen Achse grösser ist als der halbe Parameter, Gerade nach dem Umfange der Kurve, so ist diejenige Strecke eine Minimallinie, deren Normalprojektion auf die Achse sich zur Abscisse) des Kurvenpunktes wie der Parameter zur Achse verhält.*

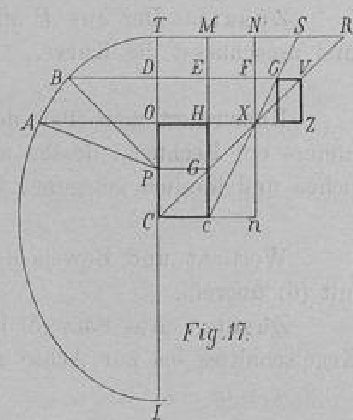


Fig. 17.

Sei P ein Punkt der grossen Achse $IT = 2a$, PT grösser als ihr halber Parameter p, $CO : OP = a : p$, die Ordinate AO normal CT, TR gleich a und normal CT, CR schneide die durch P, A und den beliebigen Ellipsenpunkt B zu TR parallelen Geraden der Reihe nach in Q, X und V, die durch Q und X zu CT parallelen Geraden treffen TR in M und N, MQ schneide BV, AX und die andere Achse der Reihe nach in E, H und c, cX treffe BV in G und TR in S, XN schneide BV in F und Cc in n, VZ sei parallel und gleich DO. Da (On) ein Quadrat und $OX : HX = CO : OP$, so ist (Oc) das zu CO und (GZ) das zu DO gehörige Bild. Ferner ergiebt sich

1) $\frac{AO^2}{IO \,.\, OT} = \frac{p}{a} = \frac{OP}{CO}$ (III, 4 und 6), 2) $IO \,.\, OT = RT^2 - OX^2 = 2 \,.\, OXRT$,

$\frac{\triangle NRX}{\triangle NSX} = \frac{NX}{NS} = \frac{CO}{OP}$, $\frac{(NO)}{(NH)} = \frac{OX}{HX} = \frac{CO}{OP}$ und daher 3) $\frac{2 \,.\, OXRT}{2 \,.\, HXSM} = \frac{(NO)}{(NH)} = \frac{CO}{PO}$; aus (1), (2), (3) folgt 4) $AO^2 = 2 \,.\, HXSM$.

$$5)\ \frac{BD^2}{BT \,.\, BI} = \frac{p}{a} = \frac{OP}{CO},\ 6)\ DT \,.\, DI = RT^2 - DV^2 = 2 \,.\, DVRT,$$

$$7)\ \frac{2 \,.\, DVRT}{2 \,.\, EGSM} = \frac{OXRT - OXVD}{HXSM - HXGE} = \frac{CO}{PO},\ \text{weil}\ \frac{OXVD}{HXGE} = \frac{(FO) + \triangle FVX}{(FH) + \triangle FGX} = \frac{CO}{PO};$$

daher ist

$$8)\ BD^2 = 2 \,.\, EGSM.$$

Endlich hat man

$$PB^2 = PA^2 + (BD^2 - AO^2) + (PD^2 - PO^2) = PA^2 - 2 \,.\, HXGE + 2 \,.\, HXVE$$
$$= PA^2 + (GZ),\ \text{d. h.}\ PB > PA.^{**)}$$

Zusatz 1. Das Quadrat einer von dem Punkte P der halben Achse CT nach einem beliebigen Punkte der Ellipse oder Hyperbel gezogenen Strecke übertrifft das Quadrat der Minimalstrecke um das zur Differenz der Abscissen gehörige Bild.

---

*) im jetzt gebräuchlichen Sinne genommen

**) Der vorstehende Beweis nimmt im Originale 100 Zeilen in Anspruch.

Zusatz 2. Der aus P mit dem Radius PA beschriebene Kreis trifft die Ellipse oder Hyperbel nur in A und seinem Spiegelpunkte und liegt ganz innerhalb des Kegelschnittes.

Lehrsatz VII.

Zieht man von einem Punkte der kleinen Achse der Ellipse, dessen Abstand von dem Scheitel dieser Achse kleiner ist als der halbe Parameter derselben, Gerade nach dem Umfange der Kurve, so ist diejenige Strecke eine Maximallinie, deren Normalprojektion auf die kleine Achse sich zur Ordinate) des Kurvenpunktes wie der Parameter der kleinen Achse zu dieser selbst verhält.*

Ähnlich wie in (6) findet man $PB^2 = PA^2 - (GZ)$, d. h. $PB < PA$, wobei dieselben Bezeichnungen zu Grunde liegen.

Zusatz. Der aus P mit dem Radius PA beschriebene Kreis trifft die Ellipse nur in A und umschliesst die Kurve.

Erklärung.

Konstruiert man über der Summe der (begrenzten) Achse der Hyperbel und ihres Parameters ein Rechteck, dessen andre Seite diesem Parameter gleich ist, so heisst ein diesem ähnliches und ähnlich gelegenes Rechteck das Bild der unbegrenzten Achse.

Lehrsatz VIII.

