

Über die kürzesten Linien auf krummen Oberflächen im allgemeinen und über die auf dem dreiachsigen Ellipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ im besonderen.

II. TEIL.*)

1.

Man kann das gegebene Ellipsoid:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

als eine Spezialfläche der drei Scharen konfokaler Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung auffassen, welche durch die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1$$

bestimmt sind. Dabei ist

$$(3) \quad (a = a^2) > (b = b^2) > (c = c^2).$$

Wie bekannt ist,**) hat die Gleichung (2), die in λ von drittem Grade ist, drei stets reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, welche zwischen den Grenzen: $-a$ und $-b$, $-b$ und $-c$, $-c$ und ∞ liegen; und macht man

$$(4) \quad \infty > \lambda_1 > -c, \quad -c > \lambda_2 > -b, \quad -b > \lambda_3 > -a,$$

so stellt von den Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} & \frac{x^2}{a+\lambda_1} + \frac{y^2}{b+\lambda_1} + \frac{z^2}{c+\lambda_1} = 1, \\ & \frac{x^2}{a+\lambda_2} + \frac{y^2}{b+\lambda_2} + \frac{z^2}{c+\lambda_2} = 1, \\ & \frac{x^2}{a+\lambda_3} + \frac{y^2}{b+\lambda_3} + \frac{z^2}{c+\lambda_3} = 1 \end{aligned}$$

die erste ein Ellipsoid, die zweite ein einschaliges Hyperboloid und die dritte ein zweischaliges Hyperboloid dar. Denn in der ersten Gleichung sind alle drei Nenner positiv, in der zweiten sind die beiden ersten positiv, der dritte ist negativ und in der dritten ist der erste positiv, die beiden anderen aber sind negativ. Von einem gegebenen Systeme konfokaler Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung gehen also durch einen gegebenen Punkt immer ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid.

*) Der I. Teil (Über die kürzesten Linien auf krummen Oberflächen im allgemeinen) ist in dem Jahresberichte des k. k. Staatsgymnasiums in Leitmeritz für das Schuljahr 1906-7 enthalten.

**) Cfr. (auch im Folgenden) insbesondere Jacobi, Vorlesungen über Dynamik 26.-28. Vorlesung; Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes, 22. und 23. Vorlesung; Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, II. Bd., 1. Teil, XIII. und XIV.

Von den drei Scharen konfokaler Mittelpunktsflächen schneidet bekanntlich jede die beiden anderen rechtwinklig, wie sich übrigens auch leicht aus den Gleichungen (5) ableiten läßt. Binet hat zuerst gezeigt, daß die Schnittkurven zugleich die Krümmungskurven dieser Flächen sind.

Wie die Gleichungen (5) die drei Flächen, welche durch einen Punkt gehen, bestimmen, so kann man umgekehrt einen Punkt auch als Schnittpunkt der drei durch ihn gehenden Flächen definieren, welche Bestimmung allerdings achtdeutig ausfällt, allein durch angemessene Beschränkung, z. B. daß die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes nur positiv seien, eindeutig wird. Die Koordinaten x, y, z des Punktes sind, wie durch Auflösung der Gleichungen (5) folgt, gegeben durch:

$$(6) \quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a + \lambda_1)(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)}{(a - b)(a - c)}, \\ y^2 &= \frac{(b + \lambda_1)(b + \lambda_2)(b + \lambda_3)}{(b - c)(b - a)}, \\ z^2 &= \frac{(c + \lambda_1)(c + \lambda_2)(c + \lambda_3)}{(c - a)(c - b)}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nur reelle Werte für x, y, z , da die rechten Seiten nach (3) und (4) positiv sind.

Da also ein Punkt im Raume durch die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ festgelegt ist, indem dadurch die konfokalen Flächen in analoger Weise eingeführt werden, wie sonst (bei den gewöhnlichen Koordinaten) die drei Systeme von Ebenen, die den Koordinatenebenen parallel sind, so nennt man $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auch orthogonale Koordinaten des betreffenden Punktes, und zwar wegen ihrer engen Beziehung zu den Ellipsoiden elliptische Koordinaten.

Nimmt man zwei der Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ konstant, den dritten allein variabel, so erhält man die Parameterdarstellung der Schnittkurven derjenigen beiden Flächen, welche durch die beiden konstanten Parameter zufolge (5) bestimmt werden, also der betreffenden Krümmungslinien. Setzt man nur einen Parameter konstant, so hat man in (6) die Parameterdarstellung einer Fläche des konfokalen Systemes, somit, wenn man $\lambda_1 = 0$ setzt, die Darstellung unserer Fläche (1).

Im Folgenden sollen auch elliptische Koordinaten eingeführt werden.

2.

Wenn wir zunächst die Differentialgleichung der Kürzesten auf dem Ellipsoide (1) in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z herstellen wollen, so haben wir auf die Differentialgleichung (10), bzw. (11) des I. Teiles zurückzugehen:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

und dazu die Werte von X, Y, Z aus der Gleichung (1) zu berechnen. Es ergibt sich:

$$(8) \quad X = \frac{2x}{a^2}, \quad Y = \frac{2y}{b^2}, \quad Z = \frac{2z}{c^2}$$

und somit die Differentialgleichung:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \frac{x}{a^2}, & \frac{y}{b^2}, & \frac{z}{c^2} \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(10) \quad b^2 c^2 x (dy d^2 z - dz d^2 y) + c^2 a^2 y (dz d^2 x - dx d^2 z) + a^2 b^2 z (dx d^2 y - dy d^2 x) = 0.$$

Da wir den speziellen Fall einer Fläche zweiter Ordnung vor uns haben, so geht diese Gleichung, wie wir im I. Teile (§ 5, Seite 8) gesehen haben, durch einmalige Integration, wobei die Gleichung der Krümmungslinien unseres Ellipsoides (1):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ dx & dy & dz \\ dx & dy & dz \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

den integrierenden Faktor bildet, nach Gleichung (20) des I. Teiles über in folgende:

$$(11) \quad \frac{\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = C,$$

wo C die Integrationskonstante bedeutet.

Diese Differentialgleichung (11) von der ersten Ordnung, aber vom zweiten Grade, da die Differentiale von x, y, z in der zweiten Potenz vorkommen, stellt bei unveränderlichem Werte von C nicht eine, sondern zwei verschiedene kürzeste Linien dar, welche durch den durch die Koordinaten x, y, z bestimmten Punkt M des Ellipsoides (1) gehen. Wenn man die Differentiale dx, dy, dz als veränderliche rechtwinklige Koordinaten ansieht, stellt sie, wie leicht zu sehen ist, einen Kegel zweiter Ordnung dar, der seine Spitze in M hat. Die Tangentialebene des Ellipsoides (1) in dem Punkte M schneidet die Kegelfläche in zwei Geraden, welche die Tangenten der beiden obigen durch M gehenden kürzesten Linien sind. Auf diese beiden demselben Werte der Konstanten C entsprechenden Kürzesten werden wir im Folgenden noch zurückkommen.

Anmerkung. Da die Gleichung (18) des I. Teiles, aus welcher sich unter der Voraussetzung von Flächen zweiter Ordnung die Gleichung (20) (I. Teil) ergibt, sowohl für die kürzesten Linien als auch für die Krümmungskurven auf krummen Oberflächen im allgemeinen gilt, so könnte man glauben, daß jetzt in unserem Falle die Gleichung (11) nicht nur das erste Integral der Differentialgleichung der kürzesten Linien auf dem Ellipsoide (1) ist, sondern auch der Differentialgleichung der Krümmungslinien als Integral zukommt. Allein Hesse hat gezeigt,*) daß das Integral ausschließlich den kürzesten Linien angehört. Man darf dies nicht etwa mit Sicherheit daraus schließen, daß das Integral der Differentialgleichung (11), den Krümmungskurven angehört, dann zwei willkürliche Konstante enthielte, weil man ja der wirklichen Integralgleichung der Krümmungslinien mit ihrer willkürlichen Konstanten immer noch weitere willkürliche Konstante beigegeben denken kann. Volle Sicherheit erhält man durch Einführung der elliptischen Koordinaten in die Gleichung (11) und in die Differentialgleichung der Krümmungslinien, da sich dann von einander völlig verschiedene Resultate ergeben.

3.

Die Differentialgleichung (11) soll nun in elliptische Koordinaten transformiert werden.

Da im Falle unseres Ellipsoides (1) $\lambda_1 = 0$ zu nehmen ist, so gehen die Formeln (6) über in:

$$(12) \quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)}{(a - b)(a - c)}, \\ y^2 &= \frac{b(b + \lambda_2)(b + \lambda_3)}{(b - c)(b - a)}, \\ z^2 &= \frac{c(c + \lambda_2)(c + \lambda_3)}{(c - a)(c - b)}. \end{aligned}$$

*) Hesse, Vorlesungen üb. analyt. Geom. d. Raumes, pg. 327 f, Fußnote.

