ÜBER DIE ELEKTRISCHE VERTEILUNG

AUF DER

RECIPROCITÄTSFLÄCHE EINES ROTATIONSELLIPSOIDES

VON

ERNST RIEDEL

OBERLEHRER AM NICOLAIGYMNASIUM ZU LEIPZIG.

WISSENSCHAFTLICHE BEIGABE ZUM JAHRESBERICHT DES NICOLAIGYMNASIUMS ZU LEIPZIG.

LEIPZIG 1891.

DRUCK VON OTTO DÜRR.

1891. Progr. Nr. 536.

Über die elektrische Verteilung auf der Reciprocitätsfläche eines Rotationsellipsoides

von Ernst Riedel.

Einleitung.

Zur Ansammlung elektrischer Massen dienen leitende Körper, welche mit isolierenden Handhaben versehen und mit einem isolierenden Medium, der Luft, umgeben sind. Hat ein solcher Körper — ein Konduktor — eine elektrische Füllung erfahren, so muss dieselbe, vermöge der Isolierung, darinnen bleiben und sich im Konduktor verteilen. Je zwei elektrische Massenteilchen der Ladung stossen nun einander ab, und aus diesem Grunde breitet sich die vorhandene Elektricität nur auf der Oberfläche des Konduktors aus, während das Innere gänzlich frei bleibt. Darin liegt auch weiter der Grund, dass man in der Praxis nur hohle Konduktoren verwendet und beim Studium von Verteilungsfragen, an der Hand der Rechnung, nur Oberflächen einführt. Auf einem kugelförmigen Konduktor geschieht die elektrische Verteilung allseitig gleichmässig, jede Abweichung aber von der Kugelgestalt zieht Unregelmässigkeiten in der Belegung nach sich; es drängt sich nämlich die eingeschlossene Elektricitätsmenge den am stärksten gekrümmten Gegenden des Konduktors zu, und an etwaigen Kanten und Spitzen desselben ist sogar ein Ausbrechen der Elektricität nicht ausgeschlossen. Eine weitere Änderung in der Anordnung der Elektricität tritt ein, wenn man den Konduktor nach der Ladung nicht sich selbst überlässt, sondern ihn dem Einflusse eines in der Nähe befindlichen elektrischen Massenpunktes aussetzt.

Mit der Abweichung von der Kugelgestalt für den Konduktor wächst auch die Schwierigkeit in der mathematischen Behandlung elektrostatischer Fragen, und in einzelnen Fällen haben sogar erst mathematische Hülfsmittel geschaffen werden müssen. In der jetzt folgenden Betrachtung über die Verteilung der Elektricität auf der Reciprocitätsfläche eines Rotationsellipsoids werden wir an der Hand der sogenannten „Kugelfunktionen", welche von Legendre eingeführt und von Laplace weiter ausgebaut wurden, zum gewünschten Ziele gelangen.

Das Rotationsellipsoid.

Die um den Koordinatenanfang M beschriebenen Halbkreise, mit den Radien α und β, schliessen eine Halbellipse mit den Halbachsen α und β ein; zu einem beliebigen Radius MA,

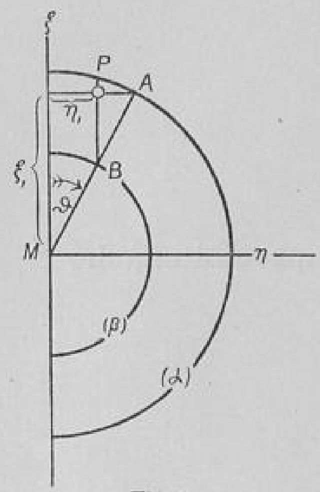

Fig. 1.

mit dem Neigungswinkel ϑ gegen die ξ-Achse, findet man als Schnittpunkt der durch A und B zu den Achsen gezogenen Parallelen einen Punkt P dieser Halbellipse. Die Koordinaten von P sind $\xi_1 = \alpha . \cos \vartheta$ und $\eta_1 = \beta . \sin \vartheta$ und sie befriedigen, wie verlangt, die Gleichung:

$$\left(\frac{\xi_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\beta}\right)^2 = 1.$$

Um alle Punkte dieser Halbellipse darzustellen variiert ϑ von o bis π. Wir setzen $\alpha = \mathrm{a} \cdot \varrho$, wobei a die lineare Excentricität der Ellipse, und finden aus $\beta^2 = \alpha^2 - \mathrm{a}^2$ die Beziehung, dass $\beta = \mathrm{a}\sqrt{\varrho^2 - 1}$. Dadurch wird:

$$\xi_1 = \mathrm{a} \cdot \varrho \cdot \cos \vartheta \text{ u. } \eta_1 = \mathrm{a}\sqrt{\varrho^2 - 1} \sin \vartheta.$$

Die Halbachsen unserer Ellipse sind $\mathrm{a}\varrho$ und $\mathrm{a}\sqrt{\varrho^2 - 1}$, und es stellen sich dieselben, falls a von vornherein fest gewählt wird, als von ϱ abhängig dar. Bei Variation von ϱ entstehen eine Reihe konfokaler Ellipsen, welche bei $\varrho = 1$ mit der Brennlinie beginnen und mit wachsendem ϱ ebenfalls wachsen und sich der Reihe nach umschliessen.

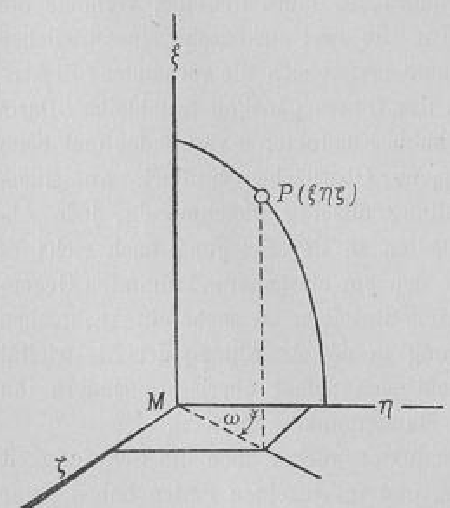

Fig. 2.

Lässt man eine solche Halbellipse um die ξ-Achse rotieren, so stellt sich jeder Punkt des entstehenden Rotationsellipsoides, falls ω von o bis 2π (Fig. 2) variiert, dar durch:

$$(1) \begin{cases} \xi = \mathrm{a} . \varrho \cdot \cos \vartheta = \mathrm{a} . \varrho . \cos \vartheta, \\ \eta = \eta_1 \cdot \cos \omega = \mathrm{a}\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \omega, \\ \zeta = \eta_1 \cdot \sin \omega = \mathrm{a}\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega. \end{cases}$$

Jeder Punkt des Raumes kann jetzt durch elliptische Koordinaten $\varrho \vartheta \omega$ ausgedrückt werden; der Parameter ϱ bestimmt zunächst das Ellipsoid, und die Winkel ϑ und ω bestimmen die Lage des Punktes auf demselben. Diese neuen Koordinaten sollen, um sich mit denselben vertraut zu machen, für einige Specialfälle angegeben werden. Bei $\varrho = 1$ wird $\alpha = \mathrm{a}$ und $\beta = \gamma = o$, und das Ellipsoid beschränkt sich auf die Brennlinie; auf dieser haben die Brennpunkte die Koordinaten $\varrho = 1$ und $\vartheta = o$ oder π, und zum Mittelpunkte des Ellipsoides gehört $\varrho = 1$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Sämtliche Punkte der beiderseitigen

Verlängerungen der Brennlinie besitzen ein ϱ zwischen 1 und ∞ und $\vartheta = o$ oder π. Die η-Achse hat ϱ zwischen 1 und ∞, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\omega = o$ oder π, und die ζ-Achse besitzt ϱ zwischen 1 und ∞, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$.

Beim Aufbau unserer Ellipsoide wurde angenommen, dass $\alpha > \beta$; wird aber $\alpha < \beta$, so entsteht ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Jeder Punkt desselben lässt sich (Fig. 3) darstellen durch $\xi_1 = \alpha \,.\, \cos\vartheta$ und $\eta_1 = \beta \,.\, \sin\vartheta$. Die lineare Excentricität sei hier b, und setzen wir $\beta = b \,.\, \nu$, so folgt aus $b^2 = \beta^2 - \alpha^2$ diesmal $\alpha = b \cdot \sqrt{\nu^2 - 1}$. Durch Rotation dieser Halbellipse um die ξ-Achse entsteht das abgeplattete Rotationsellipsoid, dessen Punkt P die Koordinaten besitzt:

$$\xi = b\sqrt{\nu^2 - 1} \cdot \cos\vartheta$$
$$\eta = b \cdot \nu \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega$$
$$\zeta = b \cdot \nu \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega.$$

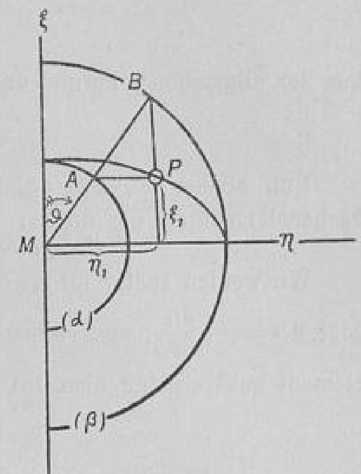

Fig. 3.

