ÜBER DIE BEGRÜNDUNG

DER

INFINITESIMALRECHNUNG

DURCH

NEWTON UND LEIBNIZ

VON

DR. ERNST TISCHER

OBERLEHRER AM NICOLAIGYMNASIUM ZU LEIPZIG.

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT DES NICOLAIGYMNASIUMS ZU LEIPZIG.

LEIPZIG 1896.

DRUCK VON C. GRUMBACH.

1896. Progr. Nr. 551.

Über die Begründung der Infinitesimalrechnung

durch Newton und Leibniz.

Im Jahre 1684 war zu Leipzig die Abhandlung: »Nova methodus pro maximis et minimis etc.« erschienen, in der ihr Verfasser, Gottfried Wilhelm Leibniz, der gelehrten Welt seiner Zeit die Grundzüge seiner neun Jahre früher gemachten Entdeckung der Differentialrechnung angedeutet und damit eine neue Epoche der Mathematik und der gesamten exakten Wissenschaften eingeleitet hatte. Das Unendlichkleine, die Infinitesimalgröfse, von den Geometern des Altertums mit Bedacht gemieden und umgangen, aber seit Kepler sich immer und immer wieder in die Spekulationen der Mathematiker eindrängend, hatte durch Leibniz schliefslich die Gesetze, Einschränkungen, Rechnungsregeln und Bezeichnungen vorgeschrieben bekommen, unter deren Einhaltung sie erst das volle Bürgerrecht im System der wissenschaftlichen Begriffe der Mathematik erlangte. Trotz der Geringschätzung und des geheimen Mifstrauens, das ihr anfangs viele, darunter die bedeutendsten Mathematiker, wie Huygens, entgegenbrachten, trotz der offenen Fehde, die ihr die Cartesianer und andere boten, hatte sie sich seit 1684 im Reiche der Mathematik und Physik nicht nur behauptet, vielmehr schien sie sich schon sehr bald diesen Wissenschaften unentbehrlich gemacht zu haben durch die ungeahnten Bereicherungen, die diese ihr nach kurzer Zeit verdankten und durch die neuen Gebiete, die sie ihnen eröffnet hatte.

Aber solcher Leistungen ungeachtet geschah es just bei Gelegenheit des hundertjährigen Jubiläums ihrer Einführung durch Leibniz, dafs die Infinitesimalgröfse noch einmal einer peinlichen Musterung ausgeliefert wurde, die nichts Geringeres bezweckte, als sie, wenn möglich, ganz aus dem Bereiche strenger Mathematik auszuweisen. 1784 erliefs die Königl. Preufsische Akademie der Wissenschaften zu Berlin die folgende Preisaufgabe*):

»L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'eſtime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juſte titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonſtrations et à la préciſion de leurs théorèmes. Pour aſſurer à cette belle partie de nos connoiſſances la continuation de ces précieux avantages, on demande

une théorie claire et préciſe de ce qu'on appelle ***Infini*** *en Mathématiques.*

On ſçait que la haute Géometrie fait un uſage continuel *des infiniment grands* et *des infiniment petits*. Cependant les Géometres, et même les Analyſtes anciens, ont évité ſoigneuſement tout ce qui approche de l'Infini; et de grands Analyſtes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires.

*) Karstens Mathematische Untersuchungen, Halle, 1786.

L'Académie ſouhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une ſuppoſition contradictoire, et qu'on indique un principe ſûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre a être ſubſtitué à *l'Infini*, ſans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière ſoit traitée avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et ſimplicité poſſibles.«

L'Huilier, ein Schweizer, errang den Preis mit der Dissertation: »Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs.« Die Akademie der Wissenschaften zu Berlin muſs daher wohl durch diese Arbeit zufriedengestellt worden sein. War aber in dem Begriff des Limes, wie ihn l'Huilier behandelte, ein sicheres, klares, wahrhaft mathematisches, widerspruchsfreies Princip, propre à être substitué à l'infini, gegeben? Nein! Denn sonst hätte nicht der fruchtbarste und abstrakteste Mathematiker jener Zeit, Lagrange, sich veranlaſst gesehen, 13 Jahre später, 1797, ein gröſseres mathematisches Werk zu veröffentlichen unter dem Titel: »Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, degagés de ***toute** considération d'infiniment petits* ou *d'évanouissans,* de ***limites*** ou de *fluxions,* et reduits à l'analyse algébrique des quantités finies«, und damit zu bekunden, daſs, um Erfolg zu haben, die Infinitesimalgröſsen und Infinitesimalbetrachtungen mit schärferen Mitteln, als denen, die l'Huilier angewandt hatte, zu bekämpfen wären.

Und heute? Hundert Jahre sind vergangen, seitdem Lagrange seine scharfen Streiche gegen toute considération d'infiniment petits etc. führte, aber die Leibnizischen d und $\int$, die „Differenzen" und „Summen", die Infinitesimalgröſsen der verschiedenen Ordnungen beherrschen gleichwohl noch die höhere Analysis. Wer sich heute an der exakten Naturforschung beteiligen will, wer in der Mathematik, Physik, Chemie, in irgend einem Gebiete der erklärenden Naturwissenschaften, in der Psychophysik und Philosophie aufsteigen will *»ad problemata sublimiora«,* oder wer in seinem Drange nach Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen den Ursachen und Wirkungen der Dinge und des Geschehens durchdringen will *»ad fontes profundiores«,* muſs sich das Verständnis der Zeichen d und $\int$ erschlossen haben. Sie sind Charakteristika der mathematischen Weltsprache geworden, wie es die Zeichen $+$ und $-$ schon lange vorher waren.

Oder sind es etwa bloſs die Zeichen, die sich erhalten haben, und ist der Sinn, den man heute mit ihnen verbindet, ein anderer als der, den ihr genialer Urheber in sie legte? Erklärt es sich aus dieser Wandlung ihrer Bedeutung, daſs sie die auf ihre Beseitigung abzielenden Arbeiten von l'Huilier und Lagrange überdauert haben? Und wenn nicht, woran lag es dann, daſs noch 100 Jahre nach ihrer Einführung die wissenschaftliche Welt das Bedürfnis empfand, sich ihrer zu entledigen, und was hat sich seitdem in dem Verhältnis der Anschauungs- und Denkweise der Gelehrten zu dem Begriffe der Infinitesimalgröſse geändert, daſs man heute jenes Bedürfnis nach Elimination dieses Begriffs aus der Wissenschaft nicht mehr hat?

Noch andere Fragen tauchen angesichts jener Preisaufgabe auf. *»Scientia infiniti«,* so lautete der kühne Titel, mit dem Leibniz seine Schöpfung gern bezeichnet hatte. »Analyse *des infiniment petits«,* das ist der Titel des ersten Lehrbuchs der Differentialrechnung, das 1696, zwei Jahre nach dem Tode seines Verfassers, des Marquis de l'Hôpital, des Schülers von Johann Bernoulli und Leibniz, gedruckt worden war. Man kann es verstehen, daſs die Ausdrücke *»infini«* und *»Infinitus«* für eine Disciplin, deren Gegenstand dennoch nur in der Untersuchung endlicher Gröſsen bestand, vielen als unzutreffend oder doch entbehrlich erscheinen mochte. Aber ungefähr zehn Jahre früher als Leibniz hatte sich Newton eine analytische Methode geschaffen, durch die er das Kontinuum und die stetige Veränderung eines Kontinuums der exakten mathematischen Rechnung unterwerfen konnte. Und drei Jahre nachdem Leibniz seine Methode bekannt gemacht hatte, 1687, hatte die Welt aus Newtons unvergänglichem Werke »Philosophiae naturalis principia mathematica« erfahren, dafs Newton mit Hilfe der Begriffe des Moments einer Gröfse, des ersten Verhältnisses entstehender und des letzten Verhältnisses verschwindender Gröfsen dasselbe leisten konnte wie Leibniz mit seinen Infinitesimalen. 1706 hatte Newton in seiner »Quadratura curvarum« die Grundzüge seiner methodus fluxionum der Öffentlichkeit mitgeteilt und dabei ausdrücklich erklärt: Volui ostendere quod in methodo fluxionum *non opus* sit, figuras *infinite parvas* in geometriam introducere, und dafs seine Methode der ersten und letzten Verhältnisse entstehender oder verschwindender Gröfsen sich in Übereinstimmung befinde mit der Geometrie der Alten. Nach seinem Tode war seine »Methodus fluxionum« in ihrem vollen Umfange veröffentlicht worden, und der Ausdruck „Fluxio" vermied das „Unendliche" ebensogut wie es Euklid und Archimedes vermieden hatten. Wenn nun 1784 die Akademie der Wissenschaften zu Berlin nach einem principe sûr etc. propre à être substitué à l'Infini verlangte, warum fand sie es nicht in Newtons Fluxionen?

Es hat seit meiner Studienzeit einen grofsen Reiz auf mich geübt, mir auf diese Fragen eine Antwort zu suchen. Sie nach allen Seiten hin in ihrem ganzen Umfange erschöpfend zu beantworten, dazu gehört neben voller Vertrautheit mit allen Gebieten der höheren Mathematik und Physik in ihrem gegenwärtigen Zustande auch ein tiefes Eindringen in die Probleme der Psychologie und Erkenntnislehre und nicht minder die genaue Kenntnis und Beurteilungsfähigkeit aller geschichtlichen Wandlungen und Phasen in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Anschauungs- und Denkweise der Menschheit in den letzten drei Jahrhunderten, ja in den letzten zwei Jahrtausenden, — ein vollständiges Leben in und mit der Wissenschaft nach ihrem innersten Inhalt und ihren vollendetsten Formen. Eine solche wissenschaftliche Vertiefung und Ausbreitung ist von keinem zu erreichen, dessen Kräfte im praktischen Schul-Kleindienst zersplittert und erschöpft werden. Daraus folgt aber nicht, dafs er in den wenigen Stunden wissenschaftlicher Mufse und Erhebung, die ihm bleiben, seine Aufmerksamkeit nicht auf Fragen allgemeiner Natur richten und sich nach seinem Vermögen eine Antwort suchen könne. Ergiebt sich daraus auch für die Wissenschaft im grofsen und ganzen keine gröfsere positive Förderung, als aus unzähligen gedruckten Arbeiten, die mit dem Anspruch darauf an die Öffentlichkeit gelangen, so ist doch für den, der sie leistet, jede wissenschaftliche Arbeit erspriefslich und fördernd und darum auch dem Ganzen nicht verloren. Des allgemein wissenschaftlichen Interesses ermangeln die von mir aufgeworfenen Fragen nicht, und auch für die Praxis des mathematischen Unterrichts kann ihre Behandlung von allergröfster Bedeutung werden. Unter diesem Gesichtspunkte benutze ich dieses Programm dazu, einiges aus meinen Studien über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz zu fixieren. Dafs in dem engen Rahmen eines Schulprogramms nur Bruchstücke, bez. nur die Anfänge dieser Untersuchungen Platz finden können, wenn letztere nicht oberflächlich sein sollen, ist selbstverständlich.

Ein Blick auf die höhere Mathematik des Altertums.

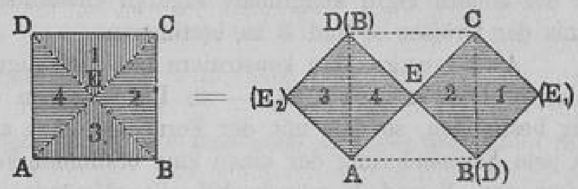
La »haute Géometrie«, heifst es in der Berliner Preisaufgabe von 1784, macht einen beständigen Gebrauch vom Unendlichgrofsen und Unendlichkleinen, aber die Mathematik des

Altertums habe sorgsam vermieden »tout ce qui approche de l'infini«. Dabei hat natürlich die Akademie den Teil der alten Geometrie im Auge, der zur »haute Géometrie« zu rechnen sein würde. Warum, so liest man zwischen den Zeilen, haben die neueren Geometer die strengen und widerspruchsfreien Methoden der Alten verlassen und wie kann man den Weg zu jenen Methoden zurückfinden oder doch zu Methoden, die ebenso widerspruchsfrei sind? Es mufs uns daher daran gelegen sein, den Unterschied zwischen den Methoden des Altertums und denen von Newton und Leibniz scharf zu erfassen.

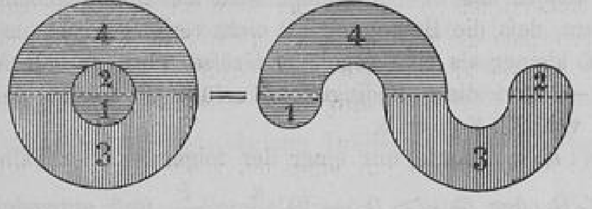
Welche Probleme der alten Geometer sind nun derart, dafs die neueren sie mittels Infinitesimalen lösen würden, während die Alten zu ihrer Lösung des Unendlichen nicht bedurften? Es sind zumeist spezielle Fälle des einen allgemeinen Problems, den Quotienten der Gröfsen zweier geometrischen Gebilde zu finden, die so beschaffen sind, dafs es nicht möglich ist, beide Gebilde durch Zerlegung in kleinere (aber endliche) Teilgebilde und durch andere Anordnung der Teilgebilde zu je einer neuen Figur in neue Figuren solcher Art zu verwandeln, dafs ihr Gröfsenverhältnis mit Hilfe kongruenter Teilfiguren unter Anwendung der Grundsätze: Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches u. s. w. gefunden werden kann.

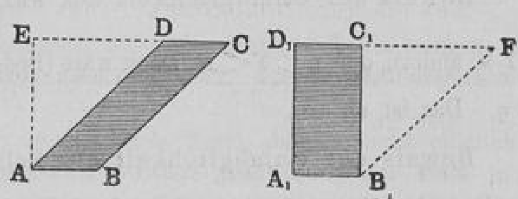
Alle Gröfsenvergleichungen und zahlenmäfsigen Gröfsenangaben fufsen auf dem Begriff der Gröfsengleichheit. Für die Grundgröfsen aller Geometrie, die Strecke und den von zwei Geraden gebildeten Winkel, fällt das Kennzeichen der Gleichheit mit dem der Kongruenz zusammen. Zwei Strecken oder zwei Winkel sind einander nur dann gleich, wenn sie kongruent sind. Soll das Verhältnis ungleicher Strecken ermittelt werden, so findet sich das allgemeinste und rationellste Verfahren hierzu im 10. Buche von Euklids Elementen angegeben. Es ist identisch mit dem, was wir im Unterrichte Kettendivision nennen. Ist durch Kettendivision das gröfste gemeinschaftliche Mafs zweier Strecken gefunden, so können die Glieder des Verhältnisses der Gröfsen einfach abgezählt werden. Ist das Verhältnis der vorliegenden Gröfsen in Zahlen (das sind bei Euklid nur ganze Zahlen) angebbar, so besteht die Kettendivision in einer endlichen Anzahl von Operationen; und umgekehrt, findet die Kettendivision bei einer bestimmten Anzahl von Partialdivisionen oder richtiger Partialmessungen ihren Abschlufs, so ist das Verhältnis der zu vergleichenden Gröfsen in Zahlen angebbar. Zwei Gröfsen können aber ein solches Verhältnis zu einander haben, dafs die Kettendivision zwischen beiden nie zum Abschlufs gelangt. Hier ist eine Stelle, in der der Unendlichkeitsbegriff in die Mathematik einsetzt. Beim Studium der Leibnizischen Schriften kann man sehen, welche Bedeutung der Unendlichkeitsbegriff gerade an dieser Stelle bei Leibniz für die Ausbildung mathematischer Begriffe gewinnt. Aber Euklid vermeidet das Unendliche; daraus, dafs die Kettendivision entweder eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Operationen erfordert, folgt für ihn weiter nichts als eine der Zweiteilung in endlich und unendlich entsprechende Zweiteilung der Verhältnisse der Gröfsen nach einem positiven Begriff und seiner Negation, nämlich in die, dafs zwei Gröfsen gleicher Art entweder kommensurabel oder inkommensurabel zu einander sind. Aber zu Problemen, die zur höheren Geometrie gerechnet werden könnten, ergiebt sich hieraus für ihn kein Anlafs.

Das wird anders bei Vergleichung solcher Gröfsen, deren Gleichheit nicht mehr ihre Kongruenz zur Voraussetzung hat; bei Flächen- und Raumgröfsen. Flächen können einander gleich sein, ohne kongruent zu sein. Die Erkenntnis der Gleichheit nicht kongruenter Figuren stützt sich aber entweder auf die Kongruenz von Teil- und Hilfsfiguren oder sie stützt sich nicht darauf; d. h. es ist entweder möglich, jede der miteinander zu vergleichenden Figuren in solche Teilfiguren zu zerschneiden oder zu solchen Hilfsfiguren zu ergänzen, dafs durch eine andere Anordnung derselben neue Figuren entstehen, die untereinander kongruent sind, oder aber eine solche Analysis und darauf folgende Synthesis durch kongruente Hilfsfiguren (endlicher Gröfse) ist nicht möglich.



So ergiebt eine einfache Änderung in der Anordnung der vier Teildreiecke 1, 2, 3 und 4, in die ein Quadrat durch seine Diagonalen zerfällt wird, den pythagoräischen Satz für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Die Fläche eines Kreises erweist sich als gleich mit der Fläche der schlangenförmigen Figur, weil beide sich als Summen kongruenter Teile darstellen lassen. Der Fundamentalsatz für alle Flächenvergleichung geradlinig begrenzter Figuren, dafs zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander gleich sind, wenn sie in einer Seite ($AB = A_1B_1$) und der entsprechenden Höhe übereinstimmen, wird als richtig erkannt durch Ergänzung der Parallelogramme zu untereinander kongruenten Trapezen $ABCE$ und $A_1B_1FD_1$, da sich dann die Parallelogramme als Differenzen erweisen, in denen sowohl die Minuenden ($ABCE \cong A_1B_1FD_1$) als auch die Subtrahenden ($ADE \cong B_1FC_1$) einander kongruent sind.





Dagegen ist es, so lange unendlich kleine Gröfsen und Figuren nicht zugelassen werden, nicht möglich, die Fläche eines Kreises und die eines Quadrats, überhaupt die Fläche einer von Kurven und die einer von geraden Linien begrenzten Figur analog wie oben in untereinander kongruente Elementargebilde aufzulösen und dadurch die Gleichheit beider Figuren zu erkennen. Soll die Gleichheit von zwei derartigen Figuren bewiesen oder das Verhältnis ihrer Gröfsen ermittelt werden, so hat man ein Problem der »haute Géometrie« vor sich.

Fragen wir jetzt, nach welchen Methoden die Alten bei Behandlung solcher Probleme verfuhren, so ist zunächst zu konstatieren, dafs sie allgemeine Methoden überhaupt nicht dargestellt haben. Man mufs sich diese aus ihren Darstellungen einzelner Fälle abstrahieren. Man hat sie, ob zutreffend oder nicht, unter dem Namen der Exhaustionsmethoden zusammengefafst.

Allgemeine Charakteristik des Exhaustionsverfahrens von Euklid.

Die Exhaustionsmethode Euklids läfst sich, soviel ich aus seinen Elementen entnehmen kann, in das folgende allgemeine Schema fassen.

Es seien zwei Figuren A und B von solcher Art vorgelegt, dafs es nicht möglich ist, ihr Gröfsenverhältnis auf kongruente Elementargebilde zurückzuführen oder eine von ihnen in solche Teile zu zerlegen, dafs durch stetige und geeignete Aneinanderfügung der Teile eine oder mehrere der andern Figur kongruente Figuren entstünden. Es wird gleichwohl verlangt, das Verhältnis der Gröfsen A und B zu bestimmen.

Auflösung: Man konstruiere zwei Hilfsfiguren X und Y, die folgenden Bedingungen genügen: 1) $X < A$, $Y < B$. — 2) Die Formen der Figuren Y und X müssen sich gegenseitig bestimmen, so dafs mit der Form der einen auch die Form der andern gegeben ist, und dafs jede Formänderung der einen eine bestimmte Formänderung der andern bedingt. — 3) Die Gröfsen von X und Y müssen bei aller Veränderung ein konstantes Verhältnis $X : Y = a : b$ einhalten. — 4) Es mufs möglich sein, die Gröfse von X durch Anfügung neuer Teile oder sonst wie so zu ändern, dafs die Gröfsendifferenz $A - X$ so klein gemacht werden kann, als man will, und ebenso die Gröfse von Y so zu ändern, dafs $B - Y$ so klein gemacht werden kann, als man will. — 5) Wenn man X so ändert, dafs $A - X$ kleiner wird als eine gegebene Gröfse, so soll sich die Gröfse von Y so ändern, dafs die Bedingung (1) nicht verletzt wird; umgekehrt, wenn man Y so ändert, dafs $B - Y$ kleiner als eine gegebene Gröfse wird, so soll X sich so ändern, dafs immer $X < A$ bleibt. — Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das gesuchte Verhältnis $A : B$ kein anderes als das von $X : Y = a : b$.

Beweis. Wäre $A : B$ nicht gleich $a : b$, so könnte nur einer der folgenden vier Fälle eintreten: 1) $\frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und entweder α) $\eta < B$ oder β) $\eta > B$. — 2) $\frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und entweder γ) $\xi < A$ oder δ) $\xi > A$. — Es wird bewiesen, dafs alle vier Fälle infolge der erfüllten Bedingungen unmöglich sind.

Beweis der Unmöglichkeit des Falles α. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und $\eta < B$, so könnte man Y so ändern, dafs $\eta < Y < B$. Dann wäre (Bed. 3) $\frac{X}{Y} = \frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und gleichzeitig $X < A$ und $Y > \eta$. Das ist absurd.

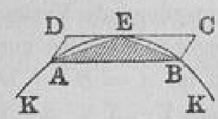
Beweis der Unmöglichkeit des Falles γ. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und $\xi < A$, so könnte man (Bed. 4) X so ändern, dafs $\xi < X < A$. Dann wäre wegen (5) $Y < B$, mithin $\frac{X}{Y} = \frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und gleichzeitig $X > \xi$ und $Y < B$. Das ist absurd.

Beweis der Unmöglichkeit des Falles β. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{A}{\eta}$ und $\eta > B$, so könnte man sich eine neue Hilfsfigur Z denken, deren Gröfse bestimmt ist durch $Z : B = A : \eta$. Dann wäre $Z < A$ und daher $Z : B = a : b$ und gleichzeitig $Z < A$, d. h. es wäre der Fall (γ) möglich. (γ) ist aber unmöglich, also auch (β).

Beweis der Unmöglichkeit des Falles δ. Wäre $\frac{a}{b} = \frac{\xi}{B}$ und $\xi > A$, so denke man sich eine Hilfsfigur Z, die der Proportion $\xi : B = A : Z$ genügt. Dann wäre $Z < B$, und daher $a : b = A : Z$ und gleichzeitig $Z < B$, d. h. es wäre (α) möglich. (α) ist aber unmöglich, also auch (δ).