Wortlaut und Beweis des Satzes stimmen unter Zuhilfenahme der vorstehenden Erklärung mit (6) überein.

Zusatz. Aus Satz (5) bis (8) ergiebt sich die Konstruktion der von einem Punkte eines Kegelschnittes bis zur Achse gezogenen Minimal- oder Maximalstrecke.

Lehrsatz IX.

Die kleinste der von einem beliebigen Punkte nach dem Umfange des Kegelschnittes gezogenen Strecken liegt auf der Minimallinie eines Achsenpunktes.

De la Hire führt den Beweis indirekt wie folgt:

Sei AP die Minimallinie des Achsenpunktes P, B ein beliebiger Punkt derselben und C ein zweiter Punkt der Kurve. Wäre $BA > BC$, so würde $BA + BP > BC + BP$ oder $PA > BC + BP$ oder a fortiori $PA > PC$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Zwei Minimallinien AP, $A'P$ können sich nur in ihren Verlängerungen (über P und P' hinaus) schneiden.

Lehrsatz X.

Die grösste der von einem beliebigen Punkte nach dem Umfange der Ellipse gezogenen Strecken liegt auf der Maximallinie eines Punktes der kleinen Achse.

Beweis ähnlich wie zu (9).

Zusatz. Für Parabel und Hyperbel sind keine Maximallinien vorhanden, da diese Kurven ins Unendliche verlaufen.

Lehrsatz XI.

Die von einem Punkte ausserhalb eines Kegelschnittes gezogene Normale desselben ist die kleinste der von ihm aus zum Umfange führenden Strecken.

Beweis indirekt mit Hilfe der zur Normale gehörigen Tangente und einer beliebigen anderen zwischen dem Punkte und der Kurve liegenden Strecke.

---

*) im jetzt gebräuchlichen Sinne genommen.

Lehrsatz XII.

Eine im Endpunkte einer Minimallinie errichtete Senkrechte berührt die Kurve in diesem Punkte.

Beweis indirekt.

Zusatz. Zu einem Punkte eines Kegelschnittes gehört nur eine Minimallinie (II, 2, Zusatz).

Lehrsatz XIII.

Die Normale des Kegelschnittes (die zwischen ihm und der Achse enthaltene Strecke) ist zugleich Minimal-, bez. Maximallinie des Achsenpunktes.

Beweis indirekt. Vgl. (11).

Lehrsatz XIV.

Verlängert man eine Minimallinie eines Punktes der grossen Achse bis zum Durchschnitt mit der kleinen Achse, so wird sie zur Maximallinie des Punktes der kleinen Achse und umgekehrt.

Schneidet die Minimallinie AP die kleine Achse in D, ist ferner OC die Abscisse von A und AR parallel und gleich OC, so ergiebt sich die Behauptung aus den Proportionen

$$\frac{OP}{OC} = \frac{AP}{AD} = \frac{RC}{RD} = \frac{p_a}{a} = \frac{b}{p_b},$$

wenn unter a, b die halben Achsen und unter p_a, p_b die zugehörigen halben Parameter verstanden werden.

Zusatz. Von einem Punkte der kleinen Achse der Ellipse kann nur eine Maximallinie ausgehen (12, Zusatz 1).

Lehrsatz XVII.

Zwei von der kleinen Achse einer Ellipse nach Punkten eines und desselben Quadranten geführten Maximalstrecken schneiden sich innerhalb des benachbarten Quadranten der Ellipse.

Seien A und F Punkte eines Ellipsenquadranten, und zwar liege A dem Hauptscheitel I näher als F; die Maximallinien AD, FM schneiden die grosse Achse TI in P, H. Sind nun AO, FG die Ordinaten von A, F, so findet man mit Hilfe von (III, 3), dass $IO \,.\, OT < IG \,.\, GT$ und $AO < FG$, sowie $CO > CG$; in Verbindung mit den Gleichungen

$$\frac{CG}{GH} = \frac{CO}{OP} = \frac{a}{p}, \quad \frac{CG}{CG - GH} = \frac{CO}{CO - OP} \text{ oder } \frac{CG}{CH} = \frac{CO}{CP}$$

ergiebt sich daher $CP > CH$ und auf gleiche Weise $CM > CD$, woraus die Behauptung erhellt.

Aufgabe.*)

(XVIII.) *Von einem Punkte innerhalb oder ausserhalb einer Parabel die Normale zu ziehen.*

Man fälle von dem gegebenen Punkte P eine Senkrechte PL auf die Achse TL, trage auf dieser die dem halben Parameter p gleiche Strecke LC (wenn P innerhalb) nach dem Scheitel zu ab und ziehe durch C die zur Achse normale Gerade CG; konstruiert man nun die Gegenschnitte, welche durch die Asymptoten (TL, die Achse der Parabel, und die Gerade

*) Bei De la Hire in Form eines Lehrsatzes; das gleiche gilt von den beiden folgenden Aufgaben. Vgl. Apoll. Con. V, 58—63, Ausg. v. Borelli S. 60.

CG), sowie durch den Punkt P als Peripheriepunkt bestimmt sind, so schneiden diese Gegenschnitte die Parabel in Punkten A, B, F; AP, BP, FP sind die gesuchten Minimallinien.*).