Logarithmieren und differentieren wir dann, so ergibt sich zunächst aus der ersten Gleichung: $\frac{2 dx}{x} = \frac{d \lambda_2}{a + \lambda_2} + \frac{d \lambda_3}{a + \lambda_3}$ oder quadriert: $4 dx^2 = x^2 \left(\frac{d \lambda_2}{a + \lambda_2} + \frac{d \lambda_3}{a + \lambda_3} \right)^2$; somit erhalten wir mit Hilfe der beiden analogen Gleichungen für y und z die Beziehung:

$$4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = x^2 \left(\frac{d \lambda_2}{a + \lambda_2} + \frac{d \lambda_3}{a + \lambda_3} \right)^2 + y^2 \left(\frac{d \lambda_2}{b + \lambda_2} + \frac{d \lambda_3}{b + \lambda_3} \right)^2 + z^2 \left(\frac{d \lambda_2}{c + \lambda_2} + \frac{d \lambda_3}{c + \lambda_3} \right)^2$$

oder

$$4 \Sigma (dx)^2 = \Sigma \frac{x^2}{(a + \lambda_2)^2} d \lambda_2^2 + \Sigma \frac{x^2}{(a + \lambda_3)^2} d \lambda_3^2 + 2 \Sigma \frac{x^2}{(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)} d \lambda_2 d \lambda_3,$$

wobei die Zeichen Σ die Bedeutung haben, daß man in den Ausdrücken unter ihnen der Reihe nach x durch y und z und a durch b und c ersetzen und die Summe der erhaltenen Werte bilden soll. Nun ist aber, wie sich durch Partialbruchbildung ergibt:

$$\Sigma \frac{x^2}{(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} \left(\Sigma \frac{x^2}{a + \lambda_3} - \Sigma \frac{x^2}{a + \lambda_2} \right),$$

wo aber der Klammerausdruck auf Grund der Gleichungen (5) Null ist. Es wird also, da ja $\lambda_2 - \lambda_3$ immer von Null verschieden ist:

$$\Sigma \frac{x^2}{(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)} = 0,$$

und wir erhalten mit Berücksichtigung der Werte (12):

$$4 \Sigma (dx)^2 = \Sigma \frac{a(a + \lambda_3)}{(a + \lambda_2)(a - b)(a - c)} d \lambda_2^2 + \Sigma \frac{a(a + \lambda_2)}{(a + \lambda_3)(a - b)(a - c)} d \lambda_3^2.$$

Betrachten wir hier vorläufig nur das erste Glied und entwickeln den Zähler nach Potenzen von $a + \lambda_2$, so ergibt sich, da

$$\begin{aligned} a(a + \lambda_3) &= (a + \lambda_2 - \lambda_2)(a + \lambda_2 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ &= (a + \lambda_2)^2 - (a + \lambda_2)(2\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

ist:

$$\Sigma \frac{a(a + \lambda_3)}{(a + \lambda_2)(a - b)(a - c)} = \Sigma \frac{a - \lambda_2 + \lambda_3}{(a - b)(a - c)} + \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3) \Sigma \frac{1}{(a + \lambda_2)(a - b)(a - c)}.$$

Um diese Summen auszurechnen, wollen wir gewisse Sätze aus der Partialbruchzerlegung verwenden.

Es ist bekannt,*) daß, wenn eine Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ gegeben ist, wo die Ordnung n des Zählers kleiner ist als die Ordnung m des Nenners, der Wert $\Sigma \frac{F(x)}{f'(x)}$, wo Σ die Bedeutung hat, daß man x durch jede der m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ersetzen und die Summe der erhaltenen Werte bilden soll und $f'(x)$ die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ bezeichnet, gleich dem Koeffizienten der höchsten Potenz von $F(x)$ ist, wenn $n = m - 1$ ist, dagegen gleich Null wird, wenn $n \leq m - 2$ ist. Ist aber $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, so besteht die Beziehung:

$$(13) \quad \Sigma_{\varphi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi'(x)\psi(x)} = - \Sigma_{\psi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}.$$

Die linke Seite bezieht sich auf die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und die rechte auf die der Gleichung $\psi(x) = 0$. Die Zeichen Σ haben dieselbe Bedeutung wie oben.

*) Cfr. Serret (Harnack), Diff.- und Integralrechnung, 1. Bd., § 394. Vergleiche auch: Jacobi, Vorlesungen üb. Dynamik, pg. 202.

Mit Hilfe dieser Sätze haben wir zunächst für das erste Glied unserer letzten obigen Gleichung, wenn wir $F(x) = x - \lambda_2 + \lambda_3$ und $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ setzen:

$$\sum \frac{a - \lambda_2 + \lambda_3}{(a - b)(a - c)} = 0;$$

die zweite Summe wird für $F(x) = 1$, $\varphi(x) = x + \lambda_2$, $\psi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ nach (13):

$$\sum \frac{1}{(a + \lambda_2)(a - b)(a - c)} = \sum_{\psi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi(x)\psi'(x)} = \frac{1}{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(c + \lambda_2)}.$$

Das Zeichen Σ fällt natürlich im Resultate aus, weil die Gleichung $\varphi(x) = 0$ nur eine Wurzel hat.

Wir erhalten also, da sich mit dem Faktor von $d\lambda_3^2$ analoge Umformungen vornehmen lassen:

$$4 \Sigma (dx)^2 = \frac{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(c + \lambda_2)} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a + \lambda_3)(b + \lambda_3)(c + \lambda_3)} d\lambda_3^2.$$

Für die Nenner wollen wir abkürzende Bezeichnungen einführen und, da der erste Nenner nach (4) negativ, der zweite aber positiv ist, setzen:

$$(14) \quad \begin{aligned} (a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(c + \lambda_2) &= -\Lambda_2, \\ (a + \lambda_3)(b + \lambda_3)(c + \lambda_3) &= \Lambda_3. \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann:

$$(15) \quad \Sigma (dx)^2 = \frac{1}{4} (\lambda_3 - \lambda_2) \left(\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} d\lambda_3^2 \right)$$

als Nenner der Gleichung (11).

Um den Ausdruck $\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}$ in (11) in elliptischen Koordinaten herzustellen, gehen wir auf die bereits abgeleitete Formel für dx^2 zurück und haben also:

$$\begin{aligned} 4 \Sigma \frac{dx^2}{a} &= \Sigma \frac{x^2}{a} \left(\frac{d\lambda_2}{a + \lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{a + \lambda_3} \right)^2 \\ &= \Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_2)^2} d\lambda_2^2 + \Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_3)^2} d\lambda_3^2 + 2 \Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)} d\lambda_2 d\lambda_3. \end{aligned}$$

Durch Benützung von (12) ergibt sich für das erste Glied:

$$\Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_2)^2} = \Sigma \frac{a + \lambda_3}{(a + \lambda_2)(a - b)(a - c)}$$

oder, wenn wir, um die Formel (13) anwenden zu können, $F(x) = x + \lambda_3$, $\varphi(x) = x + \lambda_2$, $\psi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ setzen:

$$\Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_2)^2} = \sum_{\psi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi(x)\psi'(x)} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(c + \lambda_2)}.$$

Das Zeichen Σ fällt natürlich im Resultate wieder aus. Analog wird:

$$\Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_3)^2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a + \lambda_3)(b + \lambda_3)(c + \lambda_3)}.$$

Ferner ergibt sich:

$$\Sigma \frac{x^2}{a(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)} = \Sigma \frac{1}{(a - b)(a - c)} = 0.$$

Wir erhalten also:

$$4 \Sigma \frac{dx^2}{a} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(c + \lambda_2)} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a + \lambda_3)(b + \lambda_3)(c + \lambda_3)} d\lambda_3^2$$

oder mit Rücksicht auf die Bezeichnungen (14):

$$(16) \quad \Sigma \frac{dx^2}{a} = \frac{1}{4} (\lambda_2 - \lambda_3) \left(\frac{1}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_3} d\lambda_3^2 \right).$$

Berechnen wir endlich den Ausdruck:

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \Sigma \left(\frac{x}{a} \right)^2 = \Sigma \frac{(a + \lambda_2)(a + \lambda_3)}{a(a - b)(a - c)}$$

wieder mit Hilfe der Formel (13), indem wir $F(x) = x + \lambda_2$, $x + \lambda_3$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ setzen, so ergibt sich leicht:

$$(17) \quad \Sigma \left(\frac{x}{a} \right)^2 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{a b c}.$$

Infolge der Resultate (15), (16) und (17) geht also die Differentialgleichung (11) über in:

$$(18) \quad - \frac{\frac{1}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_3} d\lambda_3^2}{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} d\lambda_3^2} \cdot \frac{\lambda_2 \lambda_3}{a b c} = C$$

oder, wenn wir:

$$(19) \quad - a b c C = z$$

einführen:

$$(20) \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_3} d\lambda_3^2 \right) \lambda_2 \lambda_3 &= z \left(\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} d\lambda_3^2 \right), \\ \frac{\lambda_2}{\Lambda_2} (\lambda_3 - z) d\lambda_2^2 &= \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} (z - \lambda_2) d\lambda_3^2, \\ \frac{\lambda_2}{\Lambda_2 (z - \lambda_2)} d\lambda_2^2 &= \frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)} d\lambda_3^2, \end{aligned}$$

wo die Variablen getrennt vorkommen.

Bezüglich der Konstanten z bemerkt man, daß $\lambda_2 > z > \lambda_3$ sein muß. Es muß also, wie sich aus den Grenzen von λ_2 und λ_3 ergibt, z zwischen $-c$ und $-a$ liegen.

Aus (20) folgen weiter die zwei Gleichungen:

$$(21) \quad \begin{aligned} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2 (z - \lambda_2)}} d\lambda_2 - \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} d\lambda_3 &= 0, \\ \sqrt{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2 (z - \lambda_2)}} d\lambda_2 + \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} d\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Es sind dies also die beiden derselben Konstanten C der ersten Integration entsprechenden Differentialgleichungen der von demselben Punkte des Ellipsoides (1) ausgehenden kürzesten Linien auf demselben.

Die beiden Differentialgleichungen können, da die Variablen getrennt sind, integriert werden, wodurch man die Gleichungen der Oberflächen erhält, deren Schnittkurven mit dem Ellipsoide (1) die eben genannten kürzesten Linien sind:

$$(22) \quad \begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2 (z - \lambda_2)}} d\lambda_2 - \int \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} d\lambda_3 &= c_1, \\ \int \sqrt{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2 (z - \lambda_2)}} d\lambda_2 + \int \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} d\lambda_3 &= c_2. \end{aligned}$$

c_1 und c_2 sind die Konstanten, die durch diese Integration eintreten.