In diesem allgemeinen Schema könnten natürlich an Stelle der Bedingungen (1) auch diese treten: $X > A$ und $Y > B$. Bedingung (5) wäre dann entsprechend zu ändern. — Der Bedingung (4) genügt Euklid auf Grund von Satz 1, Buch X seiner Elemente: Nimmt man von einer Gröſse mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als dessen Hälfte u. s. w., so kommt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner ist als eine gegebene Gröſse. Wählt man also $X_0 > \frac{A}{2}$, dann $X_1 > \frac{1}{2}(A - X_0)$, dann $X_2 > \frac{1}{2}(A - X_0 - X_1)$ u. s. w., und bezeichnet δ irgend eine noch so kleine gegebene Gröſse, so ist irgend einmal $A - (X_0 + X_1 + X_2 + \ldots)$ oder $A - X < \delta$.

Als ein Beispiel einfachster Art zu diesem allgemeinen Schema diene der Beweis des Satzes: Die Flächen zweier Kreise stehen zu einander im doppelten Verhältnis (verhalten sich wie die Quadrate) ihrer Durchmesser. A und B sind die Kreise, X und Y einander ähnliche den Kreisen einbeschriebene reguläre Vielecke, das Verhältnis dieser Vielecke ist konstant und gleich dem Verhältnisse der Quadrate der Durchmesser; sie erfüllen alle Bedingungen (1) bis (5). Der Bedingung (4) wird genügt, weil, wenn AB eine Sehne der Kurve K, DC die zu AB parallele Tangente (Berührungspunkt E) und $ABCD$ ein Parallelogramm ist, alsdann Dreieck $ABE = \frac{1}{2}$ Parallelogramm $ABCD$, aber Segment $ABE <$ Parallelogramm $ABCD$ und daher $\triangle ABE > \frac{1}{2}$ Segment ABE ist.



Allgemeine Charakteristik des Exhaustionsverfahrens von Archimedes.

Die Methoden von Archimedes lassen sich nicht unter ein einziges Schema bringen. Man würde hier verschiedene allgemeine Fälle zu unterscheiden haben. Ein Schema allgemeinster Art ist das folgende:

Es seien A und B zwei Figuren von so verschiedener Form, daſs es nicht möglich ist, die eine von ihnen durch Zerlegung in Teile und durch andere Anordnung der Teile in die Form der andern überzuführen. Es wird gleichwohl behauptet, Gröſse $A =$ Gröſse B. Man fordert den Beweis dieser Behauptung.

Schema I. Man konstruiere zwei Hilfsfiguren X und Y, die den folgenden Bedingungen genügen: 1) durch irgend eine vorgeschriebene, an beiden Figuren X und Y ausgeführte gesetzmäſsige Veränderung, z. B. wenn X und Y Vielecke sind, durch Verdoppelung der Seitenzahl, wird erreicht, daſs X zunimmt, aber Y abnimmt, doch so, daſs 2) immer $X < A < Y$ bleibt, und daſs gleichwohl 3) das Verhältnis $Y : X$ durch hinreichend häufige Ausführung jener gesetzmäſsigen Veränderung dem Verhältnis der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden kann. — Man konstruiere zwei weitere Hilfsfiguren X_1 und Y_1, welche zu B und zu einander in dieselbe Beziehung treten wie X und Y zu A und zu einander, also daſs 2′) $X_1 < B < Y_1$, 3′) das Verhältnis $Y_1 : X_1$ dem der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden kann und daſs schlieſslich immer 4) $X_1 \geq X$ und $Y_1 \leq Y$ ist. — Lassen sich solche Hilfsfiguren konstruieren, so ist sicher $A = B$.

Denn gesetzt, es wäre $A < B$, so kann man (Bed. 3) Y und X einander so nahe bringen, dafs $Y : X < B : A$; dann wäre (Bed. 4) $Y_1 : X < B : A$. Dies widerspricht aber den Voraussetzungen $Y_1 > B$ (Bed. 2′) und $X < A$. Es ist also nicht $A < B$.

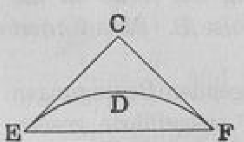
Wäre aber $A > B$, so kann man Y und X einander so nahe bringen, dafs $Y : X < A : B$; dann wäre (Bed. 4) auch $Y : X_1 < A : B$; dies widerspricht aber den Voraussetzungen $Y > A$ und $X_1 < B$. Es ist also weder $A < B$, noch $A > B$; also ist $A = B$.

Anstatt mit Verhältnissen operiert Archimedes auch mit Differenzen. Bedingung (3) ist dann so zu formulieren: die Differenz $Y - X$ kann bei hinreichend häufiger Ausführung der gesetzmäfsigen Operation an X und Y kleiner als jede gegebene Gröfse gemacht werden.

Da es vielfach nicht nötig ist, zwei Paare von Hilfsfiguren X und Y sowie X_1 und Y_1 zu konstruieren, sondern ein Paar, X und Y, hinreichend ist, so besitzt auch das folgende vereinfachte Schema noch grofse Allgemeinheit.

Schema II. Es werden zwei von der Form der Figur A abhängige Hilfsfiguren X und Y konstruiert, die den Bedingungen genügen, 1) dafs immer $X < A < Y$ und auch 2) $X < B < Y$ bleibt und dafs gleichwohl 3) durch eine hinreichend häufig ausgeführte, einem bestimmten Gesetz unterliegende Veränderung an den Figuren X und Y ihr Gröfsenunterschied $Y - X$ kleiner als jede gegebene Gröfse gemacht werden kann. — Können solche Figuren X und Y konstruiert werden, so ist $A = B$. — Denn wäre $A > B$, so könnten X und Y einander so nahe gebracht werden, dafs $Y - X < A - B$ wäre; dies stünde aber in Widerspruch mit den erfüllten Bedingungen $Y > A$ und $X < B$. — Wäre aber $A < B$, so könnten X und Y einander so nahe gebracht werden, dafs $Y - X < B - A$; das widerspräche aber den erfüllten Bedingungen $Y > B$ und $X < A$. Also ist $A = B$.

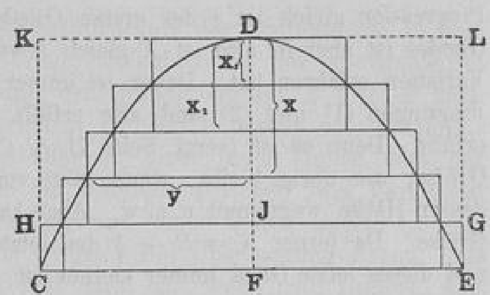
Ein einfaches Beispiel hierzu ist der Beweis des Satzes, dafs die Kreisfläche gleich ist einem Dreieck, dessen Basis gleich dem Kreisumfange und dessen Höhe gleich dem Kreisradius ist. Man setze für A die Kreisfläche, für B die Fläche des Dreiecks. X ist das dem Kreise einbeschriebene, Y das umbeschriebene reguläre Polygon. Die gesetzmäfsige Operation, durch die X und Y einander beliebig nahe gebracht werden können, ist die fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl dieser Polygone. Dabei ist es bemerkenswert, dafs die Erfüllung der Bedingungen $A < Y$ und $B < Y$ sich auf eine von Archimedes nicht bewiesene Annahme stützt, nämlich:



„Von andern als geraden Linien mit einerlei Endpunkten in einer Ebene sind je zwei solche ungleich, die nach einerlei Seite hohl sind, wenn deren eine entweder die andere ganz umschliefst oder nur zum Teil in sie fällt. Die umschlossene ist die kleinere.*) Auf Grund dieser Annahme ist $EC + CF >$ Bogen EDF und deshalb $A < Y$ und $B < Y$.

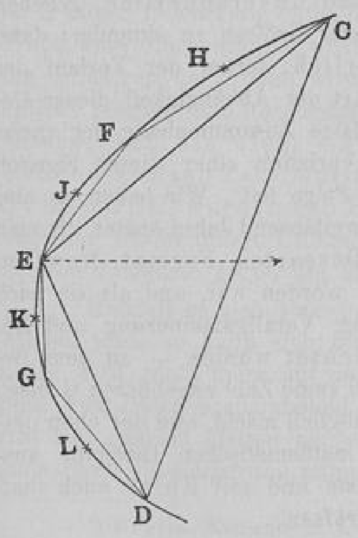
Als ein zweites Beispiel zu obigem vereinfachten Schema diene der Beweis des Satzes: Das Volumen eines Rotationsparaboloids CDE (Scheitel D, Achse DF) ist halb so grofs als der Cylinder über der Basis CE und mit der Höhe FD. — A ist das Volumen des Paraboloids, Y die Summe der umbeschriebenen, X die Summe der inneren Cylinder, $Y - X$ wird gleich dem letzten umbeschriebenen Cylinder $CEGH$ und kann durch Verkleinerung seiner Höhe IF beliebig klein gemacht werden, so dafs der Bedingung (3) genügt wird. B ist die Hälfte des Cylinders über der Basis CE und mit der Höhe DF.

*) Vergl. Archimedes, Vorhandene Werke, aus dem Griechischen von E. Nizze, Stralsund 1824.



Dafs dieses B den Bedingungen (2) genügt, erfordert einen Beweis. Man mache die Höhen aller inneren und äufseren Cylinder einander gleich $\left(=\frac{DF}{n}\right)$; dann ist die Summe aller äufseren Cylinder (Y) proportional mit $y_1^2 + y_2^2 \cdots + y_n^2$, also auf Grund der Eigenschaft der Parabel proportional mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; analog ist die Summe der inneren Cylinder (X) proportional mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$. Da nun $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1$ u. s. w., so ist $Y : X = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) : (1 + 2 + 3 \cdots (n-1))$. Aber die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression ist gröfser als die halbe Summe von ebensoviel Gliedern, deren jedes gleich dem letzten Gliede der Progression ist; dagegen ist die Summe aller Glieder der Progression, von der das letzte Glied weggenommen ist, kleiner als jene halbe Summe $\left(\text{nämlich } \frac{(n-1)n}{2} < \frac{nn}{2} < \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Das letzte Glied jener Progression entspricht aber dem untersten Cylinder $CEGH$, und die halbe Summe von n solchen Cylindern ist der halbe Cylinder CL, d. h. $= B$, also ist $X < B < Y$.

Schema III. Auch mittels einer einzigen veränderlichen Hilfsfigur X kann der Beweis für $A = B$ erbracht werden. Man konstruiere dieselbe so, dafs den Bedingungen genügt wird: 1) $X < A$; 2) $X < B$; 3) durch hinreichend häufig ausgeführte, einem bestimmten Gesetze folgende Veränderung (Variation) der Figur X wird der Unterschied $A - X$, sowie auch $B - X$ kleiner als irgend eine gegebene Gröfse. Läfst sich eine solche Figur X konstruieren, so ist $A = B$. — Denn wäre $A > B$, so könnte man X dem A so nahe bringen, dafs $A - X < A - B$; das widerspräche aber der erfüllten Bedingung $X < B$. Wäre aber $A < B$, so könnte man X dem B so nahe bringen, dafs $B - X < B - A$; das widerspräche aber der erfüllten Bedingung $X < A$. Also ist $A = B$.



Ein Beispiel hierzu ist der Beweis des Satzes, dafs das Parabelsegment über einer Sehne CD gleich $\frac{4}{3}$ des Dreiecks CDE ist, wenn E ein solcher Punkt der Parabel ist, dafs der durch ihn gelegte Parabeldurchmesser die Sehne CD halbiert. — Hierbei ist A = Parabelsegment; $B = \frac{4}{3}$ Dreieck CDE. Das Gesetz, nach dem die Figur X konstruiert und variiert wird, besteht darin, dafs in gleicher Weise, wie $\triangle\, DCE$ über Sehne CD konstruiert worden ist, auch über jeder andern neu entstehenden Sehne das Dreieck konstruiert wird. X ist dann die Summe aller dieser Dreiecke, also anfangs das Dreieck CDE selbst, dann das Fünfeck $CFEGD$, dann ein Neuneck $CHFIEKGLD$ u. s. w. u. s. w. Aus der Natur der Parabel wird bewiesen, dafs die aufeinanderfolgenden Vergröfserungen der Figur X eine geometrische Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ bilden. Es wird ferner bewiesen, dafs die Summe aller Glieder einer solchen

Progression gleich ist $\frac{4}{3}$ des ersten Gliedes vermindert um $\frac{1}{3}$ des letzten Gliedes. $\frac{4}{3}$ des ersten Gliedes ist aber B; also ist X gleich B vermindert um $\frac{1}{3}$ der Vergröfserung, die X bei der letzten Variation erfahren hat. Daher ist immer $X < B$. Es ist aber auch immer $X < A$. Die Bedingungen (1) und (2) sind also erfüllt. Nach Euklid X, 1 ist aber auch die Bedingung (3) erfüllt. Denn es ist (vergl. Seite 7) $\triangle\ CDE > \frac{1}{2}$ Segment CDE u. s. w., also ist $A - X$ eine Gröfse, die übrig bleibt, wenn man von A mehr als seine Hälfte, von dem Reste mehr als dessen Hälfte wegnimmt u. s. w. Also kann $A - X$ kleiner gemacht werden als jede gegebene Gröfse. Da ferner $X = B - \frac{1}{3}$ des letzten Gliedes der Progression ist, deren Summe X ist, und dieses letzte Glied immer kleiner ist, als das dem vorangegangenen X entsprechende $A - X$, so folgt, dafs auch $B - X$ kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Gröfse. Also ist Bedingung (3) erfüllt; also ist $A = B$.

Die logischen Grundlagen des Exhaustionsverfahrens der Alten.

Versuchen wir jetzt, die Momente hervorzuheben, denen die soeben allgemein dargestellten Schlufsfolgerungen ihre Beweiskraft verdanken. Liegen sie in der deductio ad absurdum, die sich bei jedem einzelnen Beweis in den Vordergrund drängt? Nach meinem Gefühl werden das logische Gewissen und das intellektuelle Bedürfnis nach Erkenntnis der Gründe für die Richtigkeit der jeweiligen Behauptung schon befriedigt, sobald man in jedem einzelnen Falle erkannt hat, ob den Bedingungen, auf deren Erfüllung sich die deductio ad absurdum stützt, auch wirklich genügt wird, bez. genügt werden kann. Hat man erst eingesehen, dafs die Bedingungen erfüllt werden können, so verzichtet man gern auf jede weitere Sicherung der schon vorhandenen Überzeugung von der Wahrheit der Behauptung durch die deductio ad absurdum. Gilt es aber, sich von der Erfüllbarkeit der Bedingungen zu überzeugen, so ist eine ansehnliche Reihe von Begriffen und logischen Verkettungen derselben untereinander gleichzeitig im Bewufstsein festzuhalten. Zuerst die Figuren A und B als fest und unveränderlich, gegeben nach Form und Eigenschaften, unbekannt nach dem Verhältnis ihrer Gröfsen zu einander; dann die Hilfsfiguren und Hilfsgröfsen X, Y, X_1 und Y_1 als veränderlich; ferner der Verlauf der Veränderungen der $X, Y \cdots$ nach bestimmten Gesetzen und die Art der Abhängigkeit dieser Gesetze von der Natur der Figuren A und B; weiter der gesetzmäfsige Zusammenhang der variabelen Figuren X und Y u. s. w. untereinander, derart, dafs die Variation einer dieser Figuren eine ganz bestimmt geartete Variation der übrigen Figuren zur Folge hat. Wir haben es also mit den Begriffen und logischen Beziehungen zu thun, die, fast zweitausend Jahre später, als man infolge der Erweiterung der Geometrie durch die Arbeiten von Descartes, Fermat, Newton, Leibniz und anderen immer und immer wieder auf sie geführt worden war, und als sie nach Verwendung bei ungezählten Problemen die hinreichende Klärung, Verallgemeinerung und Bereicherung erfahren hatten, zu einem einzigen Begriff verdichtet wurden, — zu dem Begriff, der allein das anscheinend Unmögliche, mit unendlichen, durch keine Zahl angebbaren Gröfsen mit derselben Sicherheit wie mit endlichen Gröfsen zu operieren, möglich macht, und der eben deshalb, sobald die Infinitesimalrechnung zu einer selbständigen mathematischen Disciplin ausgebildet war, die Grundlage der gesamten Analysis bilden mufste und seit Euler auch thatsächlich bildet: zu dem Begriffe der **Funktion veränderlicher Gröfsen.**

Das entscheidende Moment bei der Prüfung der Erfüllbarkeit der Bedingungen in dem Beweisverfahren der alten Geometer liegt nun in der Frage, ob auf Grund des gesetzmäſsigen Zusammenhanges unter den Variabelen X, Y u. s. w. und den festen Gröſsen A und B nach hinreichend häufig ausgeführter Variation der veränderlichen Gröſsen entweder das Verhältnis einer Veränderlichen zu einer anderen Veränderlichen oder zu einer festen Gröſse dem der Gleichheit beliebig nahe gebracht werden kann, oder ob die Differenz zwischen zwei Variabelen $(Y-X)$ oder die Differenz zwischen einer veränderlichen und einer festen Gröſse $(A-X)$ kleiner gemacht werden kann, als irgend eine gegebene Gröſse. Die Überzeugung davon, daſs $A=B$ ist, tritt ungeachtet der deductio ad absurdum erst dann ein, wenn man zugiebt, daſs die Differenzen $Y-X$ und $A-X$ so klein gemacht werden können, daſs sie überhaupt keine Gröſse mehr haben. Dies ist aber nicht eher der Fall, als bis man die gesetzmäſsige Variation an den variabelen Gröſsen unendlich oft ausgeführt hat, bez. ausgeführt denkt. So deckt sich denn der Begriff desjenigen X, für das die Differenz $A-X$ wirklich kleiner ist — nicht erst kleiner gemacht werden kann — als jede gegebene Gröſse, vollständig mit dem Begriff der **Summe einer unendlichen konvergenten Reihe,** und A mit dem Begriffe des **Grenzwertes** dieser Summe; und die Differenzen $Y-X$ und $A-X$ u. s. w. decken sich mit dem, was in mathematischen Lehrbüchern des 19. Jahrhunderts als **unendlich kleine Gröſse** definiert wird. Denn eine Differenz zweier variabelen Gröſsen y_1 und y wird unendlich klein genannt, wenn diese Gröſsen bei gleichzeitiger Befolgung einer vorgeschriebenen Gesetzmäſsigkeit so verändert werden können, daſs ihre Differenz kleiner wird als jede gegebene Gröſse.

Die Erkenntnis, daſs die Differenz $A-X$ kleiner als jede gegebene Gröſse wird, stützt sich, wie schon erwähnt, bei Euklid und Archimedes zumeist auf den Satz: Wenn von einer Gröſse AB die Hälfte oder mehr als die Hälfte, von dem Reste wieder die Hälfte oder mehr weggenommen wird u. s. w., so kommt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner ist als eine gegebene Gröſse C.*) Dieser Satz wird von Euklid bewiesen. Der Beweis beginnt mit den Worten: »Mache, was immer angeht, von C ein Vielfaches, das zunächst gröſser als AB ist.« Der in dieser Bemerkung enthaltene Grundsatz findet sich bei Archimedes so ausgesprochen**): »Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um den der kleinere vom gröſseren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, daſs dadurch jeder gegebene endliche Flächenraum übertroffen wird.« Hieraus kann man die Folgerung ziehen: Zwei Gröſsen gleicher Art, die nicht einen solchen Unterschied haben, daſs er, mit einer hinreichend groſsen Zahl multipliciert, irgend eine gegebene endliche Gröſse derselben Art übertrifft, wurden von Euklid und Archimedes als einander gleich erachtet. Diese Folgerung ist für unsere Untersuchung deshalb wichtig, weil sich Leibniz mehrfach auf sie beruft, um Einwürfe gegen die Wissenschaftlichkeit seiner Methode abzuwehren.

Handelt es sich aber um die Differenz $Y-X$, in der sowohl Minuend als Subtrahend variabel sind, so kann sich die Erkenntnis, daſs $Y-X$ schlieſslich kleiner als jede gegebene Gröſse wird, nicht mehr auf den mehrfach angeführten Euklidischen Satz stützen. In dem Beispiele vom Rotationsparaboloid ist $Y-X$ gleich dem untersten Teilcylinder $CEGH$. $Y-X$ wird hier deshalb kleiner als jede gegebene Gröſse, weil dieser Cylinder bei konstant bleibender Basis durch Verkleinerung seiner Höhe kleiner gemacht werden kann, als jedes gegebene Volumen.

*) Euklid, Elemente X, 1. — **) Archimedes, a. a. O. S. 12.

Dieser unter alle Grenzen der Kleinheit sinkende Archimedische Cylinder unterscheidet sich aber in nichts von der Leibnizischen Infinitesimalgröſse dv in der Formel $v = \int dv$, wenn v das Volumen des Rotationsparaboloides bezeichnet.

Wir entnehmen dieser kurzen Betrachtung des Exhaustionsverfahrens der Alten das Ergebnis, daſs in ihm zwar der Ausdruck des Unendlichen auf eine bewundernswert geschickte Weise vermieden wird, daſs aber gleichwohl in ihm sowohl die Vorstellung unendlicher gesetzmäſsig verlaufender Processe als auch die Idee unendlich kleiner Gröſsen wirksam sind, ja das ausschlaggebende Moment bilden.

Newtons Methoden der Analysis kontinuierlich veränderlicher Gröſsen.

Um über die den Newtonschen Methoden zu Grunde liegenden Anschauungen ein sicheres Urteil zu gewinnen, genügt es nicht, nur seine »Methodus fluxionum« zu studieren; man muſs auch die früher geschriebene Abhandlung: »Analysis per aequationes etc.«, sowie den späteren »Tractatus de quadratura curvarum« beachten und darf seine »Philosophiae naturalis principia mathematica« nicht vergessen.

An dieser Stelle kann nur ein Teil meiner Untersuchungen über diese Werke Newtons zur Fixierung kommen.

Newtons »Analysis per aequationes numero terminorum infinitas.«

(Geschrieben zwischen 1660 und 1670; veröffentlicht 1711.)*)

Was Newton in dieser Schrift geben wollte, deutet er am Eingange mit den Worten an: »Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.«

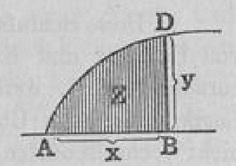
Das Problem, um das es sich hier handelt, ist ein Problem der »haute géometrie«, nämlich das der Ermittelung des Verhältnisses von Gröſsen, für die auf elementar-geometrische Weise ein beiden homogenes gemeinschaftliches Maſs nicht gefunden werden kann. Zunächst handelt es sich um Flächenräume. Es wird das Verhältnis einer von Strecken und Kurventeilen begrenzten ebenen Fläche zur Fläche des Quadrats über der Streckeneinheit gesucht. Das Problem der Quadratur ist aber bei Newton ein allgemeines, nicht mehr, wie bei den Geometern des Altertums, jeweils auf eine bestimmte Figur beschränkt. Nicht mehr die Quadratur einer einzelnen Kurve soll ermittelt werden, sondern eine methodus generalis zur Quadratur aller möglichen Kurven, deren Natur durch eine Relation zwischen rechtwinkeligen Koordinaten x und y ihrer Punkte gegeben ist. Die Mannigfaltigkeit der möglichen Relationen zwischen x und y ist unbegrenzt. Wie in der elementaren Geometrie zwei Flächen, bevor für sie ein gemeinschaftliches Maſs gefunden werden kann, bei Festhaltung ihrer Gröſse verwandelt werden müssen in andere Figuren, z. B. in Rechtecke, so müssen die Gleichungen zwischen x und y bei Festhaltung der durch sie ausgedrückten Relation und Abhängigkeit zwischen x und y trans-

*) Newtoni Opuscula etc., Ausgabe Castillioneus 1744.

formiert werden in Gleichungen anderer Form. Die Grundform, auf die Newton jede gegebene Gleichung transformiert, ist diese: $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} +$ etc., wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ rationale Zahlen bedeuten. Die Zahl der Glieder der rechten Seite wird im allgemeinen unendlich grofs. Dies begründet den Titel der Abhandlung.