Sind AO, BD, FN die Ordinaten der Punkte A, B, F, und schneiden AP, BP, FP der Reihe nach die Achse der Parabel in M, H, E und die Gerade CG in G, Q, I, so ist $GP = AM$ (II, 14), also auch $MO = LC = p$ und daher AM eine Minimallinie (5).

In gleicher Weise hat man $PI = FF$, $EN = LC = p$; $PQ = HB$, $HD = LC = p$, d. h. EF und HB sind ebenfalls Minimalstrecken oder Normalen (13).

Zusatz 1. Von dem Punkte P können höchstens drei Minimallinien an die Parabel gezogen werden (V, 32, wo sich die Beziehung $AO = FN + BD$ bewiesen findet). Die Achse ist Asymptote des durch P gehenden Hyperbelastes.

Zusatz 2. Die (drei) der Aufgabe genügenden Parabelpunkte liegen mit dem Scheitel der Parabel auf einem Kreise. Vgl. De la Hire Nouv. élémens S. 331.

Zusatz 3. Der Schwerpunkt des Dreiecks ABF fällt auf die Achse der Parabel.

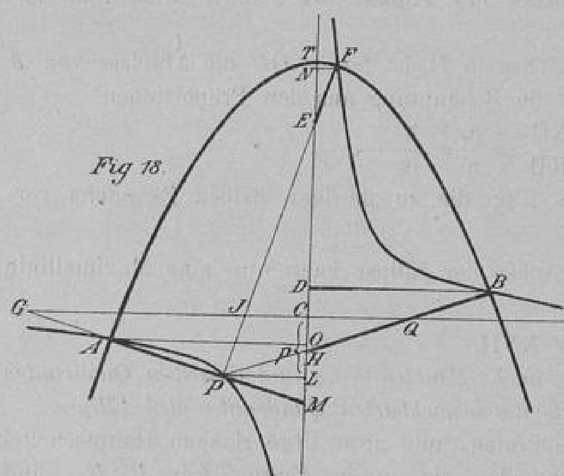


Fig 18.

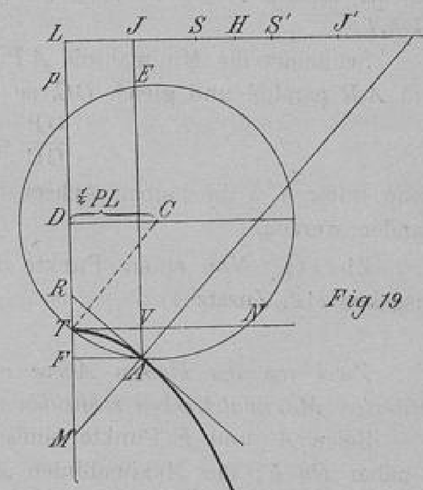


Fig 19

(XIX.) Andere Lösung. Man fälle von dem gegebenen Punkte P eine Senkrechte PL auf die Achse TL der Parabel, trage auf LT die Strecke LB gleich dem halben Parameter p ab,

---

*) Der analytisch-geometrische Weg führt zu denselben Konstruktionen: Sind x_1, y_1 die Koordinaten des gegebenen Punktes P, so hat man

$$\text{I)}\ \frac{y}{-y_1} = \frac{-p}{x_1 - x - p} \quad \text{oder II)}\ x\,y - (x_1 - p)\,y - p\,y_1 = o,$$

oder wenn man den Anfangspunkt aus dem Scheitel um $x_1 - p$ im Sinne der positiven x verschiebt, so dass $x_1 - x - p = -\xi$, $y = \eta$, so erkennt man in $\xi\,\eta = p\,y_1$ die in (VII, 18) auftretende gleichseitige Hyperbel wieder. — Erweitert man die Hyperbelgleichung (II) mit y und verbindet sie mit der der Parabel, so erhält man nach einander die Formen $x y^2 - (x_1 - p)\,y^2 - p y_1 = o$, $2x^2 - 2\,(x_1 - p)\,x - y_1\,y = o$, $2x^2 - 2x_1\,x + y^2 - y_1\,y = o$, $x^2 + y^2 - (x_1 + p)\,x - {}^1\!/_2\,y_1\,y = o$, d. i. die Gleichung eines durch den Scheitel der Parabel gehenden Kreises.

Vertauscht man in (I) die Subnormale p der Parabel mit der Subnormale s_n von Ellipse und Hyperbel, $s_n = px : a$, so erhält man schliesslich (III) $(a - p)\,x\,y + p y_1\,x - a x_1\,y = o$ als Gleichung der in (VII, 20) halbiere BT in D, errichte CD normal LT und gleich dem vierten Teile von PL und schlage aus C mit dem Radius CT einen Kreis, welcher die Parabel noch in A schneide; AP ist die verlangte Normale.