Die Integrale sind im allgemeinen Abelsche Integrale, und zwar von der Form, welche zunächst auf die elliptischen folgt, d. h. hyperelliptische erster Gattung.

Anmerkung. Es ist die im Vorigen angegebene Einführung der elliptischen Koordinaten, wobei man also einen Punkt immer als Intersektion des Ellipsoides mit den beiden durch ihn gehenden konfokalen Hyperboloiden ansieht, im wesentlichen nichts anderes als die Art, welcher sich Jacobi zuerst bediente, um das Problem der kürzesten Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoide zu lösen. Jacobi war bekanntlich*) der erste, der die vollständige Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der das Problem abhängt, durchführte, d. h. diese Gleichung auf Quadraturen zurückführte, wobei er die Schwierigkeiten der Aufgabe, nämlich die richtigen Variablen zu treffen und einzuführen, dadurch überwand, daß er zwei Hilfswinkel φ und ψ benützte, welche, wenn

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

die Gleichung des Ellipsoides und $a < b < c$ ist, die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Fläche durch die Formeln bestimmen:

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \sin \varphi \sqrt{b \cos^2 \psi + c \sin^2 \psi - a},$$

$$y = \sqrt{b} \cos \varphi \sin \psi,$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \cos \psi \sqrt{c - a \cos^2 \varphi - b \sin^2 \varphi}.$$

Er gelangt so zu der Schlußgleichung**):

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi} d \varphi}{\sqrt{c - a \cos^2 \varphi - b \sin^2 \varphi} \sqrt{(b - a) \cos^2 \varphi - \beta}}$$

$$- \int \frac{\sqrt{b \cos^2 \psi + c \sin^2 \psi} d \psi}{\sqrt{b \cos^2 \psi + c \sin^2 \psi - a} \sqrt{(c - b) \sin^2 \psi + \beta}},$$

wo α und β die beiden Konstanten sind, welche das vollständige Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung enthalten muß. (Die Konstante α wird Null, wenn man die Integrale von denjenigen Werten von φ und ψ beginnen läßt, welche dem Ausgangspunkte der kürzesten Linie auf dem Ellipsoide entsprechen; die Konstante β wird algebraisch durch die anfängliche Richtung bestimmt, die man der kürzesten Linie gibt.) — Bei der weiteren Behandlung des Problems der Kürzesten auf einem dreiachsigen Ellipsoide mit elliptischen Koordinaten***) gewinnt Jacobi die Integration mit Hilfe der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, wobei er von jener Definition der kürzesten Linien ausgeht,†) nach welcher dies jene Linien auf einer krummen Oberfläche sind, die von materiellen Punkten beschrieben werden, welche gezwungen sind, auf der Oberfläche zu bleiben, und welche, ohne daß eine sollicitierende Kraft auf sie wirkt, nur von einem anfänglichen Stoße getrieben werden. Mit der Gleichung, die Jacobi als Endresultat erhält, stimmen unsere Gleichungen (22) dem Wesen nach überein.

*) Cfr. Crellé Journal, Bd. 19, pg 309, Jacobi: Note u. s. w.

***) Die Ausrechnung vergleiche etwa in Crellé Journal, Bd. 26, pg. 160: Joachimsthal; oder bei Stegmann, Variationsrechnung § 46; u. a.

***) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 28. Vorlesung.

†) Vergleiche I. Teil, § 3 (pg. 4).

4.

Wir gehen nun wieder zur Differentialgleichung (11) der kürzesten Linien auf dem Ellipsoide (1) zurück, um daraus eine wichtige Eigenschaft dieser Linien abzuleiten.*)

Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichung in der Form:

$$(23) \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = C \cdot \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

und suchen die geometrische Bedeutung der beiden Gleichungsseiten auf. Wenn wir uns vom Mittelpunkte unseres Ellipsoides (1) auf die Tangentialebene in einem Flächenpunkte x, y, z , deren Gleichung also $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1 = 0$ ist, das Perpendikel P gefällt denken, so ergibt sich dessen Länge:

$$(24) \quad P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

wodurch die Bedeutung der linken Seite in (22) klargestellt ist. Die rechte Seite der Gleichung kann, abgesehen von C , folgendermaßen geschrieben werden, da ja der Zähler gleich ds^2 ist: $\frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}}$, wo mit α, β, γ die

Winkel bezeichnet sind, welche die Tangente eines Normalschnittes mit den Koordinatenachsen bildet. Zieht man nun parallel zu dieser Tangente einen Radiusvektor des Ellipsoides und bezeichnet seine Länge mit D , so sind die Koordinaten seines Endpunktes der Reihe nach $D \cos \alpha, D \cos \beta, D \cos \gamma$. Dieselben müssen der Flächengleichung Genüge leisten, was $D^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2} \right) = 1$ ergibt oder:

$$(25) \quad D^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}}$$

wodurch auch die rechte Seite in (23) geometrisch gedeutet ist. Die Gleichung selbst kann man also schreiben: $\frac{1}{P^2} = CD^2$ oder

$$(26) \quad PD = \frac{1}{\sqrt{C}} = \text{const.}$$

Hierin ist der folgende Satz von Joachimsthal enthalten: Längs einer kürzesten Linie auf dem Ellipsoide (1) ist das Produkt des vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels und des der Tangente der kürzesten Linie parallelen Semidiameters der Fläche konstant.

Es gilt dieser Satz, wie unmittelbar einzusehen ist, nicht nur für unsere spezielle Fläche (1), sondern für jedes Ellipsoid und überhaupt für jede Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung.

Wie weiter leicht ersichtlich ist, entspricht diesem Satze von den Flächen der Satz vom konstanten Inhalte des Parallelogrammes über je zwei konjugierten Durchmessern bei den Kegelschnitten mit einem Mittelpunkte.

*) Cfr. Joachimsthal, Crelle Journal, Bd. 26, pg. 158.

Aus der Beziehung $PD = \frac{1}{\sqrt{C}}$ geht deutlich hervor, daß die Integrationskonstante C durch die Richtung der kürzesten Linie in einem beliebigen Punkte bestimmt wird.

Der Joachimsthal'sche Satz läßt sich noch auf verschiedene andere Arten beweisen.

Graves beweist ihn,*) indem er auf die beiden bekannten Sätze über Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte zurückgeht: 1. daß die von einem Punkte aus an eine solche Fläche gezogenen Tangenten ihren Längen nach den ihnen parallelen Durchmessern der Fläche proportional sind, und 2. daß die von zwei Punkten einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung von dem einen auf die Tangentialebene des jedesmaligen anderen gefällten Perpendikel ihren Längen nach den von dem Mittelpunkte auf diese Tangentialebenen gefällten Perpendikeln proportional sind.

Zieht man nun von den zwei Punkten A und B der Fläche zu einem Punkte T der Durchschnittslinie der beiden Tangentialebenen in A und B die Geraden AT und BT , welche mit der Durchschnittslinie die Winkel i und i' einschließen mögen, so ist das Perpendikel von A auf die Tangentialebene in B gleich $AM = AT \sin i \sin \omega$, wo ω der Winkel zwischen den beiden Tangentialebenen ist, und andererseits ist das von B auf die Tangentialebene in A gefällte Perpendikel gleich $BN = BT \sin i' \sin \omega$. AM und BN sind nach dem obigen zweiten Satze den Perpendikeln P und P' proportional, welche man vom Mittelpunkte auf die beiden Tangentialebenen fällen kann. Andererseits sind, wenn $\sin i' = \sin i$ ist, wenn also die beiden Tangenten AT und BT mit derselben Seite der Durchschnittslinie der beiden Tangentialebenen gleiche oder supplementäre Winkel bilden, AT und BT den Größen AM und BN proportional und nach dem ersten obigen Satze auch den Radienvektoren D und D' , die zu ihnen parallel verlaufen. Supplementäre Winkel i und i' schließen aber, wie wir im I. Teile (§ 9, pg. 13) gesehen haben, aufeinanderfolgende Elemente einer kürzesten Linie mit der Durchschnittslinie der betreffenden Tangentialebenen ein. Daher ist längs einer kürzesten Linie $PD = P'D' = \text{const.}$

Hart beweist den Joachimsthal'schen Satz folgendermaßen.***) Legt man durch das Ellipsoid (oder überhaupt durch eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung) irgend einen ebenen Schnitt und zieht vom Mittelpunkte der Schnittfläche zu der Tangente in einem Punkte derselben die Normale p und außerdem den zu dieser Tangente parallelen Radiusvektor d des Schnittes, so ist nach dem bekannten und schon (pg. 8) erwähnten Satze über die Kegelschnitte mit einem Mittelpunkte längs des Schnittes $pd = \text{const.}$ Ist ferner i der Winkel zwischen der Schnittebene und der Tangentialebene der Fläche in dem betrachteten Punkte des Schnittes, so steht offenbar PD , wo P und D die bekannten Bedeutungen haben, zu $pd \sin i$ in einem konstanten Verhältnisse oder es ist PD mit $\sin i$ proportional veränderlich. Es ist also dort ein Maximum, wo die Schnittebene ein Normalschnitt der Fläche ist. Mithin ist $PD = \text{const.}$ für die kürzesten Linien, weil diese in jedem ihrer Punkte einen Normalschnitt der Fläche oskulieren.

Die im Joachimsthal'schen Theoreme ausgesprochene Eigenschaft, wie sie den kürzesten Linien zukommt, gilt aber auch, wie sich leicht zeigen läßt, in analoger Weise für die Krümmungslinien auf den Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, also auch auf unserem Ellipsoide (1). Es sei nur auf den Beweis von

*) Cfr. Graves, Crelle Journ., Bd. 42, pg. 279; Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 121.

