De la Hire und seine Sectiones conicae.

Was in der Zeiten Bildersaal einmal ist trefflich gewesen,
Wird immer wieder einmal Jemand auffrischen und lesen. Goethe.

In unserer Zeit sind mannigfache mehr oder minder von Erfolg begleitete Versuche gemacht worden, die Geometrie der Neueren mit den Methoden der Alten in organische Verbindung zu setzen. Zu diesem Zwecke suchte man in den Werken der letzteren nach Ausläufern, welche mit den Wegen der Neueren zusammentreffen: Chasles*) zeigte, dass Euklid bereits Eigenschaften der geraden Linie und des Kreises gekannt habe, welche in der neueren Geometrie die Theorie der Transversalen liefert; Zeuthen**) weist nach, dass das Altertum nicht nur im Besitze von Sätzen über projektivische Punktreihen gewesen sei, sondern dass man auch einige solcher Reihen auf die Lehre von den Kegelschnitten angewandt habe; und was die analytische Geometrie betrifft, so stossen wir sowohl bei Archimedes als bei Apollonius auf Koordinatentransformationen und auf die Benutzung der Gleichung einer Kurve zur Bestimmung ihrer Tangente und zur Ableitung neuer Sätze. Zur Verknüpfung der Fäden hat man andrerseits aber auch jene Wendepunkte ins Auge zu fassen, aus denen die neuen Gedankenkreise hervorbrachen: es sind die Zeiten der Desargues, Pascal und Descartes. Das Bemühen, den Blick nicht auf das Neuerrungene zu beschränken, sondern auch die Schöpfungen jener Zeiten wieder zu verdienter Geltung gelangen zu lassen, kommt nach beiden Richtungen hin nicht nur der Wissenschaft und ihrer Geschichte, sondern auch dem Unterrichtsstoffe und seiner methodischen Behandlung, sowie der richtigen Beurteilung und Einordnung neuerer Methoden zu gute. Leider sind aber die Originalschriften von Desargues sämtlich verloren gegangen, und Pascals Werk über die Kegelschnitte ist ebenfalls nicht auf uns gekommen. Dagegen besitzen wir die Schriften eines anderen Mathematikers, welche in der angedeuteten Beziehung für uns besonders wertvoll sind. Wohl gehört er nicht mehr jener Uebergangszeit an, in der man mit dem Alten zu brechen begann, aber er war einer der wenigen, welche nicht nur die neue Methode des Descartes durchaus beherrschte und den Inhalt des *Brouillon projet des Coniques* von Desargues kannte und weiter ausführte, sondern auch die Alten, namentlich Apollonius, auf das gründlichste verstand und ihre Weise treulich weiter pflegte: es ist der Mathematiker und Maler Philippe de la Hire, der Schüler des Desargues. Ein Verzeichnis der Werke, sowie einen kurzen Lebensabriss dieses seltenen Mannes, in welchem die Zeitgenossen nicht nur den scharfsinnigen und erfindungsreichen Geometer bewunderten, sondern anch den gemütvollen Menschen und feinsinnigen Künstler verehrten, findet man im Anhange[1]). Aus seinen Werken sollen hier nur jene Punkte in Kürze betrachtet werden, welche auf den Zusammenhang geometrischer Methoden neues Licht zu werfen im Stande sind. Diese Schriften, deren Inhalt für die „neuere Geometrie“ grundlegend gewesen ist, sind zugleich diejenigen, über welche sich im Laufe der Zeiten die widersprechendsten Urteile gebildet haben; auch sein Hauptwerk, dessen Bearbeitung den wesentlichen Inhalt dieser Seiten liefert, hat sich diesem Schicksale nicht entziehen können.

Dass de la Hire mit der Analysis des Descartes vollständig vertraut war, zeigte er in

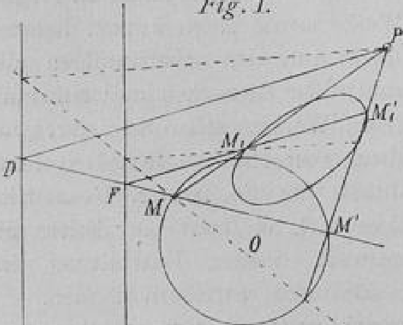
---

*) Ap. hist. p. 9 der Uebers. **) Die Lehre v. d. Kegelschn. im Altertum.

seinem dem Finanzminister Colbert gewidmeten Werke: *Nouveaux élémens des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effection des équations.* (Paris, 1679), worin er das Normalenproblem für sämtliche Kegelschnitte mit Hilfe der geraden Linie und des Kreises löst; selbst einem Huygens war dies nur für den bedeutend einfacheren Fall der Parabel gelungen. In dem ersten Teile (auf 176 S. Duodez) dieses Werkes definiert er die Kegelschnitte als geometrische Örter aller Punkte, welche gleiche Entfernung von einem festen Punkte und einer festen Geraden oder eine konstante Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten besitzen, und leitet auf eigenartigem, aber durchaus elementar-geometrischem Wege eine grosse Anzahl ihrer Eigenschaften ab.

Von grösserer Bedeutung für uns ist eine 1673 erschienene Schrift: *Nouvelle méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques;* in ihr zeigt sich de la Hire als durchaus selbständiger Entdecker, und der Leser glaubt den freudigen Eifer mitzuempfinden, mit welchem er auf noch unentweihten grünen Plan zog und das Dickicht der sich anhäufenden Schwierigkeiten durchbrach. Die Schrift berechtigt uns, sagt Chasles, diesen Mathematiker in die Klasse der Begründer der modernen Geometrie zu setzen. Der erste Teil des Werkes, welcher die Kegelschnitte auf dem Kegel betrachtet, kann als Vorarbeit für sein Hauptwerk, welches er zwölf Jahre später veröffentlichte, angesehen werden; er benutzt hier ähnliche Ausgangspunkte, die seinen Sätzen dieselbe Tragweite verleihen, wie in jenem Werke, aber man sucht vergeblich nach der Einfachheit und Anschaulichkeit der Beweise, die uns in seinem grossen *Traité* überraschen. Dieser Mangel des ersten Teiles ist es wohl auch gewesen, welcher Poncelet in der Einleitung seiner *Propr. proj. des fig.* (p. XXIX) zu einem weniger anerkennenden Urteile Anlass gab. Poncelets Worte können wohl auf R. Simsons *Treatise on Conic sections* Anwendung finden, aber nimmermehr auf de la Hires *Nouvelle méthode.* Hier ist kein Rückschritt zu verzeichnen, vielmehr findet sich hier zum ersten Male ein Gedanke ausgesprochen und durchgeführt, der auf Poncelets eigene Fährte weist, auf jene Lehre von den homologen Figuren, die dieser in den Jahren 1812—14 als russischer Kriegsgefangener in Saratow ersann. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass der grosse Geometer das Originalwerk de la Hires gar nicht zu Rate gezogen, sondern sich mit der Einsicht von Berichten begnügt habe, welche diesen zweiten Teil der Schrift, die „*Planiconiques*", entweder gar nicht oder nur flüchtig berührten. In ihm findet sich die erste allgemeine Methode der Transformation der Figuren in andre derselben Gattung, der unmittelbaren Uebertragung der verschiedenen Eigenschaften einer Kurve auf eine andre in derselben Ebene. Die Kegelschnitte gehen durch eine gewisse Konstruktion aus dem Kreise hervor, ohne dass irgend eine ihrer Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt wird. Der von de la Hire gegebene Nachweis, dass die abgebildeten Punkte einem Kegelschnitte angehören, ist äusserst verwickelt; den natürlichsten Gang des Beweises bieten die Lehren der projektivischen Geometrie. Die Umformung selbst geschieht in folgender Weise: In der Ebene der zu transformierenden Kurve werden zwei feste Gerade (*Formatrix* und *Directrix*) und ein fester Punkt P (der *Pol*) zu Grunde gelegt; führt man nun eine Sekante MM' durch die Kurve,

Fig. 1.



welche die Directrix in D, die Formatrix in F schneide, und zieht DP und FM_1 parallel DP bis zum Durchschnitt M_1 mit PM, so ist M_1 ein Punkt der neuen Kurve, welcher von M gebildet (formé) worden ist. Die Abbildung eines Kreises ist ein Kegelschnitt. Wie de la Hire auf diese Transformation gekommen, lehrt uns am besten der sechste Satz des zweiten Buches seines Hauptwerkes*), der *Sectiones conicae.* Aber auch schon durch die beiden charakteristischen Eigenschaften, welche diese Methode mit der der Centralperspektive gemein hat, lässt sich ihr Ursprung erschliessen: die entsprechenden Geraden MM', $M_1 M'_1$ schneiden sich auf einer und derselben Geraden (auf der Formatrix) und die entsprechenden Punkte M, M_1 liegen auf Geraden, welche sich in einem und demselben Punkte (dem Pole) schneiden. In den *Nouveaux élémens* bezeichnet er diese Methode als *Réduction du Cone et ses Sections en plan* und fügt hinzu: *j'appliquay à ces Sections planes les mesmes démonstrations que j'avois faites pour les solides, et je puis dire que cet Ouvrage eut assez de bon-heur pour mériter l'approbation des plus Sçavans Géomètres.*

Die hohe Bewunderung, welche das Werk anfangs erregte, hatte indes keinen Bestand; trotzdem in ihm der Keim einer neuen Methode lag, fiel es dem Vorurteil und der Vergessenheit anheim, bis es von Chasles nach anderthalb Hundert Jahren wieder ans Licht gezogen wurde. Der Verfasser des *Aperçu historique* schliesst seine Beurteilung de la Hires mit den Worten: Hierüber (über das beinahe spurlose Verschwinden der „Planiconiques" aus dem Gesichtskreise der Mathematiker) würden wir uns wundern müssen, wenn wir nicht wüssten, dass jede Epoche ihre momentanen Fragen hat, und dass die herrlichsten und fruchtbarsten Ideen, um richtig aufgefasst und verarbeitet zu werden, auf die Zeit warten müssen, in welcher der Geist sich dem Gegenstand, auf welchen sie sich gerade beziehen, zugewandt hat. Das Studium der Wissenschaften liefert bei jedem Schritte einen Beleg für diesen Ausspruch**).

Jetzt lockt die unerschöpfliche Fundgrube der projektiven (konstruktiven) Geometrie, „des Königsweges der Mathematik", von allen Seiten emsige Arbeiter an, und auch für den Unterricht werden trotz Steiner noch Mittel ersonnen, die mit besonderer Leichtigkeit und Eleganz in organischer Gliederung zu den Sätzen der Kegelschnitte führen sollen. Eine der sinnreichsten Methoden der Beschreibung dieser Kurven mit Hilfe eines zu Grunde gelegten Kreises ist die der „harmonischen Verwandtschaft" von A. Milinowski***). Aber auch sie und andre neben ihr entpuppen sich bei näherer Betrachtung als Senker des von de la Hire gepflanzten Stammbaumes. Fällt z. B. der Pol P mit dem Centrum des Grundkreises zusammen, so hat man, wenn $\mathrm{PM}=\mathrm{r}$, $\mathrm{PR}=\mathrm{a}$, $\mathrm{RQ}=\mathrm{d}$, $\mathrm{MD}=\mathrm{u}$, $\mathrm{DF}=\mathrm{v}$, $\mathrm{PN}=\mathrm{x}$, $\mathrm{MN}=\mathrm{y}$, $\mathrm{PM}_1=\varrho$, $\sphericalangle \mathrm{RPM}_1=\varphi$ gesetzt wird,

$$\varrho=\frac{\mathrm{rv}}{\mathrm{u}}=\frac{\mathrm{rd}}{\mathrm{a}-\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{rd}}{\mathrm{a}-\mathrm{r}\cos\varphi}.$$

Die Abbildung des Kreises ist daher ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkte P, dem Parameter $\mathrm{p}=\mathrm{rd}:\mathrm{a}$, der numerischen Excentricität $\varepsilon=\mathrm{r}:\mathrm{a}$ und der Achsenrichtung PQ; der Brennpunkt P ist von der Leitlinie des Kegelschnitts um die Strecke d entfernt. Je nachdem ε grösser, gleich oder kleiner als 1 oder r grösser, gleich oder kleiner als a, d. h. je nachdem der Kreis die Directrix D schneidet, berührt oder meidet, erhält man eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse.

---

*) Dieser Hinweis findet sich nicht bei Chasles, obgleich er die Transformation ausführlich bespricht und ihrer Entstehung nachgeht.