So interessant und für einen Lehrer der Mathematik insbesondere lehrreich die Methoden und Wege sind, auf denen Newton mit den damals beschränkten analytischen Hilfsmitteln seine Transformationen durchführt, und wie sehr sie auch geeignet sind, die erstaunliche Divinationsgabe des bei Abfassung der Schrift kaum mehr als zwanzigjährigen Newton bewundern zu lassen, so gestattet der für diese Notizen zugelassene Raum doch nicht, jene Methoden und Wege hier näher zu verfolgen. Eines aber mufs auch hier festgestellt werden. Wir haben bei Besprechung des Exhaustionsverfahrens der Alten gesehen, dafs die Gröfsen X zufolge der Art ihrer Bildung ebenfalls die Summe einer unendlichen Anzahl von Gliedern $X = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots$ *ohne Ende* bedeuteten, dafs aber von den Alten in jedem Falle der Beweis erbracht wurde, dafs (mit Benützung der heutigen Schreibweise) $\operatorname{Lim}\{A - (X_0 + X_1 + X_2 + \ldots)\}$ kleiner als jede gegebene Gröfse wird. Auch Newton mufste, wenn er streng wissenschaftlich verfahren wollte, jedesmal, nachdem er eine Gleichung $f(x,y) = 0$*) in die Form $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + \ldots +$ *ohne Ende* transformiert hatte, sich die Frage vorlegen, ob überhaupt und für welche Werte von x ein bestimmter Wert y existiert, dergestalt, dafs $\operatorname{Lim}\left\{y - (ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots \textit{ ohne Ende})\right\}$ kleiner wird als jede gegebene Gröfse. Newton unterläfst es, diese Frage in der seinen Methoden entsprechenden Allgemeinheit zu beantworten, obgleich er, nach Analogie mit den unendlichen Decimalbrüchen, nur konvergente Reihen im Auge hat. Er begnügt sich damit, sein Transformationsverfahren durch Hinweis auf Euklids Konvergenzsatz (vergl. S. 7) zu rechtfertigen.

Newton giebt für die Quadratur der Kurven drei Regeln.



Curvarum simplicium quadratura.

Regula I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} =$ Areae ABD.

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

Regula II.

Si valor ipsius y ex pluribus istiusmodi terminis componitur, area etiam componetur ex areis quae a singulis terminis emanant.

Aliarum omnium quadratura.

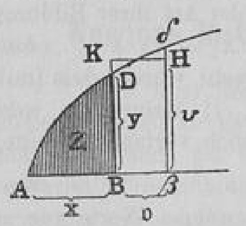
Regula III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus terminus sit praecedentibus magis compositus, in terminos simpliciores reducendus est, operando in literis ad eundem modum quo Arithmetici in numeris decimalibus dividunt, radices extrahunt, vel affectas aequationes solvunt; et ex istis terminis quaesitam Curvae superficiem per praecedentes regulas deinceps elicies.

*) Die Ausdrucksweise $y =$ einer Funktion von x und die Bezeichnung $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ u. s. w. gab es bei Newton und Leibniz noch nicht. Ich bediene mich ihrer in geeigneten Fällen der Kürze wegen.

Ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ transformiert in die unendliche Reihe $y = a x^{\alpha} + b x^{\beta} + \ldots$, so ist Fläche $ABD = z = \frac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + \frac{b}{\beta + 1} x^{\beta + 1} + \ldots$ *ohne Ende.* Noch mehr wie oben vermifst man hier den Nachweis, dafs wirklich ein z existiert, für das $\text{Lim}\left\{z - \left(\frac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + \frac{b}{\beta + 1} x^{\beta + 1} + \ldots\right)\right\}$ kleiner als jede gegebene Gröfse wird.

Wir fragen jetzt nach der Begründung dieser Regeln. Newton giebt eine solche nur für die Regel I, und zwar erst am Ende der Abhandlung. Übrigens beweist er nicht die Regel I, sondern ihre Umkehrung: Ist Fläche $z\ (= ABD$ der Kurve $AD) = \frac{n a}{m + n} \cdot x^{\frac{m + n}{n}}$,



so ist die Endordinate $y\ (= BD) = a x^{\frac{m}{n}}$; denn es sei $\mathfrak{o} = B\beta$ eine beliebige Verlängerung der Abscisse $AB = x$*), ferner $v = BK$ so lang, dafs Rechteck $\beta K = v \cdot \mathfrak{o}$ gleich der Fläche $BD\delta\beta$ wird. Zur Abkürzung wird gesetzt $\frac{an}{m + n} = c$ und $m + n = p$, dann ist $z = c \cdot x^{\frac{p}{n}}$, folglich $z^n = c^n \cdot x^p$ und $(z + v\mathfrak{o})^n = c^n (x + \mathfrak{o})^p$; daher $n z^{n-1} \cdot v\mathfrak{o} + M \cdot v^2 \mathfrak{o}^2 + \ldots = c^n p x^{p-1} \cdot \mathfrak{o} + N \cdot \mathfrak{o}^2 + \ldots$, und nach Division durch $\mathfrak{o}$,

$$n z^{n-1} \cdot v + M \cdot v^2 \mathfrak{o} + \ldots = c^n p x^{p-1} + N \cdot \mathfrak{o} + \ldots$$

»Si jam supponamus**) *$B\beta$ in infinitum diminui et evanescere, sive $\mathfrak{o}$ esse nihil,* erunt v et y aequales, et termini per $\mathfrak{o}$ multiplicati evanescent, quare restabit« $nz^{n-1}y = c^n p x^{p-1}$, oder (zufolge der Bedeutung von z, c und p) $y = ax^{\frac{m}{n}}$; was zu beweisen war.

Diese Schlufsweise, obgleich von den fruchtbarsten Mathematikern vor und nach Newton, von Fermat und Euler vielfach angewandt, hat immer den Widerspruch der strengen Logik herausgefordert, weil die logische Strenge und Konsequenz, weil der oberste Grundsatz aller Logik, dafs beim Übergange von den Prämissen zum Schlufssatze die Begriffe ihre Bedeutung nicht wechseln dürfen, durchbrochen werden durch Anwendung des »$\mathfrak{o}$ esse nihil« auf eine Gleichung, deren Giltigkeit nur unter der Voraussetzung eines von 0 verschiedenen $\mathfrak{o}$ erwiesen worden ist. Diesem Widerspruche ist auch von hervorragenden Denkern Ausdruck verliehen worden. Der irische Bischof und Philosoph Berkeley bekämpfte obige Art zu schliefsen in seiner Schrift: »*The Analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician,* London 1734.« An die Spitze seiner vernichtenden Kritik stellte er (Articlo XII) das folgende Lemma:

»If with a view to demonstrate any proposition a certain point is supposed, by virtue of which certain other points are attained; and such supposed point be itself afterwards destroyed or rejected by a contrary supposition; in that case all other points attained thereby and consequent thereupon must also be destroyed or rejected, so as from thenceforward to be no more supposed or applied in the demonstration. This is so plain as to need no proof.«

---

*) Newton schreibt *o*, vielleicht um die Kleinheit dieser Gröfse anzudeuten. Ich schreibe das deutsche $\mathfrak{o}$, um der Verwechselung mit Null vorzubeugen.

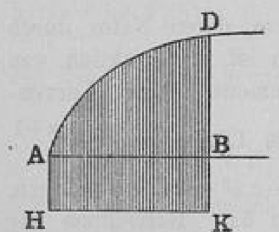
**) Opuscula Newtoni I, S. 25 f.

Lagrange, der ja 1784 Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften war, bemerkt in seinen »*Leçons sur le calcul des fonctions*« in der 18. Vorlesung mit Bezug auf obige Schlufsweise: »On voit que Fermat a ouvert la carrière par une idée très-originale, *mais un peu obscure,* qui consiste à introduire dans l'équation une indéterminée qui doit être nulle par la nature de la question, mais qu'on ne fait évanouir qu'après avoir divisé toute l'équation par cette même quantité. Cette idée est devenue le germe des nouveaux calculs qui ont fait faire tant de progrès à la géometrie et à la mécanique; *mais on peut dire qu'elle a porté aussi son obscurité sur les principes de ces calculs.*

Wir stehen hier thatsächlich vor einem logischen Widerspruche gegen eine mathematische Beweisführung. Denn von den Forderungen der formalen Logik ausgehend, ist nichts sicherer, als das Berkeleysche Lemma. Dafs diesem Lemma aber, wenn es sich um den hier in Betracht kommenden Fall handelt, dennoch die Spitze abgebrochen werden kann, liegt in der besonderen Natur des materiellen Inhalts der Vorstellungen und Begriffe des Kontinuums, der kontinuierlichen Veränderung und des kontinuierlichen Überganges, um die es sich hier handelt. Hierauf näher einzugehen, geben uns erst die Ausführungen von Leibniz Anlafs. Hier notieren wir uns nur die Thatsache, dass Newton mit der Null wie mit einer Gröfse rechnet, dafs das Zeichen o bei ihm bald die Bedeutung einer Gröfse, bald die von keiner Gröfse hat, ohne dafs er es für nötig hält, dies besonders zu begründen oder als eine in der Natur der Sache begründete Forderung besonders zu formulieren.

Newtons Analogieschlüsse. Analyse seines Begriffs des Momentes einer veränderlichen Gröfse.

Newton behandelt in dieser Abhandlung nicht nur das Problem der Quadratur, sondern auch das der Rektifikation. Auch dieses ist ein Problem der höheren Geometrie, insofern, als es nach den Begriffen der Elementargeometrie ein gemeinsames Mafs zwischen einer Strecke und einer Kurve gar nicht geben kann; insofern als es, wenn man nicht zu unendlich kleinen Gröfsen greifen will, gar nicht möglich ist, die Länge einer Kurve durch eine Strecke zu messen oder sie als Summe von Strecken zu betrachten, und daher das Verhältnis der Gröfse ihrer Länge zur Gröfse einer Strecke auf elementar-geometrische Weise zu ermitteln. Wir bringen daher der Art, wie Newton seine zunächst nur für Quadraturen gegebenen und bewiesenen Regeln zu solchen für Rektifikationen erweitert, von vornherein ein erhöhtes Interesse entgegen.



Newton sagt:*) »Sit ABD curva quaevis, et $AHKB$ rectangulum, cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, *areas* ABD et AK *describere;* et quod BK (1) sit *momentum, quo* AK (x), *et* BD (y) *momentum, quo* ABD *gradatim augetur;* et quod ex momento BD perpetim dato, possis, per praedictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum area AK (x) momento 1 descripta conferre.

Jam, qua ratione superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per praecedentes regulas elicitur, eadem *quaelibet alia quantitas ex momento suo* sic dato elicietur.«

*) Opuscula Newtoni I, S. 18.

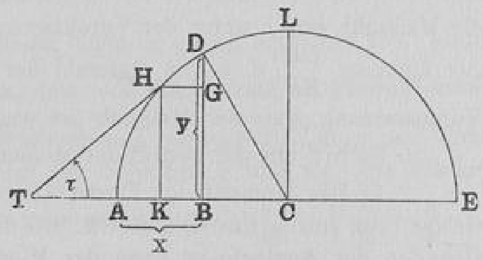
Als wichtig und neu tritt hier der Begriff des **Moments** auf. Aber eine klare unzweideutige Definition dieses Begriffs fehlt. Die wahre Bedeutung des Moments ist die einer Infinitesimalgröfse, der unendlich kleinen Zunahme, um die die variabele Fläche bei unendlich kleiner Verrückung der Ordinate wächst. Diese Deutung stimmt zusammen mit dem: momentum est quo ABD gradatim augetur; sie stimmt aber scheinbar nicht zusammen damit, dafs das Moment von AK gleich 1, und das Moment von ABD gleich BD, also jeweils erstens eine endliche Gröfse und zweitens eine Länge sein soll. In Wahrheit ist aber das Moment von AK nicht $= 1$ und das Moment von ABD nicht $= BD$, sondern beide Momente **verhalten** sich zu einander wie $BK : BD$, nach dem Satze: Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen. Die beiden unendlich kleinen Flächenzunahmen von AK und ABD stehen eben auf gemeinsamer, aber unendlich kleiner Basis und werden beide als Rechtecke mit den Höhen BK und BD aufgefafst. Das Moment von ABD ist nicht BD, sondern die Gröfse $v \cdot \mathfrak{o} = y \cdot \mathfrak{o}$ im Beweis zu Regel I, um die z wächst. Im übrigen aber sind es von Leibniz, nicht von Newton ausgesprochene Ideen, durch die die Klarstellung des Momentbegriffs möglich wird. Vorausgesetzt, dafs jemand von Infinitesimalrechnung nichts wüfste und diese Abhandlung studierte, so würde er schwerlich aus dem Wortlaut Newtons über den Begriff des Moments zu einer klaren, mathematisch definierbaren Ansicht kommen. Buchstäblich genommen ist das Moment der Fläche nach Newtons Darstellung eine Strecke, nämlich die Ordinate, durch die die Fläche beschrieben wird. Daran müssen wir uns einstweilen halten.

Newton sagt also: Ich besitze eine Regel, um aus der gegebenen Beziehung zwischen der Ordinate y und der Abscisse x die zwischen x und y und dem Kurvenstück $\widehat{AD}$ gelegene Fläche aus der Länge x zu berechnen. x und y bedeuteten bisher nichts anderes als Strecken, bez. Mafszahlen von Strecken. Nun aber wird die Bedeutung von x geändert. An Stelle von x tritt das Produkt $1 \cdot x$, worin 1 nicht als Zahlencoefficient, sondern als Strecke AH, als Länge der Mafseinheit angesehen wird. Das Zeichen x hat also einmal die Bedeutung einer Strecke, ein andermal die Bedeutung einer Fläche (AK). Durch parallele Verschiebung der 1 (BK) wird die Fläche x beschrieben; in gleicher Weise wird die Fläche ABD beschrieben durch parallele Verschiebung von BD ($= y$). 1 funktioniert also in Beziehung auf Fläche AK gerade so wie y in Beziehung auf ABD. In dieser Funktion aufgefafst sind beide einundderselbe Begriff, den Newton mit Moment bezeichnet. Nach den gegebenen Regeln erzeugt das Moment 1 die Fläche x, und das Moment $a\,x^{\frac{m}{n}}$ die Fläche $\frac{a\,n}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}$.

Wie nun, wenn nicht die Fläche, sondern die Länge der Kurve, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y ihrer Punkte gegeben ist, als Funktion von x dargestellt werden soll? Die Regel wird diese sein: Das konstante Moment 1 einer Kurvenlänge erzeugt die Länge x, und das variabele Moment ax^{α} erzeugt die Länge $\frac{a}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$. Nicht die Ordinate y ist daher in diesem Falle auf die Form $ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$ zu bringen, sondern diejenige Gröfse, die als **Moment der Kurvenlänge** zu gelten hat. Bezeichnen wir sie mit λ, so wird auf Grund der gegebenen Gleichung der Kurve zwischen x und y das Moment λ durch x dargestellt und auf die Form $\lambda = a\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + \ldots$ gebracht; dann ist $\frac{a}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + \frac{b}{\beta+1} \cdot x^{\beta+1} + \frac{c}{\gamma+1} \cdot x^{\gamma+1} + \ldots$ die Länge $\widehat{AD}$ der Kurve.

Dieser Gedankengang ist von Anfang bis zu Ende eine Analogie. Wir stehen nun vor der Frage: Was ist dieses λ, dieses Moment der Kurvenlänge? Führen wir die Analogie weiter, so ist die einzige Antwort diese: ein Etwas, das, während es bewegt wird, die Kurvenlänge beschreibt. Also ein Punkt! Wenn aber λ nur einen Punkt bezeichnet, wie kann es da die Gröfse $ax^{\alpha} + bx^{\beta} + \cdots$ haben, worin x doch Mafszahl einer Strecke AB ist? Niemand wird leugnen, dafs die Klarheit und Evidenz, die man mathematischen Deduktionen sonst nachrühmt, hier getrübt ist. Wir suchen das, was sich aus der allgemeinen Regel nicht mit Eindeutigkeit ergiebt, aus den Anwendungen, die Newton macht, zu gewinnen. Wir folgen seiner Rektifikation des Kreises.*)

»Sit $ADLE$ circulus, cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducta tangente DHT et completo *indefinite parvo* rectangulo $HGBK$, et posito $AE = 1 = 2AC$; erit, ut BK, sive GH, momentum basis AB (x), ad HD momentum arcus $AD :: BT : DT :: BD\left(\sqrt{x - xx}\right) : DC\left(\frac{1}{2}\right) :: 1\ (BK)$ $: \frac{1}{2\sqrt{x - xx}}\ (DH)$. Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x - xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x - xx}}{2x - 2xx}$ est momentum arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$ Quare, per regulam secundam, longitudo arcus AD est $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \ldots \text{etc.}$«



Das Fundament dieser Herleitung besteht 1) darin, dafs eine unendlich kleine Figur einer bez. zwei endlichen Figuren ähnlich erachtet und die Verhältnisse der Seiten der unendlich kleinen Figur dementsprechend den Verhältnissen homologer Seiten der endlichen Figuren gleich gesetzt werden; 2) darin, dafs das Zeichen 1 einmal die Längeneinheit im Gebiete endlicher Strecken, ein andermal die Längeneinheit im Gebiete unendlich kleiner Strecken bedeutet, — denn es ist sowohl $AE = 1$ als auch die unendlich kleine Strecke $BK = 1$; 3) darin, dafs Newton stillschweigend ein unendlich kleines Stück DH der Kurvenlänge identisch setzt einem unendlich kleinen Stück einer geraden Linie, nämlich der Tangente des Kreises im Punkte D. Zufolge (1) ist $\frac{\text{Dreiecksseite } DH}{\text{Dreiecksseite } GH} = \frac{DT}{BT} = \frac{CD}{DB} = \frac{1/2}{y}$; aber die Gleichung des Kreises lautet $y = \sqrt{x(1-x)}$; folglich ist $\frac{DH}{GH}$ oder $\frac{DH}{BK} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

Zufolge (2) ist dann weiter die unendlich kleine Strecke $DH = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$; endlich zufolge (3) der unendlich kleine Kurvenbogen $\widehat{DH}$ dasselbe wie die unendlich kleine geradlinige Strecke $\overline{DH}$. Dieser unendlich kleine Bogen ist aber das wahre Moment λ der Kurvenlänge. λ ist also eine variabele Infinitesimalgröfse, gemessen an einer konstanten, innerhalb des Gebietes der unendlich kleinen Gröfsen als Einheit angenommenen zweiten

*) Opuscula I, S. 19.

Infinitesimalgröfse; die Gleichung $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ hat durchaus nur die Bedeutung der Proportion: Wie sich die Einheit im Gebiete endlicher Strecken (hier der Kreisdurchmesser) zu der aus der Strecke x $(= AB)$ und 1 $(= AE)$ gemäfs dem Ausdruck $2\sqrt{x(1-x)}$ gebildeten Strecke verhält, so verhält sich der unendlich kleine Zuwachs λ der Bogenlänge zu dem entsprechenden innerhalb des Gebietes unendlich kleiner Strecken als Einheit betrachteten unendlich kleinen Zuwachs der Länge x.

Um aber auf die Gleichung $\lambda \left(= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \ldots$ die Regel II anwenden zu können, mufs man deren rechte Seite und folglich auch die linke als Zahl auffassen. Die Zahl rechter Hand ergiebt sich, wenn man an Stelle von x überall die Quotienten $\frac{x}{AE}$, d. h. die Mafszahl von x unter der Voraussetzung, dafs der Mafsstab $= AE$ ist, setzt; λ ist dann aber der Quotient $\frac{DH}{BK}$, d. h. die Mafszahl der unendlich klein zu denkenden Länge DH unter der Voraussetzung, dafs der Mafsstab die unendlich klein zu denkende Länge BK ist.

So tritt uns der Begriff des Moments in dreifach verschiedener Auffassung entgegen:

1) Das Moment der Fläche ABD war die Strecke BD, also eine der Fläche heterogene Gröfse, von nur einer Dimension, wo die Fläche eine Gröfse von zwei Dimensionen ist. Aus Gründen der Analogie ist dann das Moment einer Länge ein Punkt. Aber Punkte haben keine Gröfse mehr; zwei Punkte können in keine Gröfsenvergleichung zu einander gebracht werden. Deshalb erscheint nun da, wo es sich um Längen handelt.

2) das Moment nicht mehr als etwas mit dem, wovon es das Moment ist, Heterogenes, sondern es ist homogen mit ihm. Aber nur homogen der Art nach, nicht homogen der Gröfse nach. Das Moment der Länge ist zwar auch eine Länge, aber eine unendlich kleine Länge; der Punkt ist, sofern er Moment einer Länge ist, nicht mehr ausdehnungslos, sondern heifst nun *punctum sive linea infinite parva*. Eine endliche und eine unendlich kleine Länge sind aber der Gröfse nach heterogen, weil sie nicht mit einem gemeinschaftlichen Mafse verglichen werden können. Nimmt man den Mafsstab endlich, so wird die Gröfse der endlichen Länge durch eine Zahl ausgedrückt; es giebt aber keine Zahl, die bei demselben Mafsstabe die Gröfse einer unendlich kleinen Länge darstellen könnte. Soll aber eine Gröfse in die Analysis, in die Rechnung eingeführt werden können, so mufs sie sich durch eine Zahl darstellen lassen; also mufs als Mafs der unendlich kleinen Linie, des Moments der Länge, wieder eine unendlich kleine Linie genommen werden. Daher erscheint

3) das Moment als Verhältnis zweier unendlich kleinen Strecken DH und BK. Bedient man sich, vorgreifend, der Leibnizischen Sprache, und nennt die Länge der Kurve s, so erscheint in der dritten Auffassung das Moment von s als das Differentialverhältnis $\frac{ds}{dx}$.

Will man von diesem Begriff des Moments ausgehen und von der Rektifikation durch Analogie zur Quadratur gelangen, so darf das Moment von Fläche ABD nicht als eine Strecke, d. h. als etwas mit der Fläche Unvergleichbares, sondern es mufs als ein unendlich kleiner Flächenzuwachs, bez. als Quotient eines variabelen unendlich kleinen Flächenincrements zu einer anderen, konstanten, innerhalb des Gebietes unendlich kleiner Flächengröfsen als Einheit betrachteten unendlich kleinen Fläche angesehen werden.