Diese letzten Formeln lassen sich durch Einführung von $1 - \nu^2 = \varrho^2$ überführen in die unter (1) aufgestellten Formeln:

$$\xi = a \cdot \varrho \cdot \cos\vartheta$$
$$\eta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega$$
$$\zeta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega,$$

wobei $ib = a$ gesetzt worden ist. Im Gegensatze zu dem früher reellen a und ϱ sind hier beide rein imaginär, und die Grenzen von ϱ liegen diesmal zwischen o und ∞.

Das Oberflächenelement.

Wir bezeichnen die Entfernung zweier unendlich naheliegender Punkte $\xi\eta\zeta$ und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ des Rotationsellipsoides mit $d\sigma$ und drücken zunächst dieses Linienelement in unsern elliptischen Koordinaten aus. Zu diesem Zwecke zerlegen wir unsere Oberfläche durch unendlich viele unendlich nahe Längen- und Breitenkreise; ϱ ist für das ganze Ellipsoid konstant, während für die Längenkreise ϱ und ω, für die Breitenkreise ϱ und ϑ konstant sind.

Aus den Formeln für P:

$$\xi = a \cdot \varrho \cos\vartheta$$
$$\eta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega$$
$$\zeta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega$$

ergiebt sich für den unendlich nahen Punkt P_1 des Längenkreises

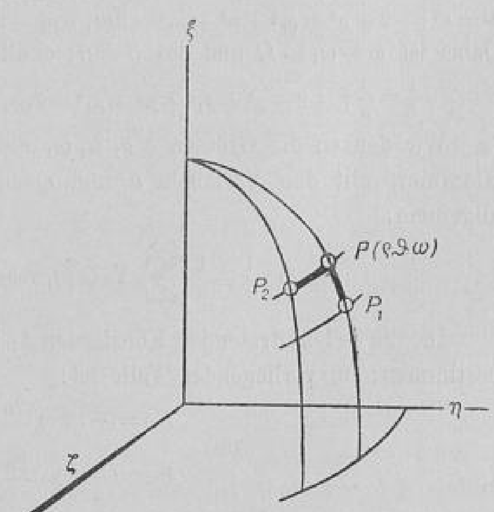

Fig. 4.

$$d\xi = -a\varrho \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta,$$
$$d\eta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\omega \cdot d\vartheta,$$
$$d\zeta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\omega \cdot d\vartheta,$$

und für den unendlich nahen Punkt P_2 des Breitenkreises ist

$$d\xi = o$$
$$d\eta = -a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega \cdot d\omega,$$
$$d\zeta = a\sqrt{\varrho^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega\, d\omega.$$

Aus der allgemeinen Formel $\overline{d}\sigma^2 = \overline{d}\xi^2 + \overline{d}\eta^2 + \overline{d}\zeta^2$ berechnet sich in unsern Specialfällen:

$$PP_1 = d\sigma_1 = a\sqrt{\varrho^2 - \cos^2\vartheta} \cdot d\vartheta.$$
$$PP_2 = d\sigma_2 = a\sqrt{\varrho^2 - 1}\, \sin\vartheta \cdot d\omega.$$

Nun stehen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ senkrecht auf einander, mithin stellt sich das rechteckige Oberflächenelement $d\varphi$ dar durch:

$$d\varphi = d\sigma_1 \cdot d\sigma_2 = a^2\sqrt{(\varrho^2 - \cos^2\vartheta)(\varrho^2 - 1)}\, \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\omega.$$

Wir werden später für $\cos\vartheta$ mit Vorteil die Grösse μ einführen, dann ist also $d\mu = -\sin\vartheta . d\vartheta$, oder $d\vartheta = -\dfrac{d\mu}{\sin\vartheta}$, und es bewegt sich μ zwischen den Grenzen $+1$ und -1. Das Oberflächenelement geht alsdann über in:

$$(2) \quad d\varphi = -a^2\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - 1)}\, d\mu \cdot d\omega.$$

Die reciproke Entfernung.

Die Entfernung $\mathfrak{E}$ der Punkte $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$ berechnet sich als:

$$\mathfrak{E}^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2,$$
$$\mathfrak{E}^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \xi^2) + (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1),$$

und mit Hülfe der Formeln (1) wird:

$$\mathfrak{E}^2 = a^2(\varrho^2 - \sin^2\vartheta) + a^2(\varrho_1^2 - \sin^2\vartheta_1) - 2a^2\left(\varrho\varrho_1 \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sqrt{(\varrho^2-1)(\varrho_1^2-1)}\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_1(\cos\omega\cdot\cos\omega_1 + \sin\omega\cdot\sin\omega_1)\right),$$
$$\mathfrak{E}^2 = a^2(\varrho^2 - \sin^2\vartheta) + a^2(\varrho_1^2 - \sin^2\vartheta_1) - 2a^2\left(\varrho\varrho_1\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_1 + \sqrt{(\varrho^2-1)(\varrho_1^2-1)}\,\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_1\,\cos(\omega - \omega_1)\right),$$
$$\mathfrak{E}^2 = a^2\left[-2 + \varrho^2 + \varrho_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - 2\varrho\varrho_1\,\mu\mu_1 - 2\sqrt{(\varrho^2-1)(\varrho_1^2-1)(1-\mu^2)(1-\mu_1^2)}\,\cos\Omega\right].$$

Dabei ist $\omega - \omega_1 = \Omega$ und $\cos\vartheta = \mu$; endlich ist:

$$\frac{1}{\mathfrak{E}} = \frac{1}{a}\left[-2 + \varrho^2 + \varrho_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - 2\varrho\varrho_1\,\mu\mu_1 - 2\sqrt{(\varrho^2-1)(\varrho_1^2-1)(1-\mu^2)(1-\mu_1^2)}\cos\Omega\right]^{-1/2}.$$

Wir denken die Grössen $\varrho\;\varrho_1\;\mu_1\;\omega_1$ als unveränderlich und entwickeln den Ausdruck in der Klammer, mit den Variabeln μ und ω behaftet, nach Kugelfunktionen.*) Wir erhalten dann allgemein:

$$(3) \quad \frac{1}{\mathfrak{E}} = \frac{1}{a}\sum_{o}^{\infty}{}_n\, Y_n(\mu\omega), \text{ wobei } Y_n = \sum_{o}^{n}{}_i\, P_{ni}(\mu)\left\{A_{ni}\cos i\omega + B_{ni}\sin i\omega\right\}.$$

Die $2n+1$ auftretenden Konstanten A_i und B_i lassen sich, der jeweiligen Aufgabe entsprechend, bestimmen; im vorliegenden Falle ist:

$$(3a) \quad \begin{aligned} A_{ni} &= (-1)^i\,\alpha_i\,\frac{2n+1}{2}\,\Delta^2_{ni}\,P_{ni}(\varrho_1)\,Q_{ni}(\varrho)\,P_{ni}(\mu_1)\cos i\omega, \\ B_{ni} &= (-1^i\,)\alpha_i\,\frac{2n+1}{2}\,\Delta^2_{ni}\,P_{ni}(\varrho_1)\,Q_{ni}(\varrho)\,P_{ni}(\mu_1)\sin i\omega, \end{aligned}$$

*) Man sehe darüber Heine's Handbuch der Kugelfunktionen.

und dabei ist wieder:

$$\alpha_i = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für } i = o \\ 2 \text{ für } i > o \end{Bmatrix} \text{ und } \Delta_{ni} = \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}.$$

Die zusammengedrängte Darstellung lautet:

$$(4) \quad \frac{1}{\mathfrak{s}} = \frac{1}{a} \sum_{o}^{\infty}{}_n \sum_{o}^{n}{}_i (-1)^i \alpha_i \frac{2n+1}{2} \Delta^2_{ni} P_{ni}(\varrho_1) Q_{ni}(\varrho) P_{ni}(\mu_1) P_{ni}(\mu) \cos i(\omega - \omega_1).$$

Hierbei ist $\varrho > \varrho_1$ vorausgesetzt. Beim Koordinatenanfang ist $\varrho_1 = 1$, $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = \mu = o$; $P_{ni}(\varrho_1) = (1-\varrho_1^2)^{\frac{i}{2}} \cdot \frac{d^i P_n(\varrho_1)}{d\varrho_1{}^i}$ wird o, ausser wenn $i = o$, weil $P_{no}(\varrho_1) = P_n(\varrho_1) = P_n(1) = 1$. Unter Beachtung dieser Vereinfachung wird speciell aus (4):

$$(5) \quad \frac{1}{\mathfrak{s}} = \frac{1}{a} \sum_{o}^{\infty}{}_n \frac{2n+1}{2} Q_n(\varrho) P_n(o) P_n(\mu).$$

Nun ist noch $P_n(o) = o$, sobald n eine ungerade Zahl, weshalb wir statt n gleich 2n schreiben können; es ist schliesslich:

$$(6) \quad \frac{1}{\mathfrak{s}} = \frac{1}{a} \sum_{o}^{\infty}{}_n \frac{4n+1}{2} Q_{2n}(\varrho) P_{2n}(o) P_{2n}(\mu).$$

In der Doppelsumme (4) kann man die Reihenfolge der Summation umändern und schreiben:

$$(7) \quad \frac{1}{\mathfrak{s}} = \frac{1}{a} \sum_{o}^{\infty}{}_i \sum_{i}^{\infty}{}_n (-1)^i \alpha_i \Delta^2_{ni} \frac{2n+1}{2} P_{ni}(\varrho_1) Q_{ni}(\varrho) P_{ni}(\mu_1) P_{ni}(\mu) \cos i(\omega - \omega_1)$$

oder

$$(7a) \quad \frac{1}{\mathfrak{s}} = \frac{1}{a} \sum_{o}^{\infty}{}_i \left\{ A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega \right\},$$

und es bedeutet dabei:

$$A_{ni} = \sum_{i}^{\infty}{}_n (-1)^i \alpha_i \Delta^2_{ni} \frac{2n+1}{2} P_{ni}(\varrho_1) Q_{ni}(\varrho) P_{ni}(\mu_1) P_{ni}(\mu) \cos i\omega_1,$$

$$B_{ni} = \sum_{i}^{\infty}{}_n (-1)^i \alpha_i \Delta^2_{ni} \frac{2n+1}{2} P_{ni}(\varrho_1) Q_{ni}(\varrho) P_{ni}(\mu_1) P_{ni}(\mu) \sin i\omega_1.$$

Diese Art der Darstellung in einer Reihe nach sinus und cosinus der Vielfachen fortschreitend, wird uns später gute Dienste leisten.