**) Ap. hist. p. 126 der Uebers.

***) Die Kegelschnitte, Calvary, S 19 und Geom. d. Kegelschn., Teubner, S. 81.

Für $d=a$ wird $r=p$, und die Methode der Planiconiques von de la Hire geht in die harmonische Verwandtschaft von Milinowski über.[2]) Dass letztere als besonderer Fall der Centralperspektive anzusehen ist, hat Ph. Weinmeister gezeigt.*) Über die Verwandtschaft der Methode von de la Hire mit der später von Le Poivre und Newton angegebenen sehe man Chasles' eingehende Erörterungen (Ap. hist. p. 126 und 133 der Uebers.).

Das dritte und wichtigste Werk de la Hires, welches seinen Namen für immer mit dem eines Desargues und Pascal verbindet, sind seine *Sectiones conicae in novem libros distributae* (fol. Parisiis 1685, apud Steph. Michallet). Es ist zugleich dasjenige Werk, in dessen erstem und zweitem Buche er der altsynthetischen Methode einen Rückhalt schuf gegen die eindämmende Macht der cartesianischen Schöpfung; er zeigte der damaligen Gelehrtenwelt, dass die Bahnen der Alten, von ihren Seitenwegen und mäandrisch verschlungenen Pfaden befreit, nicht zugleich in den alten Grenzen erstarrten, sondern weiterer Entwicklung fähig waren. Und dieser Schritt nach vorwärts, den de la Hire that, gab dem ganzen inneren Aufbau eine Leichtigkeit und durchsichtige Klarheit, in welcher der Gesamtinhalt der Kegelschnitte seither noch nie erschienen war. Das schnellschaffende Princip, welches die einzelnen Gebilde wie die Fialen gotischer Türme organisch hervorwachsen liess, — ein wahres *Okytokion,* wie es Apollonius**) genannt haben würde, — war aber nichts anderes als eine Anwendung der Centralperspective und die gleichzeitige Verwertung der bei dem Processe der Umwandlung sich unverletzt erhaltenden Eigenschaften der Grundgebilde. Wie Desargues und Pascal die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises mit Hilfe der Perspective hervorgehen liessen, so beginnt de la Hire seine Untersuchungen mit der Betrachtung der Eigenschaften des Kreises, welche sich für den Kegel selbst ergeben müssen, und überträgt die gefundene Entdeckung auf die einzelnen Schnitte des Kegels – ein Weg, der ihm, dem Künstler, nahe lag und heute wieder mit Glück betreten und bedeutend verbreitert wird. Diese Art der Behandlung begegnete sich einigermassen mit der Werners von Nürnberg (1525) und der des Maurolicus von Messina (1575), welche ebenfalls die Sätze des Kreises auf die der Kegelschnitte zu übertragen versuchten***). Das in der von de la Hire gegebenen Abbildung des Kreises wieder hervortretende Unveränderliche sind die reciproken harmonischen Eigenschaften des Kreises, welche durch ihn im ersten Buche seines Traité vollständiger ergründet wurden als vorher. Wie weit er bei der Entdeckung der Sätze über *Pol und Polare* schöpferisch thätig gewesen ist, lässt sich jetzt kaum mehr ermitteln, da, wie erwähnt, Originalschriften von Desargues und Pascal nicht existieren. Obgleich wir vermuten dürfen, dass Pascal aus seinem Hexagrammum mysticum die Sätze von den Polardreiecken und Dreiseiten oder den dem Kegelschnitt ein — und umbeschriebenen Vierecken hervorzog, so bleibt doch jedenfalls die Thatsache fest bestehen, dass die Fundamentalsätze der Lehre von den reciproken Polen und Polaren zum ersten Male in den *Sectiones conicae* von de la Hire im Zusammenhange erscheinen und von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus behandelt werden. Den Angelpunkt, auf den sich die Sätze über die harmonischen Eigenschaften des Kreises und somit auch der Kegelschnitte stützen, bildet Satz 21 des ersten Buches, während Satz 6 des zweiten Buches den Einblick in das ganze Gebäude der Transformation eröffnet. Dabei bedient sich de la Hire, wie

*) Zeitschrift für math. und naturw. Unterr., X. Jahrg., S. 428.

**) *ὠκυτόκιον* und nicht *ὠκυτόβοον* ist der Titel der Apollon. Schrift über die Ausmessung des Kreises.

***) Suter, Gesch. d. Math. p. 176. Chasles, Ap. hist. p. 117 der Uebers.

auch Chasles bemerkt, niemals eines Achsendreieckes[3]) des Kegels (mit Ausnahme von Satz II, 5, welcher aber aus dem Kreise der übrigen heraustritt); die Behandlung selbst erstreckt sich auf ganz beliebige ebene Schnitte des schiefen Kreiskegels und gelangt für alle Arten derselben mit vollendetem Gleichmass und ausserordentlicher Anschaulichkeit zu den Fundamentaleigenschaften der Durchmesser und Tangenten. Mit Hilfe der gewonnenen Sätze schlägt er nun die Brücke zu dem Ausgangspunkte des Apollonius (dem Satze vom latus rectum), dem Ersatze der Kegelschnittsgleichung; damit entgingen ihm freilich für die ganze Folge die allgemeinen Lehrsätze von Desargues und Pascal über die Producte der Segmente einer Geraden, welche einen Kegelschnitt und ein ihm eingeschriebenes Viereck schneidet, sowie die Lösung des Problemes *ad tres et quatuor lineas* der Griechen. Während er bis dahin die Reihe der allgemeinen Sätze mit einer den Alten unbekannten Leichtigkeit entwickelt, zwingt ihn die aufgenommene Fessel, wenn auch selten, den kürzeren Weg zu verlassen und dornige Pfade zu betreten, welche indes an Kürze noch immer die der Alten übertreffen und in manchem einst gangbaren Lehrbuche mit Vorliebe eingeschlagen wurden. In dieser Beziehung hat de la Hire namentlich viel Anklang bei englischen Mathematikern gefunden, von Milnes' *Elementa sectionum conicarum* (1702) bis auf die neueste Zeit. Davon sind selbst diejenigen nicht auszuschliessen, welche eine Abart der Transformationsmethode von Boscovich, *Excentric circle* und *Focal projection**), und die damit zusammenhängende *Ratio determinans* des Pappus**), das konstante Abstandsverhältnis $\varepsilon = e:a$, zu Grunde legen.

Im Gegensatz zu den neueren Bearbeitungen treten in dem Hauptwerke de la Hires die Brennpunkte der Kegelschnitte ausserordentlich spät auf (Lib. VIII), während seine *Nouv. élémens* mit ihnen beginnen; er hätte indes unbeschadet des inneren Zusammenhanges den Abschnitt über die Eigenschaften dieser Punkte als viertes oder fünftes Buch seinem Werke einreihen können. Den Übergang zu den Brennpunkten gewinnt er mit Hilfe der „Fusspunktkreise". Auch bei Apollonius werden sie (als *σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς*, puncta ex comparatione facta***) verhältnismässig spät erwähnt (lib. III, prop. 45)[4]). Im achten Buche des grossen Traité de la Hires finden sich zum ersten Male diejenigen Sätze über die Brennpunkte der Kegelschnitte, welche, ebenso wie die entsprechenden Sätze des Kreises, heute schon in den Anfängen der Lehre von den Kegelschnitten für Theorie und Konstruktion fruchtbar gemacht werden: die Sätze über die Gleichheit der Winkel, welche zwei Tangenten mit den Verbindungslinien ihres Schnittpunktes und der Brennpunkte bilden; über die Gleichheit der Winkel, welche die Radien vectoren der Berührungspunkte zweier Tangenten mit dieser Verbindungslinie einschliessen (VIII, 24); über das Produkt der von den Brennpunkten auf eine Tangente des Kegelschnitts gefällten Normalen (VIII, 7); über den geometrischen Ort des Scheitels eines rechten Winkels, welcher einen Kegelschnitt berührt. Prop. 29 giebt von letzterem Satze eine Erweiterung, indem er ihn auf Winkel von beliebig gegebener Grösse ausdehnt: er beschränkt sich indes nur auf die Parabel und löst die Aufgabe *„in gratiam Analystarum via analytica"*. Endlich findet sich in prop. 25 eine elegante Lösung der Aufgabe, einen Kegelschnitt aus einem Brennpunkte und drei Peripheriepunkten zu konstruieren, wobei die Leitlinie der Kurve zum ersten Male als Polare des Brennpunktes auf-

---

*) Sectionum conicarum elementa, Venet. 1757, vergl. Taylor, Anc. and mod. geom. of conics p. LXXVI, Elem. Geom. of conics, p. 12. und Haslam-Edwards, p. 7 u. 95.

**) Coll. lib. VII, prop. 238, Hultsch, p. 1013.

***) Apoll. Con., Verdussen, p. 351.

gefasst erscheint. Während noch **Halley**, der das Problem für astronomische Zwecke behandelte, die Lösung durch die Hyperbel bewirkte, konnte **de la Hire** der seinen das Scholion anfügen: *Ex unica circini crurum apertione praxis huius problematis perfici poterit.* Die von de la Hire gegebene Konstruktion hat **Newton** (princ. I, 4) „methodo haud multum dissimili" nachgebildet. Im dritten Buche finden sich ausser der Ableitung der Apollonischen Ausgangssätze und der Anwendung des Parameters, — welcher hier noch als dritte Proportionale von zwei beliebigen konjugierten Durchmessern auftritt, — eine Reihe Flächensätze, die zum Teil schon Apollonius besitzt und von denen dieser in ausgedehnter Weise Gebrauch macht, freilich nicht zum Vorteile der Beweisführung. Das vierte Buch bringt die Eigenschaften der Asymptoten, „Symptomata Asymptotorum", von Hyperbeln und Gegenschnitten, welche von de la Hire nach dem Vorgange des Apollonius*) noch streng auseinander gehalten werden. Aber auch hier geht er über sein Vorbild hinaus und verallgemeinert die Sätze desselben, indem er die konjugierten Gegenschnitte des Apollonius als besondere Fälle der von ihm zum ersten Male behandelten **Folgeschnitte** (IV, 31) darstellt. Das fünfte Buch enthält eine Angabe von Lehrsätzen und Aufgaben verschiedenen Charakters, darunter Sätze über die gleichseitige Hyperbel, über die gemeinschaftlichen Ordinaten einander schneidender Kegelschnitte, sowie die Berechnung des Inhaltes eines Parabelsegmentes mit Hilfe der zweiten archimedeischen Methode.**) Das sechste Buch handelt von den ähnlichen, den gleichen und asymptotischen Kegelschnitten. Unter letzteren sind ähnliche, ähnlich liegende und koncentrische Kegelschnitte zu verstehen; von ihnen wird gezeigt, dass sie entsprechende Eigenschaften besitzen wie die Asymptoten der Gegenschnitte. Inhalt und Gang des siebenten Buches decken sich im Anfange mit dem fünften Buche der Conica des Apollonius. Seinen Hauptinhalt bildet die Normalenaufgabe, in welcher auch de la Hire das Problem der grössten und kleinsten Strecken, welche von einem Punkte an eine Kurve gezogen werden können, erblickt; jedoch ist seine Behandlung durchsichtiger und von vielem Schwulst befreit; einzelne Teile (namentlich die prop. VII, 18—25) sind übrigens auf anderem Wege durchgeführt. Diesem Stoffe hatte sich de la Hire mit Vorliebe gewidmet; wir begegneten ihm schon in seinen *Nouv. élémens* (s. o. S. 2). Er steht damit nicht allein. In jene Zeit fallen die ersten Arbeiten der andern Geometer, welche das Evolutenproblem in Angriff nahmen: **Vivianis** Versuch, das fünfte Buch des Apollonius wiederherzustellen (1659), dem die Auffindung desselben durch **Borelli** auf dem Fusse folgte, und **Huygens'** Abhandlung *De linearum curvarum evolutione et dimensione* (1673). De la Hire vervollständigt zwar die Apollonische Arbeit, gelangt aber nicht zu einem Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser selbst und stellt nur für den Fall der Parabel die Gleichung der Evolute auf. Da uns jene Ausdrücke und Gleichungen bekannt sind, so lässt sich der von Apollonius begonnene und von de la Hire wieder betretene Weg leicht zum Abschluss bringen, wie es unten (VII, a. E.) durchgeführt erscheint. Ausser dem Normalenproblem finden sich in VII noch 22 Sätze und Aufgaben über grösste und kleinste Strecken und Flächen vor. Es war ursprünglich die Absicht des Verfassers, an dieser Stelle einen Aufsatz über die verschiedene Behandlung des genannten Problemes von Seiten des Apollonius, des de la Hire und der neueren Methoden zu veröffentlichen. Da er aber kurz zuvor noch von dem Zeuthenschen Werke, „die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum," — worin das fünfte Buch

*) Nur Con. I, 15 werden beide Hyperbeläste zusammen als ein Ganzes aufgefasst.