**) Cfr. Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Anmerkung 54) zu Art. 124 (pg. 698).

Graves verwiesen, wo die Beziehung $PD = P'D'$ auch bei Gleichheit der Winkel i und i' besteht. Nun schließen aber bekanntlich aufeinanderfolgende Elemente einer Krümmungslinie mit denselben Seiten der Schnittlinie der bezüglichen Tangentialebenen der Fläche gleiche Winkel ein.*) Es bleibt also längs einer Krümmungslinie ebenfalls das Produkt des vom Mittelpunkte der Fläche auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels (p) und des der Tangente der Krümmungslinie parallelen Semidiameters der Fläche (d) konstant:

$$(27) \quad pd = \text{const.}$$

In elliptischen Koordinaten geschrieben haben die Größen P , p , D und d folgende Ausdrücke. Nach Gleichung (24) und (17) ist:

$$(28) \quad P^2 = \frac{1}{\sum \frac{x^2}{a^2}} = \frac{abc}{\lambda_2 \lambda_3}.$$

Dasselbe gilt für p , nur ist für die Krümmungslinien ($\lambda_1 = 0$), $\lambda_2 = \text{const.}$, λ_3 konstant zu nehmen und ebenso für die Krümmungslinien ($\lambda_1 = 0$), $\lambda_3 = \text{const.}$, λ_2 als konstant zu betrachten. Ferner ist nach (25), (15) und (16):

$$D^2 = \frac{\sum dx^2}{\sum \frac{dx^2}{a}} = \frac{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} d\lambda_3^2}{\frac{1}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_3} d\lambda_3^2},$$

also für die kürzesten Linien nach Gleichung (18) und (19):

$$(29) \quad D^2 = -\frac{\lambda_2 \lambda_3}{z}$$

und für die Krümmungslinien $\lambda_2 = \text{const.}$:

$$(30a) \quad d_2^2 = -\lambda_3$$

und für die Krümmungslinien $\lambda_3 = \text{const.}$:

$$(30b) \quad d_3^2 = -\lambda_2.$$

Aus dem Joachimsthal'schen Satze ergibt sich eine große Reihe weiterer Sätze über kürzeste Linien, von welchen im Folgenden eine Anzahl angeführt sei.

5.

Wenn eine kürzeste Linie eine Krümmungslinie berührt, so ist für den Berührungspunkt $P = p$ und $D = d$ und also $PD = pd = \text{const.}$, woraus folgt, daß für alle kürzesten Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren, das Produkt PD denselben konstanten Wert besitzt.**)

Das Produkt hat aber auch stets denselben konstanten Wert für alle kürzesten Linien, welche durch einen Kreispunkt der Fläche gehen. Denn in einem solchen Punkte, dessen Koordinaten mit Bezug auf die Gleichung (1) die

Größen haben: $x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, $y = 0$, $z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$, hat das Perpen-

dikel P den Wert $\frac{ac}{b}$ und der Radiusvektor D den konstanten Wert b , weil der zu der Tangentialebene im Kreispunkte parallele Zentralschnitt der Fläche ein Kreis mit dem Radius b ist. Es ist also $PD = ac$.

*) Cfr. Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 121.

**) Cfr. zu den folgenden Sätzen insbesondere: Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raum. II. Teil, Art. 125 ff.; Böklen, analyt. Geom. d. Raum. § 24.

Die Analogie dieses Satzes und des zuvor für die Berührung derselben Krümmungslinie bewiesenen entspricht der engen Beziehung zwischen Krümmungslinien und Kreispunkten auf Flächen zweiter Ordnung, indem ein System von Krümmungslinien auf solchen Flächen seinen Eigenschaften nach einem Systeme konfokaler Kegelschnitte in der Ebene analog ist, wobei die Kreispunkte den Brennpunkten entsprechen. Man kann auch die Kreispunkte als Grenzfall der Krümmungslinien auffassen.

Da also für kürzeste Linien, die durch einen Kreispunkt gehen, $PD = \frac{1}{\sqrt{C}} = ac$ ist, so hat in diesem Falle auf Grund der Festsetzung (19) die Konstante z in den Gleichungen (20), (21), (22) den Wert $z = -b = -b^2$ und die Integrale in (22) werden dann elliptische.

Aus der Umkehrung der beiden erwähnten Sätze, daß also alle kürzesten Linien, für welche das Produkt PD denselben konstanten Wert hat, dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch einen Kreispunkt gehen, folgt sofort, daß die beiden kürzesten Linien auf der Fläche (1), welche demselben Werte der Konstanten C der ersten Integration entsprechen und deren Gleichungen (21) und (22) sind, dieselbe Krümmungslinie berühren, bezw. durch je einen Kreispunkt des Ellipsoides (1) gehen, falls C den Wert $\frac{1}{ac}$ besitzt.

Man kann dies auch leicht anders zeigen.*) Von den beiden kürzesten Linien, die durch die Gleichungen (22) gegeben sind, wo die willkürliche Konstante C der ersten Integration und mithin auch z einen bestimmten Wert besitzt, und welche von einem durch die Konstanten c_1 und c_2 bestimmten Punkte M des Ellipsoides ausgehen, soll die erste die Krümmungslinie mit der Gleichung

$$(31) \quad \lambda_2 = z$$

in dem Punkte A , die zweite im Punkte B treffen. Der Punkt A hat die elliptischen Koordinaten $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = z, \lambda_3$, wo sich λ_3 aus der ersten Gleichung (22) dadurch bestimmt, daß man, wenn die Integration durchgeführt ist, λ_2 den Wert z annehmen läßt. Ein dem A unendlich benachbarter Punkt auf der kürzesten Linie hat also die Koordinaten $\lambda_1 = 0, z + d\lambda_2, \lambda_3 + d\lambda_3$, wo $d\lambda_2$ und $d\lambda_3$ durch die erste Gleichung (21) miteinander verbunden sind. Aus dieser Gleichung erhält man für $\lambda_2 = z$ den entsprechenden Wert von $d\lambda_2 = 0$ für die kürzeste Linie und aus (31) $d\lambda_2 = 0$ für die Krümmungslinie. Im Punkte A berührt mithin die erste kürzeste Linie die Krümmungskurve (31). Ebenso berührt im Punkte B die zweite kürzeste Linie die nämliche Krümmungslinie (31), womit der Satz bewiesen ist.

In dem Schnittpunkte M der beiden kürzesten Linien, die demselben Werte der Konstanten C der ersten Integration entsprechen, ist nach dem Früheren $PD = P'D'$ oder wegen $P = P'$ auch $D = D'$. Diese beiden gleichen Radienvektoren des zur Tangentialebene in M parallelen Zentralschnittes, welche den Tangenten der beiden kürzesten Linien parallel verlaufen, bilden mithin auch mit den beiden Hauptachsen des Schnittes gleiche Winkel. Diese Hauptachsen sind aber bekanntlich bei den Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung den Richtungen der in M sich schneidenden Krümmungslinien parallel. Das gibt uns den Satz: Die in einem gegebenen Punkte des Ellipsoides sich schneidenden Krümmungslinien desselben halbieren in diesem Punkte die Winkel zwischen den beiden durch den Punkt gehenden kürzesten Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren, bezw. durch je einen Kreispunkt gehen.**)

*) Cfr Hesse, Vorlesungen üb. analyt. Geom. d. Raum. pg. 331f.

**) Hesse beweist diesen Satz in der Weise (cfr. Vorlesungen üb. analyt. Geom. d. Raum. pg. 329 f), daß er die Kegelgleichung, als welche die Gleichung (11) anzusehen ist, wenn man

Aus dem zweiten (auf die Kreispunkte Bezug nehmenden) Teile dieses Satzes, der von Michael Roberts herrührt, folgt sofort, daß die Krümmungskurven des Ellipsoides der geometrische Ort für einen Punkt sind, dessen Entfernungen von zwei Kreispunkten, durch kürzeste Linien gemessen, eine konstante Summe oder eine konstante Differenz haben, je nachdem nämlich die beiden Kreispunkte auf derselben Seite der Krümmungslinie liegen oder auf entgegengesetzten. Denn da die beiden kürzesten Entfernungen mit der Krümmungslinie eben gleiche Winkel einschließen, so haben wir den im I. Teile (§ 12, pg. 18) behandelten Fall vor uns, wo die von den Punkten einer Kurve nach zwei festen Punkten gezogenen kürzesten Linien mit den Tangenten dieser Kurve stets gleiche Winkel einschließen.

Aus dem obigen Satze folgt auch, daß, wenn man von einem beliebigen Punkte der Fläche nach den beiden entgegengesetzten Kreispunkten, die in demselben Durchmesser liegen, kürzeste Linien zieht, die eine die Fortsetzung der anderen ist. Denn die Winkel, welche diese Kürzesten mit jeder durch den Punkt gehenden Krümmungslinie bilden, sind gleich groß.

Ganz analog dem obigen Satze, aus dem diese letzten beiden Folgerungen gezogen wurden, läßt sich auch beweisen, daß eine Krümmungslinie von zwei Kürzesten, welche dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch je einen Kreispunkt gehen, unter gleichen Winkeln in zwei Punkten geschnitten wird, die zu einer der Hauptebenen der Fläche symmetrisch liegen.

Mit Hilfe des Joachimsthalschen Satzes kann man sich leicht eine Vorstellung über den Verlauf der kürzesten Linien auf unserer Fläche (und überhaupt auf jeder Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung) machen. Jede Krümmungslinie teilt bekanntlich mit der ihr symmetrischen die Fläche in drei Zonen und es zeigt sich sofort, daß eine Kürzeste, welche eine Krümmungslinie, etwa

$$\lambda_2 = \text{const.}, \text{ berührt, so daß also nach (28) und (30 a): } PD = pd_2 = \sqrt{\frac{abc}{-\lambda_2}}$$

ist, nur in der mittleren Zone verlaufen und nicht in die beiden anderen übergehen kann, daß also eine Kürzeste sich immer zwischen zwei symmetrischen Krümmungslinien bewegt und sich nach der Berührung der einen wieder gegen die andere wendet.