Die Verteilung auf dem Rotationsellipsoide.

Wir schreiten jetzt zur Untersuchung der elektrischen Verteilung, welche eintritt, wenn wir dem Ellipsoide eine Elektricitätsmenge M mitteilen und dann sich selbst überlassen. Hier muss das Potential der Belegung, da der Konduktor eine geschlossene Fläche ist, auf Punkte im

Innern einen konstanten Wert, etwa c, besitzen. Hat der Punkt im Innern die Koordinaten $\varrho_1 \mu_1 \omega_1$, nennen wir das Oberflächenelement des Konduktors $\delta\varphi$, die elektrische Dichtigkeit auf demselben q, ferner $\mathfrak{s}$ die Entfernung des Oberflächenelementes vom Punkte $\varrho_1 \mu_1 \omega_1$, so drückt sich die Bedingung, dass das Potential der Belegung auf alle Punkte im Innern einen konstanten Wert c haben muss, aus durch:

$$\iint q \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{\mathfrak{s}} = c.$$

Mit Hülfe von (2) wird daraus:

$$\int\limits_{+1}^{-1}\int\limits_{0}^{2\pi} -q \cdot \frac{1}{\mathfrak{s}} a^2 \sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-1)}\, d\mu\, d\omega = c.$$

Der Konduktor ist eine Rotationsoberfläche und besitzt auf ein und demselben Breitenkreise eine konstante und nur von μ abhängige Dichtigkeit. Dies beachtend drehen wir noch die Integrationsgrenzen für μ um zum Zwecke der Entfernung des Minuszeichens und schreiben:

$$a^2\sqrt{\varrho^2-1}\int\limits_{-1}^{+1} q \cdot \sqrt{\varrho^2-\mu^2}\, d\mu \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{\mathfrak{s}}\, d\omega = c.$$

Die Funktion $q\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ ist nur von μ abhängig, weshalb wir setzen:

$$(8) \quad q\sqrt{\varrho^2-\mu^2} = \sum_{0}^{\infty}{}_n A_n P_n(\mu),$$

und die Konstanten A_n gelegentlich bestimmen; weiter benutzen wir für $\frac{1}{\mathfrak{s}}$ den Ausdruck (7a) und erhalten:

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\int\limits_{-1}^{+1}\sum_{0}^{\infty}{}_n A_n P_n(\mu)\, d\mu \int\limits_{0}^{2\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_i \left\{U_{mi}\cos i\omega + V_{mi}\sin i\omega\right\} d\omega = c.$$

Die Beziehung $\int\limits_{0}^{2\pi}\cos i\omega\, d\omega = \begin{Bmatrix} 2\pi & \text{für } i=0 \\ 0 & \text{für } i>0 \end{Bmatrix}$ und $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin i\omega\, d\omega = 0$ lässt obige Gleichung zusammenschmelzen auf:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\int\limits_{-1}^{+1}\sum_{0}^{\infty}{}_n \left\{A_n P_n(\mu)\right\} U_{m0}\, d\mu = c.$$

Nach (7a) ist weiter

$$U_{mo} = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{2m+1}{2} P_{mo}(\varrho_1)\, Q_{mo}(\varrho) \cdot P_{mo}(\mu_1)\, P_{mo}(\mu), \text{ oder}$$

$$U_{mo} = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{2m+1}{2} P_m(\varrho_1)\, Q_m(\varrho)\, P_m(\mu_1)\, P_m(\mu).$$

Unter dem Integral steht jetzt eine Doppelsumme:

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1} \int_{-1}^{+1} \sum_{0}^{\infty}{}_n \left\{ A_n P_n(\mu) \right\} \sum_{0}^{\infty}{}_m \left(\frac{2m+1}{2} P_m(\varrho_1)\, Q_m(\varrho)\, P_m(\mu_1)\, P_m(\mu) \right) d\mu = c.$$

Die Integraleigenschaft der Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu)\, d\mu = \begin{cases} \frac{2}{2m+1} & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \gtrless n \end{cases}$$

liefert das einfache Resultat:

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1} \sum_{0}^{\infty}{}_h A_h\, P_h(\varrho_1)\, Q_h(\varrho)\, P_h(\mu_1) = c.$$

Diese letzte Gleichung muss immer bestehen bleiben, welche Lage ich auch dem Punkte $\varrho_1\ \vartheta_1\ \mu_1$ im Innern des Konduktors geben mag, d. h. sie muss erfüllt bleiben, wenn ich für ϱ_1 und μ_1 andere und andere Werte setze. Die linke Seite schreitet nach Kugelfunktionen fort, wogegen die rechte Seite immer einen und denselben konstanten Wert c behält; nur das erste Glied der Reihenentwickelung ist konstant, weil $P_0(x) = 1$, deshalb muss:

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1} \sum_{1}^{\infty}{}_h A_h\, P_h(\varrho_1)\, Q_h(\varrho)\, P_h(\mu_1) = 0, \text{ d. h. } A_h = 0,$$

und

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\, A_0\, Q_0(\varrho) = c \text{ sein.}$$

Daraus resultiert:

$$A_0 = \frac{c}{2\pi a \sqrt{\varrho^2-1} \cdot Q_0(\varrho)}.$$

Die Entwickelung unter (8) vereinfacht sich jetzt zu:

$$\text{(8a)} \quad q \sqrt{\varrho^2-\mu^2} = \frac{c}{2\pi a \sqrt{\varrho^2-1} \cdot Q_0(\varrho)}.$$

Um die uns noch unbekannte Konstante c zu eliminieren, beachten wir, dass die Gesamtbelegung einen vorgeschriebenen Wert M besitzen muss; diese Bedingung drückt das Doppelintegral aus:

$$\iint q \cdot d\varphi = M,$$

oder nach (2)

$$a^2 \sqrt{\varrho^2-1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} q \sqrt{\varrho^2-\mu^2}\, d\mu \cdot d\omega = M,$$

und weiter nach (8a)

$$a^2 \sqrt{\varrho^2-1} \cdot \frac{c}{2\pi\, a \sqrt{\varrho^2-1} \cdot Q_0\,(\varrho)} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} d\mu \cdot d\omega = M,$$

oder endlich:

$$\frac{a \cdot c}{2\pi \cdot Q_0\,(\varrho)} \cdot 4\pi = M, \text{ woraus sich } \frac{c}{Q_0\,(\varrho)} = \frac{M}{2a} \text{ ergiebt.}$$

Die Formel (8a) liefert jetzt den Ausdruck:

$$(9)\quad q = \frac{M}{4\pi a^2 \sqrt{\varrho^2-\mu^2} \cdot \sqrt{\varrho^2-1}}$$

An der Hand dieses Resultates wollen wir den Verlauf der Dichtigkeit auf einem Längenkreise des gestreckten Rotationsellipsoides verfolgen. Die Grösse $\mu = \cos\vartheta$ nimmt vom Nordpol bis zum Äquator ab von 1 bis 0, $\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ wächst dagegen, und q nimmt daher bei dieser Bewegung ebenfalls ab. Jenseits des Äquators wiederholen sich die bereits durchlaufenen Werte für q in umgekehrter Reihenfolge.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo der Konduktor mit einer Elektricitätsmenge M geladen ist und ausserdem noch äussere Kräfte, etwa ein elektrischer Massenpunkt M_1 $(\varrho_1\, \mu_1\, \omega_1)$, auf denselben einwirken. Das Gesamtpotential der Belegung und des influenzierenden Massenpunktes M_1 auf irgend einen Punkt $(\varrho_2\, \mu_2\, \omega_2)$ in Innern des Konduktors muss wieder konstant, etwa $= c$, bleiben. In Zeichen:

$$\iint q \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{\mathfrak{s}_{02}} + M_1 \cdot \frac{1}{\mathfrak{s}_{12}} = c.$$

Mit Benutzung von (2) wird daraus:

$$a^2 \sqrt{\varrho^2-1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} q \cdot \sqrt{\varrho^2-\mu^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{s}_{02}}\, d\mu \,.\, d\omega + M_1 \,.\, \frac{1}{\mathfrak{s}_{12}} = c.$$

Der Ausdruck $q\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ ist hier von μ und ω abhängig; wir entwickeln denselben nach den allgemeinen Kugelfunktionen:

$$q\sqrt{\varrho^2-\mu^2} = \sum_{0}^{\infty}{}_n X_n\,(\mu\,\omega), \text{ wobei } X_n\,(\mu\,\omega) = \sum_{0}^{n}{}_i P_{ni}\,(\mu) \left\{ \mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega \right\}.$$

Nach (3) ist

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_{02}} = \frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}{}_{v}\, Y_v(\mu\,\omega), \text{ wobei } Y_v(\mu\,\omega) = \sum_{0}^{v}{}_{j}\, P_{vj}(\mu)\left\{A_{vj}\cos j\,\omega + B_{vj}\sin j\,\omega\right\}.$$