**) Archim. Quadr. d. Par. Prop. 22. Heiberg, S. 337. Nizze, S. 18.

der Conica des Apollonius und namentlich die Art seines Diorismus, eine eingehendere Behandlung erfährt, als es der hier zugemessene Raum gestatten würde, — Kenntnis nehmen konnte, so ist nunmehr der Schwerpunkt auf die ersten Bücher des Traité gelegt worden, durch deren Bearbeitung er zugleich den Fachgenossen und der Schule einen Dienst zu leisten vermeinte. Das neunte Buch enthält fast nur Konstruktionsaufgaben von Kegelschnitten aus gegebenen Elementen, Aufgaben, welche zum grossen Teile schon in die Lehrbücher übergegangen sind. Am Schluss erregt unser Interesse noch ein Anhang über eine Art von Kegelschnitten höherer Ordnung (Appendix de sect. con. omnium generum et aliis curvis), der indes nicht in den Kreis unserer Betrachtung gezogen werden soll. Das Ende bildet eine Zusammenstellung derjenigen Sätze der Conica des Apollonius, welche in den Sectiones conicae erwiesen wurden.

In den folgenden Seiten giebt der Verfasser eine Bearbeitung der wichtigsten Sätze der ersten fünf Bücher und eines Teiles des siebenten Buches (den Inhalt von etwa 120 enggedruckten Folioseiten). Die dem Werke entnommene Auswahl von Lehrsätzen und Aufgaben bilden eine lückenlose Kette, welche das ganze Gebäude der Kegelschnitte mit Ausnahme der Brennpunkte umschliesst. Die Durchführung dieses Planes erschien um so wünschenswerter, als de la Hires grosser Traité nicht leicht zugänglich und eine Übersetzung desselben nicht vorhanden ist. Auf Grund der materiellen Rücksichten, welche eine Programmarbeit ihrem Verfasser auferlegt, haben vom dritten Buche ab nur diejenigen Sätze Aufnahme gefunden, welche ihres Inhaltes oder des Beweisganges wegen eine besondere Hervorhebung verdienen. Aus denselben Gründen ist eine Reihe grösserer kritischer und erläuternder Zusätze in Wegfall gekommen und das Figurenmaterial auf das notwendigste beschränkt worden. Am Stoffe und an der Anordnung desselben ist nichts geändert worden. Die Beweise haben eine knappere Form erhalten, wodurch sie indes an Verständlichkeit nichts eingebüsst haben dürften; im Originale sind sie durchaus in Worten geführt und entbehren der den Formeln eigenen Uebersichtlichkeit. Nur wo de la Hire sich auf allzu breiten Bahnen der Beweisführung bewegt, ist diese umgestaltet worden, doch so, dass der Methode des grossen Geometers keinerlei Zwang angethan wurde. Bei der Fassung der Lehrsätze ist die Bezeichnung von Punkten und Strecken durch Buchstaben fast durchgängig vermieden, dagegen von den modernen Benennungen, der Kürze des Ausdrucks wegen, häufig Gebrauch gemacht worden; zwei beliebig herausgegriffene Beispiele werden das eingeschlagene Verfahren zur Genüge erläutern[5]). Nachdem die schwerfällige äussere Hülle von dem darunter verborgenen Kerne genommen ist, vermag man keinen wesentlichen Unterschied der elementaren Behandlung zwischen heute und damals zu entdecken; ja, nicht wenige dürften überrascht sein, dass sich hier vor ihnen ein Weg aufthut, auf welchem die Lehre von den Kegelschnitten auf Grund rein elementarer Sätze in grösster Allgemeinheit durchgeführt wird. Und wie wir heute mit einem Blicke übersehen, dass die jetzt übliche elementare Ableitung der Eigenschaften reciproker Pole und Polaren am Kreise ihrem Wesen nach wie die des de la Hire durchaus altsynthetischen Gepräges ist und mit ihr logisch verknüpft werden kann; wie wir nachweisen können, dass die Verwendung der Centralperspektive im zweiten Buche der Sectiones conicae sich auf den Unterbau altgriechischer Meister stützt: ebenso wird man, wenn nicht alle Zeichen trügen, früher oder später von einer höheren Warte den organischen Zusammenhang der alten und der sogenannten neueren Geometrie überschauen und die Wahrheit des alten Wortes *ἐν τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσιν ἐστιν ὁδὸς μία* in umfassender Deutung bestätigt finden.

Aus den Sectiones conicae des De la Hire.

Erstes Buch.

Liber lemmaticus: Harmonische Punkte und Strahlen und ihre Beziehungen zum Kreise.

Erster Abschnitt.

Harmonische Punkte.

Erklärung.

Eine Strecke heisst harmonisch geteilt, wenn sie so in drei Teile zerfällt, dass sich die ganze Strecke zu einem äusseren Teile verhält wie der mittlere Teil zu dem andern äusseren, oder wenn das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem mittleren Teile gleich dem Rechtecke aus den äusseren Teilen ist. Konjugierte Punkte.

Aufgabe.

Eine gegebene Strecke harmonisch zu teilen.

De la Hire giebt die übliche Lösung, welche der Bestimmung der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise entspricht.

Lehrsätze.

Ist eine Strecke AC in den Punkten B und D harmonisch geteilt und in m halbiert, so findet man

I. $mC^2 = mB \cdot mD$.

II. $\frac{mD}{mB} = \frac{mC^2}{mB^2} = \frac{mD^2}{mC^2}$.

III. $BD \cdot Bm = BC \cdot BA$.

IV. $DB \cdot Dm = DC \cdot DA$.

V. $BD \cdot Am = DC \cdot BA = DA \cdot BC$.

VI. $\frac{Dm}{BD} = \frac{Cm^2}{BA \cdot BC}$.

VII. $\frac{Dm}{Bm} = \frac{DA^2}{BA^2}$.

Lehrsatz X.

Wenn sich in zwei harmonisch geteilten Strecken drei entsprechende Teilpunkte decken, so fallen auch die vierten aufeinander.

Beweis indirekt.

Zweiter Abschnitt.

Harmonische Strahlen.

Erklärung.

Die durch einen Punkt der Ebene und durch je einen von vier harmonischen Punkten derselben gezogenen Geraden heissen Harmonikalen.*) Harmonisches Strahlenbüschel und konjugierte Gerade. Parallele Gerade, welche durch vier harmonische Punkte gehen, erhalten dieselbe Bezeichnung. Harmonisches Strahlenbündel.

Lehrsatz XI.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene drei Strahlen nach den Endpunkten und dem Mittelpunkte einer Strecke und eine vierte Gerade parallel derselben, so erhält man ein harmonisches Strahlenbüschel.

Die Beweise dieses und der folgenden Lehrsätze sind die jetzt allgemein üblichen.

Lehrsatz XII.

Eine beliebige Gerade wird durch vier parallele Harmonikalen harmonisch geteilt.

Lehrsatz XIII.

Zieht man zu einer harmonisch geteilten Strecke eine Parallele, so erzeugt ein Strahlenbüschel, welches durch die Teilpunkte der ersteren Geraden geht, auf der zweiten ebenfalls vier harmonische Punkte.

Lehrsatz XIV.

Eine zwischen zwei konjugierten harmonischen Strahlen enthaltene Strecke, welche einem dritten Strahle des Büschels parallel läuft, wird von dem vierten halbiert.

Lehrsatz XV.

Eine beliebige Gerade wird von einem harmonischen Strahlenbüschel harmonisch geschnitten.

Lehrsatz XVI.

Sind zwei Harmonikalen eines Büschels recht zu einander, so halbieren sie die Winkel der beiden andern Harmonikalen. — Umkehrungen.

Lehrsatz XVII.

Haben zwei harmonisch geteilte Strecken einen (beiden Teilungen in gleicher Weise) entsprechenden harmonischen Punkt gemein, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden der übrigen einander entsprechenden Punkte beider Strecken in einem und demselben Punkte.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Punkten einer Geraden den vierten harmonischen Punkt ohne Benutzung des Zirkels zu finden.

Lösung mit Hilfe des vollständigen Vierecks. Der Beweis (indirekt) ist auf (18) gegründet.

*) Zuerst von de la Hire gebraucht; „faisceau harmonique“ findet sich bei Brianchon (lignes du sec. ordre V). De la Hire verwendet im Appendix den Namen ordinatio angulorum; Pascal gebraucht den Ausdruck „ordre ou ordonnance de lignes“ (essai pour les coniques, éd. Lahure II, p. 354).

Dritter Abschnitt.

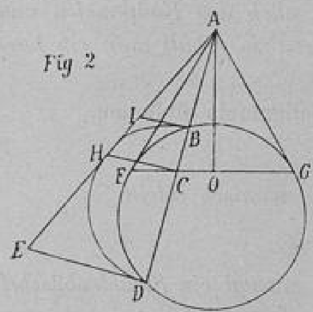
Pol und Polare in Bezug auf den Kreis.

Lehrsatz XXI.

Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises eine Sekante und die beiden Tangenten, so wird erstere durch die Berührungssehne der letzteren, sowie durch den Kreis harmonisch geteilt.[5] *Der Ausgangspunkt der Sekante und der Tangenten heisst der Pol der Berührungssehne, diese die Polare jenes Punktes.**)

Seien AF, AG die Tangenten, FG die Berührungssehne, AD die Sekante, welche vom Kreise in B, D und von FG in C geschnitten werde; schlägt man alsdann über BD als Durchmesser einen Halbkreis, welchen die in C auf AD errichtete Normale in H treffe, zieht AH, fällt AO normal FG und führt durch B, D zu CH Parallelen, welche die Gerade AH in I, E schneiden, so hat man

Fig 2



$$AB.AD = AF^2 = OF^2 + OA^2 = FC.CG + CO^2 + OA^2 =$$
$$FC.CG + AC^2 = BC.CD + AC^2 = CH^2 + AC^2 = AH^2,$$

und AH ist Tangente des Halbkreises im Punkte H. Die Behauptung ergiebt sich aus der Gleichheit der Verhältnisse:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{HE}{HI} = \frac{DE}{BI} = \frac{AD}{AB}.$$

Lehrsatz XXII.

Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwei Sekanten, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der übrigen Schnittpunkte (der Sekante und des Kreises) auf der Berührungssekante der von jenem Punkte an den Kreis gelegten Tangenten.

Sind ABE, AOL die Sekanten, C, I ihre Schnittpunkte mit der Berührungssehne FG der Tangenten AF, AG, und D und R die Schnittpunkte von BO, EL und EO, BL, so sind A, C, B, E und A, I, O, L harmonische Punkte (21), und BO, CI, EL schneiden sich in einem Punkte D (18) oder sind einander parallel. Ebenso wird bewiesen, dass sich EO, BL, IC in einem Punkte R der Berührungssehne FG treffen müssen.

Lehrsatz XXIII.

Schneidet die Sekante AR (22) den Kreis in den Punkten N, H, die Sehnen BO, EL in P, Q, so sind DN, DH Tangenten des Kreises.

Da A, C, B, E harmonische Punkte, so ist $R(ACBE)$ ein harmonisches Strahlenbündel, welches in D, P, O, B und D, Q, L, E wiederum harmonische Punkte erzeugt, und P, Q liegen auf der Berührungssehne der von D an den Kreis gelegten Tangenten (21). — Umkehrungen.

*) De la Hire kennzeichnet beide Gebilde nur als harmonische Örter, ohne sie mit bestimmten Namen zu belegen. Die Bezeichnung (harmonischer, reciproker) „Pôle" hat zuerst Servois (Gergonne, Ann. des Math. I. p. 337) angewandt, der Name (harmonische, reciproke) „Polaire" rührt von Gergonne her (Ann. III, p. 297). Möbius (Kreisverwandtschaft) sagt dafür „Kollineationspunkt und Kollineationsachse der Gebilde eines Kreises". Zeuthen vermutet, dass Eratosthenes' „Ort für die harmonische Mittelgrösse" und „Polare" ein und dasselbe bedeutet. Der Satz 21 findet sich bei Apollonius, Con. III, 37 (Verdussen, S. 338, Balsam, S. 122) und Top. I; in den Con. wird der Beweis durch „Flächensätze" geführt (I, 34, 36—39, 48 und III, 2).