Die durch A zur Parabelachse parallele Gerade schneide die Scheiteltangente in V, den Kreis in E und LP in I, die Scheiteltangente werde vom Kreise in N getroffen, und die Tangente in A begegne der Achse in R; AF sei die Ordinate von A, H die Mitte von LP und I die Mitte von LS. Man findet

$$\mathrm{FR} \,.\, \mathrm{FB} = 2\mathrm{FT} \,.\, \mathrm{FB} = 2\mathrm{AV} \,.\, \mathrm{VE} = 2\mathrm{TV} \,.\, \mathrm{VN} = 2\mathrm{LI} \,.\, \mathrm{IH} = \mathrm{PS} \,.\, \mathrm{SI} = \mathrm{PS} \,.\, \mathrm{AF}$$

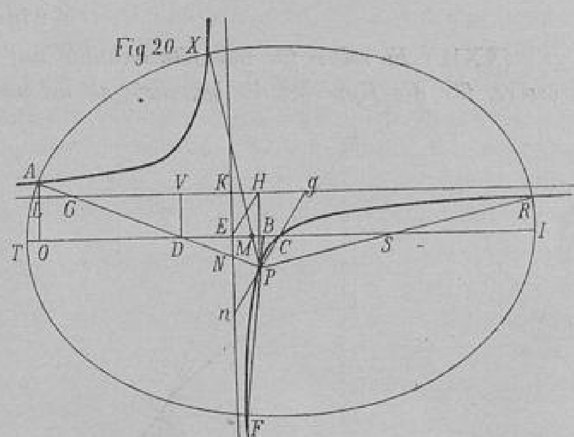
$$\text{oder } \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FR}} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{PS}}; \text{ da nun } \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FR}} = \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{AF}} \text{(III, 2), so ist auch } \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{LB}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{AF}}$$

$$\text{und } \frac{\mathrm{FB} + \mathrm{LB}}{\mathrm{LB}} = \frac{\mathrm{PS} + \mathrm{AF}}{\mathrm{AF}} \text{ oder } \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FR}},$$

so dass $\triangle \mathrm{RAF} \backsim \triangle \mathrm{PAI}$ und $\angle \mathrm{PAR} = 90^{\circ}$*).

Aufgabe.

(XX.) *Von einem Punkte innerhalb oder ausserhalb einer Ellipse oder Hyperbel (oder der Gegenschnitte) die Normale an die Kurve zu ziehen.*



Man fälle von dem gegebenen Punkte P eine Senkrechte PB auf die grosse, beziehentlich begrenzte Achse TI der Ellipse oder Hyperbel und verlängere PB bis H, so dass sich PH zu HB wie a zu p, d. i. wie die Achse zu ihrem Parameter verhalte; in gleicher Weise bestimme man den Abstand des Punktes E der Achse vom Centrum C gemäss der Proportion $CE : EB = a : p$, und zwar fälle man für die Ellipse HB auf HP, EB auf EC, während bei der Hyperbel die Strecken HB, EB die Verlängerungen von HP, EC bilden. Die durch H und E zu den Achsen des Kegelschnittes gezogenen Parallelen KH und KE, welche einander in K schneiden, verwende man als Asymptoten der gleichseitigen Gegenschnitte, von welchen der eine Zweig durch P gehe. Die Schnittpunkte A, R, F, X dieser Hyperbeläste mit dem gegebenen Kegelschnitte bestimmen die gesuchten Normalen PA, PR, PF, PX.

---

verwandten gleichseitigen Hyperbel. Die Verknüpfung der gefundenen Hyperbelgleichung (III) mit der von Ellipse oder Hyperbel führt auf höhere Gleichungen (problemata solidorum). De la Hire erhält in den Nouv. élémens (p. 440) für die Abscisse des gesuchten Ellipsen- oder Hyperbelpunktes eine Gleichung vierten Grades und benutzt zur Konstruktion derselben ausser der gegebenen Kurve nur noch Zirkel und Lineal. Man vgl. noch Balsam S. 184 u. f. zu Apoll. Con. V, 44 und 45, wo sich neben dem Beweise des Apollonius noch zwei andere des Übersetzers vorfinden.

*) Diese Konstruktion hat Halley verwendet in einem Scholion zu Serenus De sect. coni prop. 39. Zeuthen schliesst aus Pappus (Hultsch S. 270, 28 bis 272, 4), dass man schon zu dessen Zeit eine Konstruktion der Normalen, welche sich von einem Punkte an eine gegebene Parabel ziehen lassen, mit Hilfe dieser Kurve selbst und mit Hilfe von Zirkel und Lineal gekannt habe.

PA schneide KE in N, KH in G, CE in D; DV, parallel BH, treffe KH in V und KH die Ordinate AO in L; alsdann ergiebt sich

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{HB}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{GL}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}} \text{ und, weil } \triangle\,\mathrm{GHP} \backsim \triangle\,\mathrm{GVD},\ \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{DV}}=\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GV}}$$

oder $\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{HB}}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{GV}}$ und daher $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{OE}}=\frac{\mathrm{GL}}{\mathrm{GV}}$, $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CO}}=\frac{\mathrm{GL}}{\mathrm{LV}}=\frac{\mathrm{GL}}{\mathrm{OD}}$ oder $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{GL}}=\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OD}}$,

so dass auch
$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}},$$
d. h. AD ist eine Minimallinie (6).