Analog ergibt sich der besondere Fall, daß alle kürzesten Linien, die von einem Kreispunkte ausgehen, sich im entgegengesetzten Kreispunkte wieder vereinigen, ohne daß sie eine Krümmungslinie berühren können. (Selbstverständlich sind diese Linien alle von gleicher Länge.)

Aus den Beziehungen (26): $PD = \text{const.}$ und (27): $pd = \text{const.}$ folgt ferner, daß, wenn mehrere kürzeste Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch einen Kreispunkt gehen, eine weitere Krümmungslinie treffen, für die Schnittpunkte die Relationen gelten: $PD = P'D' = P''D'' = \dots$, $pd = p'd' = p''d'' = \dots$, wo $P, P', P'' \dots, D, D', D'' \dots, p, p', p'' \dots, d, d', d'' \dots$ die analogen Bedeutungen haben wie früher. Da aber $P = p, P' = p', P'' = p'' \dots$ ist, so ergibt sich $D : D' : D'' : \dots = d : d' : d'' : \dots$. Es stehen also die Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten der kürzesten Linien und den Tangenten der Krümmungslinie in den Schnittpunkten parallel gezogen sind, in Proportion.

Ebenso ergibt sich für die entsprechenden Radienvektoren der Fläche die Proportionalität, wenn eine kürzeste Linie eine Krümmungslinie in mehreren Punkten schneidet.

dx, dy, dz als variable rechtwinklige Koordinaten betrachtet, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem transformiert, von welchem zwei Achsen im Punkte M Tangenten der durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien des Ellipsoides sind. Aus der Form der transformierten Gleichung ergibt sich sofort der Satz.

Wir nehmen auf unserer Fläche ein beliebiges von kürzesten Linien gebildetes Polygon und bezeichnen die vom Zentrum auf die Tangentialebenen in den Eckpunkten gefällten Perpendikel der Reihe nach mit $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, andererseits die Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten der kürzesten Linien in den n Eckpunkten parallel sind, mit $D_1, D_1'; D_2, D_2'; D_3, D_3'; \dots, D_n, D_n'$. Es gelten dann die Gleichungen: $P_1 D_1 = P_2 D_2', P_2 D_2 = P_3 D_3', \dots, P_n D_n = P_1 D_1'$, woraus folgt: $D_1 D_2 \dots D_n = D_1' D_2' \dots D_n'$. Es bilden also die betrachteten Radienvektoren der Fläche zwei Gruppen; das Produkt der n Radienvektoren der einen Gruppe ist gleich dem Produkte der anderen n Radienvektoren.

Und analog ergeben sich noch weitere ähnliche Sätze.

6.

Bevor wir zu einer anderen Gruppe von Sätzen über die kürzesten Linien auf dem Ellipsoide übergehen, wollen wir den Ausdruck für den Krümmungsradius einer solchen Linie aufstellen.*)

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungsradius einer Raumkurve ist:

$$(32) \quad \rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}$$

Um ihn für die Kürzesten auf unserem Ellipsoide (1) zu erhalten, gehen wir auf die Ausdrücke $\mu dx, \mu dy, \mu dz$ zurück, wie wir sie im I. Teile (§ 5, pg. 7) gefunden haben.

In unserem Falle ergibt sich auf Grund der Gleichungen (8) der erste dieser Ausdrücke als

$$\mu dx = 4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) d^2x + 4 \cdot \frac{x}{a^2} \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} \right).$$

Analog lauten die Werte von μdy und μdz . Indem wir nun nach (24) das Perpendikel P einführen: $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{P^2}$ und nach (25) den Radiusvektor D : $\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = \frac{ds^2}{D^2}$, ergibt sich:

$$\mu dx = 4 \frac{x}{a^2} \frac{ds^2}{D^2} = 4 \frac{d^2x}{P^2},$$

$$\mu dy = 4 \frac{y}{b^2} \frac{ds^2}{D^2} = 4 \frac{d^2y}{P^2},$$

$$\mu dz = 4 \frac{z}{c^2} \frac{ds^2}{D^2} = 4 \frac{d^2z}{P^2}.$$

Wenn wir nun quadrieren und addieren, so erhalten wir:

$$16 \frac{1}{P^4} [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] = \mu^2 ds^2 + 16 \frac{1}{P^2} \frac{ds^4}{D^2},$$

da ja nach Gleichung (1) $\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} = 0$ ist. Für μ gilt nach Gleichung (16) des I. Teiles für uns der Wert

$$\mu = 4 \frac{1}{P^2} \frac{d^2s}{ds},$$

*) Cfr. Joachimsthal, Crelle Journ., Bd. 26, pg. 157 ff.

so daß also

$$(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2 = \frac{P^2}{D^4} ds^4$$

wird. Der Krümmungshalbmesser hat mithin nach (32) den Ausdruck:

$$(33) \quad \rho = \frac{D^2}{P},$$

oder, wenn wir noch die Beziehung (26) in Betracht ziehen:

$$(34) \quad \rho = \frac{1}{P^3 C}$$

oder

$$(35) \quad \rho = D^3 \sqrt{C}.$$

In elliptischen Koordinaten geschrieben ist nach (28) oder (29):

$$(36) \quad \rho = \frac{1}{C} \left(\frac{\lambda_2 \lambda_3}{a b c} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Längs einer kürzesten Linie verhalten sich also die Krümmungshalbmesser der Linie umgekehrt wie die dritten Potenzen der vom Mittelpunkte der Fläche auf die Tangentialebenen der betreffenden Kurvenpunkte gefällten Perpendikel oder direkt wie die dritten Potenzen der den Tangenten in den betreffenden Punkten der Linie parallelen Radienvektoren der Fläche.

Da die Konstante C denselben Wert hat für alle jene kürzesten Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch einen Kreispunkt gehen, so folgt aus der Beziehung (34) der Satz, daß die Krümmungshalbmesser aller dieselbe Krümmungslinie berührenden oder durch einen Kreispunkt gehenden kürzesten Linien dort, wo sie eine Poloide treffen oder eine Linie, für welche die vom Mittelpunkte auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel einen konstanten Wert haben, einander gleich sind.*)

Dasselbe gilt natürlich auch für die Krümmungsradien der eben erwähnten kürzesten Linien in den Punkten, wo sich diese Linien gegenseitig schneiden, da ja daselbst die P einander gleich werden. Es ist ja auch sofort klar, daß, wenn man durch einen Punkt auf der Fläche zwei Tangenten zieht, welche mit den Tangenten der durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien gleiche Winkel bilden, wie es bei den Tangenten der in Betracht kommenden kürzesten Linien der Fall ist, dann die beiden durch jene Tangenten gehenden Normal-schnitte der Fläche gleiche Krümmungsradien haben.

Legen wir parallel zur Tangentialebene der Fläche in einem Punkte M einer kürzesten Linie einen Zentralschnitt des Ellipsoides, so sind, wie schon einmal (pg. 11) bemerkt wurde, die Radienvektoren des Ellipsoides, welche den Tangenten der in M sich schneidenden Krümmungslinien parallel verlaufen, die Hauptachsen der Schnittellipse; das sind nach (30 a) und (30 b): $d_2 = \sqrt{-\lambda_3}$, $d_3 = \sqrt{-\lambda_2}$. Aus diesen Werten ergibt sich mit Zuhilfenahme der Formel (36) die Beziehung: $\frac{d_2^3 d_3^3}{\rho} = C (a b c)^{\frac{3}{2}}$ oder $\frac{d_2^3 d_3^3 \pi^3}{\rho} = C (a b c)^{\frac{3}{2}} \pi^3$. $d_2 d_3 \pi$ ist aber der

Flächeninhalt des erwähnten Zentralschnittes, so daß wir also den Satz haben: Längs aller kürzesten Linien auf unserem Ellipsoide, welche demselben Werte der Konstanten C der ersten Integration entsprechen, welche also dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch einen Kreispunkt gehen, ist das Verhältnis der dritten Potenz des Flächeninhaltes der Ellipse, welche durch den Mittelpunkt der Fläche

*) Cfr. zu diesen Sätzen insb. Böklen, analyt. Geom. d. Raum. § 24.

parallel zur Tangentialebene in einem Kurvenpunkte gelegt ist, zum Krümmungsradius der kürzesten Linie in dem betreffenden Punkte konstant.

Schneiden kürzeste Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch je einen Kreispunkt gehen, eine weitere Krümmungslinie, so hat man, wenn man die Bezeichnungen P, D, d, ρ in ihrer früheren Bedeutung beibehält und außerdem noch mit $R, R', R'' \dots$ die Krümmungshalbmesser bezeichnet, welche den Normalschnitten der Fläche entsprechen, die durch die Tangenten der weiteren Krümmungslinie in den Schnittpunkten mit den genannten Kürzesten gelegt sind, die Beziehungen: $\rho = \frac{D^2}{P}, \rho' = \frac{D'^2}{P'}, \dots; R = \frac{d^2}{P}, R' = \frac{d'^2}{P'}, \dots$, da

ja für Krümmungslinien die zu (33) analoge Relation besteht. Also ist $\frac{D^2}{\rho} = \frac{d^2}{R}$,

$\frac{D'^2}{\rho'} = \frac{d'^2}{R'}, \dots$. Da aber, wie wir bereits wissen, die Proportion $D:D':D'':\dots = d:d':d'':\dots$ besteht, so ergibt sich nun auch: $\rho:\rho':\rho'':\dots = R:R':R'':\dots$, d. h. es stehen die Krümmungshalbmesser der den Tangenten der kürzesten Linien und der Krümmungslinie in den Durchschnittspunkten entsprechenden Normalschnitte der Fläche in Proportion.