Lehrsatz XXV.

Teilt man einen Durchmesser harmonisch (so, dass seine Endpunkte konjugiert sind), errichtet in dem ausserhalb des Kreises liegenden Punkte A auf ihm eine Normale und zieht durch den konjugierten Punkt O eine Sekante, so wird dieselbe von der Normalen und dem Kreise harmonisch geteilt.

Ist MN der in A, O harmonisch geteilte Durchmesser, so liegt O auf der Berührungssehne FG der von A an den Kreis gelegten Tangenten; trifft die durch O gelegte Sekante LT die in A auf AN errichtete Normale in V, so geht FG durch O (21) und ist parallel AV; die Gerade AL wird vom Kreise und der Berührungssehne FG in Q, R harmonisch geteilt (21), $O(LQRA)$ ist ein harmonisches Strahlenbüschel, und die durch Q zu OR parallele von OL, OQ begrenzte Strecke PQ wird von OA in S halbiert. Da aber PQ normal zu AO, so fällt P mit T zusammen, A (L T O V) ist ein harmonisches Strahlenbüschel (11) und L, T, O, V sind harmonische Punkte.

Zusatz. Durchläuft ein Punkt eine gerade Linie, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol der Geraden.

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol eine gerade Linie, die Polare des Punktes.

Lehrsatz XXVI.

Konstruiert man von beliebigen Punkten einer den Kreis verfehlenden Geraden Tangentenpaare, so schneiden sich die Berührungssehnen derselben in einem und demselben Punkte, dem Pole jener Geraden.

Der zu der Geraden VB senkrechte Durchmesser MN wird durch sie in A und von der Berührungssehne FG der von A ausgehenden Tangenten in O harmonisch geteilt (21); ebenso wird die Sekante VO vom Kreise in K, L harmonisch geteilt (25), und die Berührungssehne DE der von V an den Kreis gelegten Tangenten geht durch den Punkt O (21).

Lehrsatz XXVII.

Die Schnittpunkte der Tangentenpaare, deren Berührungssehnen sich in einem und demselben Punkte innerhalb des Kreises schneiden, liegen auf einer Geraden, der Polaren jenes Punktes.

Fig. zu 26. Zieht man durch den Punkt O innerhalb des Kreises den Durchmesser MN, errichtet auf ihm die Normale Av und zieht durch den Schnittpunkt V der Tangenten VD, VE eine Sekante VO, welche den Kreis in K, L und die Gerade Av in v schneidet, so sind V, O, K, L (21), sowie v, O, K, L (25) harmonische Punkte, und die Punkte v, V decken einander (10).

Konstruktion des Poles, wenn die Polare ausserhalb, und der Polare, wenn der Pol innerhalb des Kreises liegt.

Lehrsatz XXVIII.

Legt man von den Punkten einer Sekante Tangentenpaare an den Kreis, so schneiden sich ihre Berührungssehnen in einem und demselben Punkte, dem Pole der Sekante.

Der Beweis ist aus (23) oder (27) zu entnehmen.

Lehrsatz XXIX.

Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises Sekanten durch denselben und konstruiert die zu den entstandenen Sehnen gehörigen Tangentenpaare, so liegen die Schnittpunkte derselben auf einer und derselben Geraden, der Polaren jenes Punktes.

Konstruktion des Poles, wenn die Polare innerhalb, und der Polare, wenn der Pol ausserhalb des Kreises liegt. — Zusatz wie zu (25).

Lehrsatz XXX.

Legt man von einem Punkte der Berührungssekante eines Tangentenpaares ein zweites Tangentenpaar an den Kreis, so wird jede Tangente in ihrem Berührungspunkte und den Schnittpunkten der andern Tangenten harmonisch geteilt.

Die Berührungssehne HI des zweiten Tangentenpaares BH, BI geht durch den Schnittpunkt A des ersten (28) und wird von dessen Berührungssehne FG im vierten harmonischen Punkte O getroffen; ebenso wird FG in B, O harmonisch geteilt und $A(BOFG)$, sowie $B(AOHI)$ sind Harmonikalen, woraus sich die Behauptung mit Hilfe von (15) ergiebt.

Zusatz. Zieht man von einem Punkte einer Sekante die Tangenten an den Kreis, so geht die vierte Harmonikale zu diesen drei Strahlen durch den Pol der Sekante.

Lehrsatz XXXI.

Zieht man durch den Pol A einer Geraden FG eine Sekante, welche vom Kreise in P, Q, von FG in R und den von einem Punkte B der Geraden FG an den Kreis gelegten Tangenten BH, BI in N, M getroffen wird, so wird diese Sekante sowohl in A, R, P, Q als in A, R, N, M harmonisch geteilt.

Folgt aus 30.

Zweites Buch.

Uebertragung der harmonischen Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte mit Hilfe des Kegels.

Erklärungen.

I.

Führt man durch einen festen Punkt ausserhalb der Ebene eines Kreises eine Gerade längs der Peripherie desselben hin, so entstehen durch die Bewegung der Geraden zwei Kegelflächen (superficies conicae).

II.

Der beiden Flächen gemeinsame Punkt heisst Scheitel; in Bezug auf diesen heissen die Flächen Gegenflächen.

III.

Der zu Grunde gelegte Kreis wird die Basis genannt. Der von ihr und einer Kegelfläche eingeschlossene Raum heisst Kegel.

IV.

Die durch den Scheitel und das Centrum des Grundkreises bestimmte Gerade heisst die Achse des Kegels.

V.

Steht die Achse senkrecht zur Basis, so heisst der Kegel gerad (rectus), sonst schief (scalenus).

Zusatz. Aus der Entstehung der Kegelflächen geht hervor, dass eine Gerade, welche durch den Scheitel und einen beliebigen Punkt der Kegelflächen geht, auf letzteren beiden selbst liegt.

VI.

Eine beliebige Ebene, welche die Kegelfläche oder beide Gegenflächen ausserhalb des Scheitels schneidet, wird Schnittebene genannt.

VII.

Die durch den Scheitel parallel zur Schnittebene gelegte Ebene heisst Scheitelebene.*)

VIII.

Die Schnittebene erzeugt auf der Kegelfläche den Kegelschnitt.

IX.

Die Kante, in welcher die Scheitelebene die Ebene der Basis schneidet, heisst Richtlinie (directrix).

X.

Eine durch den Scheitel gehende Gerade der Scheitelebene wird Scheitellinie genannt.

XI.

Schneidet eine vom Scheitel nach einem Punkte der Basisebene geführte Gerade die Ebene des Kegelschnittes, so sagt man, der in letzterer erhaltene Punkt sei von dem Punkte der Basisebene gebildet oder erzeugt (formatum vel generatum).

XII.

Schneidet eine Ebene, welche durch den Scheitel und eine Gerade der Basisebene bestimmt wird, die Ebene des Kegelschnittes, so sagt man, die in letzterer erhaltene Gerade sei von der Geraden der Basisebene gebildet oder erzeugt.

Zusatz. Man erkennt, dass eine Gerade der Basisebene in der Schnittebene keine krumme Linie und eine krumme Linie der Basisebene keine Gerade in der Schnittebene zu erzeugen vermag. Da die Punkte des Kegelschnittes durch die des Kreisumfanges abgebildet werden, so ist der Kegelschnitt eine krumme Linie. Jeder Punkt der Basisebene, mit Ausnahme derer, die zugleich der Richtlinie angehören, kann einen Punkt der Schnittebene hervorbringen; ein und derselbe Punkt der Basisebene kann nur einen einzigen Punkt der Schnittebene erzeugen; eine Gerade kann den Kegelschnitt nur in zwei Punkten schneiden.

XIII.

Wenn die Scheitelebene die Kegelfläche, oder, was dasselbe ist, wenn die Richtlinie den Grundkreis berührt, so wird der Kegelschnitt Parabel genannt.

XIV.

Wenn die Scheitelebene die Kegelfläche in zwei Geraden trifft oder, was dasselbe ist, wenn die Richtlinie den Grundkreis schneidet, so wird der Kegelschnitt Hyperbel genannt. Die Scheitelebene, welche die eine Kegelfläche in zwei Geraden schneidet, trifft die andere Kegelfläche in denselben Geraden; daher begegnet auch die Schnittebene beiden Gegenflächen, und es entstehen zwei Schnitte, welche einzeln Hyperbeln, vereint aber Gegenschnitte heissen (sectiones oppositae, τομαὶ ἀντικείμεναι).

*) Auf diese Vertikalebene ist de la Hire wahrscheinlich durch die von Apollonius verwandte Hilfslinie geführt worden, welche letzterer durch den Scheitel des Kegels parallel zu dessen Achse legt (Con. I, 12 u. 13.).

XV.

Wenn die Scheitelebene die Kegelfläche in keinem Punkte ausser im Scheitel trifft oder was dasselbe ist, wenn die Richtlinie den Grundkreis verfehlt, so wird der Schnitt Ellipse genannt. In besonderen Fällen wird der Schnitt ein Kreis sein, welcher Wechselschnitt heisst (sectio subcontraria, τομὴ ὑπεναντία).

XVI.

Die Geraden der Hyperbelebene, welche von den Tangenten des Grundkreises in den Schnittpunkten desselben mit der Richtlinie erzeugt werden, heissen Asymptoten.

Lehnsatz.

Ist auf einer Ebene ein Punkt und auf einer parallelen Ebene ein Strahlenbündel gegeben und durch jenen Punkt und jeden Strahl eine Ebene gelegt, so schneiden sich diese Ebenen in einer gemeinsamen Geraden, welche in der ersten Ebene liegt.

Zusatz. Ein Ebenenbüschel schneidet eine Ebene, welche seiner Achse parallel ist, in einem Strahlenbündel.

Lehrsatz I.

Parabel und Hyperbel sind keine geschlossenen Linien und können ins Unendliche verlängert werden.

Die Punkte, in welchen die Richtlinie den Grundkreis berührt oder schneidet, erzeugen (im Endlichen) keine Punkte der Kegelschnitte.

Lehrsatz II.

Einer Tangente (Sekante) des Grundkreises entspricht eine Tangente (Sekante) des Kegelschnittes.

Man lege durch den Scheitel und die Tangente des Grundkreises die Tangentialebene des Kegels.

Die Berührungspunkte gehören derselben Kegelkante an.

Zusatz. Zu einem Punkte eines Kegelschnittes gehört nur eine Tangente. Ein Kegelschnitt wird von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten.

Lehrsatz V.

Führt man senkrecht zum Hauptschnitte des Kegels (zu demjenigen Achsenschnitte, welcher die Höhe des Kegels enthält) eine Ebene, so dass ihre Schnittlinie mit den Kanten des Hauptschnittes (mit der grössten und kleinsten Kante) gleiche aber verschiedenseitig (subcontrarie) liegende Winkel bildet, so ist der entstehende Kegelschnitt ein Kreis, welcher Wechselschnitt genannt wird.

Der von de la Hire gegebene Beweis ist der des Apollonius, Lib. I, 5. Vgl. Hamilton, sect. con. I, 9, Gretschel, Organische Geom. S. 285 u. a.

Bemerkung. Im folgenden werden weder die durch den Scheitel noch die parallel zur Basis geführten ebenen Schnitte zu den Kegelschnitten gezählt; die Sätze, welche von den Ellipsen gelten, sollen auch auf die Wechselschnitte übertragen werden, da der Kreis als eine Grenze der Ellipse aufgefasst werden kann. „Sed ob frequentem subcontrariae sectionis usum, praesertim in Astrolabiis, ipsius ortum in cono indicare et demonstrare hic perutile et necessarium esse duximus.“

Vorbemerkung, die Erzeugung gewisser Geraden betreffend.

Jede harmonisch geteilte Strecke der Basisebene erzeugt in der Schnittebene ebenfalls eine harmonisch geteilte Gerade (Satz 11 bis 15 im I. Buche).

Einem Strahlenbüschel in der Basisebene, dessen Centrum auf der Richtlinie liegt, entspricht in der Schnittebene ein Strahlenbündel (Lehnsatz).

Ein Winkel in der Basisebene erzeugt in der Schnitt- und in der Scheitelebene neue Winkel, welche einander gleich sind. Grenzfall, in welchem der eine Schenkel der Richtlinie parallel läuft.

Lehrsatz VI.