Hierauf könnte jemand entgegnen, dafs mit dieser Auffassung die Newtonsche Erklärung des Moments der Fläche ABD gleich der Ordinate $BD = y$ vollständig übereinstimme; denn wenn z die Fläche bezeichne, so sei ja $\frac{dz}{dx} = y$. Es ist aber zweierlei, ob man $\frac{dz}{dx} = y$ als eine Folgerung aus der Definition des Moments der Fläche als eines Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ ableitet, oder ob man y schlechthin dieses Moment nennt. $\frac{dz}{dx}$ und y werden zwar durch gleiche Zahlen dargestellt, sind aber dennoch ganz verschiedene Begriffe. y ist das Verhältnis zweier Längen, der Länge von y zur Längeneinheit 1; $\frac{dz}{dx}$ ist das Verhältnis zweier Flächen, des Flächenelementes dz zum Flächenelement dx oder $1 \cdot dx$. Dafs beide Zahlen einander gleich sind und man hinterher die Zahl $\frac{dz}{dx}$ als Strecke y deuten kann, liegt darin, dafs jede Flächenzahl als Produkt zweier Längenzahlen angesehen werden kann, die auf zwei verschiedene Dimensionen, Länge und Breite, zu beziehen sind. Indem man nun dz als das Produkt der Strecken y und dx, das Flächenelement dx aber als das Produkt der Längen 1 und dx ansehen mufs, folgt $\frac{dz}{dx} = \frac{y \cdot dx}{1 \cdot dx} = \frac{y}{1} = y$.

Indem Newton schlechthin y als das Moment der Fläche ABD bezeichnet, unterdrückt er von vornherein den Kürzungsfaktor dx in dem Differentialquotienten und verschleiert dadurch die wahre Bedeutung des Begriffs. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen beim Beweis zu Regel I ist der wahre Begriff des Flächenmoments nach Auffassung (3) der Quotient (vergl. Fig. S. 14 u. 15) $\frac{BD \cdot o}{BK \cdot o} = \frac{BD}{BK} = \frac{BD}{1} = BD = y$; also ist nur scheinbar das Moment der Fläche dasselbe wie y.

Für das Moment einer Länge läfst sich eine ähnliche Kürzung des Differentialquotienten durch einen unendlich kleinen Faktor nicht ausführen. Im Verhältnis $\frac{ds}{dx}$, wo s eine Länge bedeutet und daher ds und dx von nur einer Dimension sind, giebt es in Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen homogenen Faktor mehr, der sich durch Division entfernen liefse. Das verhindert aber nicht, ebensogut wie beim Flächenmoment andere Gröfsen anzugeben, die dem Kurvenmoment dem Zahlenwerte nach gleich sind. So ist in dem vorliegenden Falle $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2y}$, d. h. die doppelte Länge von y ist das Reciproke des Kurvenmomentes; im allgemeinen ist (Fig. S. 17) $\frac{ds}{dx} = \frac{DT}{TB} =$ secans des Winkels, den die Richtung des Kurvenelementes mit der Richtung der x-Achse bildet; aber von vornherein sagen zu wollen, das Moment der Kurvenlänge sei secans (BTD), würde unverständlich erscheinen, weil es ohne Erläuterung unverständlich wäre zu sagen, die Kurve $\widehat{AD}$ wird beschrieben, wenn die Sekante des Winkels BTD bewegt wird. Und doch wäre das so wenig sinnlos, wie wenn Newton y das Moment von Fläche ABD nennt. Die Kurve AD wird nämlich beschrieben von dem bewegten Punkte D. Wie nun eine Ordinate y, wenn sie durch parallele Verschiebung die Fläche ABD beschreiben soll, in jedem Augenblick eine andere aber bestimmte von x abhängige Gröfse haben mufs, so hat der Punkt D, während er die Kurve AD beschreibt, zwar nicht in jedem Augenblick eine andere Gröfse — denn ein Punkt hat keine Gröfse, — wohl aber in jedem Augenblick eine andere von der Gröfse von x abhängige Bewegungsrichtung. Diese Richtung wird für jeden Wert von x durch die Gleichung secans $(BTD) = \frac{HD}{KB} = \frac{ds}{dx}$, d. h. in unserem Beispiele $= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ gegeben. Daher kann die Bewegung des Punktes D anstatt durch eine Relation zwischen seinen rechtwinkligen Parallelkoordinaten $AB = x$ und $BD = y$ ebensogut durch eine Gleichung zwischen $AB = x$ und secans $(BTD) =$ secτ bestimmt werden. Ist für einen bestimmten Wert von x, z. B. für $x = 0$, die Länge von BD und damit der zu $x = 0$ gehörige Kurvenpunkt vorgeschrieben, so ist die Kurve durch eine Gleichung zwischen x und secτ vollständig definiert. Bezeichnet man secτ kurz mit η, so erhält man anstatt der Regel I diese: Ist $\eta = ax^{\frac{m}{n}}$ $\left(\text{z. B. } \eta = 3\sqrt[5]{1 : x^2} = 3x^{\frac{-2}{5}}\right)$ die Gleichung einer Kurve und P der zu $x = 0$ gehörige Kurvenpunkt, so ist $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ $\left(\text{z. B. } \frac{3 \cdot 5}{-2+5} x^{\frac{-2+5}{5}} = 5\sqrt[5]{x^3}\right)$ die Länge dieser Kurve vom Punkte P bis zu dem Punkte, dessen senkrechte Projektion B auf die x-Achse durch $AB = x$ gegeben ist. Und mit demselben Rechte, mit dem Newton in Regel I y das Moment der Fläche nennt, könnte hier η das Moment der Länge genannt werden.

Die Gleichung des Kreises, der durch Punkt A geht und dessen Durchmesser $= 1$ ein Teil der x-Achse ist, würde dann nicht $y = \sqrt{x(1-x)}$, sondern $\eta = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ lauten. Es wäre dasselbe, als wenn man in Leibnizischer Sprache, wenn z die Fläche ABD und s die Länge $\widehat{AD}$ bezeichnet, die Natur der Kurve ausdrückte durch (1) $dz = dx\sqrt{x(1-x)} = y\,dx$ oder durch (2) $ds = \frac{dx \cdot 1}{2\sqrt{x(1-x)}} = dx \cdot \sec\tau$. Der Faktor von dx ist in der ersten Gleichung das Moment der Fläche z, in der zweiten das Moment der Länge s. Wollte man y einführen, so hätte man an Stelle der zweiten Gleichung die Differentialgleichung $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$, die, wenn bestimmt ist, dafs die Kurve durch Punkt A gehen, d. h. dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ sein soll mit der Gleichung $y = \sqrt{x(1-x)}$ gleichbedeutend ist.

Indem also Newton die Linie BD oder y als das Moment bezeichnete, quo ABD gradatim augetur, verschleierte er die wahre Bedeutung des wichtigsten Grundbegriffs seiner Methode, den des Momentes einer stetig veränderlichen Gröfse, die von einer andern stetig veränderlichen Gröfse abhängt. That er dies nur, um sich kurz zu fassen und um seine »*methodum generalem breviter explicatam potius quam accurate demonstratam*« zu geben? Das ist unwahrscheinlich; denn die Fassung des Ganzen, insbesondere der Übergang von der Quadratur zur Rektifikation wäre nicht länger, sondern kürzer und zugleich bestimmter und allgemeiner geworden, wenn Newton die zum Beweis der Regel I doch nun einmal nötig gewordene und mit einem „literalen" Zeichen versehene Gröfse o für eine unendlich kleine Vergröfserung von x und die in richtiger Konsequenz hiervon bezeichnete Gröfse $y \cdot$o für eine durch o bedingte unendlich kleine Vergröfserung der Fläche ABD durch alle geometrischen Betrachtungen hindurch beibehalten, d. h. wenn er als Moment der Länge x die unendlich kleine Länge o und als Moment der Fläche die unendlich kleine Fläche $y \cdot o$ bezeichnet hätte. — Oder war es die Scheu vor dem Unendlichkleinen, die Newton bei Abfassung dieser Abhandlung daran hinderte, eine konsequente und allgemein giltige Definition des Momentbegriffs zu geben, und die bei ihm das Unendlichkleine nur dann zum Ausdruck und zur Bezeichnung gelangen liefs, wenn es durch kein Mittel mehr zu verkleiden war? Denn wenn auch das Moment y mit einer Fläche nicht homogen ist, so hat es doch noch eine endliche Gröfse und kann mit einer anderen gleichartigen Gröfse, die bei ihrer Bewegung die Fläche x beschreibt und die als Einheit dient, verglichen werden, während $y \cdot o$ etwas Unendlichkleines sein würde. Aber gemäfs der Wendung: »*Supponamus* o *in infinitum diminui et evanescere sive* o *esse nihil*« ist „unendlich klein" und „nichts" einunddasselbe, also wäre auch $y \cdot o$ ein Nichts, und als die Einheit, an der $y \cdot o$ gemessen würde, müfste wieder ein Nichts genommen werden. Zieht auf Grund ähnlicher Erwägungen Newton vor zu sagen*): »*Notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est superficies cum de solidis, et linea cum de superficiebus, et punctum cum de lineis agitur.*«? Nun tritt aber, in folgerichtiger Analogie davon, als Moment einer Fläche die die Fläche beschreibende Linie zu setzen, als Moment einer Linie der diese beschreibende Punkt auf. Aber das Merkmal des Punktes ist es gerade, dafs er überhaupt keine Gröfse hat. Also kann er kein Moment sein; denn ein Moment mufs eine Gröfse, sogar eine veränderliche Gröfse haben können, die in ihrem Verlaufe, während die Linie beschrieben wird, mit einem anderen, gleichartigen, aber konstanten und als Einheit dienenden Momente verschiedene angebbare Zahlenverhältnisse bildet. Wie hilft sich Newton aus dieser Enge heraus? Mit Gewalt! Denn ein Gewaltakt ist es, wenn er gleich darauf erklärt: »*Nec vereor loqui de unitate in punctis.*« Gewaltsam wird damit der an sich ausdehnungslose Punkt zu einer Länge ausgestreckt, während vorher ohne zwingende Not der Raum zu einer Fläche, die Fläche zu einer Linie zusammengedrängt worden waren. Und mit dieser Gewaltthätigkeit gegen mathematische Begriffe, und mit dieser Inkonsequenz gegen sich selbst kapituliert Newton schliefslich doch noch vor der Infinitesimalgröfse, indem er obigen Worten hinzusetzt: »*punctis sive lineis infinite parvis.*« Und als ob er das Bedürfnis fühlte, sich zu decken, fährt er fort: »*Siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometrae, dum utuntur methodis indivisibilium.*« Darf man aus dieser Stelle schliefsen, dafs Newton, als er diese Abhandlung schrieb, noch so sehr in Cavalierischen Vorstellungen befangen war, dafs sich in seinem Geiste die volle Klärung des seine Methode beherrschenden Begriffs des Moments noch gar nicht vollzogen hatte? — Oder dachte er wie Leibniz**): »Es ist aber guth, dafs, wann man etwas würcklich *exhibiret*, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die *schliche* kommen.«?

Das »punctum sive linea infinite parva« erinnert an das o im Beweis zu Regel I, das ja auch in zwei einander ausschliefsenden Bedeutungen angewandt wurde. Diese schwankende Auffassung von Fundamentalbegriffen, die uns bei Newton mehrfach begegnet, veranlafste Berkeley zu dem Urteil, dafs Newton, um Widersprüche zu verdecken, mit einem Worte verschiedene ineinanderfliefsende Grundvorstellungen bezeichne und die Prinzipien verwirre.***) »*The notion of fluxion is shifted: it is placed in various lights: points which should be clear as*

*) Opuscula I, S. 19. — **) Leibniz an den Freiherrn von Bodenhausen. — ***) The Analyst, X.

first principles are puzzled; and terms which should be steadily used are ambiguous.« Nach dem, was wir aus der eben besprochenen Abhandlung über die aus der Vorstellung der Bewegung entstehenden Grundbegriffe der Newtonschen Geometrie haben entnehmen können, ist es uns nicht möglich, Berkeley zu widerlegen. Sehen wir zu, ob die schweren Vorwürfe dieses Idealisten auch gegenüber Newtons anderen Darlegungen seiner Methoden berechtigt sind.

Newtons »Methodus fluxionum et serierum infinitarum.«

(Entstanden gegen 1670, zuerst veröffentlicht 1736.)*)

In der Einleitung, die 20 Seiten umfafst, giebt Newton, wie in der vorigen Abhandlung, seine Näherungsmethoden zur numerischen Auflösung von Gleichungen, d. h. zur Darstellung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung durch einen unendlichen Dezimalbruch, und in Verallgemeinerung dieses Verfahrens die Transformation einer zwischen zwei Variabeln x und y gegebenen Gleichung in die Form $y = a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} + \ldots$ etc. Diese Analysis will Newton auf Probleme anwenden, die geeignet seien, über die Natur der Kurven mehr Licht zu verbreiten. Alles, was bei Behandlung dieser Probleme Schwierigkeiten mache, lasse sich zurückführen auf folgende zwei Grundprobleme:

I. »*Longitudine descripti spatii semper (id est quovis temporis momento) data, invenire velocitatem motus tempore proposito.*«

II. »*Velocitate motus semper data, invenire longitudinem spatii descripti tempore proposito.*«

Es handelt sich also um drei variabele Gröfsen: Zeit, Geschwindigkeit, Weg. 1. Problem: Gegeben der Weg als Funktion der Zeit; gesucht die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. — 2. Problem: Gegeben die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit; gesucht der Weg als Funktion der Zeit. Aber Newton meint damit keineswegs die Grundprobleme der Mechanik. Er will sich nur des Bildes der Zeit, der Bewegung und der Geschwindigkeit bedienen, um anschaulich zu machen, dafs wenn von zwei Variabelen x und y, die durch eine Gleichung untereinander verbunden sind, die eine, x, in gleichen Zunahmen kontinuierlich wächst, die andere, y, in ungleichen Zunahmen kontinuierlich wächst, bez. in ungleichen Verkleinerungen kontinuierlich abnimmt, — indem er von der Meinung ausgeht, dafs jene Abhängigkeit zwischen x und y ohne solche Veranschaulichung, ohne die Vorstellung gleichzeitiger Zu- oder Abnahmen (das sind eben hier die in Frage kommenden Geschwindigkeiten), schwer fafslich sein würde. »Hinc fit, ut in sequentibus considerem quantitates tanquam genitas *continuo incremento,* ut spatium, quod corpus aut quaelibet res mota describit.« Obgleich sich hier Newton der Grundform aller stetigen Veränderung und alles stetigen Verlaufes, der Vorstellung des gleichmäfsigen Zeitflusses bedient, so bemerkt er doch ausdrücklich, dafs ein Mafs der Zeit nur an etwas gewonnen werden könne, das selbst nicht Zeit ist, sondern sich in der Zeit verändert. Daher wird irgend eine variabele Gröfse, zumeist die unabhängige Variabele, die bei Newton *quantitas correlata* heifst, der Zeit substituiert. Jede abhängige Variabele heifst *quantitas relata.***) »Cum autem hic *Tempus* tantum, considerandum veniat, tanquam expositum et mensuratum aequabili motu locali, et, praeterea,

*) Newtoni Opuscula I, S. 31 bis S. 199. — **) Opuscula I, S. 54 und S. 65.

cum solae quantitates ejusdem generis invicem comparari valeant, ut et velocitates, quibus augentur aut minuuntur: idcirco in iis quae sequuntur, *tempus formaliter non considero,* sed suppono, quod una ex propositis quantitatibus *homogenea cum aliis* crescat *aequabili fluxu,* ad quam ceterae, tanquam ad tempus, referantur, quae ideo per analogiam non inconcinne dici potest *Tempus.* Quoties igitur vox *Tempus* in sequentibus invenietur, hoc verbum sumendum est, non quasi tempus intellexissem in sua *formali* significatione, sed tanquam significans quantitatem illam a tempore diversam, cujus aequabili incremento vel fluxu tempus exponitur et mensuratur.« — »*Fluentes* vocabo quantitates has, quas considero tanquam gradatim et indefinite crescentes.« Sie werden mit den letzten Buchstaben u, x, y, z des Alphabets bezeichnet zur Unterscheidung von den quantitates cognitae et determinatae a, b, c etc. »At velocitates, quibus singulae fluentes augentur per motum generantem (quas velocitates appello *Fluxiones,* aut simpliciter *Velocitates* vel *Celeritates)* exprimuntur iisdem litteris puncto auctis, sic $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$.«

Wie in der vorigen Abhandlung der Begriff des Moments einer mathematisch exakten Definition entbehrte, so hier der Begriff der Fluxion oder velocitas. Dort hieſs es, das Moment einer Gröſse z ist das, »quo z gradatim augetur« infolge der Bewegung einer andern Gröſse. Hier heiſst es: *Velocitates* oder *Fluxiones* der Fluenten sind das, »*quibus fluentes augentur per motum generantem.*« Dürftiger kann wohl ein mathematischer Fundamentalbegriff nicht definiert werden. Wir werden daher die mathematische Definition des Fluxionsbegriffs aus den Anwendungen, die Newton davon macht, zu abstrahieren haben.

Damit sind bei Newton die Grundprobleme I und II erledigt. Newton lieſs sich, wie wir schon bemerken konnten, vielfach von Analogien leiten: Die Einführung der beiden eben genannten Probleme hat denn auch für das folgende keine andere Bedeutung, als die des Hinweises darauf, daſs zwei oder mehrere kontinuierlich veränderliche Gröſsen x, y, z, u etc., die durch eine oder mehrere Gleichungen $f(x, y, \ldots) = 0$ voneinander abhängig gemacht sind, sowie ihre entsprechenden (gleichzeitigen) Änderungen sich untereinander **analog** verhalten, wie die Zeit, die gleichzeitigen Wege und gleichzeitigen Geschwindigkeiten bewegter Körper in der Mechanik.

Newton geht nun ohne weiteres über zur Verwertung dieser Analogie bei der Lösung von 12 allgemeinen Problemen der analytischen Geometrie. Wir haben, da wir nicht oberflächlich arbeiten wollen, hier nur noch Raum für die beiden ersten und wichtigsten dieser Probleme.

Problema I.

»*Data relatione, quam invicem habent fluentes quantitates; determinare relationem, quae inter earum fluxiones intercedit.*«

Solutio.

»Aequationem, qua data relatio exprimitur, dispone juxta dimensiones alicujus ex fluentibus quantitatibus, quas includit, puta x, et ejus terminos multipla per quancumque arithmeticam progressionem, et deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$: Hanc operationem seorsum perfice pro quavis fluenti quantitate; tum fac aggregatum ex his omnibus factis aequale nihilo, et habebis petitam aequationem.«

Wir werden diese Solutio das Newtonsche Fluxionstheorem nennen. Wir legen Gewicht darauf, daſs dasselbe nicht auf eine Gleichung mit nur zwei Fluenten beschränkt ist, sondern sich wegen des »hanc operationem perfice pro *quavis fluenti* quantitate« auf Gleichungen mit beliebig vielen Fluenten erstreckt, die vorher auf Null reduziert, d. h. auf die Form $f(x, y, z, u, \cdots) = 0$ gebracht worden sind. Das »dispone juxta dimensiones etc.« beweist, daſs nur Gleichungen von der Form $\Sigma a x^p y^q z^r \cdots = 0$ gemeint sind, nicht solche, in denen Glieder von der Form $(a + bx)^p$, wo p irgend eine positive oder negative rationale Zahl ist, und ähnliche vorkommen. Das »multipla per *quancumque* arithmeticam progressionem« scheint uns die Deutlichkeit der Vorschrift nicht zu erhöhen. Aus den Exemplis ergiebt sich, daſs jedesmal die Progression gemeint ist, die die Exponenten der betreffenden Fluente in den einzelnen Gliedern bilden.

Beispiel:*) »Relatio quantitatum x, y et z exprimatur aequatione $2y^3 + xxy - 2cyz + 3yzz - z^3 = 0$.« »Relatio, quae est inter fluentium celeritates aut fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ exponitur per« $2xy\dot{x} + 6yy\dot{y} + xx\dot{y} - 2cz\dot{y} + 3zz\dot{y} - 3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$. In den Opusculis steht auffälligerweise »$4yy\dot{y} - \frac{z^3\dot{y}}{y} + 2yx\dot{x} - 3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$«; d. h. die Glieder mit $\dot{y}$ sind falsch gebildet. Liegt hier ein Versehen Newtons oder des Herausgebers vor? Gleichviel, wir geben ihm keine Bedeutung.

Solutionis Demonstratio.**)

Fluentium quantitatum *Momenta* (videlicet earum *partes indefinite parvae*, quarum accessione in *indefinite exiguis partibus temporis* quantitates ipsae jugiter augentur) sunt ut velocitates, quibus fluunt aut crescunt.

Quapropter, si momentum alicujus (puta x) repraesentatur facto ex ejus celeritate $\dot{x}$ in quantitatem indefinite parvam (id est $\dot{x}o$) momentum aliarum u, y, z repraesentandum erit per $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, quia $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ et $\dot{z}o$ invicem habent eandem rationem quam $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$.

Jam, quia momenta, ex. gr. $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$ sunt incrementa indefinite parva, quibus fluentes quantitates x *et* y *augentur per indefinite parva temporis intervalla,* ex eo sequitur has quantitates x et y, *post indefinite parva temporis spatia evasisse* $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$. Aequatio vero, quae quibuscumque temporibus indiscriminatim exprimit relationem fluentium quantitatum, aeque bene exprimet relationem quae intercedit inter $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$, ac eam quae est inter x et y, ita ut in eadem aequatione ponere liceat $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ pro x et y.

Quamobrem, sit aequatio $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, in ea substitue $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ ipsis x et y, obtinebis

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \ldots \\ \qquad + ax\dot{y}o \\ - y^3 - 3yy\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o + \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0.$$

*) Opuscula I, S. 56 (Exemplum II). — **) Ebenda S. 59.

Sed per hypothesin est $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$; expunge igitur hos terminos, ceterosque divide per o et restabit

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0:$$

Cum autem *finxerimus* o *quantitatem infinite parvam, ut exponere posset quantitatum momenta*, termini in eam ducti *pro nihilo possunt haberi cum aliis collati;* eos igitur *negligo*, et superest

$$3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0.$$

Hic observandum venit, quod semper evanescunt, cum termini qui per o multiplicati non sunt, tum ii, qui multiplicati sunt per o duarum aut plurium dimensionum; et quod reliqui termini divisi per o, semper acquirunt formam, quam habere debeant secundum regulam superiorem. Quod erat ostendendum.