Das Produkt dieser beiden Summen vereinfacht sich unter den Integralzeichen, weil $\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} X_n \cdot Y_v\, d\mu\, d\omega = 0$, sobald $n \gtrless v$. Wir behalten nur:

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, X_n(\mu\,\omega)\cdot Y_n(\mu\,\omega)\, d\mu\cdot d\omega = c - M_1\cdot\frac{1}{\mathfrak{S}_{12}},$$

oder ausführlicher:

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\left[\sum_{0}^{n}{}_{i}\, P_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni}\cos i\,\omega + \mathfrak{B}_{ni}\sin i\,\omega\right\}\cdot\sum_{0}^{n}{}_{j}\, P_{nj}(\mu)\left\{A_{nj}\cos j\,\omega + B_{nj}\sin j\,\omega\right\}\right] d\mu\, d\omega = c - \frac{M_1}{\mathfrak{S}_{12}}.$$

Die Multiplikation denken wir uns ausgeführt und alsdann die Integration nach ω; dabei werden die meisten Integrale 0, ausser $\int_{0}^{2\pi}\cos^2 i\,\omega\, d\omega = \begin{Bmatrix}\pi \text{ für } i > 0\\ 2\pi \text{ für } i = 0\end{Bmatrix}$ und $\int_{0}^{2\pi}\sin^2 i\,\omega\, d\omega = \begin{Bmatrix}\pi \text{ für } i > 0\\ 0 \text{ für } i = 0\end{Bmatrix}$,

und wir erhalten:

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\left[\int_{-1}^{+1} P^2_{n0}(\mu)\,\mathfrak{A}_{n0}\, A_{n0}\, 2\pi + \pi\sum_{1}^{n}{}_{i}\, P^2_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni}\, A_{ni} + \mathfrak{B}_{ni}\, B_{ni}\right\} d\mu\right] = c - \frac{M_1}{\mathfrak{S}_{12}}.$$

Die A_{ni} und B_{ni} besitzen durchweg den Faktor $\alpha_i = 2$, welcher mit vor das Summenzeichen gesetzt werden soll, es bleibt dann:

$$2\pi\, a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\left[\int_{-1}^{+1}\sum_{0}^{n}{}_{i}\, P^2_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni}\, A_{ni} + \mathfrak{B}_{ni}\, B_{ni}\right\} d\mu\right] = c - \frac{M_1}{\mathfrak{S}_{12}}.$$

Bei der jetzt folgenden Integration nach μ ist $\int_{-1}^{+1} P^2_{ni}(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{\varDelta_{ni}}$, was ergiebt:

$$2\pi\, a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\left[\sum_{0}^{n}{}_{i}\,\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{\varDelta_{ni}}\left\{\mathfrak{A}_{ni}\, A_{ni} + \mathfrak{B}_{ni}\, B_{ni}\right\}\right] = c - \frac{M_1}{\mathfrak{S}_{12}}.$$

Nach (3a) findet man (mit Weglassung von α_i) die eigentlichen Werte für A_{ni} und B_{ni}, welche vorstehende Gleichung umwandeln in:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\sum_{0}^{n}{}_{i}(-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho_2)\, Q_{ni}(\varrho)\, P_{ni}(\mu_2)\left\{\mathfrak{A}_{ni}\cos i\,\omega_2+\mathfrak{B}_{ni}\sin i\,\omega_2\right\}=c-\frac{M_1}{\mathfrak{E}_{12}}$$

Wir verändern noch die Reihenfolge der Summation in:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{i}\sum_{i}^{\infty}{}_{n}(-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho_2)\, Q_{ni}(\varrho)\, P_{ni}(\mu_2)\left\{\mathfrak{A}_{ni}\cos i\,\omega_2+\mathfrak{B}_{ni}\sin i\,\omega_2\right\}=c-\frac{M_1}{\mathfrak{E}_{12}}$$

Die Formel für $\frac{1}{\mathfrak{E}_{12}}$ wird aus (7) entnommen und eingesetzt; dieselbe lautet:

$$\frac{1}{\mathfrak{E}_{12}}=\frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}{}_{i}\sum_{i}^{\infty}{}_{n}(-1)^i\,\alpha_i\,\frac{2n+1}{2}\Delta^2_{ni} P_{ni}(\varrho_2)\, Q_{ni}(\varrho_1)\, P_{ni}(\mu_2)\, P_{ni}(\mu_1)\left\{\cos i\,\omega_2\cos i\,\omega_1+\sin i\,\omega_2\sin i\,\omega_1\right\}.$$

Beide Seiten schreiten nun nach den Vielfachen des Sinus und Cosinus von ω_2 fort und müssen, da der Punkt $\varrho_2\,\mu_2\,\omega_2$ jede beliebige Lage im Innern des Konduktors annehmen darf, für jeden Wert von ω_2 einander gleichbleiben. Daraus folgt weiter, dass die Koefficienten beider Reihenentwickelungen einander einzeln gleich sein müssen.

Die beiderseitige Vergleichung der von ω_2 freien Glieder liefert:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}_{n} P_{no}(\varrho_2)\, Q_{no}(\varrho)\, P_{no}(\mu_2)\,\mathfrak{A}_{no}=c-\frac{M_1}{a}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{2n+1}{2} P_{no}(\varrho_2)\, Q_{no}(\varrho_1)\, P_{no}(\mu_2)\, P_{no}(\mu_1),$$

und die Vergleichung der Koefficienten von $\cos i\,\omega_2$ und $\sin i\,\omega_2$ ergiebt:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{i}^{\infty}{}_{n}(-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho) P_{ni}(\mu_2)\mathfrak{A}_{ni}=-\frac{M_1}{a}\sum_{i}^{\infty}{}_{n}(-1)^i\,\alpha_i\,\frac{2n+1}{2}\Delta^2_{ni} P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_2) P_{ni}(\mu_1)\cos i\omega_1$$

und

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{i}^{\infty}{}_{n}(-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho) P_{ni}(\mu_2)\mathfrak{B}_{ni}=-\frac{M_1}{a}\sum_{i}^{\infty}{}_{n}(-1)^i\,\alpha_i\,\frac{2n+1}{2}\Delta^2_{ni} P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_2) P_{ni}(\mu_1)\sin i\omega_1.$$

In diesen letzten beiden Gleichungen ist $i > o$. Die vorstehenden drei Gleichungen müssen erfüllt bleiben, welche Lage auch der Punkt $\varrho_2\,\mu_2\,\omega_2$ im Innern des Konduktors annehmen mag; daraus folgt wieder, dass die Koefficienten der Reihenentwickelungen beiderseits übereinstimmen müssen. Aus der ersten nach $P_n(\mu_2)$ fortschreitenden Reihe, in welcher statt P_{no} und Q_{no} überall kürzer P_n und Q_n geschrieben wird, folgt die Doppelbedingung:

$$\begin{cases} 2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\, P_o(\varrho_2)\, Q_o(\varrho)\,\mathfrak{A}_{oo}=c-\frac{M_1}{a}\,\frac{1}{2}\,.\,P_o(\varrho_2)\, Q_o(\varrho_1)\, P_o(\mu_1) \text{ für } n=o, \\ 2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\, P_n(\varrho_2)\, Q_n(\varrho)\,\mathfrak{A}_{no}=-\frac{M_1}{a}\cdot\frac{2n+1}{2}\cdot P_n(\varrho_2)\, Q_n(\varrho_1)\, P_n(\mu_1) \text{ für } n>o, \text{ und} \end{cases}$$

aus den letzten beiden nach $P_{ni}(\mu_2)$ fortschreitenden Reihen ergiebt die Koefficientenvergleichung die weitere Doppelbedingung:

$$\left.\begin{cases} 2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\,(-1)^i\,\Delta_{ni}\,P_{ni}(\varrho_2)\,Q_{ni}(\varrho)\,\mathfrak{A}_{ni} = -\frac{M_1}{a}(-1)^i\,\alpha_i\,.\,\frac{2n+1}{2}\,\Delta^2_{ni}\,P_{ni}(\varrho_2)\,Q_{ni}(\varrho_1)\,P_{ni}(\mu_1)\,\cos i\,\omega_1 \\ 2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\,(-1)^i\,\Delta_{ni}\,P_{ni}(\varrho_2)\,Q_{ni}(\varrho)\,\mathfrak{B}_{ni} = -\frac{M_1}{a}(-1)^i\,\alpha_i\,.\,\frac{2n+1}{2}\,\Delta^2_{ni}\,P_{ni}(\varrho_2)\,Q_{ni}(\varrho_1)\,P_{ni}(\mu_1)\,\sin i\,\omega_1 \end{cases}\right\}\text{ für } i > o.$$

Beide Doppelbedingungen liefern uns die gesuchten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nämlich

$$\mathfrak{A}_{oo} = \left(c - \frac{M_1}{a}\,\frac{1}{2}\cdot Q_o(\varrho_1)\,P_o(\mu_1)\right)\cdot\frac{1}{2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\,Q_o(\varrho)}$$

$$\mathfrak{A}_{no} = -\frac{M_1\,(2n+1)\,Q_n(\varrho_1)\,P_n(\mu_1)}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}\,.\,Q_n(\varrho)}\text{ für } n > o$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_{ni} &= -\frac{M_1\,(2n+1)\,Q_{ni}(\varrho_1)\,P_{ni}(\mu_1)\,\Delta_{ni}}{2\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}\,Q_{ni}(\varrho)}\cos i\,\omega_1 \\ \mathfrak{B}_{ni} &= -\frac{M_1\,(2n+1)\,Q_{ni}(\varrho_1)\,P_{ni}(\mu_1)\,\Delta_{ni}}{2\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}\,Q_{ni}(\varrho)}\sin i\,\omega_1 \end{aligned}\right\}\text{ für }\left\{\begin{matrix} n > o \\ i > o \end{matrix}\right\}.$$