In jedem Kegelschnitte, in Gegenschnitten und zwischen solchen werden alle unter einander parallelen und von den Schnitten beiderseits begrenzten Strecken von einer Geraden halbiert, welche der Durchmesser des Schnittes und der parallelen Strecken genannt wird; die letzteren heissen Ordinaten dieses Durchmessers (ordinatim applicatae vel ordinatae utrobique ad hanc diametrum).

Die Geraden der Basisebene, welche die Durchmesser hervorbringen, werden Diametralen genannt.

Legt man durch je eine der parallelen Sehnen LN und durch den Scheitel A des Kegels Ebenen, so schneiden sich dieselben in einer Geraden AC der Scheitelebene (Lehnsatz S. 14) und treffen den Grundkreis in den Punkten l, n, welche die Punkte L, N erzeugen. Ist ferner C der Schnittpunkt der Scheitellinie AC und der Richtlinie BC, und zieht man von C die Geraden Cln, sowie die Tangenten Cm und Ch an den Grundkreis und die Berührungssehne mh, welche Cln in p und BC in B schneidet, so sind C, p, l, n harmonische Punkte, und A(Cpln) ist ein harmonisches Strahlenbüschel. Da LN der Harmonikalen AC parallel ist, so wird sie

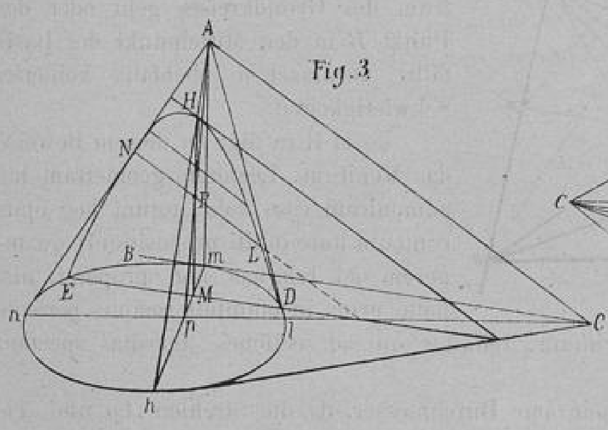


Fig. 3

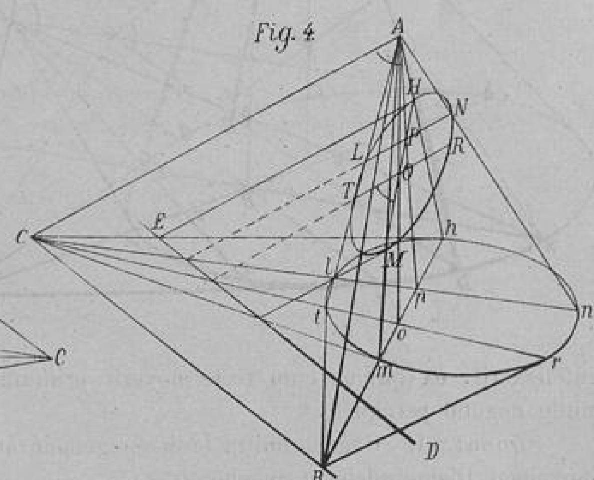


Fig. 4

von Ap im Punkte P halbiert, und weil die Punkte p nach I, 21 in der Sehne mh liegen, so sind alle Geraden Ap in der Ebene Ahm enthalten, welche sonach den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller zu einer gegebenen Richtung parallelen Kegelsehnen, eine Diametralebene,*) darstellt. Diese letztere schneidet den Kegelschnitt in einer Geraden MH, auf welcher die Mitten P der Sehnen LN liegen.

Die Sehnen $L'N$ zwischen Gegenschnitten werden von Sehnen des Grundkreises $l'n$ hervorgebracht, deren Endpunkte auf verschiedenen Seiten der Richtlinie liegen und welche die letztere innerhalb des Kreises in einem Punkte B schneiden. Zieht man in den Schnittpunkten g, t der Richtlinie CB und des Kreises die Tangenten, so erhält man den Pol o von CB, und die in den Schnittpunkten m, h der Sekante oB gezogenen Tangenten treffen einander auf der Richtlinie im Punkte C (I, 27). Schneidet endlich $l'n$ die Gerade Co (die Polare von B) im Punkte p_1, so sind p_1, B, l', n harmonische Punkte und $A(p_1 B l' n)$ ist ein harmonisches Strahlenbüschel. Da $L'N$ dem Strahle AB parallel läuft, so wird sie von Ap_1 in T halbiert, und weil die Punkte p_1 sämtlich auf Co liegen, so ist hier ACo die Diametralebene und TO der Träger der Sehnenmitten T.

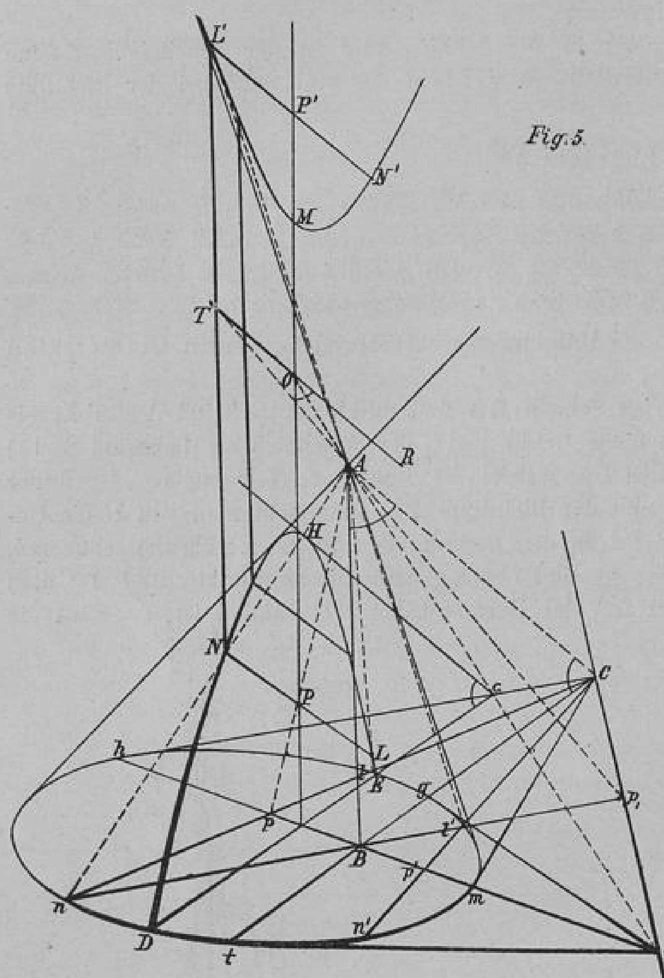


Fig. 5.

Die besonderen Fälle, in denen die Scheitellinie der Richtlinie parallel läuft oder die letztere durch das Centrum des Grundkreises geht oder der Punkt B in den Mittelpunkt der Basis fällt, verursachen ebenfalls keinerlei Schwierigkeiten.

De la Hire fügt zu diesem Beweise das Monitum: Lectorem geometram hic admonitum esse volo, totum hoc opus conicum huic inniti propositioni; quamobrem ad reliquas non properet nisi hanc prius in omnibus casibus perfecte intellexerit, ex quibus cum recte noverit primum, reliquos qui ad sectiones oppositas spectant nullo negotio percipiet.

Zusatz I. Gegenschnitte besitzen gemeinsame Durchmesser, da die Strahlen Ap und Ap' derselben Diametralebene angehören.

Zusatz II. Die Durchmesser, welche die parallelen Sehnen (Ordinaten) zwischen Gegen-

*) Nach dem Vorgange von C. Neumann, welcher diese Bezeichnung für den geom. Ort der Halbierungspunkte einer Sehnenschar in seinen Vorlesungen verwandte.

schnitten halbîeren, sind nicht begrenzt, da sie von Diametralen Co gebildet werden, welche den Grundkreis nicht schneiden.

Zusatz III. Die Diametralen sind zugleich Polaren der Punkte der Richtlinie.

Lehrsatz VII.

Die Gerade, welche durch den Endpunkt eines Durchmessers parallel einer Ordinate gezogen wird, berührt den Kegelschnitt in dem Endpunkte des Durchmessers.

Die durch den Endpunkt H des Durchmessers MH parallel der Sehne LN gezogene Gerade Hc wird durch die Tangente hC des Grundkreises gebildet.

Lehrsatz VIII.

Die Durchmesser der Parabel sind einander parallel.

Nach VI, Zusatz III ist der Berührungspunkt m der Richtlinie und des Grundkreises allen Diametralen gemeinsam; nach dem Lehnsatze wird aber ein Strahlenbüschel, dessen Centrum auf der Richtlinie liegt, in der Schnittebene zu einem Strahlenbündel umgewandelt.

Zusatz. Ein Durchmesser der Parabel ist nur in einem Endpunkte begrenzt, da der Punkt m keinen Punkt der Schnittebene (im Endlichen) hervorbringt.

Lehrsatz IX.

Die Durchmesser der Ellipse, sowie die der Hyperbel und der Gegenschnitte schneiden sich in einem und demselben Punkte, welcher das Centrum des Kegelschnittes genannt wird.

Da alle Diametralen durch einen festen Punkt o, den Pol der Richtlinie, hindurchgehen, so haben auch die durch sie gebildeten Durchmesser des Schnittes den entsprechenden Punkt O der Schnittebene gemeinsam B, o, m, h sind harmonische Punkte, und A (B o m h) ist ein harmonisches Strahlenbüschel, welches durch MOH (parallel AB) geschnitten wird; daher ist O die Mitte des Durchmessers MH.

Enthält die Richtlinie das Centrum des Grundkreises, so werden die Diametralen mh von der Richtlinie halbiert, und die durch mh und A bestimmten Ebenen haben die zur Basis parallele Gerade AO gemeinsam

Zusatz I. Das Centrum der Ellipse liegt innerhalb, das der Hyperbeln und der Gegenschnitte ausserhalb des Schnittes.

Zusatz II. Alle durch das Centrum gehenden Geraden sind Durchmesser; auszunehmen sind nur diejenigen Geraden, welche (im Falle der Hyperbel und der Gegenschnitte) von den Tangenten des Grundkreises in den Schnittpunkten desselben mit der Richtlinie gebildet werden, d. h. die Asymptoten. Die Punkte B und C fallen alsdann mit g (oder t) zusammen, und die parallelen Geraden, welche von den durch g gezogenen Sekanten des Grundkreises gebildet werden, begegnen den Gegenschnitten nur in einem Punkte, da g keinen Punkt des Schnittes (im Endlichen) hervorbringt.

Lehrsatz X.

Die Ordinaten eines Durchmessers, welcher den Ordinaten eines andern Durchmessers parallel läuft, sind diesem letzteren parallel. Konjugierte Durchmesser.

Eine Diametrale $Bomh$ bildet im Kegelschnitte einen Durchmesser MOH, dessen Ordinaten

LPN von den Geraden $Clpn$ erzeugt werden, welche durch den Punkt C der Richtlinie gehen. Unter ihnen befindet sich auch eine Diametrale Cor, welche im Kegelschnitte dem Durchmesser TOR entspricht, dessen Ordinaten aus dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel B auf der Richtlinie hervorgehen.

Zusatz I. Von zwei konjugierten Durchmessern zwischen Gegenschnitten ist nur einer begrenzt.

Zusatz II. Der in der Scheitelebene von den Geraden AC und AB gebildete Winkel ist gleich dem Winkel der konjugierten Durchmesser, deren Diametralen durch die Punkte B und C der Richtlinie gehen. Die Ebenen ABo und ACo sind konjugierte Diametralebenen.

Lehrsatz XI.

Wenn eine Sehne (nicht Durchmesser) eines Kegelschnittes oder zwischen Gegenschnitten von einem Durchmesser halbiert wird, so ist sie zugleich Ordinate desselben.

Lehrsatz XII.

Die Hyperbeln, aus denen sich die Gegenschnitte zusammensetzen, sind kongruent.

Infolge von Zusatz I des Lehrsatzes 6 ist ein Durchmesser $PHOMP'$ beiden Gegenschnitten gemeinsam; seine Ordinaten bilden gleiche Winkel mit ihm, und die dem Durchmesser HM parallele Gerade NTL wird von dem konjugierten Durchmesser ROT in T halbiert. Da ROT parallel den Ordinaten LN, so ist sowohl LP gleich PN als OP' gleich OP, sowie OM gleich OH (Satz 9); folglich u. s. w.

Lehrsatz XIII.