His autem demonstratis, facile sequentur reliqua, quae complectitur regula, ut quod aequatio eadem complecti potest *plures fluentes quantitates* etc.«

Wodurch unterscheidet sich diese Beweisführung von der Seite 14 mitgeteilten Begründung der Regel I der vorigen Abhandlung? Zuerst dadurch, dafs die anschaulichen Unterlagen, durch die die abstrakten in die Rechnung eingehenden Gröfsen vorstellbar werden, nicht mehr von spezieller Natur, sondern derart sind, dafs sie allgemein jeder stetig veränderlichen Gröfse anhaften. In der vorigen Abhandlung hatten x, y, z ganz bestimmte Bedeutungen: x Abscisse, y Ordinate, z Fläche. Gleichwohl wurde das auf Grund der besonderen Natur dieser Gröfsen x, y, z als richtig bewiesene Resultat, die nur für Quadraturen abgeleitete Regel, durch Einführung eines in seiner Bedeutung schwankenden Begriffes, des Momentes, ohne Beweis, nur auf Analogie gestützt, auf Gröfsen und Operationen anderer Art, auf Rektifikationen und Kubaturen übertragen. Hier aber sind x und y Gröfsen schlechthin, mit der Bestimmung, dafs sie stetig veränderlich und durch eine oder bei mehr als zwei Fluenten durch mehrere Gleichungen zwischen ihnen voneinander abhängig sein sollen, so dafs eine Änderung der einen nicht ohne bestimmte Änderung der anderen eintreten kann. Anschaulich gemacht aber wird dieser Zusammenhang durch die Vorstellungen von Zeitflufs und von gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Fluenten. Sie dienen dazu, die Auffassung der Abhängigkeit der Veränderungen voneinander zu unterstützen, indem man sich vorstellt, dafs, während die eine Fluente sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit ändert, die Geschwindigkeiten, mit denen sich die anderen Fluenten in den stetig aufeinander folgenden Augenblicken ändern, in jedem Augenblicke ein bestimmtes anderes Verhältnis zur konstanten Geschwindigkeit der ersten Fluente haben.

Zweitens ist hier der Begriff des Momentes nicht mehr so unbestimmt wie dort. Er würde sich als ein ganz unzweideutig bestimmter Begriff darstellen, wenn überall »infinite« anstatt »indefinite« stünde. Durch dieses »indefinite« kommt wieder etwas Unsicheres in den Gang der Vorstellungen in diesem Beweise. Man kann a priori nicht wissen, ob »indefinite parvum« soviel heifsen soll, als „kleiner wie jede gegebene Gröfse", im Sinne der Alten. o, die Gröfse, die, obgleich das nirgends direkt ausgesprochen ist, aber doch nach der Rolle, die Newton ihr zuweist, die Zeitintervalle, die Zeitteile repräsentiert, in denen die aufeinander folgenden Veränderungen der Fluenten geschehen, wird zuerst als indefinite parva eingeführt, wie alle Veränderungen der Fluenten; aber »ut exponere posset quantitatum **momenta**«, wird zuletzt o als *quantitas infinite parva* erklärt und damit alle übrigen partes et incrementa, quarum accessione in partibus temporis (= o) oder per temporis intervalla (= o) fluentes augentur. Es heifst sogar:

»Cum *finxerimus* o quantitatem infinite parvam«, als ob von Anfang an die Momente als unendlich klein aufgefaſst worden wären. Es ergiebt sich also, daſs schlieſslich sicher die Momente hier als *partes infinite parvae* aufzufassen sind. Übrigens ist dies auch schon eine Konsequenz des ersten Satzes der demonstratio: »Fluentium quantitatum momenta sunt ut velocitates, quibus fluunt aut crescunt«. Da es sich aber um stetig flieſsende Gröſsen handelt, so gilt jene Proportionalität zwischen Momenten und Fluxionen in aller Strenge nur für die Zunahmen während unendlich kleiner Zeitteile, da während einer jeden anderen Zeit die Geschwindigkeit der Fluente nicht einen bestimmten Wert hat, sondern unendlich viele Werte annimmt. Daraus schlieſse ich: Das Moment einer Fluente ist aufzufassen als das unendlich kleine Stück, um das die Fluente bei ihrer stetigen Veränderung während eines unendlich kleinen Zeitteiles zu- oder abnimmt, und eine Gröſse heiſst *indefinite parva,* wenn sie nicht nur kleiner gedacht werden kann, sondern kleiner gedacht werden muſs als jede gegebene Gröſse. Die »quantitas indefinite parva« bezeichnet im Grunde dasselbe, nur schüchterner, wie die »quantitas infinite parva«.

Dies vorausgeschickt, zeichnet sich dieser Beweis vor dem in der vorigen Abhandlung drittens dadurch aus, daſs die Stetigkeit im Denken hier nicht durch einen Wechsel in der Bedeutung von o unterbrochen wird. Aus einer Gleichung von der Form 1) $a + bo + co^2 + \cdots + ko^m = 0$ und aus 2) $a = 0$ folgt $bo + co^2 + \cdots + ko^m = 0$, und nach Division mit o 3) $b + co + \cdots + ko^{m-1} = \frac{0}{o}$. Wenn nun 4) $\frac{0}{o} = 0$ ist, so folgt aus (3) die Gleichung (5) $b + co + \cdots + ko^{m-1} = 0$.

Nach dem Wortlaut der Beweisführung Seite 14 würde es von hier an weiter heiſsen: Si jam supponamus o *esse nihil,* termini per o multiplicati evanescent, und aus (5) folgt daher: $b = 0$. Dieser Schluſs ist falsch, weil durch $o = 0$ die Gültigkeit von (4) und daher auch die von (5) aufgehoben wird. Im vorliegenden Beweis wird aber dieser Fehler vermieden. Denn es heiſst: Cum finxerimus o quantitatem infinite parvam (nicht Null), termini in eam ducti *pro nihilo possunt haberi* **cum aliis collati** (hier mit b), eos igitur *negligo,* et superest $b = 0$.

In Konsequenz dieser Schluſsweise ergiebt sich, daſs die quantitas infinite parva o, die in Vergleich mit einer endlichen Gröſse pro nihilo potest haberi, gleichwohl in Vergleich mit 0 für unendlich groſs gehalten werden muſs, weil sonst (4) nicht bestehen würde, da ein Quotient nicht eher den Wert Null erreichen kann, als bis sein Divisor ein Unendlichvielfaches des Dividenden ist. Will man aber, weil 0 überhaupt keine Gröſse mehr ist, dem Zeichen $\frac{0}{o}$ die Bedeutung eines eigentlichen Quotienten nicht mehr geben, so ist in Konsequenz von (4) zu sagen, daſs gegenüber 0 das Zeichen o eine Gröſse bedeutet. Es wäre aber eine unerweisliche Behauptung, wollte man sagen, daſs Newton diese Konsequenzen gezogen hätte und diese Auffassung von der quantitas infinite parva habe. Das ist vielmehr sehr unwahrscheinlich. Newton läſst uns, wie früher über den Begriff des Momentes, so auch über den Begriff des Unendlichkleinen im Unklaren. Dagegen gehört dieser Begriff des Unendlichkleinen, wie er sich soeben als Konsequenz des Newtonschen Beweises ergab, zu den klar ausgesprochenen Grundanschauungen von Leibniz.

Wenn es bei Newton ferner heiſst: »Hic observandum venit, quod semper evanescunt, cum termini qui per o multiplicati *non sunt* (d. h. $a = 0$), tum ii qui multiplicati sunt per o duarum aut plurium dimensionum« (d. h. $co^2 + do^3 + \cdots + ko^m = 0$), so ist in Konsequenz von (2) und (4) zu konstatieren, dafs der Ausdruck *evanescunt* hier eine doppelte Bedeutung hat. In Bezug auf die Glieder, die mit o nicht multipliziert sind und die in Gleichung (1) in a zusammengefafst sind, heifst „verschwinden" soviel als wirklich = Null sein, wegen (2), da $a = 0$ der analytische Ausdruck des Gesetzes ist, nach dem die Fluenten voneinander abhängen. Aber in Beziehung auf die Glieder $co^2 + \cdots + ko^m$ heifst »evanescere« soviel wie pro nihilo posse haberi cum aliis (bo) collati. Auch diese Konsequenz hebt Newton nirgends hervor. Dagegen findet sie bei Leibniz ihren klaren Ausdruck in dem Begriff der »*quantitas incomparabilis*«, sowie in dem Begriffe der Infinitesimalgröfsen verschiedener Ordnungen, und auch in dem auf diesen Begriffen beruhenden Gesetze der Homogeneität der Differentialgleichungen.

Versuch einer Darstellung der Grundgedanken in Newtons Fluxionstheorem. Das Fluxionstheorem in seiner Abhängigkeit vom Begriff der Infinitesimalgröfse.

So beruht denn die Begründung der fundamentalsten Regel der Fluxionsrechnung auf der Idee unendlich kleiner Gröfsen, die Momente heifsen. Es giebt Momente der Zeit, der Länge, Momente einer jeden Gröfsenart. Das Eigentümliche der Momente besteht darin, dafs Momente einer und derselben Gröfsenart, obgleich alle unendlich klein, doch untereinander nicht gleich sind, sondern untereinander alle die Gröfsenverhältnisse bilden, wie endliche der Art nach homogene Gröfsen untereinander; dafs ferner irgend ein Vielfaches eines Momentes in Vergleich mit einer endlichen Gröfse derselben Art gleich 0 zu erachten ist, also die Bedeutung der Gröfse verliert, während es in Vergleich mit 0 den Charakter der Gröfse behält und der Quotient (0 : Moment) = 0 gilt. — Um zur Vergleichung der Momente der Fluenten untereinander zu gelangen, wird fingiert, dafs eine Fluente, die entweder, wie in der demonstratio, gar nicht bezeichnet ist und die in der zwischen den Fluenten gegebenen Gleichung nicht vorkommt, oder eine in der gegebenen Relation enthaltene Fluente, etwa x, während einer beliebigen aber bestimmten Zeitdauer stetig wachsend alle Werte durchlaufe, die das Kontinuum der Gröfsenart, zu der x gehört, von einem Anfangswerte x_0 bis zu einem Endwerte x_1 erfüllen. Die Zeitdauer, während der dies geschieht, wird in unendlich kleine untereinander gleiche Intervalle oder Teile (temporis intervalla, temporis partes, temporis spatia) zerlegt. Ein solches unendlich kleines Zeitintervall ist ein Zeitmoment und wird mit o bezeichnet. Die Gröfse der Zunahme, die x während eines Zeitmomentes erfährt, ist das in diesem erzeugte Moment von x. Die in den aufeinander folgenden Zeitmomenten erzeugten Momente von x brauchen einander nicht gleich zu sein, können es aber sein. Sind sie einander gleich, so sagt Newton, x wächst uniformiter. Sind sie einander *nicht* gleich, so kann man sich *endliche* Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) denken, die sich untereinander verhalten wie die Momente untereinander. Solche Gröfsen heifsen Fluxionen. Auf die absoluten Werte dieser Fluxionen kommt es nicht an, nur auf ihre Vergleichung untereinander. Ebensowenig kommt es auf die absoluten Werte der Momente an, sondern nur auf ihre Vergleichung untereinander. Die aufeinander folgenden Fluxionen einer Fluente x sind dadurch **definiert**, dafs es endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) sind, die sich untereinander wie die aufeinander folgenden Momente von x verhalten.

Ist y_0 ein Wert von y, der die Gleichung zwischen x und y befriedigt, wenn darin $x = x_0$ ist, so durchläuft y, während x alle Werte von x_0 bis x_1 innerhalb seines Kontinuums durchläuft, alle Werte von y_0 bis zu einem Werte y_1, die das Kontinuum zwischen y_0 und y_1 hat; aber nicht mehr in freier, sondern in gebundener Weise, nämlich so, dafs zu jedem der aufeinander folgenden Momente von x ein bestimmtes Moment von y gehört. Irgend ein Moment von x und das gleichzeitige Moment von y sind im allgemeinen einander nicht gleich, ihr Verhältnis ist nicht das der Gleichheit. Man kann sich aber zwei endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) denken, die sich untereinander verhalten wie jene gleichzeitigen Momente von x und y. Zwei solche endliche Gröfsen heifsen gleichzeitige Fluxionen von x und y und werden mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bezeichnet. Ihre mathematische Bedeutung ist vollständig dadurch definiert, dafs es zwei endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) sind, die sich in einem jeden Zeitmoment oder richtiger während eines jeden Zeitmoments zu einander verhalten wie die gleichzeitigen Momente der Fluenten x und y. Keine von beiden Fluxionen hat für sich allein eine mathematische Bedeutung, sondern jede immer nur in ihrem Verhältnis zur andern.

Das Verhältnis der Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zu einander ist fliefsend, wie das Verhältnis gleichzeitiger Momente. Während eines jeden folgenden $\mathfrak{o}$ ist dies Verhältnis ein anderes, als während des vorhergehenden $\mathfrak{o}$. Zu jedem der gegebenen Relation zwischen x und y genügenden Wertepaare x und y gehört ein bestimmtes Verhältnis von $\dot{x}$ zu $\dot{y}$. Der Sinn des Problems I ist der, die Gleichung abzuleiten, aus der das jedem zusammengehörigen Wertepaare x und y zugehörige Verhältnis von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ ermittelt, aus x und y berechnet werden kann. Um zu dieser Gleichung zu gelangen, wird fingiert, die Momente der Zeit seien einander gleich, bez. die Momente der die Zeit vertretenden Gröfse, der *quantitas a tempore diversa, cujus aequabili incremento vel fluxu tempus exponitur et mensuratur,* seien einander gleich und heifsen $\mathfrak{o}$. Da die Fluxionen einer Fluente sich verhalten wie die entsprechenden Momente, so sind auch die aufeinander folgenden Fluxionen dieser Gröfse, der Urfluente, einander gleich. Sie werden als Einheit der Fluxionen gesetzt. Folglich hat man, wenn m_x das Moment von x bezeichnet, die Proportion $m_x : \mathfrak{o} = \dot{x} : 1$ und daher $m_x = \frac{\dot{x}}{1} \cdot \mathfrak{o} = \dot{x}\mathfrak{o}$; analog $m_y : \mathfrak{o} = \dot{y} : 1$; daher $m_y = \dot{y}\mathfrak{o}$.*)

*) Ich weifs sehr wohl, dafs man den Ausdruck $\dot{x}\mathfrak{o}$ auch anders herleiten kann. Man kann sagen: Die Fluxion $\dot{x}$ ist die Vergröfserung, die x während der auf einen bestimmten Zeitmoment folgenden Zeiteinheit erfahren würde, wenn von diesem Momente an das Wachstum der Fluente x gleichmäfsig erfolgte; $\mathfrak{o}$ ist eine so kleine Zahl, dafs sie sich zu 1 verhält, wie die Dauer eines Zeitmoments zur Dauer der Zeiteinheit, also eine unendlich kleine Zahl. Dann ist $\dot{x}\mathfrak{o}$ der unendlich kleine Zuwachs von x während eines Zeitmoments, also das Moment von x u. s. w. — Aber die dieser Ableitung zu Grunde liegende Definition von $\dot{x}$ hat Newton nirgends ausgesprochen, wenn sie auch dem, was er über Fluxionen sagt, nicht widerspricht. Zudem erklärt Newton an einer andern Stelle (vergl. Seite 37) die Fluxionen ausdrücklich für Gröfsen andrer Art als die Fluenten, während bei obiger Auffassung $\dot{x}$ mit x gleichartig wäre; die Fluxion einer Strecke wäre eine Strecke, die Fluxion einer Fläche wäre eine Fläche u. s. w., und es wäre der Fall denkbar, dafs eine Fluxion an einer Fluente gemessen werden könnte, dafs also z. B. $\dot{x} = y$ wäre, eine Auffassung, die, wie wir bei Besprechung von Problem II sehen werden, derjenigen von Newton zuwiderläuft und zu groben Mifsverständnissen Anlafs gegeben hat. — Endlich würde auch jene Ableitungs-

Von nun an wird, um die gesuchte Gleichung abzuleiten, nicht mit Fluxionen, sondern mit Momenten gerechnet. In dem Aggregat von Gröfsen, das sich ergiebt, verschwinden die Glieder die keine Momente enthalten, von selbst zufolge der gegebenen Relation zwischen den Fluenten. Die Glieder, die zurückbleiben, sind in Bezug auf die Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ teils vom 1. teils vom 2. Grade u. s. w. Nun wird jedes Glied durch o, durch das Moment der Urfluente, nicht durch $\dot{x}o$ oder $\dot{y}o$, dividiert unter der Voraussetzung $\frac{0}{0} = 0$. Die Glieder 1. Grades enthalten jetzt anstatt der Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ die Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$; zuletzt werden alle übrigen Glieder, die noch volle Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ enthalten, gegenüber den Gliedern, die keine Momente mehr enthalten, als Glieder ohne Gröfse angesehen und weggelassen. Das Ergebnis ist die gesuchte Gleichung, die das Verhältnis von $\dot{y}$ und $\dot{x}$ zu einander als Funktion von x und y bestimmt.

Wenn aber die Begründung der ersten Grundregel der Fluxionsrechnung eine Rechnung mit Momenten, d. i. mit Infinitesimalen zur Voraussetzung hat, und wenn die endlichen Gröfsen, die Fluxionen heifsen, ihre bestimmte mathematische Definition erst dadurch erhalten, dafs sie den Momenten ihrer Fluenten proportional sind, so sind die Gründe klar, weshalb 1784 die Akademie der Wissenschaften zu Berlin das gesuchte Prinzip, propre à être substitué à l'Infini, nicht in der Fluxionsrechnung finden konnte. Es entsteht vielmehr die andere Frage, wozu die Fluxionen überhaupt nützen, wenn man nur auf dem Umwege von den Fluenten zu den Momenten und von diesen zu den Fluxionen den Zusammenhang zwischen Fluenten und Fluxionen finden, zum vollen Verständnis ihrer mathematischen Bedeutung hindurchdringen und zu den ersten Rechnungsregeln mit Fluxionen gelangen kann? Ich verstehe daher nicht, wie man noch in diesem Jahrhunderte von mathematischer Seite urteilen konnte, Newton habe*) „das Rechnen mit unendlich kleinen Gröfsen, welche Null sein und doch noch einen von Null verschiedenen Wert besitzen sollen, auf die Weise auf das Glücklichste vermieden, dafs er im Zustande des Verschwindens (der momenta nascentia sive evanescentia) die Fluxionen, endliche und bestimmte (?) Gröfsen, gewissermafsen als Reserve an die Stelle der zum weiteren Dienst untauglich gewordenen Momente einrücken läfst." Und wenn andere sagen**), neben Lagrange habe auch Newton das „hypothetische Unendlichkleine nicht einmal als literalen Ausdruck in seine Formeln" aufgenommen, so kann dem nicht widersprochen werden bis auf das „nicht einmal", falls dies den Sinn haben sollte: nicht einmal als literalen Ausdruck in seine Formeln aufgenommen, geschweige denn bei seinen mathematischen Untersuchungen, Folgerungen und Beweisführungen benützt. Dieser Nachsatz, den man hinter dem „nicht einmal" zu vermuten geneigt ist, würde, wie aus obigen Darlegungen hervorgeht, der Wahrheit stracks zuwiderlaufen. Wenn aber die Fluxionen nur den Zweck hätten, in den Endformeln den literalen Ausdruck des Unendlichkleinen zu vermeiden, so wäre ihre Funktion ähnlich der der Umkleidung eines Kunstwerkes vor seiner

---

weise dem Geiste der damaligen Zeit widersprechen. Sie ist modern. Damals bewegte man sich noch durchweg in Proportionen unter Festhaltung an der Euklidischen Erklärung (V, 4); „Eine ratio zu einander haben Gröfsen, welche vervielfältigt einander übertreffen können." Daran haben wir uns bei unserer Ableitungsweise streng gehalten. Gerade, um dieser Euklidischen Erklärung zu genügen, wird eben der Zeit eine mit den Fluenten homogene Gröfse substituiert.

*) Weifsenborn, Die Prinzipien der höheren Analysis etc. Halle 1856, S. 57.

**) P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Funktionentheorie, Tübingen 1882, I, S. 84.

Enthüllung, oder der eines Uhrgehäuses, das zwar, indem es das Zifferblatt frei läfst, noch die Wirkung des im Gehäuse verborgenen Getriebes erkennen läfst, aber den organischen Zusammenhang der Teile verdeckt.

Der Gültigkeitsbereich des Newtonschen Fluxionstheorems.

Jedenfalls um nicht weitläufig zu werden giebt Newton die demonstratio solutionis nur an einem Beispiel, und an einem solchen mit nur zwei Fluenten und mit nur ganzen Exponenten.*) Aber der Wortlaut der Solutio ergiebt, dafs die Zahl der Fluenten in einer Gleichung nicht beschränkt sein soll. Im Exemplum II (vergl. S. 24) wendet Newton seine Regel auf eine Gleichung mit drei Fluenten an. Die Demonstratio ist nur am Exemplum I durchgeführt. »His autem demonstratis facile sequentur aliqua, quae complectitur regula, ut, quod aequatio eadem complecti potest *plures fluentes quantitates* etc.« (Opuscula I, S. 61). In der That steht nichts im Wege, die Demonstration wörtlich auf eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten zu übertragen, weil kein Grund da ist, weshalb man sich nicht beliebig viele Fluenten, die durch eine oder mehrere Gleichungen von einander abhängig gemacht sind, in gleichzeitiger stetiger Veränderung, in gleichzeitigem Fluxus von solcher Art sollte vorstellen können, dafs der gegebenen Gleichung, bez. den gegebenen Gleichungen immer genügt wird. Die Fluxionen $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ sind dadurch definiert, dafs es endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen und blofs unter sich vergleichbaren Art) sind, die sich in jedem Augenblick wie die entsprechenden gleichzeitigen Momente ihrer Fluenten verhalten. Ihre absoluten Werte sind ebenso *inassignabel*, wie die Leibnizischen Differenzen; sie werden gemessen an der sich immer konstant bleibenden Fluxion der Urfluente, von der o das sich immer gleiche Moment ist. Diese Fluxion der Urfluente ist die Einheit der Fluxionen, und man hat $m_x : o = \dot{x} : 1$; $m_y : o = \dot{y} : 1$; $m_z : o = \dot{z} : 1$; $m_u : o = \dot{u} : 1$ u. s. w., also $m_x = \dot{x}o$; $m_y = \dot{y}o$; $m_z = \dot{z}o$; $m_u = \dot{u}o$ u. s. w. Ist $f(x, y, z, u \cdots) = 0$ eine der gegebenen Gleichungen zwischen den Fluenten, so ist auch $f(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y} \cdot o,\ z + \dot{z} \cdot o,\ u + uo, \cdots) = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung wird nach Potenzen der Momente geordnet; die Glieder zweiten und höheren Grades pro nihilo possunt haberi cum aliis (den Gliedern ersten Grades) collati und werden deshalb vernachlässigt; die Glieder ohne Momente zerstören sich von selbst; vorher noch oder nachher wird durch o dividiert; es folgt eine Gleichung von der Form

$$a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + d\dot{u} + \cdots = 0,$$

wo $a, b, c, d, \cdots$ nur Fluenten und konstante Gröfsen, aber keine Fluxionen enthalten. Ist eine zweite Gleichung $\varphi(x, y, z, u, \cdots) = 0$ gegeben, so folgt eine zweite Fluxionsgleichung

$$a_1\dot{x} + b_1\dot{y} + c_1\dot{z} + d_1\dot{u} + \cdots = 0; \text{ u. s. w.}$$

Da alle diese Gleichungen nach den Fluxionen homogen sind, so kann man aus ihnen nie mehr als die Verhältnisse der Fluxionen zu einander, nie aber die Verhältnisse der Fluxionen zu den Fluenten berechnen. Mehr ist aber auch zufolge der mathematischen Definition der

*) Man ist deshalb aber doch nicht berechtigt zu sagen, Newton habe seine Regel ohne Beweis aufgestellt, wie es bei Weifsenborn a. a. O. S. 28 geschieht.