Hiermit sind sämtliche Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche der Reihenentwickelung für $q\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ in Kugelfunktionen entstammen, berechnet. Für $\mathfrak{A}_{oo}$ lässt sich ein von der unbekannten Konstanten c freier Wert ermitteln mit Hülfe der Gesamtmasse M der Belegung; es muss nämlich

$$\iint q\,d\varphi = M$$

oder nach (2)

$a^2\sqrt{\varrho^2-1}\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{o}^{2\pi} q\,.\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\,.\,d\mu\,d\omega = M$ sein. Wir setzten bereits $q\,.\sqrt{\varrho^2-\mu^2} = \sum\limits_{o}^{\infty}{}_n X_n(\mu\,\omega)$, und ferner wissen wir, dass

$$\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{o}^{2\pi} X_n(\mu\,\omega)\,d\mu\,d\omega = \begin{cases} o \text{ für } n > o \\ 4\pi\,X_o \text{ für } n = o, \end{cases}$$

mithin reduciert sich unser obiges Doppelintegral auf:

$a^2\sqrt{\varrho^2-1}\,.\,4\pi\,.\,X_o = M$, und weil $X_o = \mathfrak{A}_{oo}$ ist, so verbleibt: $\mathfrak{A}_{oo} = \frac{M}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}}$. Unter Benutzung sämtlicher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird jetzt:

$$q\sqrt{\varrho^2-\mu^2} = X_o + \sum_1^{\infty}{}_n X_n,$$

$$q\sqrt{\varrho^2-\mu^2} = \frac{M}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}} - \frac{M_1}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}}\sum_1^{\infty}{}_n\sum_o^{n}{}_i\,\alpha_i\,(2n+1)\,\Delta_{ni}\,\frac{Q_{ni}(\varrho_1)\,P_{ni}(\mu_1)}{Q_{ni}(\varrho)}\,P_{ni}(\mu)\cos i\,(\omega-\omega_1),$$

oder endlich

$$q = \frac{1}{4\pi a^2 \sqrt{\varrho^2-1} \, . \, \sqrt{\varrho^2-\mu^2}} \left\{ M - M_1 \sum_1^\infty {}_n \sum_0^n {}_i \, \alpha_i \, (2n+1) \Delta_{ni} \frac{Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1)}{Q_{ni}(\varrho)} P_{ni}(\mu) \cos i(\omega-\omega_1) \right\}.$$

Für $M_1 = o$ geht vorstehendes Resultat in die bereits früher für q angegebene Gestalt über.

Die Ausführungen dieses Kapitels werden sich in der jetzt folgenden Hauptaufgabe unter schwierigeren Verhältnissen wiederholen und uns dort grössere Kürze gestatten.

Die Reciprocitätsfläche.

Ziehen wir vom Koordinatenanfang M einen Strahl nach dem Punkte $\xi\eta\zeta$ des bisher als Konduktor angenommenen Rotationsellipsoides und ordnen wir diesem Punkte einen Punkt xyz auf demselben Strahle dergestalt zu, dass $\varepsilon \cdot e = 1$, wobei ε und e die Entfernungen der Punkte vom Anfangspunkte bedeuten, so nennt man die beiden Punkte einander „zugeordnet", oder man spricht von einem Paare „konjugierter" Punkte. In Fig. 5 findet man angedeutet, wie man zu einem beliebigen Punkte den konjugierten Punkt finden kann; der eine liegt stets innerhalb, der andere stets ausserhalb der Einheitskugel. Bei Bewegung auf dem eigenen Strahle nähern sich beide gleichzeitig der Kugeloberfläche und enfernen sich gleichzeitig von derselben. Im ersten Falle treffen sie auf der Kugeloberfläche selbst zusammen, während im zweiten Falle dem unendlich fernen Punkte das Centrum zugeordnet ist.

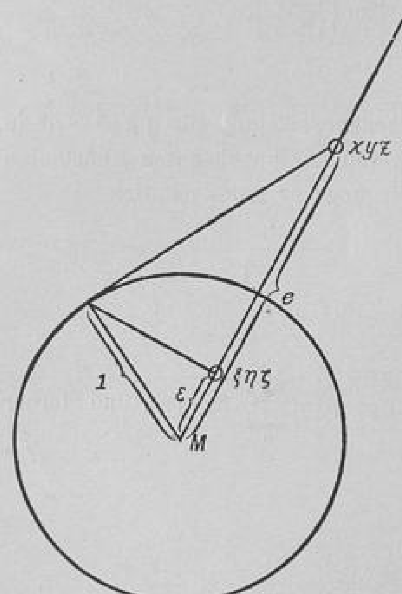

Fig. 5.

Allgemein besteht die Beziehung $\xi : x = \eta : y = \zeta : z = \varepsilon : e$, oder da $\varepsilon : e = \varepsilon \, . \, e : e^2 = 1 : e^2$, so ist:

$$(10) \quad \xi = \frac{1}{e^2} . x, \; \eta = \frac{1}{e^2} . y, \; \zeta = \frac{1}{e^2} . z.$$

Diese Werte setzen wir in die Gleichung des Rotationsellipsoides

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\beta}\right)^2 = 1$$

ein und erhalten:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

Dies ist also die Gleichung der Reciprocitätsfläche, auf deren geometrische Gestalt erst später eingegangen werden soll. Für die Formel (10) kann man auch schreiben:

$$(10a) \quad x = \frac{1}{\varepsilon^2} . \xi, \; y = \frac{1}{\varepsilon^2} . \eta, \; z = \frac{1}{\varepsilon^2} . \zeta.$$

Bei Benutzung elliptischer Koordinaten für $\xi\eta\zeta$ wird $\varepsilon^2 = a^2(\varrho^2 - \sin^2\vartheta)$, und man findet für xyz die Ausdrücke nach (1):

$$
(10b) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\varrho \cdot \cos\vartheta}{\varrho^2 - \sin^2\vartheta}, \\[2mm] y = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{\varrho^2-1}\,\sin\vartheta \cdot \cos\omega}{\varrho^2 - \sin^2\vartheta}, \\[2mm] z = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{\varrho^2-1}\,\sin\vartheta \cdot \sin\omega}{\varrho^2 - \sin^2\vartheta}. \end{cases}
$$

Beide konjugierte Punkte sind von denselben Variabeln $\varrho\vartheta\omega$ abhängig, nur ist die Verbindung derselben verschieden, wie die Formeln (1) und (10b) zeigen. Zum Unterschiede von $(\varrho\vartheta\omega)$ eines Ellipsenpunktes mag $[\varrho\vartheta\omega]$ einen Punkt der Reciprocitätsfläche bezeichnen. Natürlich ist $[\varrho]$ für die ganze Reciprocitätsfläche konstant, ebenso wie ϑ und ω denselben Variationsgrenzen wie früher unterliegen. Einem System von konfokalen Ellipsoiden entspricht ein System von Reciprocitätsflächen, nur dass hierbei mit wachsendem $[\varrho]$ die Reciprocitätsflächen sich verkleinern und in ihrer Reihenfolge ineinander fallen. Jeder Punkt des Raumes lässt sich somit durch die $[\varrho\vartheta\omega]$ darstellen.

Das Oberflächenelement der Reciprocitätsfläche.

Den vier Eckpunkten des rechteckigen Flächenelements $d\varphi$ vom Rotationsellipsoid entsprechen vier Punkte der Reciprocitätsfläche, welche ein rechteckiges und ähnliches Flächenelement df begrenzen. Diese beiden Flächenelemente verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Abstände ε und e vom Transformationscentrum. In Zeichen:

$$df : d\varphi = e^2 : \varepsilon^2,$$

oder weil:

$$e^2 : \varepsilon^2 = e^2\varepsilon^2 : \varepsilon^4 = 1 : \varepsilon^4,$$

$$df = \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot d\varphi.$$

Unter Anwendung von (2) resultiert:

$$(11) \quad df = -\frac{a^2}{\varepsilon^4} \cdot \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \cdot \sqrt{\varrho^2 - 1}\, d\mu\, d\omega.$$

Die reciproke Entfernung zweier Punkte von Reciprocitätsflächen.

In der nebenstehenden Zeichnung (Fig. 6) ist der gegenwärtige Konduktor $[\varrho]$ und das zugehörige Ellipsoid (ϱ) dargestellt; ebenso mag dem Punkte $[\varrho_1\vartheta_1\omega_1]$ der Punkt $(\varrho_1\vartheta_1\omega_1)$ entsprechen.