Die Asymptoten kreuzen sich im Centrum der Hyperbeln, ohne diese selbst zu schneiden. Die Strecke, welche die Asymptoten auf einer Tangente der Hyperbel abgrenzen, wird im Berührungspunkte halbiert.

Die Tangenten go, to in den Schnittpunkten des Grundkreises mit der Richtlinie schneiden sich im Pole o derselben, und diesem entspricht der Mittelpunkt des Schnittes; also schneiden sich auch die Bilder der Tangenten go und to im Centrum und können, weil Ag und At der Schnittlinie parallel laufen, dem Kegelschnitte (im Endlichen) nicht begegnen.

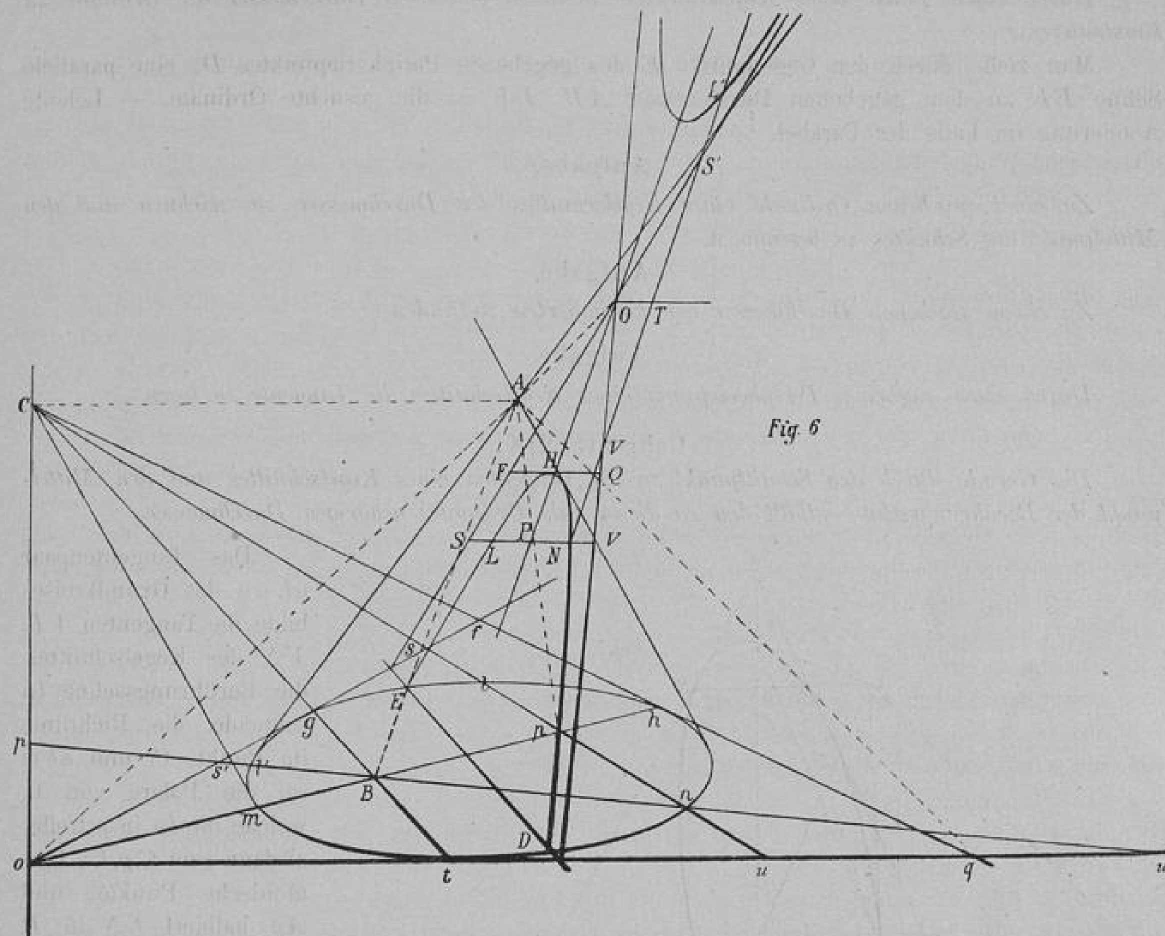
Ist FHQ das Bild der Tangente fhq des Grundkreises (H der Berührungspunkt, F und Q die Schnittpunkte der Asymptoten), und schneidet fq die Richtlinie in C, so sind C, h, f, q harmonische Punkte (Satz 1, 30) und AC, Ah, Af, Aq harmonische Strahlen der Ebene ACq. Da nun FQ der Harmonikalen AC parallel ist, so wird sie von dem zugehörigen Strahle Ah in H halbiert.

Zusatz I. Wenn eine Gerade der Hyperbel in einem Punkte begegnet, welcher zugleich die von den Asymptoten begrenzte Strecke halbiert, so berührt sie die Kurve in jenem Punkte.

Zusatz II. Die Durchmesser, welche innerhalb des Asymptotenwinkels liegen, sind begrenzt.

Zusatz III. Eine beliebige Gerade wird von den Asymptoten und zwei konjugierten Durchmessern harmonisch geteilt.

Sind A, G, M, I der Reihe nach die Schnittpunkte der Geraden mit den Asymptoten und den konjugierten Durchmessern, ist ferner FHQ die Tangente im Endpunkte H des einen (begrenzten) Durchmessers OH, so ist FQ sowohl den Ordinaten desselben als auch dem Durchmesser OM



parallel. Da H zugleich der Halbierungspunkt der FQ, so ist $O(MIAG)$ ein harmonisches Strahlenbüschel.

Lehrsatz XIV.

Schneidet eine Gerade die Hyperbel (oder Gegenschnitte) und ihre Asymptoten, so sind die Strecken, welche je durch eine Asymptote und einen Hyperbelpunkt begrenzt werden, paarweise gleich.

Entsprechen den Punkten S, L, P, N, V der Sekante der Hyperbel (oder der Gegenschnitte) und ihrer Asymptoten die Punkte s, l, p, n, u der Basisebene und schneidet die Gerade su die Richtlinie in C, so wird Cu sowohl in C, p, l, n als in C, p, s, u harmonisch geteilt (Satz I, 31), und A(Cpln) und A(Cpsu) sind harmonische Strahlenbüschel. SV(LN) ist der gemeinsamen Harmonikalen CA parallel und wird daher von dem zugehörigen Strahl halbiert.

Zusatz. Sind umgekehrt auf der zwischen den Asymptoten enthaltenen Strecke SV die Abschnitte SL und NV einander gleich und N ein Hyperbelpunkt, so ist auch L ein solcher.

XV—XVIII.

Aufgabe.

Durch einen Punkt eines Kegelschnittes zu einem gegebenen Durchmesser die Ordinate zu konstruieren.

Man ziehe durch den Gegenpunkt E des gegebenen Peripheriepunktes D, eine parallele Sehne EF zu dem gegebenen Durchmesser AB; DF ist die gesuchte Ordinate. — Leichte Aenderung im Falle der Parabel.

Aufgabe.

Zu einer gegebenen Ordinate eines Kegelschnittes den Durchmesser zu zeichnen und den Mittelpunkt des Schnittes zu bestimmen.

Aufgabe.

Zu einem gegebenen Durchmesser den konjugierten zu finden.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Peripheriepunkt eines Kegelschnittes die Tangente zu legen.

Lehrsatz XIX.

Die Gerade durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnittes und den Mittelpunkt der Berührungssehne enthält den zu dieser (als Ordinate) gehörigen Durchmesser.

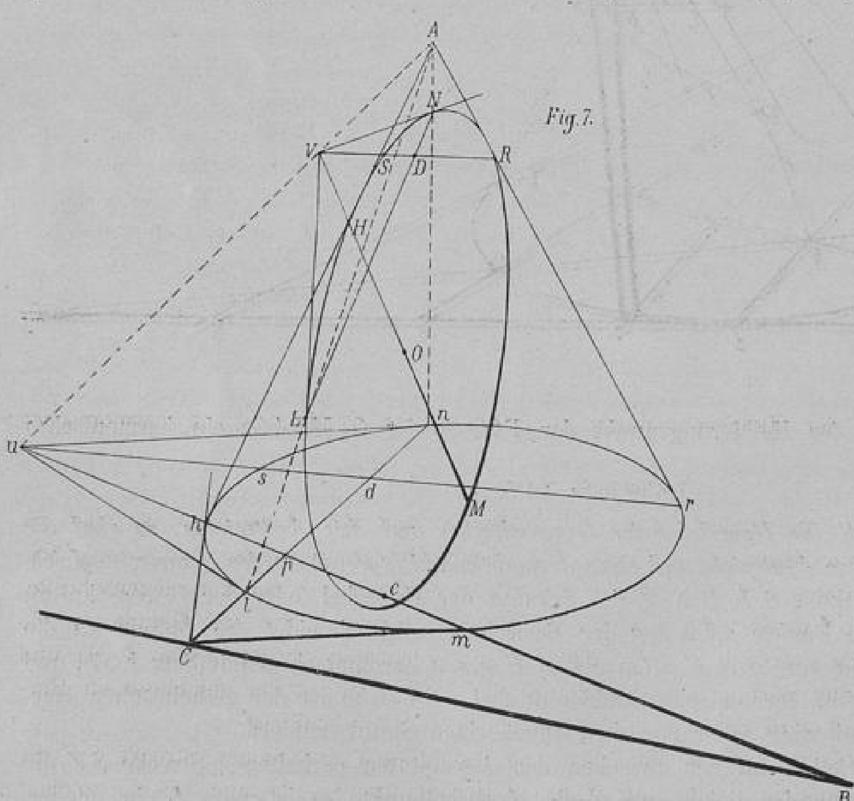


Fig. 7.

Das Tangentenpaar ul, un des Grundkreises bilde die Tangenten VL, VN des Kegelschnittes, die Berührungssehne ln schneide die Richtlinie im Punkte C, und uhm sei die Polare von C, welche die ln in p treffe; alsdann sind C, p, l, n harmonische Punkte, und Ap halbiert LN in P, weil LN parallel AC. Da uhm den Pol o der Richtlinie enthält, weil C auf dieser liegt, so ist sie eine Diametrale, und ihr Bild VHM muss durch den Mittelpunkt O des Kegelschnittes gehen. Im Falle des Parabel ist jeder Durchmesser der Am parallel.

Lehrsatz XX.

Zieht man an eine Parabel eine Tangente und konstruiert zu einem Durchmesser die Ordinate des Berührungspunktes, so halbiert die Kurve die durch Ordinate und Tangente begrenzte Strecke des Durchmessers.

Die Strahlen Au, Ap, Ah, Am sind harmonisch und VP parallel Am; folglich u. s. w.

Lehrsatz XXI.

Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnittes eine Sekante desselben, so wird dieselbe durch die Berührungssehne harmonisch geteilt.

Der Satz wurde im I. Buche, Satz 21 für den (Grund-)Kreis bewiesen und kann unmittelbar auf den Kegelschnitt (durch Centralprojektion) übertragen werden.

Zusatz I. Ein Durchmesser wird durch eine Tangente und die zugehörige Ordinate des Berührungspunktes harmonisch geteilt.

Zusatz II. Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten der Hyperbel zu einer Asymptote eine Parallele, so wird die Strecke derselben, welche von dem Tangentenschnittpunkte und der Berührungssehne begrenzt wird, von der Kurve halbiert.

Lehrsatz XXII.

Zieht man durch den Schnittpunkt einer Hyperbeltangente mit einer Asymptote eine Sekante, so wird dieselbe von derjenigen Geraden, welche durch den Berührungspunkt der Tangente parallel zur Asymptote gezogen wird, harmonisch geteilt.

Das Asymptotenpaar OF, OQ werde durch ot und og, der Schnittpunkt V der Tangente VN mit der Asymptote OF durch v abgebildet; alsdann entspricht der Berührungssehne tn die der Geraden At und der Asymptote OF parallele Linie ND; tn teilt aber die Sekante $vrds$ des Kreises harmonisch.

Zusatz. Ist die Sekante (VD) der andern Asymptote OQ parallel, so wird die Strecke VD von der Kurve halbiert.

VD ist alsdann das Bild von vg.

Lehrsatz XXIII.

Legt man von den Punkten einer ausserhalb eines Kegelschnittes in dessen Ebene liegenden Geraden (welche bei Gegenschnitten keinen Durchmesser enthält) Tangentenpaare an den Kegelschnitt, so kreuzen sich deren Berührungssehnen in einem und demselben Punkte, und eine Sekante des Kegelschnittes wird in diesem Punkte und von der ersten Geraden harmonisch geteilt. Pol und Polare. Ort der vierten harmonischen Punkte.