Zusatz 1. Von einem Quadranten der Kurve können nur zwei Minimallinien ausgehen, welche sich in demselben Punkte schneiden.

Zusatz 2. (XXI.) Der eine Zweig der gleichseitigen Gegenschnitte geht durch das Centrum des gegebenen Kegelschnittes.

Schneidet PC die Asymptoten KN, KG in n, g, so sind (Hn) und (Eg) Parallelogramme weil $PH : HB = CE : EB$ und daher PC parallel EH. Aus der Gleichheit der Strecken Pn und Cg ergiebt sich die Behauptung (II, 14, Zusatz).

Aufgabe.

(XXII.) *Es sollen für alle Kegelschnitte auf der einen Seite der Achse (für die Ellipse ist die grössere, für die Hyperbel die begrenzte zu nehmen) beliebig viele Punkte P gefunden werden, von welchen nur je eine Minimallinie oder Normale PA nach einem auf der andern Seite der Achse gelegenen Punkte A eines Quadranten der Kurve gezogen werden kann.* — Konstruktion des Krümmungsradius.

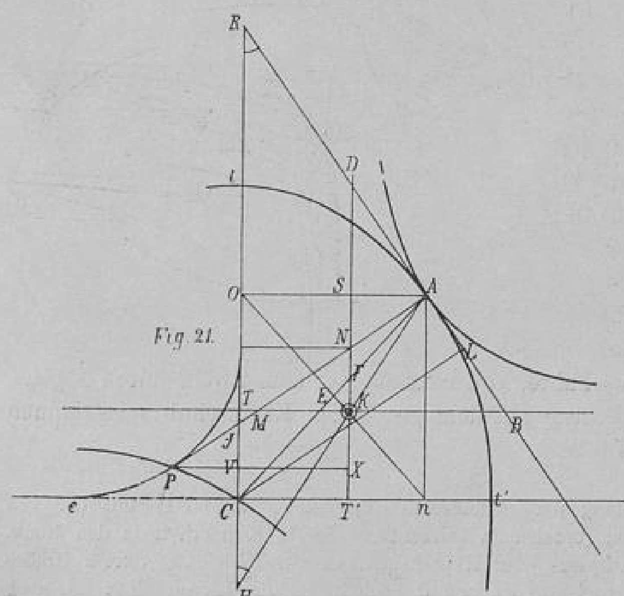


Fig. 21.

1. Ist der vorgelegte Kegelschnitt eine Parabel, so ziehe man in dem gegebenen Punkte A die Tangente AD, schlage aus A mit dem Radius AD einen Kreis, errichte im Schnittpunkte H desselben mit der Achse die Senkrechte, welche die Normale AI des Kurvenpunktes A in M und AD in B schneide, und verlängere AM um die Strecke MP gleich AI. — Grenzfall von (18). Der eine Zweig der gleichseitigen Gegenschnitte berührt die Parabel; man beweist leicht, dass BD in A halbiert wird.

2. Ist der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel, so ziehe man die Tangente AR des Kurvenpunktes A, schlage aus A mit dem Radius AR einen Kreis, welcher die Achse Ct in H treffe, verbinde den Fusspunkt O der Ordinate AO mit dem Halbierungspunkte E des Halbmessers der gegebenen Kurve durch eine Gerade, welche AH in K schneide,

ziehe durch K zu den Achsen die Parallelen, KD, KB, welche der Normalen AI in N, M begegnen, und verlängere AM um die Strecke MP gleich AN. — Grenzfall von (20). Schneidet die von P auf die grosse Achse gefällte Senkrechte PV die Gerade KD in X und trifft KB die grosse Achse in T, so lässt sich nachweisen, dass $CT : TV = a : p = PX : XV$, sowie dass ein Zweig der gleichseitigen Gegenschnitte die gegebene Kurve in A berührt.

Lehrsatz XXIII.

Von einem Punkte p der Verlängerung der in (20) und (22) erhaltenen Minimallinien AP eines Achsenpunktes I (jenseits P) lassen sich, unter den gleichen Voraussetzungen wie vorher, stets zwei Minimallinien an einen Quadranten des Kegelschnittes ziehen.

Zuvörderst ist klar, dass pA selbst eine der von p ausgehenden Minimallinien ist. Das Vorhandensein einer zweiten ergiebt sich durch folgende Betrachtung.*)