Fluxionen nicht möglich, nicht denkbar. Mit dem absoluten Werte einer Fluxion oder dem Verhältnisse einer Fluxion zu einer Fluente könnte man zufolge des Begriffes der Fluxionen gar nichts anfangen. Ich wiederhole: Nicht nur die Leibnizischen Differenzen, auch die Newtonschen Fluxionen sind trotz ihrer Endlichkeit *quantitates inassignabiles*. — Nur in einem Falle erhält man für die Fluxionen aus jenen Gleichungen absolute Werte; wenn nämlich soviele Gleichungen als Fluenten gegeben sind. Dann erhält man ebenso viele Fluxionsgleichungen, die nach den Fluxionen homogen und linear sind. Aus ihnen folgt dann $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{u} = \cdots = 0$, d. h. die Fluenten wachsen nicht und nehmen nicht ab, sie fliefsen nicht, sie sind keine Fluenten mehr, sind konstant geworden, wie es bei der angenommenen Zahl von Gleichungen von vornherein klar war.

Liegt eine Gleichung mit mehr als zwei Fluenten vor, so sind nach Newton noch so viele andere Gleichungen hinzu zu denken, als nötig sind, um die Werte aller Fluxionen im Verhältnis zu einer unter ihnen zu bestimmen; d. h. zu einem Problem mit n Fluenten gehören $n-1$ Gleichungen. Zu Exemplum II (vergl. S. 24), mit drei Fluenten, heifst es (Opuscula I, S. 56): »Cum autem in hoc exemplo tres sint fluentes quantitates x, y et z, *habeatur oportet altera aequatio,* qua prorsus determinari possit relatio inter fluentes x, y et z, earumque Fluxiones. Suppone, ex. gr., quod $x + y - z = 0$, hinc invenietur altera relatio inter fluxiones $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$. Jam istam cum superiore aequatione compara, exterminando aliquam ex tribus illis quantitatibus et fluxionibus; et inde exsurget aequatio plene determinans relationem ceterarum.«*)

Was nun die Frage nach den zulässigen Exponenten anlangt, für welche die Newtonsche Fluxionsregel gilt, so beruht der rechnerische Teil der Beweisführung auf der Entwickelung

$$1)\ (x + \dot{x}o)^n = x^n + nx^{n-1}(\dot{x}o) + M(\dot{x}o)^2 + N(\dot{x}o)^3 + \cdots,$$

worin über M, N u. s. w. weiter nichts zu wissen nötig ist, als dafs sie endlich sind; sie setzt in der gegebenen Gleichung

$$2)\ \Sigma a x^p y^q z^r \cdots = 0$$

überall $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$, $z + \dot{z}o$ u. s. w. an die Stelle von $x, y, z \ldots$, entwickelt, führt die nötigen Multiplikationen aus und ordnet das entstehende Aggregat nach Dimensionen der Momente $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ u. s. w. Die Glieder, die keine Momente haben, verschwinden wegen (2) von selbst. Jetzt

*) Dafs die Zahl der Fluenten in dem Fluxionstheorem von Newton selbst als unbeschränkt angesehen wird, ist eine so nahe liegende Folgerung aus seinem Vortrag über sein Problem I, dafs ich mit Befremden in einer deutschen Darstellung der Newtonschen Fluxionslehre, die von vielen Schriftstellern als Quelle angeführt wird (Weifsenborn a. a. O.), Stellen wie die folgenden gelesen habe: „Endlich erhält man darüber, wie eine Gleichung mit mehr als drei Fluenten zu behandeln sei, durchaus keinen (?) Aufschlufs“ (S. 30). — „Aus dem vorigen ist klar, dafs nur die Fluxionen von zwei Fluenten gesucht werden können etc.“ (S. 29). — Die Fluxionen können überhaupt nicht gesucht werden, sondern nur Verhältnisse von je zwei Fluxionen zu einander! — „Nichtsdestoweniger stellt sich Newton die Aufgabe, das Verhältnis der Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ auch aus Gleichungen zu finden, die drei Variabele enthalten“ (S. 29). — Diese Aufgabe stellt sich Newton, soweit ich sehen kann, in dieser Form nirgends. Die Newtonsche Aufgabe heifst: Gegeben eine Gleichung zwischen beliebig vielen Fluenten; gesucht die Relation zwischen ihren Fluxionen. Natürlich kann die gefundene Relation (Gleichung) nach dem Verhältnis $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ aufgelöst werden, wie nach jedem andern Verhältnis $\frac{\dot{z}}{\dot{u}}$, $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}$ von irgend zwei Fluxionen, weil jede Fluxionsgleichung homogen

wird jedes Glied durch o dividiert, und schliefslich werden alle Glieder, die vor der Division vom zweiten und höheren Grade in Beziehung auf die Momente waren und daher nach der Division durch o diese Gröfse noch enthalten, als unendlich klein gegenüber den Gliedern ersten Grades vernachlässigt, so dafs erhalten wird

$$\Sigma apx^{p-1}y^q z^r \cdots (\dot{x}) + \Sigma aqx^p y^{q-1} z^r \cdots (\dot{y}) + \Sigma arx^p y^q z^{r-1} \cdots (\dot{z}) + \cdots = 0,$$

was mit der Newtonschen Regel

$$\Sigma apx^p y^q z^r \cdots \left(\frac{\dot{x}}{x}\right) + \Sigma aqx^p y^q z^r \cdots \left(\frac{\dot{y}}{y}\right) + \Sigma arx^p y^q z^r \cdots \left(\frac{\dot{z}}{z}\right) + \cdots = 0$$

übereinstimmt. Die Newtonsche Fluxionsregel gilt also auf Grund der von Newton gegebenen »*demonstratio*« für Gleichungen zwischen beliebig vielen Fluenten von der Form $\Sigma ax^p y^q z^r \cdots = 0$ und für solche Exponenten $p, p, r \ldots$, für welche die Entwickelung (1) gilt.

Ableitung der Fluxionsgleichung aus Fluentengleichungen mit gebrochenen und irrationalen Ausdrücken.

Die Fluxionsregel ist nicht ohne weiteres anwendbar auf Glieder, in denen zwei- oder mehrgliederige Ausdrücke der Fluenten einen Nenner oder Radikanden bilden, also z. B. nicht mehr auf $\frac{a}{b+cx}$ oder $\sqrt{b+cx}$. Da aber die Zahl der Fluenten in einer gegebenen Fluentengleichung nicht beschränkt ist, so reicht die nur für Glieder von der Form $ax^p y^q \cdots$ gegebene Regel auch aus, um die Fluxionen gebrochener oder irrationaler Ausdrücke zu finden, ohne das Hilfsmittel ihrer Entwickelung in unendliche Reihen von der Form $ax^\alpha + bx^\beta + \cdots$ nötig zu haben. Die Ermittelung der Fluxionen gebrochener und irrationaler Ausdrücke geschieht daher durch Einführung von Hilfsfluenten und durch ein Verfahren, das im Grunde nicht verschieden ist von dem, dessen wir uns noch heute bedienen und das sich im einfachsten Falle in der Regel ausspricht: Wenn y eine Funktion von v und v eine Funktion von x ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

ist. — „Es entsteht hier zunächst die Frage, was soll die dritte Variabele z bedeuten, da bereits x das Symbol oder der Repräsentant der Zeit, y der des Raumes ist? Man mufs gestehen, dafs es schwer, ja unmöglich ist, der dritten Variabelen einen ähnlichen Sinn unterzulegen. Newton spricht sich nun dahin aus etc." (S. 30) — nun folgen angebliche Äufserungen Newtons, aber nicht in direkter Citierung und ohne Angabe der Quelle, so dafs eine Prüfung nicht möglich ist. Weifsenborn kommt zu dem Schlusse, Newton denke sich unter z die Fläche einer Kurve, deren Abscisse x und deren Ordinate y ist, und sagt dann: „Man sieht aus dieser Ableitung, dafs auch Newton der dritten Variabelen keine phoronomische Bedeutung unterzulegen vermochte, indem er ihr einen rein geometrischen Sinn zuschrieb" (S. 30); — als ob die „phoronomische Bedeutung" nicht bei allen Fluenten ohne Ausnahme eine und dieselbe wäre, nämlich die, dafs, während eine von ihnen, die quantitas correlata, gleichmäfsig wächst, die übrigen, die quantitates relatae, gleichzeitig mit veränderlichen Wachstumsgeschwindigkeiten zu- und abnehmen, unabhängig davon, ob sie Strecken, Flächen, Volumina, Zeiten, Kräfte oder sonst welche Gröfsen bedeuten, die einer kontinuierlichen Veränderung fähig sind. Nirgends habe ich eine Stelle in Newtons Schriften gefunden, aus der hervorginge, er denke sich ein für allemal unter x eine Abscisse, y eine Ordinate, z eine Fläche, wohl aber, dafs er Abscisse, Ordinate und Fläche, wo sie vorkommen, mit x, y und z bezeichnet. Vergl. auch S. 25 unseres Textes.

Beispiel. (Opuscula I, S. 57). Es liege vor die Relation $y^2 - a^2 - x\sqrt{aa - xx} = 0$. Newton setzt $x\sqrt{aa-xx} = z$ und erhält so die beiden Gleichungen: (1) $y^2 - a^2 - z = 0$; (2) $a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0$. Hieraus (1′) $2y\dot{y} - \dot{z} = 0$; (2′) $2a^2x\dot{x} - 4x^3\dot{x} - 2z\dot{z} = 0$ oder $\dot{z} = \frac{a^2x\dot{x} - 2x^3\dot{x}}{z}$ $= \frac{a^2x\dot{x} - 2x^3\dot{x}}{x\sqrt{aa-xx}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{aa-xx}}\dot{x}$; also folgt aus (1′): $2y\dot{y} - \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{aa-xx}}\dot{x} = 0$. Man sieht, dafs der Zusammenhang der Operationen derselbe ist wie beim Verfahren nach der Regel $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$. Denn durch (1) ist y definiert als Funktion von z; durch (2) z als Funktion von x. (1′) liefert $\frac{dy}{dz} =$ etc.; (2′) liefert $\frac{dz}{dx} =$ etc. Die Elimination von dz und z (bez. von $\dot{z}$ und z) aus diesen Gleichungen und aus (2) liefert die gesuchte Beziehung zwischen dy und dx (bez. zwischen $\dot{y}$ und $\dot{x}$). Gerade dieses Beispiel läfst sich nach der Vorschrift $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \cdot \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ durchführen, denn (1′) giebt $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{1}{2y}$; (2′) giebt $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{a^2x - 2x^3}{z} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, also $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, oder, wie Newton schreibt, $2y\dot{y} - \frac{a^2\dot{x} - 2xx\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}} = 0$.

Man kann die Hilfsfluente z auch so wählen, dafs die gegebene Gleichung mit zwei Fluenten sich in eine mit drei Fluenten verwandelt. Setzt man $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, so erhält man

1) $y^2 - a^2 - xz = 0$; 2) $zz = aa - xx$. Hieraus 1′) $2y\dot{y} - x\dot{z} - z\dot{x} = 0$; 2′) $z\dot{z} = -x\dot{x}$. Die Elimination von $\dot{z}$ und z aus (1′), (2) und (2′) ergiebt natürlich wieder $2y\dot{y} - \frac{a - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \dot{x} = 0$. — Nicht anders verfährt in ähnlichen Fällen Leibniz, nur dafs er anstatt $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Momente dx, dy, dz, d. h. die unendlich kleinen Gröfsen schreibt, denen die Fluxionen proportional sind und durch welche die Fluxionen erst einen Sinn erhalten.

Ein noch zusammengesetzteres Beispiel behandelt Newton in der Gleichung $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay + xx} = 0$ (Opuscula I, S. 57). Er führt die Hilfsfluenten $z = \frac{by^3}{a+y}$ und $u = xx\sqrt{ay + xx}$ ein und hat nun für 4 Fluenten x, y, z und u 3 Gleichungen:

1) $x^3 - ayy + z - u = 0$; 2) $az + yz - by^3 = 0$; 3) $ax^4y + x^6 - uu = 0$, wodurch drei der Fluenten als Funktionen der vierten bestimmt sind. Die Fluxionsregel liefert zwischen den Fluxionen die Beziehungen:

1′) $3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0$; 2′) $a\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} - 3by^2\dot{y} = 0$; 3′) $4ax^3y\dot{x} + 6x^5\dot{x} + ax^4\dot{y} - 2u\dot{u} = 0$. Will man das Verhältnis von $\dot{y} : \dot{x}$ durch y und x darstellen, so löse man (2), (3), (2′) und (3′) nach z, u, $\dot{z}$ und $\dot{u}$ auf und setze die erhaltenen Werte in (1′) ein. Das Ergebnis ist die gesuchte Fluxionsgleichung $\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} = 0$, wo α und β nur noch die Fluenten x und y enthalten.

Man hat dieses Verfahren „einen vielleicht nicht ganz erlaubten Kunstgriff“ genannt, man hat gefragt: „Durfte Newton z und u als bloſse Abkürzungen einführen?"*) Ich verstehe nicht, was in diesem Verfahren unerlaubt sein oder den Charakter eines Kunstgriffes haben sollte, und inwiefern es sich dem Zusammenhange der Operationen nach von dem Verfahren von Leibniz oder dem noch heute üblichen Verfahren der Differentiation durch Einführung neuer Variabelen unterscheidet. Daſs wir heute in der Praxis an der Hand auswendig gelernter Differentialformeln die Rechnung abkürzen, begründet keine Änderung im logischen Zusammenhange der Operationen, auſser etwa der, daſs man infolge der Übung im Gebrauche von Differentialformeln den eigentlichen logischen Zusammenhang der mechanisch ausgeführten Operationen aus den Augen verliert.

Das Problem II in Newtons Methodus Fluxionum.

Problema II. »*Data aequatione, quae contineat quantitatum fluxiones; invenire quam relationem habeant inter se hae quantitates fluentes.*«

Die Lösung dieses dem vorigen inversen Problems geschieht naturgemäſs nicht anders als durch Rückbildung einer Gleichung, aus der man nach der Fluxionsregel die gegebene Gleichung zwischen den Fluxionen wieder ableiten kann. Ein Glied $ax^{\alpha}\dot{x}$ der gegebenen Fluxionsgleichung verwandelt sich bei der Rückbildung zur Fluentengleichung in $\frac{a}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$; aber ein Glied wie $ay\dot{x}$ ergiebt nur dann ayx, wenn in der Fluxionsgleichung neben $ay\dot{x}$ auch noch $ax\dot{y}$ vorkommt, weil bei der Bildung der Fluxionsgleichung aus axy nicht allein $ay\dot{x}$, sondern $ay\dot{x}+ax\dot{y}$ entsteht. Allgemein gestattet das Glied $ax^m y^n \dot{x}$ den Schluſs auf $\frac{a}{m+1}x^{m+1}y^n$ nur dann, wenn gleichzeitig noch das Glied $\frac{na}{m+1}x^{m+1}y^{n-1}\dot{y}$ in der gegebenen Fluxionsgleichung vorkommt, weil $\frac{a}{m+1}x^{m+1}y^n$ einer Fluentengleichung die zwei Glieder $ax^m y^n \dot{x} + \frac{na}{m+1}x^{m+1}y^{n-1}\dot{y}$ der Fluxionsgleichung liefert. Daher ist die Möglichkeit, aus einer gegebenen Fluxionsgleichung die entsprechende Fluentengleichung durch direkte Rückbildung nach der Vorschrift: aus $ax^{\alpha}\dot{x}$ wird $\frac{a}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, zu finden, sehr beschränkt. Sie setzt im allgemeinen voraus, daſs in der gegebenen Fluxionsgleichung die Fluenten von einander getrennt vorkommen, d. h. daſs jedes Glied immer nur die mit der in ihr vorkommenden Fluxion gleichnamige Fluente enthält. Gegenüber solchen Schwierigkeiten führt Newton seine Analysis per aequationes numero terminorum infinitas und seine enorme Divinationsfähigkeit ins Gefecht und weiſs damit Schwierigkeiten über Schwierigkeiten zu überwinden. Es hat aber für uns kein Interesse, diese technisch-rechnerische Seite der Behandlung des Problems vorzuführen, weil Newton die Regeln und Vorschriften, nach denen er aus einer gegebenen Fluxionsgleichung zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ eine Fluentengleichung in Form einer unendlichen Reihe $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$, bez. deren Anfangsglieder herausrechnet, ohne Beweis

*) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, S. 164, 165.

und hinreichende Begründung aufstellt. Uns interessieren aber gerade die Begründungen. Newton kann hier weiter nichts thun, als darauf hinweisen, daſs man in jedem Falle unter Anwendung des Fluxionstheorems die Probe auf die Richtigkeit der gefundenen oder aufgestellten Fluentengleichung machen müsse. Er sagt (Opuscula I, S. 84):

Demonstratio. »Hoc pacto (d. h. nach den gegebenen Beispielen und Regeln) solutum est problema, sed latet demonstratio. Cum autem tot et tam varia contineat hoc problema, ut demonstratio synthetice sine maximis ambagibus deduci nequeat ex genuinis ejus fundamentis, sufficiet eam breviter indicare analytice. Proposita igitur aequatione, et opere peracto, tenta num ex aequatione reperta regredi liceat ad propositam per probl. I. Quod ubi accidit, constat relationem, quae est inter quantitates in aequatione reperta, requirere relationem, quae est inter fluxiones in proposita; et vice versa. Q. E. D.«

Diese Probe ist aber in allen Fällen, wo die Fluentengleichung in einer unendlichen Reihe besteht, überaus umständlich und ohne Konvergenzbedingungen, die ja bei Newton fehlen, überhaupt nicht exakt durchführbar.

Wir suchen uns aus Newtons Bemerkungen zu Problem II die Stellen heraus, aus denen ein Licht auf seine Auffassung der Grundbegriffe fällt.

Newton eröffnet seine Untersuchung des Problems mit einer Regel, die er »Solutio peculiaris« überschreibt. Sie lautet: »Cum hoc problema sit superioris conversum, resolvi debet per operationes contrarias; scilicet termini ducti in $\dot{x}$ disponi debent juxta dimensiones x et dividi per $\frac{\dot{x}}{x}$, et deinde per numeros dimensionum eorum, aut fortasse per aliquam aliam progressionem arithmeticam: Tum eadem opera repetita pro terminis multiplicatis per $\dot{u}$, $\dot{y}$, vel $\dot{z}$, aggregatum sic emergens poni debet aequale nihilo, rejectis terminis supervacuis.«

Weiſsenborn (a. a. O. S. 32 und 33) und Cantor (a. a. O. III, S. 164) lassen sich durch diese Regel zu dem, wie mir scheint, ungerechtfertigten Urteil verleiten, Newton habe selbst die beschränkte Anwendbarkeit dieser Regel in den Fällen, wo gemischte Glieder (Glieder mit mehr als einer Fluente) vorkommen, nicht erkannt. Cantor sagt geradezu: „Newton fühlte hier nicht, daſs seine Regel nur Geltung habe, wenn in der Fluxionsgleichung neben $max^{m-1}y^n\dot{x}$ das Glied $nax^m y^{n-1}\dot{y}$ auch wirklich auftrete.“ Daſs eine so augenfällige Bemerkung einem Newton entgangen sein sollte, klingt unwahrscheinlich. Es läſst sich auch aus dem, was er im Anschluſs an diese Regel sagt, erkennen, der er gerade wegen ihrer Unzulänglichkeit sich nicht weiter mit ihr befassen mochte. Er wendet sie zuerst auf das Beispiel $3xx\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}-3yy\dot{y}+ax\dot{y}=0$ an und bemerkt, daſs das durch seine Regel sich doppelt ergebende Glied ayx in die Fluentengleichung nur einmal aufzunehmen sei (daher das »rejectis terminis supervacuis« am Schlusse der Regel). Dann heiſst es: »Alia, quae fuissent observanda, permittam solertiae artificis; nam supervacaneum esset nimis diu in hoc argumento haerere: siquidem hoc pacto problema non semper solvi potest. Unum tamen addam, videlicet, quod si, postquam fluentium relationem inveneris hac methodo, regredi potes per probl. I ad propositam aequationem fluxiones involventem, certo noscis opus esse rectum, alias non. Sic in exemplo proposito, si ex inventa aequatione $x^3-axx+axy-y^3=0$ quaero, per primum problema, relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$, pervenio ad propositam aequationem $3xx\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}$

$+a x\dot{y}-3yy\dot{y}=0$; unde constat aequationem $x^3-axx+axy-y^3=0$ eam esse quam petebamus. *Sed, proposita aequatione* $x\dot{x}-y\dot{x}+a\dot{y}=0$, *methodus praescripta praebet* $\frac{1}{2}xx-yx+ay=0$, *aequationem, quae exponere deberet relationem inter x et y; sed quae ad hoc inepta est, quia hinc, per probl. I, excuditur* $x\dot{x}-y\dot{x}-x\dot{y}+a\dot{y}=0$, *quae aequatio differt a proposita.* — His autem perfunctorie praemissis aggredior *generalem solutionem.*« Damit sagt, scheint mir, Newton mit hinreichender Deutlichkeit, daſs der Schluſs von dem Gliede $-y\dot{x}$ der Fluxionsgleichung auf das Glied $-yx$ der Fluentengleichung nicht gemacht werden darf, weil in der Fluxionsgleichung das Glied $-x\dot{y}$ fehlt. — Unter Berufung auf Weiſsenborn fährt Cantor fort: „Es ist ganz richtig hervorgehoben worden, daſs der Rückschluſs von $x^3\dot{x}-3x^2y\dot{x}+xy^2\dot{y}-y^3\dot{y}=0$ auf $\frac{x^4}{4}-x^3y+\frac{xy^3}{3}-\frac{y^4}{4}=0$ falsch ist u. s. w.“ Daſs dieser Rückschluſs, wenn er gemacht würde, falsch wäre, sagt ja Newton in den oben angeführten Stellen mutatis mutandis selber. Weiſsenborn giebt nicht an, wo Newton diesen Rückschluſs gemacht haben soll. In der Castillioneusschen Ausgabe der »Methodus fluxionum« findet sich obiges Beispiel und obiger Schluſs nicht. Wenn aber nicht Newton, sondern sonst wer jenen falschen Rückschluſs macht, so durfte man das nicht „Newtons Verfahren“ oder „Newtons Methode“ nennen.*) Newton hält seine Solutio peculiaris für nichts weniger als eine allgemeine Methode. Das erste Beispiel zu seiner allgemeinen Methode der Integration einer Fluxionsgleichung mit gemischten Gliedern steht S. 71, Opuscula I, und lautet: $\dot{x}-3x\dot{x}+y\dot{x}+xx\dot{x}+xy\dot{x}-\dot{y}=0$, und Newton findet $y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$ u. s. w. in inf., aber keineswegs $x-\frac{3}{2}x^2+yx+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}-y=0$. — Die »Solutio peculiaris« hat keine andere Bedeutung, als die eines vorläufigen Versuches, durch einfache Umkehrung der Fluxionsregel eine Integrationsregel zu gewinnen. Newton findet selbst sofort, daſs diese Regel unzureichend ist, und giebt sich deshalb nicht weiter mit ihr ab: »siquidem hoc pacto problema non semper solvi potest.«

Das Gesetz der Homogeneität der Fluxionsgleichungen.