Der Satz gilt nach I, 26 für den Grundkreis und kann unmittelbar auf das Bild desselben übertragen werden.

Zusatz I. Die der Polare parallele Sehne wird im Pole halbiert.

Zusatz II. Legt man vom Schnittpunkte der Geraden und einer Asymptote die Tangente an die Hyperbel und zieht durch den Berührungspunkt eine Asymptote zur Parallele, so geht dieselbe durch den Pol der Geraden. Die von Pol (hier innerhalb der Kurve) und Polare begrenzte und zu einer Asymptote parallele Strecke wird von der Kurve halbiert. Ähnliches gilt von der Parabel; an die Stelle der Asymptote tritt ein Durchmesser der Kurve.

Lehrsatz XXIV.

Konstruiert man in den Schnittpunkten eines Kegelschnittes und eines Strahlenbüschels, dessen Ursprung P innerhalb des Schnittes liegt (und bei der Ellipse nicht das Centrum enthält), die Tangentenpaare in den Endpunkten der Sehnen, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Tangentenpaare auf einer Geraden, der Polaren des Punktes P. Umkehrung des vorhergehenden Satzes.

Ebenso gelten die Umkehrungen der Zusätze von Satz 23.

Lehrsatz XXV.

Die Polare ist den Ordinaten des durch den Pol (hier innerhalb der Kurve) gehenden Durchmessers parallel.

Folgt leicht aus dem dritten Zusatze von Lehrsatz 6. Die Polare ude des Grundkreises, welche die Polare VDE des Kegelschnittes hervorbringt, schneidet die Richtlinie in demselben Punkte C, wo die Diametrale, welche der durch u gehenden op konjugiert ist, ihr begegnet; die durch CA gelegten Ebenen CAu, CAp und CAo erzeugen daher die parallelen Geraden DV, LPN und TOR.

Lehrsatz XXVI.

Legt man von den Punkten einer Sekante des Kegelschnittes (oder der Gegenschnitte), welche keinen Durchmesser enthält, Tangenten an die Kurve, so schneiden sich die Berührungssehnen in einem und demselben Punkte ausserhalb des Kegelschnittes, im Pole der Sekante; eine durch diesen Punkt gelegte Gerade wird von jener Sekante harmonisch geteilt.

Zusätze. Aehnlich wie zu Satz 23, nur liegt hier der Pol ausserhalb der Kurve. Die Beweise fliessen aus dem entsprechenden Satz 28 des ersten Buches, welcher ebenfalls unmittelbar auf den Kegelschnitt übertragen werden kann.

Lehrsatz XXVII.

Konstruiert man in den Schnittpunkten eines Kegelschnittes und eines Strahlenbüschels, dessen Ursprung P ausserhalb des Schnittes liegt (und bei Gegenschnitten nicht das Centrum enthält), in den Endpunkten der Sehnen die Tangentenpaare, so liegen die Durchschnittspunkte derselben in einer Geraden, in der Polaren des Punktes P.

Umkehrung von Satz 26. Ebenso gelten die Umkehrungen der Zusätze von 26.

Lehrsatz XXVIII.

Wie Satz 25, nur liegt hier der Pol ausserhalb der Kurve.

Lehrsatz XXIX.

Eine Tangente eines Kegelschnittes (oder von Gegenschnitten) wird von zwei andern Tangenten und den Berührungsehnen harmonisch geteilt.

Anwendung von Satz 30 des ersten Buches.

Zusatz I. Sind zwei der Tangenten einander parallel, so werden die von den Berührungssehnen abgegrenzten Strecken dieser Tangenten von der dritten halbiert.

Zusatz II. Die Berührungssehne zweier Hyperbeltangenten halbiert die von diesen Tangenten auf den Asymptoten abgegrenzten Strecken.

Lehrsatz XXX.

Verbindet man die Endpunkte eines Sehnenpaares, dessen Schnittpunkt im Innern des Kegel-

schnittes liegt, durch Gerade und zieht durch je einen der erhaltenen Schnittpunkte und den des Sehnenpaares die Sekante, so wird dieselbe von dem Kegelschnitte harmonisch geteilt.

Schneiden sich die Sehnen DE, RS in B und die Geraden SD, ER in A, so liegen die zu A konjugierten harmonischen Punkte P, M der Geraden SD, ER auf der Berührungssehne der von A an die Kurve gelegten Tangenten. Auf PM muss nach Satz 18 des ersten Buches auch B liegen, weil den beiden harmonischen Strahlenbüscheln $B(APDS)$ und $B(AMRE)$ drei Strahlen gemeinsam sind.

Erklärung:

Ein Kegelschnitt berührt einen andern Kegelschnitt oder einen Kreis, wenn die Kurven unmittelbar nach der Begegnung dieselben Seiten (konkave oder konvexe) wie unmittelbar vorher einander zukehren. Im Original: Dicitur Sectio Conica contingere sectionem conicam, vel circulum; cum proxime post occursum, curvae ad easdem partes concavas, vel convexas utrobique maneant, licet postea sese mutuo decussent.

Lehrsatz XXXI.

Wenn zwei Kegelschnitte einander in einem Punkte berühren und sich ausserdem in mehr als zwei Punkten treffen, so decken sie sich.

Der Beweis wird indirekt geführt (Definition XII), und zwar mit Hilfe der harmonischen Eigenschaften der Sekanten und Tangenten der Kegelschnitte Aehnliches gilt von den drei folgenden Sätzen.

Lehrsatz XXXII.

Haben zwei Kegelschnitte mehr als vier Punkte gemein, so decken sie sich.

Lehrsatz XXXIII.

Haben zwei Kegelschnitte einen Durchmesser und eine diesem zugehörige Ordinate gemein, so decken sie sich.

Erklärung.

Der Durchmesser, dessen Ordinaten ihn unter rechten Winkeln schneiden, wird Achse genannt.

Aufgabe.

Die Achse der Parabel zu finden und den (indirekten) Beweis zu liefern, dass es nur einen solchen Durchmesser giebt.

Aufgabe.

Die konjugierten Achsen in Ellipse und Hyperbel zu zeichnen und (indirekt) zu beweisen, dass nur ein Paar solcher Durchmesser vorhanden ist.

Lehrsatz XXXVI.

In der Ellipse ist die eine Achse der kleinste und die andere der grösste unter allen Durchmessern; in der Hyperbel ist die begrenzte Achse der kleinste Durchmesser.

Aufgabe.

Den Parabeldurchmesser zu zeichnen, welcher mit seinen Ordinaten einen gegebenen Winkel bildet.

Aufgabe.

In Ellipse und Hyperbel das Paar konjugierter Durchmesser zu finden, welche einen gegebenen Winkel einschliessen.

Determination.

Aufgabe.

Gegeben ist ein Kegelschnitt und ein Durchmesser desselben; gesucht werden beliebig viele unter einander verschiedene Kegel, auf welchen der gegebene Kegelschnitt liegt, und zwar so, dass die Geraden der Basisebene, welche die Ordinaten des gegebenen Durchmessers erzeugen, diesen selbst parallel laufen.

Man lege durch die Ordinate DME (Aufgabe XV, Seite 20) des gegebenen Durchmessers AB eine beliebige Ebene und zeichne in dieser über DE als Sehne einen Kreis, sowie den durch die Mitte M von DE gehenden Durchmesser CF desselben; die Geraden BF und CA liefern alsdann in ihrem Schnittpunkte V den Scheitel des gesuchten Kegels, dessen Basis der Kreis $CDFE$ darstellt.

Die Scheitelebene schneide die Ebene der Basis in der Richtlinie GH; zu ihr wie zur Geraden DE steht der Durchmesser CF des Grundkreises senkrecht, so dass allen zur Richtlinie GH oder zur Ordinate DE parallelen Geraden der Basisebene im Kegelschnitte Sehnen von derselben Richtung entsprechen. Dass sich der Schnitt $ADBE$ und der gegebene Kegelschnitt decken, folgt aus Satz 33.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Punkte ausserhalb eines Kegelschnittes (oder der Gegenschnitte, bei welchen jener Punkt nicht auf das Centrum falle) die Tangenten zu ziehen.

Die Lösung wird auf Grund der Sätze von Pol und Polare erhalten.

Aufgabe.

Von einem Kegelschnitte sind drei Tangenten und die Berührungspunkte von zweien derselben gegeben; gesucht wird der Berührungspunkt der dritten Tangente und das Centrum des Kegelschnittes.

Sind AE, ED, DB die gegebenen Tangenten, A, B die gegebenen Berührungspunkte, so halbiere man ED in F und ziehe durch F zu EA und DB die Parallelen, welche AB in G und H schneiden; alsdann ist der Schnittpunkt C der Geraden EG und DH das Centrum des Kegelschnittes. Trifft ferner die Berührungssehne AB die dritte Tangente ED in O, so ist der vierte harmonische Punkt T zu D, E, O der gesuchte Berührungspunkt.

Der Beweis stützt sich auf die Sätze 29 und 19. — Heute würde man die Lösung auf den Satz von Brianchon zurückführen.

Aufgabe.

Kegel zu konstruieren, deren Schnitt mit einer gegebenen Ebene eine Hyperbel erzeuge, von welcher die Asymptoten und ein Kurvenpunkt gegeben sind.

S. Satz 22.

Dies ist in gedrängter Kürze der Hauptinhalt des ersten und zweiten Buches der Sectiones conicae. Die Bearbeitung der übrigen Abschnitte kann aus den in der Einleitung angegebenen Gründen erst im nächsten Jahre veröffentlicht werden.

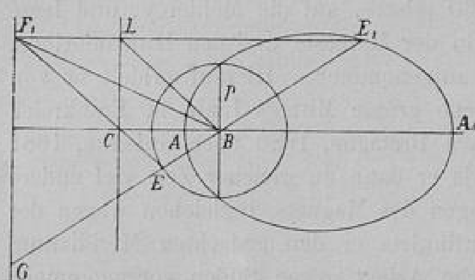
Anmerkungen.

[1]) Ueber sein Leben und die von ihm verfassten Werke findet sich in Christian Gottlieb Jöchers Allgemeinem Gelehrten-Lexikon (Leipzig, MDCCL) Folgendes zusammengestellt: De la Hire (Philip.) ein frantzösischer Mathematicus und Astronomus, wie auch Mitglied der königlichen Academie der Wissenschafften zu Paris, gebohren 1640 den 18. Martii, wurde von seinem Vater, der königlicher Mahler war, der Mahlerey gewidmet, applicirte sich anfangs zu Rom, wohin er seiner Gesundheit wegen 1660 reisete, auf die Mahlerey, und legte zu Paris eine Mahler-Schule an, übte sich aber hernach in der Mathesie und den Humanioribus, und wurde 1678 in die Academie der Wissenschafften aufgenommen. Hierauf erhielt er von dem Könige Befehl, die von Mr. Picard 1669 angefangene grosse Mittags-Linie in Frankreich zu verlängern, und begab sich zu solchem Ende 1679 nach Bretagne, 1680 nach Guienne, 1681 nach Calais und Dünkirchen und 1682 nach Provence, da er dann zu gleicher Zeit viel andere Observationen, z. E. wegen der verschiedenen Abweichungen des Magnets, ingleichen wegen der Refractionen und Höhen der Berge angestellt. 1683 continuirte er den gedachten Meridianum von Paris aus gegen Norden, da inmittelst Cassini solche Arbeit gegen Süden vorgenommen; 1684 aber untersuchte er den Lauf und Fall des Flusses Eure, der bei Chartres vorbey läufft, und fand denselben so beschaffen, dass er zu den Wasserleitungen gebraucht werden könnte, welche zu Versailles um diese Zeiten angeleget worden. Wegen seiner Wissenschafft in der Experimental-Physic, Astronomie und andren Theilen der Mathemathic, ward er in dem königlichen Collegio, wie auch in der Academie der Bildhauer und Baumeister zum Professor bestellt, war überaus arbeitsam, wie er dann zum öfftteren seine Geschäffte fast Tag und Nacht in einem fortgesetzet, und sein Vergnügen allein in der Abwechselung unterschiedlicher Verrichtungen, oder in der Mahlerey gesucht; wobey zugleich auch seine gute äusserliche Art zu leben, sein von allem Eigennutz entferntes Wesen, und besonders seine Frömmigkeit gerühmt worden. Er starb den 21. April 1718 im 79. Jahre seines Alters. Seine Schriften sind: *nouvelle methode pour les sections des superficies coniques & cylindriques; de cycloide; nouveaux elemens des sections coniques; sectiones conicae in 9 libb. distributae; la gnomonique; tr. du nivellement par Mr. Picard,* welches er mit seinen Zusätzen an das Licht gestellet; *tr. du mouvement des eaux par Mr. Mariotte,* worinne er gleichfalls eines und das andere von dem Seinigen hinzugethan; *tabulae astronomiae de motibus solis lunae, nec non de positione fixarum; l'ecole des arpenteurs; tr. de mecanique; description & explication des globes, qui sont placez dans les pavillons du chateau de Marly; veterum mathematicorum opera graece & latine, pleraque nunc primum edita;* seine vielen Dissertationen, welche in den *memoires de l'academie des Sciences* stehen, zu geschweigen. Er hat sich zweymal verheyrathet, und unter andern 2 Söhne nämlich Philippum und Jo. Nicolaum, hinterlassen. Von dem ersteren folgt ein eigener Artickel. Der andre, gebohren 1685, studirete die Medicin, besonders aber die Botanic, worauf er 1709 ein Mitglied der Academie des Sciences,

und das Jahr darauf in der medicinischen Facultät zu Paris Doctor wurde. — Man sehe auch Delarousse, Grand dictionnaire universel du XIX[e] siècle, unter „Lahire (Lahure)“.