Schneidet KD die Ordinate AO in S und das auf AO gefällte Lot PL die Gerade KB in U, so ist PA der Diagonale US des Rechteckes (LK) parallel, während die andere Diagonale LK die Strecke PA in Q halbiert. Das Centrum K der gleichseitigen Gegenschnitte wird somit auch durch die Geraden OE und LQ bestimmt; die erstere wird im Falle der Parabel durch deren Achse ersetzt. Fällt man daher von dem Punkte p der Verlängerung von PA über P das Lot pl auf AO und halbiert pA in q, so ist lq parallel LQ und schneidet die Achse der Parabel im Centrum k der zur Auffindung der von p ausgehenden Minimallinie dienenden Gegenschnitte (18), deren Asymptoten durch die Achse der Parabel und die zu ihr senkrechte Gerade kb dargestellt werden. Diese letztere aber bestimmt auf der Geraden DAB eine Strecke Ab, welche nicht gleich DA, sondern grösser oder kleiner ausfällt, je nachdem p dem Punkt A näher oder ferner liegt als P. Ist nun bd gleich DA, so liegt d mit A auf derselben Hyperbel (II, 14), und bd ist Sekante sowohl der Hyperbel als der Parabel (II, 2). Aus den Gleichungen

$$\frac{\mathrm{Aq}}{\mathrm{ql}} = \frac{\mathrm{mq}}{\mathrm{qk}}, \quad \frac{\mathrm{ql}}{\mathrm{qp}} = \frac{\mathrm{qk}}{\mathrm{qI}}, \quad \mathrm{Aq} = \mathrm{qp} \text{ folgt } \mathrm{mq} = \mathrm{qI}$$

und daher $pm = AI$ und, wenn px senkrecht zur Achse der Parabel, $kx = IO$, d. i. gleich dem halben Parameter. pA und pd sind daher die einzigen Normalen, welche sich von p an den Zweig der Parabel (jenseits der Achse) ziehen lassen (18). Die Beweisführung für den Fall der Ellipse und Hyperbel ist von der vorstehenden sachlich nicht verschieden.

Lehrsatz XXIV.

Der Ort der Punkte P (die Evolute des Kegelschnittes), von welchen nur eine einzige Normale oder Minimallinie an den Kegelschnitt geführt werden kann, nimmt seinen Ursprung innerhalb der Kurve im Punkte E der Achse (der grossen Achse der Ellipse, der begrenzten der Hyperbel), dessen Abstand von dem benachbarten Scheitel gleich dem halben Parameter dieser Achse ist.

Die Evolute der Parabel und der Hyperbel erstreckt sich ins Unendliche, die der Ellipse aber wird von dem Punkte e der kleinen Achse begrenzt, dessen Abstand von dem entfernteren Scheitel derselben gleich dem halben Parameter der kleinen Achse ist.

Die Normalen des Kegelschnittes sind die Tangenten seiner Evolute.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergiebt sich aus den Sätzen 2, 3, 4, 14, 22 dieses Buches. Aus derselben Quelle fliessen die Ausdrücke für die Krümmungsradien in den

*) Die Figuren zu diesem und dem folgenden Satze lassen sich an der Hand der vorangehenden Diagramme mit Leichtigkeit ergänzen.

Scheiteln der Kegelschnitte. Man findet für die Parabel $\varrho = p$ (2), für die Ellipse und die Hyperbel $\varrho_a = p_a = \frac{b^2}{a}$; $\varrho_b = p_b = \frac{a^2}{b}$ (4).

Lehrsatz XXV.

Fällt man von einem Punkte P der Evolute ein Lot PX auf die Achse des Kegelschnittes, so lassen sich von jedem Punkte m der Strecke PX zwei Minimallinien an den gegenüberliegenden Zweig der Kurve (bez. an einen Quadranten derselben) ziehen; dagegen ergeben die Punkte M der Verlängerung von PX über P keine solche Linie.

Da für alle Punkte der Geraden MX, von welchen aus Normalen nach dem jenseits der Achse liegenden Zweige gezogen werden sollen, die Asymptoten der gleichseitigen Gegenschnitte dieselben bleiben (18), so erkennt man, dass für alle Punkte m auf dem Lote PX*) die Potenzen der Hyperbeln oder die dem Asymptotenwinkel eingeschriebenen Rechtecke (IV, 2) kleiner sind als das dem Dreieck BDK (22) eingeschriebene Rechteck (AK); daraus geht hervor (II, 14), dass die zu einem Punkte m gehörige Hyperbel die gegebene Kurve zu beiden Seiten des Punktes A schneidet und somit für jeden Punkt m zwei der verlangten Normalen hervorgehen. Umgekehrt schliesst man aus dem Wachsen der Hyperbelpotenzen, bei Zugrundelegung der Punkte M auf der Verlängerung von PL, dass der Gegenschnitt die vorgelegte Kurve verfehlt und daher in diesem Falle keine Normale möglich ist.

Zusatz 1. Von jedem Punkte der zwischen Evolute und Achse liegenden Fläche lassen sich zwei Normalen an einen Zweig der Parabel oder der Hyperbel oder an den benachbarten Quadranten (jenseits der grossen Achse) legen; von einem Punkte der Evolute selbst geht nur eine Normale aus; von einem Punkte innerhalb der Evolutenfläche ist keine Normale möglich.

Zusatz 2. Durch die Abwickelung der Kurve, auf welcher die Punkte P liegen, werden die Kegelschnitte erzeugt. „Manifestum est has lineas curvas EPP eas esse cujus evolutione sectiones conicae describuntur; omnes enim contingentes has curvas sunt perpendiculares ad contingentes sectiones conicas in ipsarum occursibus."