Aus $e \cdot \varepsilon = e_1 \cdot \varepsilon_1 = 1$ folgt, dass

$$e : e_1 = \varepsilon_1 : \varepsilon$$

und weiter, dass

$$\mathcal{E}_{01} : E_{01} = e : \varepsilon_1 = e \cdot \varepsilon : \varepsilon \cdot \varepsilon_1 = 1 : \varepsilon\varepsilon_1$$

oder endlich, dass

$$(12) \quad \frac{1}{\mathcal{E}_{01}} = \frac{1}{E_{01}} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_1.$$

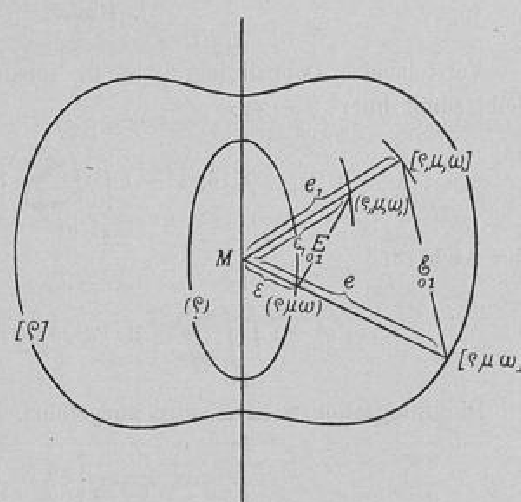

Fig. 6.

Damit ist die Entfernung zweier Punkte von Reciprocitätsflächen durch Entfernungen von Punkten ausgedrückt, welche auf konfokalen Ellipsoiden liegen.

Die elektrische Verteilung auf der Reciprocitätsfläche.

Zur Bestimmung der Flächendichtigkeit q, welche eintritt, sobald die mitgeteilte Elektricitätsmenge auf dem Konduktor $[\varrho]$ sich im Gleichgewicht befindet, benutzen wir wieder den Satz, dass das Potential der Belegung auf einen innern Punkt $[\varrho_1 \mu_1 \omega_1]$ konstant sein muss. Mit Hülfe von (11) und (12) lantet diese Bedingung:

$$\iint q \,.\, df \,.\, \frac{1}{\mathfrak{E}_{01}} = c,$$

$$\varepsilon_1\, a^2 \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \frac{q}{\varepsilon^3} \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \,.\, \frac{1}{E_{01}}\, d\mu\, d\omega = c.$$

Der Konduktor ist eine Rotationsoberfläche, und daher wird die Dichtigkeit q auf Parallelkreisen konstant, also nur von μ abhängig sein. Ebenso ist $\varepsilon = a \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 - 1}$ nur von μ abhängig, und wir können setzen:

$$q \,.\, \frac{1}{\varepsilon^3} \,.\, \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, \mathfrak{A}_n\, P_n(\mu).$$

Für $\frac{1}{E_{01}}$ setzen wir die unter (3) aufgestellte Entwickelung unter Beachtung, dass $[\varrho_1] > [\varrho]$, und erhalten:

$$\varepsilon_1 \,.\, a \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_n\, \mathfrak{A}_n\, P_n(\mu) \,.\, \sum_{0}^{\infty}{}_m\, Y_m(\mu\,\omega)\, d\mu \,.\, d\omega = c.$$

Vorstehendes Doppelintegral ist 0, sobald beide Kugelfunktionen ungleichnamig sind; es bleibt somit nur:

$$\varepsilon_1 \,.\, a \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_n\, \mathfrak{A}_n\, P_n(\mu) \,.\, Y_n(\mu\,\omega)\, d\mu \,.\, d\omega = c,$$

oder nach (3)

$$\varepsilon_1 \,.\, a \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_n \left\{ \mathfrak{A}_n\, P_n(\mu) \sum_{0}^{n}{}_i\, P_{ni}(\mu) \left\{ A_{ni} \cos i\,\omega + B_{ni} \sin i\,\omega \right\} d\mu\, d\omega \right\} = c.$$

Die Integration nach ω wird ausgeführt, wobei wieder die meisten Glieder wegfallen, weil

$$\int_{0}^{2\pi} \cos i\,\omega\, d\omega = \begin{Bmatrix} 0 \text{ für } i > 0 \\ 2\pi \text{ für } i = 0 \end{Bmatrix} \text{und} \int_{0}^{2\pi} \sin i\,\omega\, d\omega = 0.$$

Es bleibt:

$$2\pi \,.\, \varepsilon_1 \, a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n\left\{\mathfrak{A}_n \int_{-1}^{+1} P^2_n(\mu)\, A_{no}\, d\mu\right\} = c.$$

Die Integration nach μ liefert endlich nach bekannten Formeln:

$$2\pi \,.\, \varepsilon_1 \, a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n \mathfrak{A}_n \, A_{no} \,.\, \frac{2}{2n+1} = c.$$

Aus (3a) bestimmt sich A_{no} als:

$$A_{no} = \frac{2n+1}{2} P_n(\varrho)\, Q_n(\varrho_1)\, P_n(\mu_1), \text{ wobei } \varrho < \varrho_1,$$

und es verbleibt:

$$2\pi \, \varepsilon_1 \; a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n \mathfrak{A}_n \, P_n(\varrho)\, Q_n(\varrho_1)\, P_n(\mu_1) = c,$$

$$2\pi \,.\, a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n \mathfrak{A}_n \, P_n(\varrho)\, Q_n(\varrho_1)\, P_n(\mu_1) = c \,.\, \frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Nach (6) verwandeln wir $\frac{1}{\varepsilon_1}$ in eine Reihe:

$$2\pi \,.\, a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n \mathfrak{A}_n \, P_n(\varrho)\, Q_n(\varrho_1)\, P_n(\mu_1) = c\,\frac{1}{a}\sum_0^\infty {}_n \frac{4n+1}{2}\, Q_{2n}(\varrho_1)\, P_{2n}(o)\, P_{2n}(\mu_1).$$

Diese letzte Gleichung muss für alle möglichen Werte von μ_1 erfüllt bleiben und daher beiderseits gleiche Koefficienten besitzen; es muss daher

$$2\pi \; a\sqrt{\varrho^2-1}\; \mathfrak{A}_{2n+1}\, P_{2n+1}(\varrho)\, Q_{2n+1}(\varrho_1) = o, \text{ d. h. } \mathfrak{A}_{2n+1} = o,$$

und

$$2\pi \, a\sqrt{\varrho^2-1}\; \mathfrak{A}_{2n}\, P_{2n}(\varrho)\, Q_{2n}(\varrho_1) = c \,.\, \frac{1}{a}\,\frac{4n+1}{2}\, Q_{2n}(\varrho_1)\, P_{2n}(o), \text{ d. h. } \mathfrak{A}_{2n} = \frac{c\,.\,(4n+1)}{4\pi\, a^2 \sqrt{\varrho^2-1}} \,.\, \frac{P_{2n}(o)}{P_{2n}(\varrho)} \text{ sein.}$$

Die für $q\,\frac{1}{\varepsilon^3}\,.\,\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ gesuchte Reihenentwickelung nimmt jetzt die Gestalt $\sum_0^\infty {}_n \mathfrak{A}_{2n} P_{2n}(\mu)$ an. In den vorstehend bestimmten Koefficienten $\mathfrak{A}_{2n}$ ist die Konstante c noch zu bestimmen, welche wir durch Summation der Belegung zur Gesamtmasse M erhalten können. Es muss

$$\iint q \; df = M,$$

$$a^2\sqrt{\varrho^2-1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} q \,.\, \frac{1}{\varepsilon^3}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\; d\mu \; d\omega = M \text{ sein.}$$

Den Ausdruck unter dem Doppelintegral zerlegen wir in $q \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$ und $\frac{1}{\varepsilon}$. Für den ersten Faktor kennen wir bereits die Entwickelung, und der zweite Faktor wird nach (6) dargestellt. Nach erfolgter Multiplikation beider Reihen wird zunächst nach ω integriert, wodurch nur der Faktor 2π erzeugt wird. In der darauf folgenden Integration nach μ werden wieder alle Integrale mit ungleichnamigen Kugelfunktionen 0, so dass nur restiert:

$$2\pi\, a \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \sum_0^\infty {}_n \frac{4n+1}{2} \mathfrak{A}_{2n}\, P_{2n}(o)\, Q_{2n}(\varrho)\, P^2_{2n}(\mu)\, d\mu = M.$$

Die einzelnen Integrale liefern nach bekannter Eigenschaft $\frac{2}{4n+1}$, wodurch:

$$2\pi\, a \sqrt{\varrho^2 - 1} \sum_0^\infty \mathfrak{A}_{2n}\, P_{2n}(o)\, Q_{2n}(\varrho) = M \text{ wird.}$$

Kurz vorher erhielten wir:

$$\mathfrak{A}_{2n} = \frac{c\,(4n+1)}{4\pi\, a^2 \sqrt{\varrho^2 - 1}} \cdot \frac{P_{2n}(o)}{P_{2n}(\varrho)},$$

es wird somit:

$$c = \frac{2\, a M}{k},$$

wobei $k = \sum_0^\infty {}_n (4n+1)\, P^2_{2n}(o) \cdot \frac{Q_{2n}(\varrho)}{P_{2n}(\varrho)}$ gesetzt worden ist. Dieses k ist eine dem Konduktor eigentümliche Konstante.

Aus

$$q \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \sum_0^\infty {}_n \mathfrak{A}_{2n}\, P_{2n}(\mu)$$

berechnet sich nun leicht:

$$q = \frac{\varepsilon^3 \cdot M}{2\pi\, a\, k \cdot \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \cdot \sqrt{\varrho^2 - 1}} \cdot \sum_0^\infty {}_n (4n+1) \cdot \frac{P_{2n}(o)}{P_{2n}(\varrho)}\, P_{2n}(\mu),$$

oder

$$q = \frac{a^2 \left(\sqrt{\varrho^2 + \mu^2 - 1}\right)^3 M}{2\pi\, k \cdot \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \cdot \sqrt{\varrho^2 - 1}} \cdot \sum_0^\infty {}_n (4n+1) \cdot \frac{P_{2n}(o)}{P_{2n}(\varrho)}\, P_{2n}(\mu).$$

Der Verlauf der Dichtigkeit auf einem Meridiane ist hier nicht so ohne weiteres zu übersehen.