[2]) Milinowski, S. 54: „Man wähle einen festen Punkt O und eine feste Gerade o als Centrum und Axe. Zwei Punkte, wie AA_1 oder BB_1, welche durch Centrum und Axe harmonisch getrennt sind, heissen verwandte Punkte; zwei Gerade, wie aa_1 oder bb_1, welche durch Centrum und Axe harmonisch getrennt sind, heissen verwandte Gerade. Die Beziehung, in welche dadurch die Punkte und Geraden der Ebene gesetzt sind, heisst „harmonische Verwandtschaft“. Die Mittellinie von Centrum und Axe heisst die „Mittellinie der Verwandtschaft“. Das Centrum dieser Transformation fällt, wie man erkennt, mit dem Pole der „Planiconiques“, Achse und Mittellinie mit Formatrix und Directrix zusammen. — S. 81: „In jeder harmonischen Verwandtschaft, deren Centrum der Mittelpunkt eines Kreises ist, ist diesem Kreise eine krumme Linie verwandt, deren sämtliche Punkte vom Centrum und von der Mittellinie der Verwandtschaft ein konstantes Abstandsverhältnis haben.“ Die Milinowskische Ableitung dieses Fundamentalsatzes der harmonischen Kurve des Kreises ist für die Zwecke des Unterrichtes nicht durchsichtig genug. Die folgende Beweisführung entspricht mehr dem Charakter der Methode und ersetzt die an Apollonische Umständlichkeit erinnernde Rechnung durch geometrische Sätze: $LBCF_1$ ist ein Parallelogramm, also $F_1(GBCE_1)$ ein harmonisches Strahlenbüschel; aber auch $F_1(GBEE_1)$ ist ein solches; daher fällt F_1C mit F_1E zusammen, CE ist parallel LB, und man hat $\frac{E_1B}{E_1L} = \frac{BE}{BC} = \text{const.}$

Fig. 8.



[3]) Wie man aus S. 15 und 44 seines Aperçu historique (der deutschen Übers.) ersehen kann, liegt hier ein Missverständnis von Seiten Chasles' vor, welches unseres Wissens zuerst von Housel*) aufgedeckt, seitdem aber immer wieder von neuem vorgetragen wurde. Chasles glaubt, Apollonius verstehe unter Achsendreieck den Hauptachsenschnitt des Kegels und verwende zur Bildung des Kegelschnittes eine zu dem Hauptschnitt senkrechte Ebene. Aber weder das eine noch das andere ist richtig: Apollonius benutzt einen beliebigen Achsenschnitt und legt nur die erzeugende Ebene so, dass die von beiden mit der Ebene des Grundkreises gebildeten Schnittkanten einen rechten Winkel einschliessen; diese die Allgemeinheit des Ergebnisses auf keine Weise beschränkende Bedingung ermöglicht die Verwendung der „Kreisgleichung“ zur Auffindung der entsprechenden Eigenschaft der Kegelschnitte. Im andern Falle hätte Apollonius nur den Beweis für die Achse des Kegelschnittes erbracht und in den folgenden Sätzen das Ergebnis stillschweigend auf beliebige Durchmesser angewandt, was sich mit der peinlichen Ausführlichkeit des Übrigen schlecht vereinigen liesse. Die Schuld an dem Irrtume trägt wahrscheinlich einer der älteren Bearbeiter des Apollonischen Werkes, welcher die Parameterlänge im Endpunkte des Durchmessers senkrecht zu diesem errichtete, anstatt sie als Tangente parallel mit der gemeinsamen Ordinate des Kreises und des Kegelschnittes zu führen. Nach dieser Abänderung ist auch das *latus transversum* in Balsams Übersetzung wieder in *diameter primaria*

*) Liouvilles Journ. des Math., 2. ser. t. III, p. 155.

(originaria) überzuführen. Bei Cantor*) findet sich noch der Schnitt senkrecht zum Achsendreieck, während der Hauptschnitt bereits in Wegfall kommt. Dagegen spukt beides wieder in Taylors Prolegomena zu seinem Werke über die Kegelschnitte**); doch damit nicht genug, muss hier Apollonius auch noch den Vorwurf ungenauer Darstellung (laxity of statement) — welche doch auf ganz anderer Seite zu suchen ist, — über sich ergehen lassen. De la Hire hat Apollonius richtig aufgefasst; dies geht unter anderem aus lib. II, prop. XXXIX hervor, wo sich das Corollar findet: Ex his patet sectionem per verticem hujus coni et per diametrum propositam transire etiam per axem coni, et erit triangulum quod per axem dixit Apollonius, et diameter proposita erit ejusdem principalis vel originaria in cono.

[4]) Der Name Focus rührt bekanntlich von Kepler her. Die Stelle ist in einer kurzen Erörterung *De coni sectionibus* (cap. IV, 3) seines Werkes *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur etc.* (Francof. 1604) enthalten und lautet: Nos lucis causa et oculis in mechanicam intentis ea puncta (quae definitionem certam habent, nomen nullum, nisi pro nomine definitionem aut proprietatem aliquam usurpes) focos appellabimus. Newton gebraucht für Brennpunkt die Bezeichnung umbilicus (Phil. nat. princ. math. lib I, sect. 4).

[5]) **Liber primus.** Propositio XXI.

Esto circulus $BFDG$, et in plano circuli a puncto A extra circulum sumpto ductis contingentibus AF, AG, agatur recta FG conjungens tactus F et G; si a puncto A quaelibet recta ducatur AD occurrens circulo in B et D et FG conjungenti tactus in C.

Dico rectam AD harmonice dividi in punctis A, B, C, D.

Super recta BD tamquam diametro descripto semicirculo BHD, et a puncto C erecta perpendiculari CH ad rectam AC et occurrente circulo in H, recta ducta AH continget circulum in puncto H; nam bisecta FG in O et ducta AO, quadratum AF erit aequale duobus simul quadratis AO et FO; sed quadratum AC aequale est duobus simul quadratis AO et CO, et rectangulum FC, CG cum quadrato CO aequale est quadrato FO; quare rectangulum FC, CG cum quadrato AC aequale est quadrato AF. Propter circulos rectangulum FC, CG aequale est rectangulo BC, DC quod etiam aequale est quadrato HC; erit igitur quadratum AC cum quadrato HC aequale quadrato AF quod est etiam aequale quadrato AH; sunt igitur aequales AH et AF. Sed in circulo BFD rectangulum DA, AB aequatur quadrato AF vel AH; quamobrem cum idem rectangulum DA, AB in circulo BHD sit aequale quadrato AH, et punctum H existat in peripheria circuli BHD recta AH tanget hunc circulum in puncto H. Per puncta B et D erectis perpendicularibus BI, DE ad diametrum BD, quae sunt etiam contingentes circulum BHD, et occurrentibus contingenti AH in I et E, propter circulum rectae IB, IH et ED, EH erunt aequales; sed propter parallelas DE, BI; ut DA ad AB, sic se habet DE ad BI vel HE ad HI; et ut HE ad HI sic DC ad CB; quare propter similitudinem rationum erit DA ad AB, ut DC ad CB, et per definitionem recta DA dividitur harmonice in punctis A, B, C, D, quod erat ostendendum.

Liber quintus. Propositio XVIII.

Esto Ellipsis $ADBO$ cujus axes AB, DO, et duae quaelibet diametri inter se conjugatae HCS, ICT. Centro C et semidiametro CA descripto circulo AP, et eodem centro, et semidiame-

*) Vorlesungen über Gesch. d. Math. I, S. 290.

**) The ancient and modern geometry of conics, p. XLIII.

tro CO descripto circulo OM, ductisque HL, IE perpendicularibus ad axes et occurentibus circulo OM in M et circulo AP in P:

Dico HL rectam esse aequalem rectae EP, et IE aequalem ML.

Ducta Hh perpendiculari ad AB et NHQ contingenti in H, et axibus occurrenti in N et Q, haec contingens erit parallela diametro IT conjugatae diametro HS, cum sit contingens in termino H per decimam propositionem libri secundi: sed etiam per nonam propositionem tertii libri rectangulum Nh, Ch, vel LH aequale est rectangulo Ah, hB, et propter parallelas IC, NQ, ut NH ad IC, sic Nh ad EC, et ut IC ad HQ, sic EC ad hC, vel HL: et per praecedentem propositionem rectangulum NH, HQ aequale est quadrato CT vel CI; quare etiam rectangulum Nh, Ch aequale est quadrato CE; quamobrem quadratum EC aequale est rectangulo Ah, hB, quod aequale est quadrato CA minus quadrato Ch, vel LH; ideoque quadratum CA ad quadratum CE, ut quadratum CA ad quadratum CA minus quadrato Ch vel LH; et dividendo quadratum CA ad quadratum CA minus quadrato CE, quod aequale est quadrato EP propter circulum, ut quadratum CA ad quadratum CA minus quadrato CA plus quadrato LH, quod reducitur ad solum quadratum LH; erit igitur quadratum EP aequale quadrato LH, et EP recta aequalis LH rectae, quod erat primo propositum.

Per tertiam propositionem libri tertii rectangulum EA, EB, quod est quadratum EP se habet ad quadratum EI, ut rectangulum CA, CB, vel quadratum CA ad rectangulum CO, CD vel quadratum CD; igitur EP ad EI, ut CA ad CD; similiter demonstrabitur LH ad LM, ut CA ad CD; quamobrem EP ad EI ut HL ad ML; sed EP ostensa est supra aequalis HL; quare EI aequalis est ML, quod erat secundo demonstrandum.

In der Uebertragung:

Fünftes Buch, Lehrsatz XVIII.

Beschreibt man über den Achsen der Ellipse als Durchmesser Kreise und fällt von den Endpunkten zweier konjugierter Durchmesser der ersteren Senkrechte auf die Achsen, so sind die so erhaltenen Ordinaten der Ellipse und des kleinen Kreises der Reihe nach gleich den Ordinaten des grossen Kreises und der Ellipse.

ACB, OCD seien die Achsen, HCS, ICT zwei konjugierte Durchmesser, HL, IE normal zu OC, AC und M, P die Schnittpunkte der Kreise mit HL, IE; zieht man alsdann in H die Tangente, welche AB, OD in N, Q schneidet und führt Hh normal zu AC, so hat man

$$\frac{EC}{Ch} = \frac{EC}{HL} = \frac{IC}{HQ} = \frac{NH}{IC} \;(17) = \frac{Nh}{EC},$$

also $EC^2 = Nh \,.\, Ch = Ah \,.\, Bh \,(II, 10) = CA^2 - Ch^2 = CA^2 - HL^2$, aber auch $CE^2 = CA^2 - EP^2$ und daher $EP = HL$. Aus III, 3 folgt

$$\frac{EP^2}{EI^2} = \frac{CA.\,CB}{CO.\,CD} = \frac{CA^2}{CD^2} \text{ oder } \frac{EP}{EI} = \frac{CA}{CD} \text{ und ähnlich } \frac{LH}{LM} = \frac{CA}{CD}, \text{ so dass auch } EI = LM.$$