Ebenso ergibt sich für die entsprechenden Krümmungsradien die Proportionalität, wenn eine kürzeste Linie eine Krümmungslinie in mehreren Punkten schneidet.

Wir betrachten wieder, wie früher, ein auf unserer Fläche von kürzesten Linien gebildetes n -Eck und bezeichnen die Krümmungsradien der in den einzelnen Ecken zusammenstoßenden kürzesten Linien der Reihe nach mit $\rho_1, \rho_1', \rho_2, \rho_2', \dots, \rho_n, \rho_n'$, ferner die vom Zentrum auf die Tangentialebenen in den Eckpunkten gefällten Perpendikel mit P_1, P_2, \dots, P_n . Dann bestehen nach (34) die Gleichungen: $\rho_1 P_1^3 = \rho_2' P_2^3, \rho_2 P_2^3 = \rho_3' P_3^3, \dots, \rho_n P_n^3 = \rho_1' P_1^3$, woraus folgt: $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = \rho_1' \rho_2' \dots \rho_n'$. Es ist also das Produkt der n Krümmungsradien der einen Gruppe dem Produkte der n Krümmungsradien der anderen Gruppe gleich.*)

7.

Die Gleichung (26): $PD = \frac{1}{\sqrt{C}} = \text{const.}$ läßt sich auch in einer anderen vorteilhaften Form schreiben, wie sie zuerst von Liouville angegeben wurde.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir den Winkel, welchen eine kürzeste Linie auf unserem Ellipsoide (1) in einem beliebigen Punkte mit einer der beiden durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien bildet, etwa mit der, deren Gleichung $\lambda_2 = \text{const.}$ ist, mit i . Legen wir parallel zur Tangentialebene des Ellipsoides in dem betrachteten Punkte einen Zentralschnitt durch die Fläche, so ist i auch der Winkel, welchen der zur Tangente der kürzesten Linie parallele Radiusvektor D mit derjenigen Hauptachse der Schnittellipse einschließt, welche der Tangente der Krümmungslinie $\lambda_2 = \text{const.}$ entspricht, also mit $d_2 = \sqrt{-\lambda_3}$. Es gilt also, da die andere Hauptachse der Ellipse nach (30 b): $d_3 = \sqrt{-\lambda_2}$ ist, für den Radiusvektor D die Gleichung: $\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{-\lambda_3} + \frac{\sin^2 i}{-\lambda_2}$. Andererseits

ist nach (28): $\frac{1}{P^2} = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{a b c}$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{P^2 D^2} = C = -\frac{1}{a b c} (\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i)$$

*) Joachimsthal hat diesen Satz in der Einschränkung auf ein von kürzesten Linien gebildetes Dreieck angegeben in Crelle Journal, Bd. 26, pg. 167 f.

oder mit Rücksicht auf (19):

$$(37) \quad \lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = z.$$

Es ergibt sich hieraus sofort wieder die Gleichung (31) derjenigen Krümmungslinie, welche von der Kürzesten berührt wird, nämlich $\lambda_2 = z$, da ja im Berührungspunkte $i = 0$ ist.

Geht die Kürzeste durch einen Kreispunkt der Fläche, so hat die Konstante z den Wert $-b$ und es ist also

$$\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = -b.$$

Aus der Gleichungsform (37) läßt sich wieder eine ganze Reihe von Eigenschaften der Kürzesten ableiten, von denen im Folgenden einige angeführt werden mögen.*)

So ergibt sich leicht der schon früher behandelte Satz, daß die beiden in einem gegebenen Punkte der Fläche sich schneidenden Krümmungslinien stets die Winkel halbieren, welche von den beiden durch diesen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden, die demselben Werte der Konstanten C der ersten Integration entsprechen. Denn für diese Kürzesten haben wir: $\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = z$ und $\lambda_2 \cos^2 i' + \lambda_3 \sin^2 i' = z$, also $i = i'$.

Für den Winkel i ergibt sich aus (37):

$$(38) \quad \sin i = \sqrt{\frac{z - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}}, \quad \cos i = \sqrt{\frac{\lambda_3 - z}{\lambda_3 - \lambda_2}}, \quad \operatorname{tg} i = \sqrt{\frac{z - \lambda_2}{\lambda_3 - z}}.$$

Betrachten wir nun zwei kürzeste Linien, welche sich auf der Krümmungslinie $\lambda_2 = \text{const.}$ schneiden und von denen die eine die Krümmungslinie $c = \text{const.}$ und die andere die Krümmungslinie $c' = \text{const.}$ berühren mag, dann ist, wenn i und i' die betreffenden Winkel am Schnittpunkte sind:

$$\sin i = \sqrt{\frac{c - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}}, \quad \sin i' = \sqrt{\frac{c' - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}}.$$

Also ist $\frac{\sin i}{\sin i'} = \text{const.}$, d. h. wenn sich der Schnittpunkt zweier kürzesten Linien, die bestimmte Krümmungslinien berühren, auf einer weiteren Krümmungslinie bewegt, so ist das Verhältnis der Sinus der Winkel, welche die Kürzesten mit der letzteren Krümmungslinie bilden, konstant. (Liouville.)

Es ist dieser Satz eine Verallgemeinerung des früheren, nach welchem zwei kürzeste Linien, die dieselbe Krümmungslinie berühren, eine zweite Krümmungslinie unter gleichen Winkeln schneiden. Denn wenn wir $c = c'$ nehmen, folgt $\sin i = \sin i'$.

Wenn sich die beiden kürzesten Linien, welche die Krümmungslinien $c = \text{const.}$ und $c' = \text{const.}$ berühren, rechtwinklig schneiden, so ist $\sin i = \cos i'$

$$\text{oder } \sqrt{\frac{c - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_3 - c'}{\lambda_3 - \lambda_2}} \quad \text{oder } \lambda_2 + \lambda_3 = c + c' = \text{const.}$$

Nun ist aber, wie man aus der Gleichung (2) unmittelbar für unser Ellipsoid (1) ableiten kann: $\lambda_2 + \lambda_3 = x^2 + y^2 + z^2 - (a + b + c)$. Mithin ist $(x^2 + y^2 + z^2)$ oder die Entfernung des Durchschnittspunktes vom Mittelpunkte des Ellipsoides konstant. Es ist also der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweier kürzesten Linien, die je eine Krümmungslinie berühren und sich rechtwinklig schneiden, die Durchschnittskurve des Ellipsoides mit einer konzentrischen Kugel oder ein sphärischer Kegelschnitt.

*) Vergleiche zur Ableitung der Liouvilleschen Gleichung und zu den folgenden Sätzen insbes. Salmon-Fiedler, *analyt. Geom. d. Raum.*, II. Teil, Art. 127 ff; Böklen, *analyt. Geom. d. Raum.*, § 24.

Dieser Satz von Michael Roberts bleibt auch richtig, wenn die beiden Kürzesten dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch je einen Kreispunkt gehen oder aber die eine Kürzeste eine Krümmungslinie tangiert und die andere durch einen Kreispunkt geht.

Welches ist der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen kürzesten Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren oder durch einen Kreispunkt gehen und einander unter einem gegebenen Winkel φ schneiden? Da die beiden Kürzesten mit den durch ihren Schnittpunkt gehenden Krümmungslinien gleiche Winkel einschließen, so ist der Winkel φ das Doppelte des Winkels, den wir mit i bezeichnen, und es ist also nach (38), wenn wir für die berührte

Krümmungslinie den konstanten Wert α nehmen: $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\alpha - \lambda_2}{\lambda_3 - \alpha}}$. Daraus folgt: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sqrt{\alpha - \lambda_2} \sqrt{\lambda_3 - \alpha}}{\lambda_2 + \lambda_3 - 2\alpha}$ oder

$$(\lambda_2 + \lambda_3 - 2\alpha) \operatorname{tg}^2 \varphi = 4\alpha(\lambda_2 + \lambda_3) - 4\lambda_2\lambda_3 - 4\alpha^2.$$

Wird diese Gleichung in die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z transformiert, so ergibt sich, daß der gesuchte Ort der Durchschnitt des Ellipsoides mit einer Fläche vierter Ordnung ist.

Wir nehmen auf unserer Fläche ein von kürzesten Linien gebildetes n Eck, welches einer Krümmungslinie ($\lambda_2 = \text{const.}$) eingeschrieben ist. Die Winkel, welche je zwei in einer Ecke zusammenstoßende Seiten mit dieser Krümmungslinie bilden, seien der Reihe nach $i_1, i_1'; i_2, i_2'; \dots i_n, i_n'$; die einzelnen kürzesten Linien mögen weiter der Reihe nach die Krümmungslinien $c_1 = \text{const.}, c_2 = \text{const.}, \dots c_n = \text{const.}$ berühren; ferner seien der Reihe nach $\lambda_3^{(1)} = \text{const.}, \lambda_3^{(2)} = \text{const.}, \dots \lambda_3^{(n)} = \text{const.}$ diejenigen Krümmungslinien, welche die gegebene ($\lambda_2 = \text{const.}$) in den einzelnen Eckpunkten (rechtwinklig) schneiden. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$\sin i_1 = \sqrt{\frac{c_1 - \lambda_2}{\lambda_3^{(1)} - \lambda_2}}, \quad \sin i_2 = \sqrt{\frac{c_2 - \lambda_2}{\lambda_3^{(2)} - \lambda_2}}, \quad \dots \quad \sin i_n = \sqrt{\frac{c_n - \lambda_2}{\lambda_3^{(n)} - \lambda_2}},$$

$$\sin i_1' = \sqrt{\frac{c_n - \lambda_2}{\lambda_3^{(1)} - \lambda_2}}, \quad \sin i_2' = \sqrt{\frac{c_1 - \lambda_2}{\lambda_3^{(2)} - \lambda_2}}, \quad \dots \quad \sin i_n' = \sqrt{\frac{c_{n-1} - \lambda_2}{\lambda_3^{(n)} - \lambda_2}},$$

woraus folgt:

$$\sin i_1 \cdot \sin i_2 \cdot \dots \sin i_n = \sin i_1' \cdot \sin i_2' \cdot \dots \sin i_n',$$

d. h. wenn man einer Krümmungslinie ein von kürzesten Linien gebildetes Polygon einschreibt, so teilen sich die Winkel, welche die Seiten des Vieleckes mit der Krümmungslinie bilden, in zwei Gruppen. Das Produkt der Sinus der Winkel der einen Gruppe ist gleich dem Produkte der Sinus der Winkel der anderen Gruppe.