Der allgemeine Fall nun, wo die dem Konduktor $[\varrho]$ mitgeteilte Elektricitätsmenge M sich unter der Einwirkung eines äussern influenzierenden elektrischen Massenpunktes $M_2\, [\varrho_2 \mu_2 \omega_2]$ anordnet, geht wieder davon aus, dass das Potential sämtlicher elektrischer Massen auf einen innern Punkt $[\varrho_1 \mu_1 \omega_1]$ des Konduktors konstant sein muss.

In

$$a^2 \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} q \cdot \frac{1}{\varepsilon^4} \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}_{01}} \, d\mu \, d\omega + M_2 \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}_{12}} = c$$

$$\text{ist} \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{E}_{01}} = \varepsilon \cdot \varepsilon_1 \cdot \dfrac{1}{E_{01}} \quad \dots\dots\dots \quad \varrho_1 > \varrho, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{E}_{12}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dfrac{1}{E_{12}} \quad \dots\dots\dots \quad \varrho_1 > \varrho_2. \end{cases}$$

Dies benutzen wir und schreiben:

$$(13) \quad \varepsilon_1 \left[a^2 \sqrt{\varrho^2 - 1} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} q \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \cdot \frac{1}{E_{01}} \, d\mu \, d\omega + M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{E_{12}} \right] = c.$$

Die Dichtigkeit q ist in diesem allgemeinen Falle von μ und ω abhängig. Wir setzen nach (3)

$$\frac{1}{E_{01}} = \frac{1}{a} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} Y_n (\mu \, \omega), \text{ mit den Koefficienten } A_{ni} \text{ und } B_{ni},$$

und

$$q \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} X_n (\mu \, \omega), \text{ mit den Koefficienten } \mathfrak{A}_{ni} \text{ und } \mathfrak{B}_{ni}.$$

Das Produkt dieser Summen vereinfacht sich wieder unter dem Doppelintegral auf die Produkte von gleichnamigen Kugelfunktionen, die übrigen Produkte würden bei der Integration einzeln 0 ergeben. Vom Doppelintegral bleibt nur;

$$\frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} X_n \cdot Y_n \, d\mu \, d\omega = \frac{1}{a} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{n}{}_{i} P_{ni} (\mu) \left\{ \mathfrak{A}_{ni} \cos i\omega + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\omega \right\} \cdot \sum_{0}^{n}{}_{i} P_{ni} (\mu) \left\{ A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega \right\} d\mu \, d\omega.$$

Bei Integration nach ω wird wieder der grösste Teil der Integrale 0. Der Rest ist:

$$\frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} X_n \cdot Y_n \, d\mu \, . \, d\omega = \frac{1}{a} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \int_{-1}^{+1} \left\{ P^2_{no} (\mu) \, \mathfrak{A}_{no} \, A_{no} \, 2\pi + \pi \sum_{1}^{n}{}_{i} P^2_{ni} (\mu) \left\{ \mathfrak{A}_{ni} \, A_{ni} + \mathfrak{B}_{ni} \, B_{ni} \right\} \right\} d\mu.$$

Das nach (3a) in A_{ni} und B_{ni} enthaltene $\alpha_i = 2$ wird vor das Summenzeichen gesetzt, und wir können schreiben:

$$\frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} Y_n \, X_n \, d\mu \, d\omega = \frac{2\pi}{a} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \int_{-1}^{+1} \sum_{0}^{n}{}_{i} P^2_{ni} (\mu) \left\{ \mathfrak{A}_{ni} \, A_{ni} + \mathfrak{B}_{ni} \, B_{ni} \right\} d\mu.$$

Das Integral des Quadrats einer Kugelfunktion P_{ni} ist aber $\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{\Delta_{ni}}$, weshalb:

$$\frac{1}{a}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_{n} X_{n'} \cdot Y_n \, d\mu \, d\omega = \frac{2\pi}{a}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\sum_{0}^{n}{}_{i} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{\Delta_{ni}} \left\{\mathfrak{A}_{ni} A_{ni} + \mathfrak{B}_{ni} B_{ni}\right\}.$$

Aus A_{ni} und B_{ni} lassen sich ausser dem bereits ausgeschiedenen α_i weitere Faktoren ausscheiden, wodurch die neue Schreibweise entsteht:

$$\frac{1}{a}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_{n} X_n \cdot Y_n \, d\mu \, d\omega = \frac{2\pi}{a}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\sum_{0}^{n}{}_{i} (-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1) \left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega_1 + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega_1\right\}.$$

Dieser Ausdruck führt unsere Grundgleichung (13) über in:

$$\varepsilon_1 \left\{2\pi a \sqrt{\varrho^2 - 1}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\sum_{0}^{n}{}_{i} (-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1) \left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega_1 + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega_1\right\} + M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{E_{12}}\right\} = c.$$

Hierin ändern wir die Summationsfolge und schreiben:

$$\left\{2\pi a \sqrt{\varrho^2 - 1}\sum_{0}^{\infty}{}_{i}\sum_{i}^{\infty}{}_{n} (-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1) \left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega_1 + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega_1\right\} = c \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} - M \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{E_{12}}.\right.$$

Den Ausdruck $\frac{1}{E_{12}}$ entwickeln wir nach (7) und erhalten so auf beiden Seiten trigonometrische Reihen für die Variable ω_1, aus denen wir durch Koefficientenvergleichung erhalten:

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty} \Delta_{no} P_{no}(\varrho) Q_{no}(\varrho_1) P_{no}(\mu_1) \mathfrak{A}_{no} = c \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} - M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \Delta^2_{no} \cdot \frac{2n+1}{2} P_{no}(\varrho_2) Q_{no}(\varrho_1) P_{no}(\mu_2) P_{no}(\mu_1) \text{ für } i=0,$$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\sum_{i}^{\infty}{}_{n} (-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1) \mathfrak{A}_{ni} &= -M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{a}\sum_{i}^{\infty}{}_{n} (-1)^i \alpha_i \Delta^2_{ni} P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_2) P_{ni}(\mu_1) \frac{2n+1}{2} \cos i\,\omega_2 \\ 2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\sum_{i}^{\infty}{}_{n} (-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1) \mathfrak{B}_{ni} &= -M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{a}\sum_{i}^{\infty}{}_{n} (-1)^i \alpha_i \Delta^2_{ni} \cdot P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_2) P_{ni}(\mu_1) \frac{2n+1}{2} \sin i\,\omega_2 \end{aligned}\right\} \text{für } i > 0;$$

Diese 3 Gleichungen müssen auch für alle Werte von μ_1 Gültigkeit behalten, wonach sich durch abermalige Koefficientenvergleichung aus den beiden letzten Zeilen folgern lässt:

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\,(-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) \mathfrak{A}_{ni} = -M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{a}(-1)^i (2n+1) \Delta_{ni}^2 P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_2) \cdot \cos i\,\omega_2,$$

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\,(-1)^i \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho) Q_{ni}(\varrho_1) \mathfrak{B}_{ni} = -M_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{a} \cdot (-1)^i (2n+1) \Delta_{ni}^2 P_{ni}(\varrho_2) Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_2) \cdot \cos i\,\omega_2,$$

und weiter

$$(14) \quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\frac{M_2 \cdot \varepsilon_2 (2n+1) \Delta_{ni} P_{ni}(\varrho_2) \cdot P_{ni}(\mu_2)}{2\pi a^2 \sqrt{\varrho^2-1} \cdot P_{ni}(\varrho)} \cos i\,\omega_2 \\ \mathfrak{B}_{ni} &= -\frac{M_2 \cdot \varepsilon_2 (2n+1) \Delta_{ni} \cdot P_{ni}(\varrho_2) P_{ni}(\mu_2)}{2\pi a^2 \sqrt{\varrho^2-1} \cdot P_{ni}(\varrho)} \sin i\,\omega_2 \end{aligned}\right\} i > 0.$$

Die erste Zeile lässt sich so schreiben:

$$\sum_0^\infty {}_n P_n(\mu_1)\left\{2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\,.\,P_n(\varrho)\,Q_n(\varrho_1)\,\mathfrak{A}_{no}+M_2\,.\,\varepsilon_2\,.\,\frac{1}{a}\,.\,\frac{2n+1}{2}\,P_n(\varrho_2)\,Q_n(\varrho_1)\,P_n(\mu_2)\right\}=c\,.\,\frac{1}{\varepsilon_1}\,.$$

Für $\frac{1}{\varepsilon_1}$ entnehmen wir den Ausdruck aus (5) und erhalten für die beiderseitigen Koefficienten die Bedingungsgleichung:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\,P_n(\varrho)\,Q_n(\varrho_1)\,\mathfrak{A}_{no}+M_2\,.\,\varepsilon_2\,.\,\frac{1}{a}\,.\,\frac{2n+1}{2}\,.\,P_n(\varrho_2)\,Q_n(\varrho_1)\,P_n(\mu_2)=\frac{c}{a}\,.\,\frac{2n+1}{2}\,.\,Q_n(\varrho_1)\,P_n(o),$$

d. h.

$$(15)\quad \mathfrak{A}_{no}=\frac{1}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}}\left\{c(2n+1)\frac{P_n(o)}{P_n(\varrho)}-M_2\,.\,\varepsilon_2\,.\,(2n+1)\,.\,\frac{P_n(\varrho_2)\,P_n(\mu_2)}{P_n(\varrho)}\right\}.$$