Zusatz 3. Der Bogen PE der Evolute, welcher zwischen einem beliebigen Punkte P derselben und ihrem Ursprung auf der Achse des Kegelschnittes enthalten ist, ist gleich der Differenz der Normalen PA des letzteren und des halben Parameters. Ein ganzer Bogen der Evolute der Ellipse ist gleich der halben Differenz der Parameter ihrer Achsen.

Aufgabe.

(XXVI.) *In einem gegebenen Punkte P der Evolute eines gegebenen Kegelschnittes die Tangente derselben zu konstruieren.*

I) Der gegebene Punkt P gehöre der Parabelevolute an. Man fälle von P ein Lot PX auf die Achse TX der Parabel, gebe der Strecke XK der Achse TX die Länge des halben Parameters p, teile KT in O so, dass $KO : OT = 2 : 1$, und ziehe die Ordinate OA; PA ist die gesuchte Tangente. Der Beweis gründet sich auf II, 20 und VII, 13, 22, 23, 25. Die Konstruktion kann unmittelbar der Figur entnommen werden, welche zur Aufgabe S. 22 zu entwerfen ist.

Zusatz 1. Die Evolute der Parabel besitzt selbst eine parabelähnliche Gestalt.**) Ihre

*) Apoll. Con. V, 51 (Borelli S. 34) wird dieses Lot die Wage (trutina) genannt.

**) Die Neilsche (oder semikubische) Parabel; sie war die erste Kurve, welche genau rektificiert worden ist (William Neil i. J. 1657). Vgl. Satz 25, Zusatz 3.

Achse steht zur Parabelachse senkrecht. Die Kuben ihrer Ordinaten verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Abscissen; der Kubus einer Ordinate ist gleich dem Produkte des Quadrates der Abscisse und des Parameters der Evolute; der letztere ist $\frac{27}{16}$ des zur Achse gehörigen Parameters TR der gegebenen Parabel.

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen hat man

$$\mathrm{IO} = \mathrm{TE} = \mathrm{p} = \tfrac{1}{2}\mathrm{TR},\ \mathrm{TO} = \tfrac{1}{3}\mathrm{TK} = \tfrac{1}{3}\mathrm{EX},\ \mathrm{IX} = \mathrm{OK} = \tfrac{2}{3}\mathrm{EX},$$

$$\text{und } \frac{\mathrm{IO}^2}{\mathrm{OA}^2} = \frac{\mathrm{IX}^2}{\mathrm{PX}^2} \text{ wird zu } \frac{\mathrm{TE}^2}{\mathrm{TO}\,.\,2\mathrm{TE}} = \frac{\frac{4}{9}\,\mathrm{EX}^2}{\mathrm{PX}^2},$$

$$\text{woraus } \mathrm{EX}^3 = \tfrac{27}{16}\,\mathrm{TR}\,.\,\mathrm{PX}^2 \text{ oder in heutiger Schreibweise } \eta^3 = \tfrac{27}{8}\,\mathrm{p}\,\xi^2.$$

Zusatz 2. Der Scheitel der Parabelevolute teilt die Subtangente eines ihrer Punkte im Verhältnisse von 1 zu 2.

$$\text{Aus } \mathrm{IX} = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{EX} \text{ und } \mathrm{EI} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{EX} \text{ folgt } \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{IX}} = \tfrac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

II) Der gegebene Punkt P gehöre der Evolute einer Ellipse oder einer Hyperbel an. Man fälle von P ein Lot PV auf die Achse Ct, bestimme auf dieser die Punkte T, V so, dass $CT : TV = a : \mathrm{p_a}$ und konstruiere zwischen CT und Ct zwei mittlere Proportionalen; die eine dieser Strecken (im Falle der Ellipse die grössere, in dem der Hyperbel die kleinere) ist gleich der Abscisse CO des gesuchten Ellipsen- oder Hyperbelpunktes A.

Schneidet die Asymptote KD (22) die Ordinate AO in S, so findet man $CT\,.\,TK = AS\,.\,SK$ (IV, 2 und VII, 21), $TK = OS$, $SK = OT = SD$,

$$\frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{OT}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{OS}},\ \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{CO}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AO}} = \frac{\mathrm{TO}}{\mathrm{OR}} \text{ oder } \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{TO}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}},\ \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{CO}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CR}}$$

oder $\mathrm{CO}^2 = \mathrm{CT}\,.\,\mathrm{CR}$ und weil $\mathrm{Ct}^2 = \mathrm{CO}\,.\,\mathrm{CR}$ (III, 8), so ist $CO^3 = CT\,.\,Ct^2$.

So weit De la Hire. In den folgenden Zusätzen findet die Lösung des Problemes ihren Abschluss.

Zusatz 1. Fällt man von A auf die andere Achse CA' das Lot An, und schneidet KD diese Achse in T', so findet man analog $Cn^3 = CT'\,.\,Ct'^2$.