Berühren die Seiten des eingeschriebenen Vieleckes alle dieselbe Krümmungslinie, ist also $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$, so sind die Winkel, welche je zwei anstoßende Seiten mit der umgeschriebenen Krümmungslinie $\lambda_2 = \text{const.}$ bilden, einander gleich, also $i_1 = i_1', i_2 = i_2', \dots i_n = i_n'$. Es bestehen dann nur n Gleichungen mit den zwei Konstanten λ_2 und c für die $2n$ Variablen (nämlich die n Winkel i und die n Größen λ_3), d. h. den Gleichungen kann auf unendlich viele Art Genüge geleistet werden. Einer Krümmungslinie können also unendlich viele von kürzesten Linien gebildete Vielecke von bestimmter Seitenzahl so eingeschrieben werden, daß ihre Seiten alle dieselbe weitere Krümmungslinie berühren.

Um eine weitere Eigenschaft der kürzesten Linien auf unserem Ellipsoide zu erörtern,*) gehen wir auf einen Satz aus der Theorie der konfokalen Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung zurück, welcher lautet:**) Es gibt immer zwei konfokale Flächen, welche eine gegebene gerade Linie berühren; wenn die primären Achsen der drei durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden gehenden konfokalen Flächen mit l, m, n und ferner die Winkel, welche die Gerade mit den in dem betrachteten Punkte errichteten Normalen der drei Flächen einschließt, mit α, β, γ bezeichnet werden, so ist die große Achse p der berührten konfokalen Fläche durch die quadratische Gleichung:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{l^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \beta}{m^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{n^2 - p^2} = 0$$

bestimmt.

Bei der Anwendung dieses Satzes nehmen wir nun an, die gegebene Gerade sei eine Tangente unseres Ellipsoides (1). Weil dann die Gerade zur Normale des Ellipsoides senkrecht ist, wird $\cos \alpha = 0$; die Normalen der beiden anderen durch den Berührungspunkt der Tangente gehenden konfokalen Flächen liegen in der Tangentialebene des Ellipsoides und es ist $\cos \beta = \sin \gamma$ (wegen der Orthogonalität der drei konfokalen Flächen). Der Winkel γ ist derselbe, den wir zuvor immer mit i bezeichnet haben, denn die Normale des zugehörigen zweischaligen Hyperboloides ist zugleich die Tangente der Schnittkurve des betreffenden einschaligen Hyperboloides mit dem Ellipsoide, also der Krümmungslinie $\lambda_2 = \text{const.}$ unseres Ellipsoides. Die primären Achsen l, m, n sind jetzt $\sqrt{a}, \sqrt{a + \lambda_2}, \sqrt{a + \lambda_3}$; die primäre Achse p der zweiten von unserer Ellipsoidtangente berührten konfokalen Fläche, die wir jetzt etwa mit $\sqrt{a + \Lambda}$ bezeichnen wollen, ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{\sin^2 i}{(a + \lambda_2) - (a + \Lambda)} + \frac{\cos^2 i}{(a + \lambda_3) - (a + \Lambda)} = 0$$
 oder $\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = \Lambda$. Wenn wir nun nach dem Früheren die Gleichung einer kürzesten Linie auf dem Ellipsoide in der Form $\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = \Lambda$ schreiben, so ist zu ersehen, daß der Satz gilt: Alle Tangenten längs derselben kürzesten Linie berühren eine konfokale Fläche mit der primären Achse $\sqrt{a + \Lambda}$.

Man kann den Satz auch so aussprechen: Alle Oskulationsebenen einer kürzesten Linie des Ellipsoides sind Tangentialebenen der genannten konfokalen Fläche, da sie ja die Ebenen zweier aufeinanderfolgenden Tangenten dieser Fläche sind.

Die kürzeste Linie selbst berührt die Krümmungslinie, welche den Durchschnitt des Ellipsoides mit der genannten Konfokalen darstellt, was daraus hervorgeht, daß die Tangente der kürzesten Linie in dem Schnittpunkte mit der konfokalen Fläche nach dem eben Gezeigten diese Fläche selbst in diesem Punkte berühren muß. Die kürzeste Linie und die betreffende Krümmungslinie haben also eine gemeinschaftliche Tangente. (Es geht diese Berührung aber auch schon mit Rücksicht auf das Frühere aus der Gleichung $\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = \Lambda$ hervor.)

Im Anschlusse daran kann man sofort den Satz aussprechen, daß alle Tangenten aller jener kürzesten Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren, diejenige konfokale Fläche tangieren, welche in dieser Krümmungslinie das Ellipsoid schneidet.

*) Cfr. (auch zum Folgenden) Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raum., II Teil, Art. 13 ff; Böklen, analyt. Geom. d. Raum., § 25.

**) Cfr. Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raum., I. Teil, Art. 176.

Die Gleichung einer durch einen Kreispunkt unseres Ellipsoides gehenden kürzesten Linie lautet, wie früher (pg. 16) gezeigt wurde: $\lambda_2 \cos^2 i + \lambda_3 \sin^2 i = -b$. Die konfokale Fläche, welche von allen Tangenten dieser Linie berührt wird, hat also zur primären Achse $\sqrt{a-b}$. Wir haben also hier jenen Fokalkegelschnitt vor uns, der durch die Kreispunkte geht. Alle Tangenten einer kürzesten Linie, die durch einen Kreispunkt gehen, durchschneiden mithin den Fokalkegelschnitt, welcher die Kreispunkte enthält.*)

Daß alle Tangenten längs derselben kürzesten Linie eine konfokale Fläche berühren, läßt sich auch leicht mit Benützung jenes bekannten Satzes zeigen, nach welchem die Tangentialebenen, die man durch eine gerade Linie, die zwei konfokale Flächen berührt, an diese beiden Flächen legt, zu einander normal stehen. Legen wir nämlich durch eine Tangente einer kürzesten Linie unserer Fläche eine Ebene normal zur Fläche, so ist diese Ebene nach dem obigen Satze Tangentialebene der zweiten konfokalen Fläche, die von unserer Tangente berührt wird; ferner ist sie aber auch die Schmiegungeebene der kürzesten Linie und enthält als solche zwei aufeinanderfolgende Tangenten derselben. Infolgedessen berührt auch die der betrachteten Tangente folgende Tangente dieselbe weitere konfokale Fläche. Dasselbe läßt sich von allen weiteren Tangenten aussagen, wodurch der Satz bewiesen ist.

Betrachten wir die abwickelbare Fläche, welche der gegebenen Fläche längs einer kürzesten Linie umgeschrieben werden kann, und ihre Rückkehrkante. Die Rückkehrkante ist der Ort der Durchschnittspunkte dreier aufeinanderfolgenden Tangentialebenen der gegebenen Fläche; die drei Berührungspunkte bestimmen eine Schmiegungeebene der kürzesten Linie. Jeder Punkt der Rückkehrkante ist aber der Pol dieser entsprechenden Schmiegungeebene in Bezug auf die gegebene Fläche. Da nun die Schmiegungeebene, wie wir früher gesehen haben, auch Tangentialebene einer zweiten konfokalen Fläche zweiter Ordnung ist, so muß ihr Pol nach dem Satze, daß der Pol der Tangentialebene einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine andere Fläche zweiter Ordnung in einer dritten festen Fläche von der zweiten Ordnung liegt, also in einer weiteren Fläche zweiter Ordnung liegen, d. h. es muß die betrachtete Rückkehrkante in einer anderen Fläche zweiter Ordnung liegen. Da weiter die von der Schmiegungeebene berührte konfokale Fläche dieselbe bleibt für alle kürzesten Linien, welche dieselbe Krümmungslinie tangieren, so wird für solche Kürzeste auch die neue Fläche dieselbe bleiben.

Es sei hiemit die Reihe der angeführten Eigenschaften der kürzesten Linien auf dem gegebenen Ellipsoide abgeschlossen und es mögen im Folgenden nur noch einige Betrachtungen über die geraden Linien auf dem Ellipsoide als einer speziellen Art von kürzesten Linien, sowie über die Rektifikation der Kürzesten auf unserem Ellipsoide angestellt werden.

9.

Wir gehen auf die Differentialgleichung (11) zurück und betrachten den speziellen Fall, wo die willkürliche Konstante C der ersten Integration den Wert Null besitzt.**). Es reduziert sich dann die Gleichung (11) oder:

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

*) Diese Sätze rühren von Chasles her.

***) Cir. Hesse, Vorlesungen üb. analyt. Geom. d. Raum., 23. Vorlesung.

auf:

$$(39) \quad \frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = 0.$$

Es ist dies offenbar die Differentialgleichung einer speziellen Art der kürzesten Linien und zwar, wie sich sofort zeigen läßt, der geraden Linien auf unserem Ellipsoide.