Gleich hinter der »Solutio peculiaris«, in der »Praeparatio in solutionem (generalem)« findet sich eine Stelle, die für die Beurteilung der Fluxionen im Sinne Newtons von gröſster Wichtigkeit ist. Diese Praeparatio dreht sich um den Gedanken: Cum peculiaris supra tradita solutio adhiberi nequit, semper aequationes hac forma donandae sunt, daſs aus ihnen das Fluxionsverhältnis $\dot{y}:\dot{x}$ oder, bei mehreren Fluenten, die Verhältnisse aller Fluxionen in Beziehung auf eine beliebige unter ihnen als Einheit betrachtete Fluxion ($\dot{y}:\dot{x};\ \dot{z}:\dot{x};\ \dot{u}:\dot{x}$) als algebraische Funktionen der Fluenten dargestellt werden können. Eine Konsequenz dieses Gedankens ist es, daſs, wenn nur eine Fluxionsgleichung gegeben ist, darin auch nur zwei Fluenten mit ihren Fluxionen vorkommen dürfen, sofern die Relation zwischen den Fluenten bestimmt sein soll.

*) Darum kann gerade dieses Beispiel unmöglich als Beweisgrund für die Schlüsse dienen, die Cantor (a. a. O. III, S. 165) daran knüpft hinsichtlich des Umfangs der Umarbeitung der »Methodus fluxionum« durch Newton nach dem Jahre 1700. — Eher lieſse sich das von uns S. 24 mitgeteilte »Exemplum II« zu Problem I (Opusc. I, S. 56) in diesem Sinne ausbeuten.

Denn das Problem der partiellen Differentialgleichungen hat Newton in seiner »Methodus fluxionum« nirgends gestreift. Wenn Weifsenborn (a. a. O. S. 39) meint, der Fall einer Fluxionsgleichung mit mehr als zwei Fluxionen enthalte das Problem der partiellen Differentialgleichungen, so ist das ein Irrtum. Gelangt Newton auf irgend eine Weise zu einer Gleichung zwischen mehr als zwei Fluxionen, so sind nach seiner Anschauungsweise zugleich so viele neue Gleichungen zwischen denselben Fluxionen zu fingieren, als nötig sind, um das Verhältnis einer jeden Fluxion zu einundderselben an sich beliebigen unter ihnen, der als Einheit, als fluxio temporis betrachteten Fluxion zu bestimmen. Aus diesen Grundgedanken folgt nun aber, dafs jede Fluxionsgleichung nach den Fluxionen homogen sein mufs. Newton erschwert das Verständnis dieser Notwendigkeit dadurch, dafs er sie gleich am Anfange seiner Darlegungen unvermittelt in Form einer kategorisch-dogmatischen Belehrung ausspricht, deren Sinn er zwar an Beispielen erläutert, für die er aber die tieferen Gründe für sich behält. Die Folge davon sind Mifsverständnisse und irrtümliche Meinungen über seine Grundgedanken, die, irgend einmal irgendwo gedruckt, dann auch in geschichtliche Werke ersten Ranges Eingang finden, wie wir bald sehen werden.

Newton beginnt die »Praeparatio in solutionem« mit den Worten: »Principio animadvertendum est, quod in proposita aequatione symbola fluxionum *(sunt enim quantitates diversi generis ab iis, quarum fluxiones sunt)* in singulis terminis ascendere debent ad aeque altas dimensiones: si quando autem res aliter se habet, assumenda pro unitate est aliqua fluxio cujusvis fluentis quantitatis, et per eam termini minus alti sunt multiplicandi toties quoties opus est, ut symbola fluxionum perveniant ad eundem dimensionum numerum in omnibus terminis. — Sit aequatio $\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - axx = 0$, pro unitate accipienda est fluxio $\dot{z}$ tertiae cujuslibet quantitatis fluentis z, et per eam primus terminus $\dot{x}$ semel, ultimus autem axx bis multiplicati concipiendi sunt, ut fluxiones in iis ad tot dimensiones ascendant, ad quot in secundo termino $x\dot{x}\dot{y}$, non secus ac si proposita aequatio deducta fuisset ab hac $\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$, fingendo $\dot{z} = 1$.

Hierzu heifst es bei Cantor (a. a. O. III, S. 165) im Anschlufs an Weifsenborn (a. a. O. S. 33): „Eine grofse Unklarheit (?) steckt auch in der Bemerkung Newtons, die gegebene Fluxionsgleichung müsse nach den auftretenden Fluxionen homogen sein, und wenn das nicht von selbst der Fall sei, müsse man Fluxionen einer weiteren Gröfse als Faktoren hinzudenken und diese als Einheiten betrachten.“ — „Was soll, hat man ganz richtig gefragt, dieses $\dot{z}$, was soll z selbst bedeuten?“ u. s. w. Und bei Weifsenborn heifst es: „Es folgt nun eine Stelle, in der Newton sich so unklar (?) ausspricht, dafs es sehr schwierig ist, ihn zu verstehen“ u. s. w.; die weiteren Ausführungen Weifsenborns lassen es zweifelhaft erscheinen, ob dem Verfasser das Verständnis Newtons aufgegangen ist. Bei der hervorragenden Bedeutung des Cantorschen Werkes und gegenüber der Thatsache, dafs auch die Arbeit Weifsenborns vielfach als Quelle angeführt wird, verlohnt es sich der Mühe, die Frage nach der Homogeneität der Fluxionsgleichungen von Grund aus zu untersuchen. Leider ist hierzu an dieser Stelle kein Raum übrig. Trotzdem mufs ich mit einigen Worten darauf eingehen.

Die mathematische Definition der Fluxionen, d. h. diejenige Bestimmung, durch die allein die Fluxionen die Fähigkeit erlangen, mit algebraischen Zeichen belegt und in algebraische Gleichungen aufgenommen zu werden, liegt darin (vergl. S. 28), dafs es endliche Gröfsen (irgend einer unter sich gleichen Art) sind, die sich zu einander wie die entsprechenden

Momente, d. h. wie die unendlich kleinen Gröfsen zu einander verhalten, um die die zusammengehörigen Werte x, y, z, u der Fluenten in einem und demselben unendlich kleinen Zeitintervall o wachsen bez. abnehmen. Also hat eine Fluxion allein ebensowenig einen absoluten Wert wie irgend ein Moment; also hat es keinen Sinn, nach dem Werte einer Fluxion zu fragen. Es kann immer nur nach dem Verhältnis zweier Fluxionen zu einander gefragt werden. Die Fluxionsgleichungen haben eben die Bestimmung, die Verhältniszahlen der Fluxionen untereinander zu ergeben. Diese Bestimmung können sie nur erfüllen, wenn sie den Fluxionen nach homogen sind. Wollte man die Gleichung $\dot{y}=x$ so übersetzen: die Fluxion von y ist gleich der Länge x, so spräche man einen Unsinn aus. Die Gleichung $\dot{y}=x$ hat nur diesen Sinn: die Fluxion $\dot{y}$ ist von einer anderen als Einheit betrachteten Fluxion dasselbe Vielfache oder derselbe Bruch wie die Länge x von einer anderen als Einheit betrachteten Länge. Wenn man diesen Gedanken in der Sprache der Analysis formuliert durch $\dot{y}=x$, so ist diese Ausdrucksweise eben eine mangelhafte; man müfste schreiben $\dot{y}:\dot{z}=x:e$, wo $\dot{z}$ eine an sich beliebige, aber als Einheit, als Grundlage der Vergleichung der Fluxionen während der ganzen Rechnung festzuhaltende Fluxion, und e eine an sich beliebige, aber während der ganzen Rechnung als Grundlage der Vergleichung aller Längen festzuhaltende Länge ist. Zwischen x und z kann die Beziehung $x=z+a$ gelten, dann ist $\dot{x}=\dot{z}$, also $\dot{y}:\dot{x}=x:e$. Eine vollkommen konsequente algebraisch-analytische Zeichensprache dürfte überhaupt auf keine anderen als homogene Gleichungen führen, homogen nach **jeder** Gröfsenart, die in der Gleichung vorkommt, d. h. man dürfte das Zeichen 1 in keiner anderen Bedeutung gebrauchen als der, dafs es anzeigt, irgend zwei Gröfsen einundderselben Art sind einander gleich; man dürfte es aber nicht für die Gröfsen selbst setzen, mit denen man andere Gröfsen vergleicht oder mifst, so dafs es in einer und derselben Gleichung die verschiedensten Dinge: Zahlkoeffizient, Strecke, Fläche, Zeit, Kraft, Masse, Geschwindigkeit u. s. w. u. s. w. bedeuten kann.

Wird an der Euklidischen Erklärung: Zwei Gröfsen, die ein Verhältnis zu einander bilden sollen, müssen homogen, d. h. so beschaffen sein, dafs irgend ein Vielfaches der einen die andere übertreffen kann, festgehalten, so kann die angewandte Analysis überhaupt nur auf homogene Gleichungen führen, d. h. jede Gleichung, die eine mögliche Beziehung zwischen Gröfsen ausdrückt, wird homogen nach allen in ihr vorkommenden Gröfsenarten. Dieses Gesetz der Homogeneität aller Gleichungen und aller Ansätze der angewandten Rechenkunst ist so allgemeingiltig, dafs selbst der Quartaner es befolgen mufs. Der Ansatz zur Lösung einer Aufgabe der zusammengesetzten Schlufsrechnung hat die Form $\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d\ldots}{(x)\cdot u\cdot v\cdot w\ldots}\ldots$, worin $a, b\ldots$ Gröfsen gleicher oder verschiedener Art und x die gesuchte Gröfse andeuten. Der Ansatz ist sicher falsch, wenn nicht beide Ausdrücke über und unter dem Bruchstrich nach allen in ihnen vorkommenden Gröfsenarten homogen sind. Die Prüfung, ob der Ansatz homogen ist, wird erschwert, wenn eine oder mehrere der Gröfsen $a, b\ldots$ die Einheit der betreffenden Gröfsenart bilden, also mit 1 bezeichnet werden, bez. als Faktoren unbezeichnet bleiben.

Wo Gleichungen der angewandten Analysis nicht eine homogene Form haben, da müssen sie homogen gedacht werden, oder sie stellen einen Unsinn dar. Ist M eine Strecke und Q eine Gröfse anderer Art, z. B. eine Belastung, und schreibt jemand $M=Q$, so bedeutet das nicht den Unsinn: eine Strecke ist gleich einem Gewicht; sondern es ist der bis aufs äufserste abgekürzte Ausdruck für folgenden Gedanken: Strecke M ist aus einer anderen nicht weiter bezeichneten Strecke, und Belastung Q aus einer anderen nicht weiter bezeichneten Belastung in gleicher Weise gebildet, wie einunddieselbe nicht weiter bezeichnete Zahl aus 1. — Werden die Einheiten von M und Q mit m und q bezeichnet, so drückt sich derselbe Gedanke präciser aus durch $M : m = Q : q$, oder durch die homogene Gleichung $Mq = Qm$. — Wäre die Beziehung zwischen M und Q dargestellt durch $M + Q = 3$, so müfste einer, der die Gleichung versteht, eine längere Reihe von Begriffen und Beziehungen dahinter lesen. Zuerst eine Einheit von M und eine Einheit der Gröfsenart Q; sie mögen m und q heifsen. Dann eine Zahl μ, die aus 1 so gebildet ist, wie M aus m; und eine Zahl γ, die aus 1 so gebildet ist, wie Q aus q, dann sagt obige Gleichung aus, dafs $\mu + \gamma = 3$ ist. Schreibt man jene Gleichung aber $\frac{M}{m} + \frac{Q}{q} = 3$, und macht Gebrauch von Vietas grofsem Gedanken, mit den Gröfsensymbolen wie mit Zahlen zu operieren, so folgt die homogene Gleichung $Mq + Qm = 3mq$. — Oder wäre eine Beziehung zwischen einer Strecke M und einer Belastung Q dargestellt durch die Gleichung $M^2 \cdot Q + M \cdot Q^3 = 1$, so ist ihr wahrer Sinn dieser $\left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot \frac{Q}{q} + \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{Q}{q}\right)^3 = 1$, woraus die nach Strecken und Belastungen homogene Gleichung $M^2 \cdot Qq^2 + Mm \cdot Q^3 = m^2 q^3$ hervorgeht.

Wir halten daher Newtons Hinweis darauf, dafs die Fluxionsgleichungen nach den Fluxionen homogen sein müssen, nicht für eine »Unklarheit«, sondern für eine selbstverständliche Folge des Begriffes der Fluxionen als Gröfsen, die nur untereinander vergleichbar sind, aber nicht an der Einheit der Fluenten gemessen werden können. Keine folgerichtige Bildung eines Ansatzes einer Aufgabe, in der Fluenten und Fluxionen vorkommen, kann, wenn alle verschiedenen Fluenten und Fluxionen mit unterscheidenden Zeichen belegt werden, auf die Gleichung $\dot{x} + xx\dot{y} - axx = 0$ führen. Diese Gleichung ist entweder ein Unding, oder sie zeigt an, dafs bei ihrer Bildung die Inkonsequenz begangen worden ist, den Einheiten verschiedener Gröfsenarten einerlei Zeichen 1 zu geben, bez. sie ganz wegzulassen. Nehmen wir an, x und y wären rechtw. Koordinaten, a ein Kurvenparameter, die Streckeneinheit sei e, die Einheit der Fluxionen $\dot{z}$ (sie kann zunächst nicht $\dot{x}$ oder $\dot{y}$ sein, weil diese Fluxionen bereits anders als durch 1 bezeichnet sind und die Gleichung nach $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nicht homogen ist), dann ist der wahre arithmetische Sinn der Gleichung dieser: $\frac{\dot{x}}{\dot{z}} + \frac{x}{e} \cdot \frac{\dot{x}}{\dot{z}} \cdot \frac{\dot{y}}{\dot{z}} - \frac{a}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} = 0$, woraus nach Vieta folgt $e^3\dot{x}\dot{z} + e^2x\dot{x}\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$. Indem nun Newton die Konsequenz in der Bezeichnung nur für die Fluxionen, nicht für die Fluenten durchführt, d. h. $e = 1$ setzt, erhält er $\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$. — Wenn daher Weifsenborn dieses Verfahren Newtons einen „Kunstgriff“ nennt und sagt: „Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dafs hier jeder Sinn aufhört“, so kann ich dieses Urteil nicht teilen. Die Frage Cantors aber: „Was soll dieses $\dot{z}$, was soll z selbst bedeuten?“ ist nach allem, was über Gleichungen zwischen drei und mehr Fluenten bereits gesagt ist, erledigt. Sonst kann man die Antwort auch aus der Art entnehmen, wie Newton solche Gleichungen integriert. Es heifst in der »Solutio casus III« (Opusc. I, S. 83): »Statim nos extricabimus a problemate solvendo, quando aequatio continet tres vel etiam plures quantitatum fluxiones. Nam ad id sufficit quamlibet relationem inter binas supponere, cum haec relatio a statu quaestionis non determinatur, et hinc deduci potest relatio, quae est inter earum fluxiones, ita ut exterminari possit alterutra cum fluxione sua. Quamobrem, si trium quantitatum fluxiones adsunt, una aequatio assumenda est; duae aequationes, si quatuor insunt fluxiones; atque ita porro; *ita ut aequatio proposita tandem in aliam transformetur, in qua sint duae fluxiones tantummodo.* Tunc autem aequatio haec resolvenda est ut supra et sic detegentur relationes aliarum quantitatum. — Sit proposita $2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$. Ut obtineam relationem quantitatum x, y et z, fingo relationem quamlibet inter duas ex ipsis« ($x = y$, aut $2y = a + z$, sive $x = yy$, etc.) »Sumamus $x = yy$ et, quod hinc conficitur, $\dot{x} = 2y\dot{y}$. Igitur aequatio proposita mutatur in $4y\dot{y} - \dot{z} + yy\dot{y} = 0$, et hinc educitur relatio inter y et z, id est $2yy - z + \frac{1}{3}y^3 = 0$: Restitue x et invenies $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Ergo *ex infinitis modis*, quibus x, y et z, altera ad alteram, possunt referri, *unus inventus* fuit, qui exponitur per has aequationes $x = yy$; $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$; et $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.«

Wie Weifsenborn (a. a. O. S. 39) sagen kann, dieser Casus III sei identisch mit dem Problem der partiellen Differentialgleichungen, ist mir unverständlich. Nicht um eine Funktion mehrerer unabhängigen Variabelen handelt es sich hier, sondern um mehrere Funktionen einundderselben unabhängigen Variabelen. Dafs Newton nur den letzteren Fall im Auge hatte, konnte er, da der Begriff der „Funktion“ damals noch des sprachlichen Ausdrucks entbehrte, deutlicher nicht sagen. Weifsenborn giebt in seiner Darstellung das Ergebnis der Newtonschen Integration in einer Form, in der es bei Newton nicht steht, nämlich $2x + \frac{1}{3}xy = z$ und sagt dann: „Dafs dieses Resultat ein unrichtiges ist, davon überzeugt man sich leicht durch die Probe.“ Aber das Gegenteil ist wahr. Die Probe beweist die Richtigkeit dieses Resultates. Denn wenn $2x + \frac{1}{3}xy = z$, so ist 1) $2x - z + \frac{1}{3}xy = 0$; folgl. 2) $2\dot{x} - \dot{z} + \frac{1}{3}x\dot{y} + \frac{1}{3}y\dot{x} = 0$; aber wegen $x = yy$ ist $\dot{x} = 2y\dot{y}$; folgl. $\frac{1}{3}y\dot{x} = \frac{1}{3}y \cdot 2y\dot{y} = \frac{2}{3}y^2\dot{y} = \frac{2}{3}x\dot{y}$; folgl. $\frac{1}{3}x\dot{y} + \frac{1}{3}y\dot{x} = \frac{1}{3}x\dot{y} + \frac{2}{3}x\dot{y} = x\dot{y}$; also geht (2) über in $2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$, was zu beweisen war. Weifsenborn verwechselt die relatio quaelibet (hier $x = y^2$), durch die Newton das unbestimmte Problem zu einem bestimmten macht, wohl mit dem Begriff der „willkürlichen Funktion“ bei Integration partieller Differentialgleichungen, und kommt dadurch zu seinem schiefen Urteil.*) — Newton giebt zu Casus III nur dieses eine Beispiel, während er dem Casus I, Gleichungen von der Form $\dot{y} = \Sigma a x^{\alpha} \dot{x}$ bez. $\dot{x} = \Sigma b y^{\beta} \dot{y}$, 4 Seiten; dem Casus II, Gleichungen von der Form

*) Die Auffassung, die Fluxionsgleichungen mit mehr als zwei Fluenten seien die heutigen partiellen Differentialgleichungen, ist aus Weifsenborn in Cantor's Geschichte der Mathematik übergegangen und veranlafst Cantor (a. a. O. III, S. 166) zu dem Urteil: „Newton weifs mit von einander unabhängigen Veränderlichen sich nicht zu helfen und setzt deshalb (?) diese ihm unbequemene Gröfsen durch hinzugenommene Bedingungen in ein Abhängigkeitsverhältnis von einander.“ — Einem Newton gegenüber sträubt sich mein Gefühl dagegen, ein solches Urteil als eine unvermeidliche Konsequenz seiner Behandlung des Casus III der Fluxionsgleichungen anzuerkennen.

$\dot{y} = \Sigma a x^{a} y^{\beta} \dot{x}$, aber 12 Seiten widmet. Und er wählt die relatio quaelibet $x = yy$ so, dafs die entstehende Gleichung $4 y\dot{y} - \dot{z} + yy\dot{y} = 0$ nur reine Glieder enthält, die Solutio peculiaris also anwendbar und die Entwickelung in Reihen entbehrlich wird.

Über die Bedeutung von $\dot{z}$ und z in der aus $\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - axx = 0$ entstandenen Gleichung $\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\dot{y} - ax^2\dot{z}\dot{z} = 0$ kann nun kein Zweifel mehr sein. Man hat sich zu sagen: Da $\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - axx = 0$ nicht homogen ist, so steckt darin noch eine dritte Fluxion, die mit 1 bezeichnet ist und deshalb nicht zum Ausdruck kommt. Giebt man ihr das Zeichen $\dot{z}$ und fafst $\dot{x}$ und $\dot{y}$ auf als $\dot{x} : \dot{z}$ und $\dot{y} : \dot{z}$, so erhält man die homogene Form der Gleichung. Dieselbe ist der unvollständige Ausdruck eines Problems zwischen zwei Variabelen (relatae), die als Funktionen einer und derselben dritten Variabelen (correlata) z aufzufassen sind. So lange nicht noch eine Gleichung zwischen x und z oder y und z gegeben ist, sind die Abhängigkeiten zwischen y und z, sowie zwischen x und z nicht bestimmt. Eine dieser Abhängigkeiten kann willkürlich fingiert und so »ex infinitis modis« ein beliebiger Modus herausgegriffen werden.

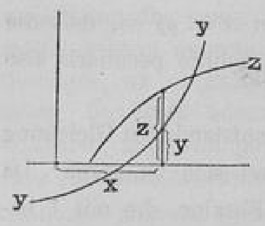
Newton schreibt auch zahlreiche Beispiele zu Casus II so, dafs er die Fluxion der quantitas correlata unbezeichnet läfst (d. h. mit 1 bezeichnet denkt); z. B. $\dot{y} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, anstatt $\dot{y} = 2y^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{x} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{x}$ (Op. I, S. 82). Nachdem er aber die Notwendigkeit der Homogeneität der Fluxionsgleichungen ausdrücklich betont hat, ist seine Inkonsequenz in der Bezeichnung ohne Bedeutung. Dagegen vermisse ich die Aufklärung über eine andere weder von Cantor noch von Weifsenborn berührte Frage.