Man setze der besseren Übersicht wegen $\mathrm{Ct} = \mathrm{a}$, $\mathrm{Ct'} = \mathrm{b}$, $\mathrm{CO} = \mathrm{x}$, $\mathrm{CT} = \mathrm{u}$, $\mathrm{AO} = \mathrm{Cn} = \mathrm{y}$, $\mathrm{CT'} = \mathrm{v}$, $\mathrm{CV} = \xi$, $\mathrm{PV} = \eta$; alsdann ergiebt sich $\mathrm{x}^3 = \mathrm{a}^2\mathrm{u}$, $\mathrm{y}^3 = \mathrm{b}^2\mathrm{v}$, $\frac{\mathrm{u}}{\xi} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}-\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{v} : \eta$, $\mathrm{x}^3 = \frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{b}^2}\xi$, $\mathrm{y}^3 = \frac{\mathrm{b}^4}{\mathrm{e}^2}\eta$, und mit Hilfe der Gleichung $\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} \pm \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} = 1$ die der Evolute:

$$\left(\frac{\mathrm{a}\xi}{\mathrm{e}^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{\mathrm{b}\eta}{\mathrm{e}^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Zusatz 2. Der Kubus der Normalen AI (n) einer Parabel ist das Produkt des Krümmungsradius und des Quadrates des Parameters der Achse.

AV sei normal PX; infolge der Gleichungen $\mathrm{AV} = \mathrm{OX} = \mathrm{OH} + \mathrm{HX} = \mathrm{OD} + \mathrm{IO} = \mathrm{ID}$ und der Ähnlichkeit der Dreiecke APV und IAO hat man

$$\mathrm{PA} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IO}}\,\mathrm{AV} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IO}}\cdot\frac{\mathrm{AI}^2}{\mathrm{IO}} = \frac{\mathrm{AI}^3}{\mathrm{IO}^2} \text{ oder } \varrho = \frac{\mathrm{n}^3}{\mathrm{p}^2}.$$

Zusatz 3. Die Bemerkung IX = HO = OD = 2x liefert eine einfache Konstruktion des Krümmungshalbmessers,

Zusatz 4. Das Produkt des Krümmungshalbmessers PA eines Ellipsen- oder Hyperbelpunktes und der Normalen CL seiner Tangente RZ ist das Quadrat des zu dieser konjugierten Durchmessers CW. — Hieraus ergiebt sich eine zweite Konstruktion des Krümmungsradius.

Wird PX von An in Y, von AH in U getroffen, und ist M' der Schnittpunkt der Geraden PA und der zweiten Achse Ct, so erhält man die Gleichungen

$$NS = KX,\ SD = SK,\ \frac{OV}{OT} = \frac{SX}{SK} = \frac{ND}{SD} = \frac{RI}{OR},\ \frac{TO}{OR} = \frac{CT}{CO}\ (26),$$

$RC.CT = CO^2\ (26), \frac{AH}{Ay} = \frac{RI}{AR} = \frac{AZ}{An} = \frac{AZ}{OC}$, also $CO . RI = AR . AZ = CW^2$ (V, 17), und daher, sowie infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke APY und RCL:

$$PA = \frac{RC}{CL} AY = \frac{RC}{CL} . OV = \frac{RC . RI . TO}{CL . OR} = \frac{RC . RI . CT}{CL . CO} = \frac{RI . CO}{CL} = \frac{CW^2}{CL} \text{ oder}$$

$$\varrho = \frac{b_1^{\,2}}{h}.$$

Zusatz 5. Durch Anwendung von (V, 21) erhält man $\varrho = \frac{b_1^{\,3}}{ab}$ oder, weil $CW^2 = AI . AM'$, $PA = \frac{AI . AM'}{CL}$, woraus wiederum eine andere Konstruktion für ϱ folgt.

Ein zweiter Weg zur Berechnung von ϱ geht von der Ähnlichkeit der Dreiecke PIV und AIO aus. Mit Hilfe der Gleichungen

$$IO = \frac{p}{a} CO = \frac{b^2}{a^2} CO = \frac{b^2}{CR},\ \frac{OT}{OR} = \frac{CT}{CO} = \frac{CO}{CR} \text{ und } \frac{PI}{IA} = \frac{IV}{VO}$$

findet man

$$PA = \frac{OV . AI}{IO} = \frac{RI . OT . AI}{OR . IO} = \frac{RI . OT . AI . CR}{OR . Ct'^2} = \frac{RI . CO . AI}{Ct'^2}$$

$$= \frac{CW^2 . AI}{Ct'^2} = \frac{Ct^2}{CL^2} AI \text{ oder } \varrho = \frac{a^2}{h^2} n.$$

Hieraus folgt die Newtonsche Konstruktion des Krümmungshalbmessers (Newton Geom. Anal. Kap. 7 und 8).

Ein dritter Weg nimmt seinen Ausgang von dem Sehnenvierecke $PMUX$. Da

$$\frac{HA}{HU} = \frac{OH}{OV},\ AR^2 = OR . RI,\ \frac{OT}{OR} = \frac{CO}{CR},\ \frac{IR}{RC} = \frac{IA}{CL},$$

so ergiebt sich $PA = \frac{HA . AU}{IA} = \frac{HA^2 . OV}{IA . OH} = \frac{AR^2 . OT . RI}{IA . OR^2} = \frac{CO . RI}{CL} = \frac{CW^2}{CL}$, wie oben.