Eine gerade Linie im Raume ist allgemein durch die drei Gleichungen gegeben:

$$x = \xi + \alpha r, \quad y = \eta + \beta r, \quad z = \zeta + \gamma r,$$

wo bekanntlich die Konstanten ξ, η, ζ die rechtwinkligen Koordinaten eines gegebenen Punktes auf der Geraden sind, α, β, γ die Richtungskosinus der Geraden bedeuten und die Variable r die Entfernung des variablen Punktes (x, y, z) von dem gegebenen Punkte (ξ, η, ζ) bezeichnet.

Stellen wir nun die Bedingung, die Gerade liege auf unserem Ellipsoide, so müssen x, y, z unabhängig von dem Werte von r der Flächengleichung (1) Genüge leisten. Es muß also

$$\frac{(\xi + \alpha r)^2}{a^2} + \frac{(\eta + \beta r)^2}{b^2} + \frac{(\zeta + \gamma r)^2}{c^2} = 1$$

sein oder:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{\xi\alpha}{a^2} + \frac{\eta\beta}{b^2} + \frac{\zeta\gamma}{c^2} = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0.$$

Für den Fall, daß diese Bedingungsgleichungen erfüllt werden, hat man, wie daraus zu ersehen ist, daß durch diese Gleichungen nicht alle sechs Konstanten $(\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma)$ bestimmt sind, unendlich viele gerade Linien auf dem Ellipsoide. Für jede derselben gelten die Beziehungen: $dx = \alpha dr, dy = \beta dr, dz = \gamma dr$. Diese Werte der Differentiale der Koordinaten genügen der Gleichung (39), denn es ergibt sich: $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0$, was der dritten obigen Gleichung entspricht.

Daß die Geraden auf dem Ellipsoide imaginär sind, ersieht man aus der Gleichung $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0$; denn es gibt keine reellen Werte von α, β, γ , welche diese Gleichung befriedigen. Ebenso kann man auch keine reellen Werte von dx, dy, dz angeben, welche der Gleichung (39) genügen. Ganz besonders in die Augen fällt das Imaginäre der geraden Linien auf dem Ellipsoide, wenn man die Differentialgleichung derselben in elliptischen Koordinaten schreibt, d. h. die Gleichung (39) auf Grund von (16) transformiert oder auch in (21) $z = 0$ setzt, da ja mit $C = 0$ auch $z = -\alpha\beta c C = 0$ wird. Es ergibt sich nämlich:

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2}} - \sqrt{-1} \frac{d\lambda_3}{\sqrt{\Lambda_3}} &= 0, \\ \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\Lambda_2}} + \sqrt{-1} \frac{d\lambda_3}{\sqrt{\Lambda_3}} &= 0. \end{aligned}$$

Um zum Schlusse noch der Rektifikation der kürzesten Linien auf unserem Ellipsoide Erwähnung zu tun,*) gehen wir auf die Gleichung (15) zurück, nach welcher das Bogenelement einer beliebigen Kurve auf unserem Ellipsoide in elliptischen Koordinaten den Ausdruck hat:

$$ds^2 = \frac{1}{4} (\lambda_3 - \lambda_2) \left(\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} d\lambda_2^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} d\lambda_3^2 \right).$$

Für die kürzesten Linien kommen nun die Gleichungen (20) oder (21) in Betracht, aus denen folgt:

$$d\lambda_2^2 = \frac{\lambda_3 \Lambda_2 (z - \lambda_2)}{\lambda_2 \Lambda_3 (\lambda_3 - z)},$$

so daß also:

$$ds^2 = \frac{1}{4} (\lambda_3 - \lambda_2) \left[\frac{\lambda_3 (z - \lambda_2)}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)} + \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} \right] d\lambda_3^2 = \frac{1}{4} (\lambda_3 - \lambda_2)^2 \frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)} d\lambda_3^2$$

wird. Es ist mithin

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{2} (\lambda_3 - \lambda_2) \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} d\lambda_3 \\ &= \frac{1}{2} \left[(\lambda_3 - z) \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} + (z - \lambda_2) \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} \right] d\lambda_3 \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (21):

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{2} \left[(\lambda_3 - z) \sqrt{\frac{\lambda_3}{\Lambda_3 (\lambda_3 - z)}} d\lambda_3 \pm (z - \lambda_2) \sqrt{\frac{\lambda_2}{\Lambda_2 (z - \lambda_2)}} d\lambda_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\lambda_3 (\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 (z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right]. \end{aligned}$$

Somit sind:

$$\begin{aligned} (41) \quad s_1 &= \frac{1}{2} \left[\int \sqrt{\frac{\lambda_3 (\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 + \int \sqrt{\frac{\lambda_2 (z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right], \\ s_2 &= \frac{1}{2} \left[\int \sqrt{\frac{\lambda_3 (\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 - \int \sqrt{\frac{\lambda_2 (z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right] \end{aligned}$$

die Bogenlängen der beiden der Konstanten C der ersten Integration entsprechenden kürzesten Linien auf unserem Ellipsoide (1). Die Form ist im wesentlichen dieselbe, wie sie Jacobi angibt.**)

Zu denselben Ausdrücken gelangt man natürlich auch, wenn man beachtet, daß das Element ds einer kürzesten Linie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen Katheten die Bogenelemente von Krümmungslinien verschiedener Art sind. Ist $d\sigma_2$ das Element der Krümmungslinie $\lambda_2 = \text{const.}$ und $d\sigma_3$ das für $\lambda_3 = \text{const.}$, ferner, wie früher, i der Winkel, den die kürzeste Linie mit der Krümmungslinie $\lambda_2 = \text{const.}$ einschließt, so folgt sofort für die erste von den beiden demselben Werte der Konstanten C der ersten Integration entsprechenden kürzesten Linien:

$$ds = d\sigma_2 \cos i + d\sigma_3 \sin i.$$

$\sin i$ und $\cos i$ sind nach (38) bekannt; um $d\sigma_2$ und $d\sigma_3$ zu erhalten, hat man

*) Cfr. Hesse, Vorlesungen üb. analyt. Geom. d. Raum., 23. Vorlesung.

**) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 28. Vorlesung.

in der Formel für das Bogenelement einer beliebigen Kurve (15) nur $\lambda_2 = \text{const.}$, bzw. $\lambda_3 = \text{const.}$ zu setzen, wodurch sich ergibt:

$$(42) \quad d\sigma_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)}{\Lambda_3}} d\lambda_3, \quad d\sigma_3 = \sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2.$$

Man erhält also ebenso wie oben:

$$ds_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\lambda_3(\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 + \sqrt{\frac{\lambda_2(z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right].$$

Analog ergibt sich ds_2 .

Die beiden besprochenen kürzesten Linien berühren, wie wir wissen, beide die Krümmungslinie $\lambda_2 = z$. Wir wollen nun die Länge der ersten Linie von ihrem Berührungspunkte mit dieser Krümmungslinie bis zum Durchschnitte mit der zweiten Kürzesten zählen und die Länge dieser zweiten von dem Schnittpunkte bis zum Berührungspunkte mit der Krümmungslinie. Der Schnittpunkt habe die elliptischen Koordinaten λ_2, λ_3 und die Koordinaten der beiden Tangierungspunkte seien $\lambda_2 = z, \lambda_3 = \lambda_3'$, bzw. $\lambda_2 = z, \lambda_3 = \lambda_3''$. Wir haben also:

$$s_1 = \frac{1}{2} \left[\int_{\lambda_3'}^{\lambda_3} \sqrt{\frac{\lambda_3(\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 + \int_z^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_2(z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right],$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \left[\int_{\lambda_3}^{\lambda_3''} \sqrt{\frac{\lambda_3(\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 - \int_{\lambda_2}^z \sqrt{\frac{\lambda_2(z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right].$$

Die Summe beider Bogen ist mithin:

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2} \left[\int_{\lambda_3'}^{\lambda_3''} \sqrt{\frac{\lambda_3(\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3 + 2 \int_z^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_2(z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2 \right].$$

Berechnen wir noch die Länge σ der berührten Krümmungslinie $\lambda_2 = z$ zwischen den beiden Berührungspunkten der kürzesten Linien, so ist dieselbe nach (42):

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{\lambda_3'}^{\lambda_3''} \sqrt{\frac{\lambda_3(\lambda_3 - z)}{\Lambda_3}} d\lambda_3.$$

Es ergibt sich also:

$$s_1 + s_2 - \sigma = \int_z^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_2(z - \lambda_2)}{\Lambda_2}} d\lambda_2,$$

d. h. die Differenz zwischen der Summe der Längen der beiden kürzesten Linien und der von den beiden Berührungspunkten begrenzten Länge der Krümmungslinie ist unabhängig von der Koordinate λ_3 des Schnittpunktes der beiden Kürzesten und bleibt daher ungeändert für alle Werte von λ_3 , wenn die Koordinate λ_2 einen konstanten Wert, etwa c , besitzt, wenn also der Schnittpunkt der beiden kürzesten Linien die Krümmungskurve $\lambda_2 = c$ beschreibt.

Umgekehrt beschreibt der Schnittpunkt die Krümmungslinie $\lambda_2 = c$, falls der Ausdruck $s_1 + s_2 - \sigma$ ungeändert bleibt.

Man kann dieses Resultat (von Michael Roberts) auch in folgender Weise aussprechen, da ja eine kürzeste Linie auf einer krummen Oberfläche die Form eines über die Fläche hingezogenen Fadens hat: Wenn um eine Krümmungslinie des gegebenen Ellipsoides ein geschlossener Faden geschlungen ist und dieser Faden durch einen Stift auf dem Ellipsoide gespannt wird, so beschreibt der Stift bei seiner Bewegung eine weitere Krümmungslinie des Ellipsoides von derselben Art.

Franz John.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.