Die direkte Operation, der Übergang von der Fluentengleichung zur Fluxionsgleichung, führt nicht nur auf homogene, sondern auch auf nur lineare Formen. Da nun die inverse Operation, der Übergang von einer Fluxionsgleichung zur Fluentengleichung, die Bestätigung ihrer Richtigkeit immer erst durch die Probe, durch Rückerzeugung der gegebenen Fluxionsgleichung aus der aufgestellten Fluentengleichung auf Grund des Fluxionstheorems erhalten kann und dieses Theorem nur auf lineare Fluxionsgleichungen führt, so entsteht die Frage: wie denkt sich Newton die Gleichung $\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - axx = 0$, bez. $\dot{x}\dot{z} + x\dot{y}\dot{x} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$ entstanden, die doch nicht linear ist? Schwebte ihm überhaupt eine bestimmte Entstehungsart nicht linearer Fluxionsgleichungen vor, oder ist es auch einem Newton passiert, dafs er über den Symbolen die Sache vergafs und in ein Spiel mit leeren Formeln verfiel? Wie denkt er sich die Gleichung $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + xx\dot{x}\dot{x}$ entstanden, die er (S. 64), $\dot{x}$ als Fluxionseinheit betrachtend, umformt in $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = x^2$ und deren zwei Wurzeln $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$ er entwickelt in die unendlichen Reihen:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 \text{ etc. und } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -x^2 + x^4 - 2x^6 + 5x^8 \text{ etc.},$$

um hieraus (S. 66) auf Grund der Regel: „aus ax^{α} wird $\frac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1}$“ zu schliefsen:

$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 \text{ etc. und } y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7 + \frac{5}{9}x^9 \text{ etc.?}$$

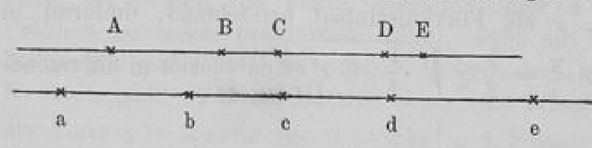


Man kann natürlich auch diesem Verfahren eine Deutung geben. Man denke sich zwei Funktionen y und z von x. Sei $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$. Dann erhält man $\dot y = p\dot x$, und $\dot z = q\dot x$, wo p und q Funktionen von x sind; also ist $\dot y - p\dot x = 0$ und $\dot z - q\dot x = 0$; daher auch $(\dot y - p\dot x)(\dot z - q\dot x) = 0$ oder $\dot y\dot z - p\dot x\dot z - q\dot y\dot x + pq\dot x\dot x = 0$. Diese Gleichung könnte man betrachten als die gleichzeitige Fluxionsgleichung zweier Relationen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$. Begeht man nun die Inkonsequenz in der Bezeichnung, für $f(x)$ und $\varphi(x)$ einerlei Zeichen y zu setzen, so geht obige Gleichung über in $\dot y\dot y = (p + q)\dot y\dot x - pq\dot x\dot x$, die in der Form mit dem Newtonschen Beispiele $\dot y\dot y = \dot x\dot y + xx\dot x\dot x$ übereinstimmt, ebenso wie $\dot y\dot z - p\dot x\dot z - q\dot y\dot x + pq\dot x\dot x = 0$ mit $\dot x\dot z - x\dot x\dot y - axx\dot z\dot z = 0$. — Dachte sich aber Newton die Sache so? Er schweigt hierüber.

Die willkürlichen Konstanten der Fluenten.

Jede Fluente einer Fluxionsgleichung und jede Fluente einer Fluentengleichung, die aus einer gegebenen Fluxionsgleichung gewonnen ist, darf um eine willkürliche Konstante vermehrt oder vermindert werden. Von diesem Satze, den man freilich in obiger expliciter Fassung in Newtons Schriften nicht findet, macht Newton bei seinen Umformungen gleichwohl vielfach Gebrauch. Um z. B. die Gleichung $\dot y = \frac{a}{x} \cdot \dot x$ zu integrieren, setzt Newton (Opusc. I, S. 68) $b + x$ anstatt x (nicht etwa $b + z$ anstatt x, und $\dot z$ anstatt $\dot x$) und erhält $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{a}{x} = \frac{a}{b + x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{bb} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$ etc. und daraus $y = \frac{ax}{b} - \frac{axx}{2bb} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$ etc.*) Die Stelle, in der er dies im Anschluſs an seine demonstratio zu Problem II rechtfertigt (vergl. S. 35), erscheint mir zu charakteristisch und wichtig, als daſs ich sie hier nicht vollständig fixieren sollte.

»In aequationum reductione adhibeo operationem, cujus rationem afferendam censeo; ea consistit in alicujus fluentis quantitatis transmutatione per ejus connexionem cum data quantitate. Sint AE atque ae duae rectae utrimque in infinitum protensae, per quas ferantur duae res mobiles, aut duo puncta, quae *eodem tempore* pervenisse concipiantur in loca A et a, B et b, C et c, D et d etc., et mobilis, quod fertur per AE, distantia a puncto B illius motum ita metiatur, ut $-BA$, $+BC$, $+BD$, $+BE$ successive et quando mobile est in locis A, C, D, E, sint fluentes quantitates. Pariter sit b simile punctum in altera linea. Tunc igitur $-BA$ et $-ba$ erunt duae *contemporaneae fluentes*,



*) Cantor (a. a. O. III, S. 166) sagt mit Bezug hierauf: „An eine Rechtfertigung dieser Willkür (?) scheint er (Newton) nicht gedacht zu haben.“ — Wie?! Ist die oben folgende citierte Stelle nicht eine solche Rechtfertigung jener scheinbaren Willkür, daſs sie — ihrem Inhalte nach — die Bewunderung vor Newtons Geiste herausfordert?

ut etiam $+BC$ et $+bc$, $+BD$ et $+bd$, $+BE$ et $+be$, etc. Jam si punctis B et b substituantur puncta A et c, ad quae, velut quiescentia, referantur motus, tunc 0 et $-ca$, $+AB$ et $-cb$, $+AC$ et 0, $+AD$ et $+cd$, $+AE$ et $+ce$ erunt *contemporaneae fluentes quantitates*. Quocirca *mutatae quidem sunt fluentes quantitates additione et subductione datarum quantitatum AB* et *ac*, sed in iis mutatae *non* fuerunt *neque motuum celeritates neque mutua fluxionum relatio. Partes* enim *eodem tempore genitae AB et ab, BC et bc, CD et cd, DE et de* sunt ejusdem longitudinis in utraque hypothesi. *Eodem pacto in aequationibus has quantitates exponentibus contemporaneae quantitatum partes non ideo mutantur, quia absoluta earum magnitudo aliqua data quantitate augetur vel minuitur.* Hinc patet propositum; etenim eo tantum tendit problema, ut determinentur *contemporaneae partes aut differentiae absolutarum quantitatum u, x, y* aut z, descriptae data *fluendi ratione.* Nihil autem interest cujusnam absolutae magnitudinis sint hae quantitates, dummodo earum *contemporaneae* vel ***correspondentes differentiae*** conveniant cum proposita fluxionum relatione.

Hujus rei ratio tradi etiam sic algebraice potest. Proposita sit aequatio $\dot{y} = yx\dot{x}$, et suppone $x = 1 + z$, igitur per probl. I. $\dot{x} = \dot{z}$; quapropter pro $\dot{y} = yx\dot{x}$ scribere licet $\dot{y} = y\dot{x} + yz\dot{x}$ (Newton schreibt nicht $\dot{y} = y(1+z)\dot{z} = y\dot{z} + yz\dot{z}$). Nunc quia $\dot{x} = \dot{z}$, liquet, quod tametsi quantitates x et z non sint ejusdem longitudinis, attamen aequaliter fluunt respective ad y, et habent aequales una genitas partes. Quidni igitur repraesentem eodem symbolo quantitates, quarum ratio fluendi eadem est, et ad determinandas earum contemporaneas differentias quidni scribam $\dot{y} = y\dot{x} + yx\dot{x}$ pro $\dot{y} = yx\dot{x}$.« — Wieder eine kleine Newtonsche Inkonsequenz in der Bezeichnung. Warum mochte er nicht schreiben $\dot{y} = yx\dot{x} = y\dot{z} + yz\dot{z}$, da doch einmal $x = 1 + z$ und daher wohl $\dot{x} = \dot{z}$, aber nicht $x = z$ ist? — »Demum manifesto apparet, quomodo inveniri possint partes contemporaneae ex aequatione fluentes involvente. — Sic adsit aequatio $y = \frac{1}{x} + x$ et, cum $x = 2$, sit $y = 2\frac{1}{2}$; at cum $x = 3$, tunc $y = 3\frac{1}{3}$. Igitur, dum x fluit ex 2 in 3, y fluit ex $2\frac{1}{2}$ in $3\frac{1}{3}$, quapropter partes eodem tempore descriptae sunt $3-2=1$ et $3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

His tanquam dicendorum fundamentis substratis ad magis peculiaria problemata descendam.« Damit beschliefst Newton sein Problem II. Uns sind diese Ausführungen deshalb so bemerkenswert, weil sie in vieler Hinsicht, insbesondere aber in den »*correspondentes differentiae*« anstatt der »contemporaneae differentiae« oder »partes« eine auffällige Annäherung an die Leibnizische Grundauffassung verraten.

Schlufsbemerkung.

Mit einem abschliefsenden Urteile über Newtons Analysis stetig veränderlicher Gröfsen halte ich hier zurück, weil die Darlegung der Anwendungen seiner methodus fluxionum sowie die darauf bezüglichen Ausführungen in seinen übrigen Schriften hier nicht Platz finden können. Noch viel weniger kann daher hier ein Urteil über die Leibnizische Begründung der Infinitesimalrechnung motiviert werden. Was aber das Verhältnis zwischen Newtonscher und Leibnizischer Darstellung anlangt, so geht mein Urteil dahin, dafs ich den Leibnizischen mathematischen Entwickelungen mit mehr intellektuellem Behagen folgen kann als denen von Newton. Dies beruht zum grofsen Teile auf dem Unterschiede in der Handhabung der Symbole. Wo Leibniz alle Sorgfalt darauf verwendet, dafs die gebrauchten Zeichen dem Leser auch den ganzen Sinn der Begriffe und ihrer gegenseitigen Beziehungen jeden Augenblick vor Augen führen, gewinnt man bei Newton mehr wie einmal den Eindruck, als ob er geflissentlich Dinge, die er selbst für sich klar unterscheidet, dem Leser gegenüber durch schwankende Bedeutung der Symbole verschleiere. Eben darum treten in der Leibnizischen Sprache alle der Analysis stetiger Veränderungen immanenten Schwierigkeiten deutlich heraus, während sie von Newton verhüllt, aber keineswegs beseitigt werden. Mathematische Kunstgriffe, Wendungen und Hilfsvorstellungen, die die Aufgabe haben, im entscheidenden Schritte des logischen Gedankenganges über vorhandene Schwierigkeiten hinwegzutäuschen, finden sich bei Leibniz nicht. Keine Fluxionen ohne Momente! Der Begriff der Fluxionen hat erst in dem der Momente seine Stütze. Warum dann nicht die Fluxionen ganz bei Seite lassen und direkt mit Momenten rechnen?! Dies thut Leibniz. Seine Differenzen sind dasselbe wie die Newtonschen Momente. Es giebt Gröfsen von solcher Kleinheit, dafs die Ratio irgend eines Vielfachen einer solchen Gröfse zu irgend einer noch so kleinen gegebenen endlichen Gröfse derselben Art durch keine noch so kleine Bruchzahl angebbar ist, dafs sie aber gleichwohl untereinander alle Zahlenverhältnisse bilden können; noch mehr: es giebt innerhalb einer jeden Gröfsenart unendlich viele Gröfsenstufen, derart, dafs die Ratio einer Gröfse der einen Stufe zu einer Gröfse der unmittelbar folgenden oder unmittelbar vorangehenden Stufe durch keine andere Zahl als 0 oder ∞ dargestellt werden kann, während die Verhältnisse von Gröfsen einer und derselben Stufe alle Zahlen durchlaufen. Das ist der Grundgedanke der Leibnizischen Infinitesimalrechnung. Und Leibniz, weit entfernt davon, einmal vorhandene logische Schwierigkeiten zu verhüllen, giebt seinem Grundgedanken Ausdruck in paradoxen Formen: Ruhe ist Bewegung, und Bewegung Ruhe, Gleichheit ist Ungleichheit, und Ungleichheit ist Gleichheit, $x + dx = x$ und gleichwohl dx eine Gröfse; d. h. Ruhe ist unendlich kleine Bewegung, und Bewegung ist von der Ruhe nur der Gröfse nach, nicht der Art nach verschieden. Gleiche Gröfsen eines Kontinuums unterscheiden sich noch durch Unendlichkleines, und Gröfsen, die sich durch Unendlichkleines unterscheiden, sind einander gleich zu setzen. $x + dx = x$, weil $\frac{x+dx}{x} = \frac{x}{x} + \frac{dx}{x} = 1 + \underline{0} = 1$ ist, u. s. w., wo $\underline{0}$ nicht die absolute Null, sondern die Zahl ist, die sich zu 1 verhält, wie ein Unendlichkleines zu einem Endlichen, also etwa wie der Abstand einer Kurve von der Asymptote in unendlich fernen Punkten zu einer endlichen Länge; oder $\underline{0}$ ist die Zahl, die wir heute bezeichnen mit $\left(lim \frac{1}{n}\right)_{n=\infty}$. Diese Paradoxa sind aber nicht willkürliche Fiktionen, sondern haben ihr »fundamentum in re«; in dem Verhältnis des nur anschaulich erfafsbaren, von der Mathematik als objektiv gegeben zu betrachtenden Kontinuums zu unserem subjektiven, nur in distinkten Begriffen fortschreitenden Denken. Alles Rechnen mit Gröfsen verschiedener Stufen oder Ordnungen wird bei Leibniz beherrscht von seiner »Lex nova homogeneorum«. Jede Gröfse irgend einer Stufe ist nur an Gröfsen derselben Stufe mefsbar; gemessen an Gröfsen anderer Stufen aber 0 oder ∞. Daher fallen aus jeder Gleichung, die zunächst Glieder verschiedener Gröfsenstufen enthält, alle Glieder, die in Bezug auf andere Glieder derselben Gleichung von einer niederen Stufe sind, weg, wenn man die Einheiten, an denen die Glieder der Gleichung gemessen werden, aus der dem Werte nach höchsten in der Gleichung vorkommenden Gröſsenstufe nimmt. Dementsprechend verlangt die lex homogeneorum, daſs jede Endgleichung einer anlytischen Operation homogen sei nicht nur nach den Gröſsenarten, sondern auch nach den Gröſsenstufen.

Sehen wir zu, wie der Beweis des Newtonschen Fluxionstheorems nach Leibnizischer Methode verlaufen würde, bei Festhaltung Newtonscher Bezeichnung. Aus $f(x, y, z \ldots) = 0$ und $f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o, \ldots) = 0$ wird auf rein arithmetischem Wege entwickelt:

$$1)\qquad \left.\begin{array}{l} a \cdot (\dot{x}o) + b \cdot (\dot{y}o) + c \cdot (\dot{z}o) + \cdots \\ + h \cdot (\dot{x}o)^2 + k \cdot (\dot{x}o) \cdot (\dot{y}o) + \cdots\cdots \\ + p \cdot (\dot{x}o)^3 + q \cdot (\dot{x}o)^2 \cdot (\dot{y}o) + \cdots\cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0.$$

Jedes Glied der 2. 3. 4.... Zeile verhält sich zu irgend einem Gliede der vorhergehenden Zeile wie eine der Gröſsen $\dot{x}o$, $\dot{y}o \ldots$ zu einer endlichen Gröſse. $\dot{x}o$, $\dot{y}o \ldots$ verschwinden aber gegenüber jeder endlichen Gröſse. Also verschwinden alle Glieder irgend einer Zeile gegenüber den Gliedern der vorhergehenden Zeile; also bleibt, in Übereinstimmung mit dem Gesetz der Homogeneität

$$2)\qquad \begin{array}{l} a(\dot{x}o) + b(\dot{y}o) + c(\dot{z}o) + \ldots = 0 \text{ oder} \\ a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz + \ldots = 0. \end{array}$$

Das ist die Leibnizische Form der Fluxionsregel, nämlich die Momentengleichung oder Differentialgleichung erster Ordnung.

Newton gewinnt (1) wie oben. Dann trennt er die zusammengehörigen Faktoren $\dot{x}$ und o, $\dot{y}$ und o u. s. w. voneinander und schreibt:

$$3)\qquad \left.\begin{array}{l} a \cdot \dot{x}o + b \cdot \dot{y}o + c \cdot \dot{z}o + \cdots \\ + h\dot{x}\dot{x}o^2 + k\dot{x}\dot{y}o^2 + \cdots\cdots \\ + p\dot{x}^3o^3 + q\dot{x}^2\dot{y}o^3 + \cdots\cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0.$$

Nun wird durch o dividiert unter der stillschweigend gemachten Forderung $0 : o = 0$; es folgt:

$$4)\qquad \left.\begin{array}{l} a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + \cdots \\ + h\dot{x}\dot{x}o + k\dot{x}\dot{y}o + \cdots \\ + p\dot{x}^3o^2 + q\dot{x}^2\dot{y}o^2 + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0.$$

Schlieſslich wird doch noch derselbe Schritt gemacht, den Leibniz unmittelbar nach (1) machte: »Cum autem finxerimus o *quantitatem infinite parvam,* ut exponere posset quantitatum momenta, termini in eam ducti *pro nihilo possunt haberi cum aliis collati,* eos igitur *negligo,* et superest

$$5)\qquad a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} + \ldots = 0.$$

Das ist die Newtonsche Fluxionsgleichung.

Nach meinem Ermessen steht die Leibnizische Gedankenfolge, die die künstlichen Zwischenglieder (3) und (4) nicht nötig hat, hoch über der Newtons.

Weifsenborn (a. a. O. S. 28 und 58) erklärt, Newton habe seine Fundamentalregel „ohne Beweis aufgestellt", kommt aber wunderbarerweise gleichwohl zu dem Schlusse, die Fluxionsrechnung zeichne sich vor der Differentialrechnung durch ihre „sichere Begründung" aus. Gerhardt (Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855) findet, dafs Leibnizens „imposanter Bau auf unsicherem Fundament ruht", während „die Fluxionsrechnung auf dem (?) naturgemäfsen Wege ohne Beimischung anderer Hilfsmittel(?) entstanden" sei und sich einer „festen Begründung" und eines „sicheren Fundaments" erfreue. Montucla (Histoire des mathématiques II, S. 369) nennt die Auffassungsweise Newtons »bien plus lumineuse« als die von Leibniz. Derselben in allgemeinen Wendungen ausgesprochenen Meinung bin ich mit wenigen Ausnahmen fast überall in der mir zugängig gewesenen einschlägigen Litteratur dieses und des vorigen Jahrhunderts begegnet, habe freilich auch überall eine tiefere in den Zusammenhang und Grund der hierbei in Frage kommenden Begriffe dringende Begründung dieser Meinung vermifst. Darum bedrückt es mich nicht, mit meinem oben angedeuteten entgegengesetzten Urteile allen jenen Autoren gegenüber als Häretiker zu erscheinen. Ich kann meine aus einem kritischen Studium der Quellen gewonnene Überzeugung nicht verleugnen gegenüber einer sich aus einem Buche in das andere fortpflanzenden Meinung, die dem Leibnizischen Gesetz der Kontinuität zu wenig Beachtung schenkt und den Leibnizischen Gedanken der Homogeneität der Differentialgleichungen nicht zu würdigen weifs, wo nicht ganz ignoriert.

Nachsatz. — Einige Tage nach Beendigung der Drucklegung dieses Programms erhielt ich durch die Freundlichkeit von Herrn Universitätsprofessor Dr. Engel hier Kenntnis von den ***„Notes sur l'histoire des mathématiques. Par H.-G.-Zeuthen."*** (*Extrait du Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague, pour l'année 1895*). — Ich ersehe aus ihnen, dafs H.-G.-Zeuthen eine Reihe von kritischen Bemerkungen Weifsenborns und Cantors über Newton in demselben Sinne besprochen hat, in dem auch ich sie (S. 30 ff.) habe berühren müssen. Das dient mir zur Beruhigung. Denn eben weil darüber kein Zweifel sein kann, dafs alle aufmerksamen und kritisch vergleichenden Leser der betreffenden Schriften Newtons, Weifsenborns und Cantors über jene kritischen Bemerkungen zu einem übereinstimmenden Urteile kommen müssen, verursachte es mir ein störendes und bis zu einem gewissen Grade hemmendes Gefühl, mich allein in offenem Widerspruche zu wissen gegenüber einigen Ausführungen solcher Autoren, die gerade wegen der Zuverlässigkeit ihrer Angaben oft zu Rate gezogen werden.

Leipzig, den 15. Febr. 1896.

E. Tischer.

die in Bezug auf andere Glieder … Stufe sind, weg, wenn man die Einheiten, an denen die … en, aus der dem Werte nach höchsten in der Gleichung v… ementsprechend verlangt die lex homogeneorum, dafs jede Er… homogen sei nicht nur nach den Gröfsenarten, sondern …

Sehen wir zu, wie der B… ems nach Leibnizischer Methode verlaufen würde, bei F… . Aus $f(x, y, z \ldots) = 0$ und $f(x + \dot{x}\mathfrak{o}, y + \dot{y}\mathfrak{o}, \ldots) = 0$ v… twickelt:

$$1) \qquad \begin{array}{l} a \cdot (\dot{x}\ldots \\ + h \cdot (\dot{x}\ldots \\ + p \cdot (\dot{x}\ldots \\ + \ldots \end{array}$$

Jedes Glied der 2. 3. 4. ... Zeile … der vorhergehenden Zeile wie eine der Gröfsen $\dot{x}\mathfrak{o}$, $\dot{y}\mathfrak{o}$ ... … .. verschwinden aber gegenüber jeder endlichen … eder irgend einer Zeile gegenüber den Gliedern der vor… bereinstimmung mit dem Gesetz der Homogeneität

$$2) \qquad \begin{array}{l} a\,(\dot{x}\mathfrak{o}) + \ldots \\ a \cdot dx + \ldots \end{array}$$

Das ist die Leibnizische Form … ngleichung oder Differentialgleichung erster Ordnung.

Newton gewinnt (1) w… mmengehörigen Faktoren $\dot{x}$ und $\mathfrak{o}$, $\dot{y}$ und $\mathfrak{o}$ u. s. w. vonei…

$$3) \qquad \begin{array}{l} a \cdot \dot{x}\ldots \\ + h\dot{x}\dot{x}\ldots \\ + p\dot{x}^3\ldots \\ + \ldots \end{array}$$

Nun wird durch $\mathfrak{o}$ div… gemachten Forderung $0 : \mathfrak{o} = 0$; es folgt:

$$4) \qquad \begin{array}{l} a\dot{x} + \ldots \\ + h\dot{x}\dot{x}\ldots \\ + p\dot{x}^3\ldots \\ + \ldots \end{array}$$

Schliefslich wird doch noch ders… nittelbar nach (1) machte: »Cum autem finxerimus $\mathfrak{o}$ *quant*… sset quantitatum momenta, termini in eam ducti *pro nihilo* … igitur *negligo,* et superest

$$5) \qquad a\dot{x} + \ldots$$

Das ist die Newtonsche Fluxio…

Nach meinem Ermesse… folge, die die künstlichen Zwischenglieder (3) und (4) nic… .