Die noch unbestimmte Konstante c gewinnen wir wieder durch Summation der Belegung zu M; es ist:

$$a^2\sqrt{\varrho^2-1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}.\,q\,.\,\frac{1}{\varepsilon^4}\cdot\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\,d\mu\,.\,d\omega=M.$$

Für $q\,.\,\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ setzten wir bereits $\sum_0^\infty {}_n X_n(\mu\,\omega)$ mit den vorstehend ermittelten Koefficienten $\mathfrak{A}_{ni}$ und $\mathfrak{B}_{ni}$; für den Restfaktor $\frac{1}{\varepsilon}$ benutzen wir die Reihe (5). Bei der Integration bleibt von dem Produkt beider Summen nur bestehen:

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}X_n(\mu\,\omega)\frac{2n+1}{2}\,Q_n(\varrho)\,P_n(o)\,P_n(\mu)\,d\mu\,d\omega=M,\quad\text{oder}$$

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\frac{2n+1}{2}\,Q_n(\varrho)\,P_n(o)\,P_n(\mu)\sum_0^n {}_i P_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni}\cos i\,\omega+\mathfrak{B}_{ni}\sin i\,\omega\right\}d\mu\,d\omega=M.$$

Die Integration nach ω vereinfacht den Ausdruck auf:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n\int_{-1}^{+1}\frac{2n+1}{2}\,.\,Q_n(\varrho)\,P_n(o)\,P^2_n(\mu)\,\mathfrak{A}_{no}\,d\mu=M,$$

und von diesem Ausdruck bleibt bei Integration nach μ nur noch:

$$2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_0^\infty {}_n\,\mathfrak{A}_{no}\,Q_n(\varrho)\,P_n(o)=M.$$

Nach (15) wird daraus:

$$\frac{1}{2a}\left\{c\sum_0^\infty {}_n(2n+1)\,P^2_n(o)\,Q_n(\varrho)\,\frac{1}{P_n(\varrho)}-M_2\,\varepsilon_2\sum_0^\infty {}_n(2n+1)\,P_n(o)\,Q_n(\varrho)\,P_n(\varrho_2)\,P_n(\mu_2)\,.\,\frac{1}{P_n(\varrho)}\right\}=M.$$

Die erste Zeile lässt sich so schreiben:

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{n} P_n(\mu_1)\Big\{2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}. \qquad Q_n(\varrho_1) P_n(\mu_2)\Big\} = c \cdot \frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Für $\frac{1}{\varepsilon_1}$ entnehmen wir de ie beiderseitigen Koefficienten die Bedingungsgleichung:

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2-1}\, P_n(\varrho)\, Q_n(\varrho_1)\, \mathfrak{A}_n \qquad = \frac{c}{a} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot Q_n(\varrho_1) P_n(o),$$

d. h.

$$(15)\quad \mathfrak{A}_{no} = \frac{\qquad}{4\pi a^{\quad}} \qquad \frac{P_n(\varrho_2) P_n(\mu_2)}{P_n(\varrho)}\Big\}.$$

Die noch unbestimmte K h Summation der Belegung zu M; es ist:

$$a^2 \qquad .$$

Für $q \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ setz vorstehend ermittelten Koefficienten $\mathfrak{A}_{ni}$ und $\mathfrak{B}_{ni}$; für den e (5). Bei der Integration bleibt von dem Produkt beide

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}^{n}\int_{-1}^{+1}\int_{o}^{2\pi} X_n \qquad \text{oder}$$

$$a\sqrt{\varrho^2-1}\sum_{0}^{\infty}{}^{n}\int_{-1}^{+1}\int_{o}^{2\pi} \frac{2n}{\quad} \qquad + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\omega\Big\} d\mu\, d\omega = M.$$

Die Integration nach ω v

$$2\pi a \sqrt{\varrho^2 \quad} \qquad = M,$$

und von diesem Ausdruck blei

Nach (15) wird daraus:

$$\frac{1}{2a}\Big\{c \sum_{0}^{\infty}{}^{n} (2n+1) P^2_n(o)\, Q_n \qquad {}_n(\varrho_2) P_n(\mu_2) \cdot \frac{1}{P_n(\varrho)}\Big\} = M.$$

Diese beiden Summen bezeichnen wir kurz mit k und k_1 und finden:

$$c = \frac{1}{k}\left[2a\,M + M_2 \,.\, \varepsilon_2\, k_1\right],$$

und daraus ergiebt sich wieder:

$$(15a)\quad \mathfrak{A}_{n0} = \frac{1}{4\pi\, a^2 \sqrt{\varrho^2 - 1}} \left[\frac{1}{k}\left\{2a\,M + M_2 \,.\, \varepsilon_2\, k_1\right\}(2n+1)\,P_n(o) \,.\, \frac{1}{P_n(\varrho)} - M_2 \,.\, \varepsilon_2\,(2n+1) \,.\, P_n(\varrho_2)\,P_n(\mu_2) \,.\, \frac{1}{P_n(\varrho)} \right].$$

Somit sind durch (14) und (15a) die sämtlichen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Entwickelung:

$$q \,.\, \frac{1}{\varepsilon^3}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \sum_0^{\infty}{}_n \sum_0^{n}{}_i\, P_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega\right\}$$

bestimmt. Wir ändern zunächst die Summationsfolge und schreiben:

$$q \,.\, \frac{1}{\varepsilon^3}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \sum_0^{\infty}{}_i \sum_i^{\infty}{}_n\, P_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega\right\},$$

oder

$$q \,.\, \frac{1}{\varepsilon^3}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \sum_0^{\infty}{}_n\, P_n(\mu)\,\mathfrak{A}_{n0} + \sum_1^{\infty}{}_i \sum_i^{\infty}{}_n\, P_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega\right\}.$$

Davon wird:

$$\sum_0^{\infty}{}_n\, P_n(\mu)\,\mathfrak{A}_{n0} = \frac{1}{4\pi\, a^2\sqrt{\varrho^2 - 1}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{k}\left\{2a\,M + M_2 \,.\, \varepsilon_2\, k_1\right\} \sum_0^{\infty}{}_n (2n+1)\; P_n(o)\, \frac{1}{P_n(\varrho)} \,.\, P_n(\mu) - \\ M_2 \,.\, \varepsilon_2 \sum_0^{\infty}{}_n\, (2n+1)\; P_n(\varrho_2) \,.\, P_n(\mu_2) \,.\, \frac{1}{P_n(\varrho)} \,.\, P_n(\mu) \end{array} \right],$$

und

$$\sum_1^{\infty}{}_i \sum_i^{\infty}{}_n P_{ni}(\mu)\left\{\mathfrak{A}_{ni} \cos i\,\omega + \mathfrak{B}_{ni} \sin i\,\omega\right\} = -\frac{M_2 \,.\, \varepsilon_2}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2 - 1}} \sum_1^{\infty}{}_i \sum_i^{\infty}{}_n\, \alpha_i\; (2n+1)\,\Delta_{ni} \,.\, P_{ni}(\varrho_2) \,.\, P_{ni}(\mu_2) \,.\, \frac{1}{P_{ni}(\varrho)} \,.\, P_{ni}(\mu) \,.\, \cos i\,(\omega - \omega_2).$$

Die Summe dieser beiden Summen gestattet eine Zusammenziehung in:

$$q \,.\, \frac{1}{\varepsilon^3}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} = \frac{1}{4\pi\, a^2\sqrt{\varrho^2 - 1}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{k}\left\{2a\,M + M_2 \,.\, \varepsilon_2\, k_1\right\} \sum_0^{\infty}{}_n\; (2n+1)\; P_n(o) \,.\, \frac{P_n(\mu)}{P_n(\varrho)} - \\ M_2 . \varepsilon_2 \sum_0^{\infty}{}_i \sum_i^{\infty}{}_n\, \alpha_i\; (2+1)\; \Delta_{ni}\, P_{ni}(\varrho_2)\, P_{ni}(\mu_2) \frac{P_{ni}(\mu)}{P_{ni}(\varrho)} \cos i(\omega - \omega_2) \end{array} \right].$$

Daraus ergiebt sich als Endresultat:

$$q = \frac{a^2\,(\varrho^2 + \mu^2 - 1)^{3/2}}{4\pi\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \,.\, \sqrt{\varrho^2 - 1}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{k}\left\{2\,M + M_2 \,.\, k_1 \sqrt{\varrho_1{}^2 + \mu_1{}^2 - 1}\right\} \sum_0^{\infty}{}_n\, (4n+1)\; P_{2n}(o) \,.\, \frac{P_{2n}(\mu)}{P_{2n}(\varrho)} - \\ M_2 \sqrt{\varrho_2{}^2 + \mu_2{}^2 - 1} \sum_0^{\infty}{}_i \sum_i^{\infty}{}_n\, \alpha_i\; (2n+1)\, \Delta_{ni}\, P_{ni}(\varrho_2) P_{ni}(\mu_2) \frac{P_{ni}(\mu)}{P_{ni}(\varrho)} \cos i(\omega - \omega_2) \end{array} \right].$$

Dabei hat das erste Summenzeichen durch $P_{2n+1}(o) = 0$ eine kleine Umgestaltung erfahren. Dies allgemeine Resultat geht für $M_1 = 0$ in das schon früher gefundene specielle Resultat über. Weitere Andeutungen darüber, wie sich dieses Problem von einem andern Standpunkte aus behandeln liesse, überschreiten den hier verfügbaren Raum.