Über die kürzesten Linien auf krummen Oberflächen im allgemeinen und über die auf dem dreiachsigen Ellipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ im besonderen.

I. TEIL.

Über die kürzesten Linien auf krummen Oberflächen im allgemeinen.

A. Einleitung

1.

Unter den Linien, welche man auf einer krummen Oberfläche zwischen zwei gegebenen Punkten derselben, A und B mit den rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0, z_0, bez. x_1, y_1, z_1 ziehen kann, sind diejenigen die kürzesten, für welche, wenn man mit ds ein Bogenelement und mit S den ganzen Bogen zwischen den beiden Punkten bezeichnet,

$$S = \int_A^B ds = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx} dx \tag{1}$$

ein Minimum wird.

Von diesen kürzesten Linien läßt sich durch eine einfache Rechnung zeigen, daß sie dieselbe charakteristische Fundamentaleigenschaft wie die sogenannten geodätischen Linien auf krummen Oberflächen besitzen, nämlich die Eigenschaft, daß in jedem Punkte der Linie die Hauptnormale derselben mit der Flächennormale zusammenfällt oder, was dasselbe ist, daß die Schmiegungsebene der Linie stets durch die Flächennormale geht.

Damit nämlich der Bogen S ein Minimum werde, muß notwendig $dS = 0$ sein. Dieses Differential ist aber nichts anderes als die Variation von S, so daß wir als Bedingung haben:

$$\delta S = 0. \tag{2}$$

Nun ist

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta ds}{dx} dx,$$

wofür wir einfach schreiben

$$\delta S = \int \delta ds,$$

indem wir die Variable, nach welcher zu integrieren ist, nicht weiter bezeichnen. Die Werte, welche diese Variable für $x = x_0$ und $x = x_1$ annimmt, sind als die Grenzen des Integrales zu wählen. Aus der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ergibt sich nun:

$$ds\, \delta\, dx = dx\, \delta\, dx + dy\, \delta\, dy + dz\, \delta\, dz.$$

Also wird

$$\delta S = \int\left(\frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + \frac{dy}{ds}\,\delta\,dy + \frac{dz}{ds}\,\delta\,dz\right)$$

oder vermittelst der partiellen Integration

$$\delta S = \left[\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right]_0^1 - \int\left(\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds}\right),$$

wo die beigesetzten Zeichen $_0$ und $_1$ die Bedeutung haben, daß in den Klammerausdruck die obere Grenze der Integration eingesetzt und dann davon der Ausdruck mit den Werten für die untere Grenze abgezogen werden soll. Die Forderung $\delta S = 0$ geht demnach, da die Variationen von x, y, z an den Grenzen verschwinden, über in:

$$\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0. \tag{3}$$

Die Variationen δx, δy, δz sind aber nicht von einander unabhängig, sondern haben, da unsere Kurven auf der Oberfläche mit der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

verlaufen, noch der Beziehung

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0 \tag{5}$$

zu genügen, wo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z \tag{6}$$

gesetzt ist. Eliminiert man nun aus den Gleichungen (3) und (5) die eine Variation, etwa δz, so ergibt sich:

$$\left(Z d\frac{dx}{ds} - X d\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(Z d\frac{dy}{ds} - Y d\frac{dz}{ds}\right)\delta y = 0,$$

wo jetzt die Variationen δx und δy als von einander unabhängig zu betrachten sind, so daß der Ausdruck links nur verschwindet, wenn die Faktoren dieser Variationen einzeln verschwinden, woraus dann folgt:

$$\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{X} = \frac{d\dfrac{dy}{ds}}{Y} = \frac{d\dfrac{dz}{ds}}{Z}. \tag{7}$$

Die gesuchten Kurven werden also durch die Gleichungen (4) und (7) bestimmt. Die durch die Integration eingeführten Konstanten sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen, ebenso auch die Koordinaten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1, falls man dieselben von vornherein nicht fest, sondern variabel angenommen hat.

Da nun aber die Kosinus der Winkel, welche die Hauptnormale einer Kurve mit den Koordinatenachsen bildet, $\rho\dfrac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $\rho\dfrac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\rho\dfrac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$ sind, wo ρ den Krümmungsradius bezeichnet, so sind die Zähler in den Gleichungen (7) diesen Richtungskosinus proportional. Andererseits sind die Nenner den Richtungskosinus der Flächennormale proportional. Nach den Gleichungen (7) fallen also für die kürzesten Linien in jedem Punkte die genannten beiden Normalen zusammen, was ja gerade die Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linien ausspricht.*)

*) Cfr. Serret (Harnack), Diff.- u. Integralrechnung, 2. Bd, § 850.

Dasselbe Resultat, bezw. die Gleichungen (7) kann man natürlich auch ohne Anwendung der Variationsrechnung erlangen, was aber hier nicht durchgeführt werden soll.*)

Es stellt also der kürzeste geodätische Bogen zwischen zwei Punkten auf der Fläche, wenn man so den Bogen einer geodätischen Linie bezeichnen will, zugleich die kürzeste Linie dar, die sich auf der gegebenen Fläche zwichen den beiden Punkten ziehen läßt. Einfach zu sagen: Der Bogen einer geodätischen Linie zwischen zwei Punkten, genügt nicht, was z. B. schon der Fall einer Kugel beweist. Hier, wo die geodätischen Linien die größten Kreise sind, kommt der Name einer kürzesten Linie zwischen zwei Punkten nur jenem Bogen des durch die beiden Punkte gehenden größten Kreises zu, der kleiner als der Halbkreis ist, wie sich leicht einsehen läßt und wie es auch von Jacobi eingehend nachgewiesen wurde.**)

2.

Mit Rücksicht auf die betrachtete enge Beziehung zwischen den kürzesten und den geodätischen Linien ist wohl auch die Bezeichnung „kürzeste Linien“ für geodätische Linien eingebürgert. Es ist aber die Identifizierung im allgemeinen stets mit Vorsicht aufzunehmen, da wohl eine Kürzeste auf einer krummen Oberfläche stets geodätische Linie ist, aber nicht, wie es uns schon der spezielle Fall der Kugel gab, umgekehrt eine geodätische Verbindung zweier Punkte notwendig die kürzeste zu sein braucht. Stets richtig ist die Identifizierung der beiden Bezeichnungen wohl nur für den Fall einer gehörigen Einschränkung der Längen der Linien, wenn man also nur von der unendlich kleinen Verbindung hinreichend naher oder unendlich benachbarter Punkte spricht.

Wann eine geodätische Linie im allgemeinen aufhört, auch kürzeste Linie zu sein, darüber sind tiefer gehende Untersuchungen besonders von Jacobi angestellt worden.**) Jacobi gelangt zu dem Satze, daß die geodätischen Linien, die von einem Punkte der Oberfläche ausgehen, die Eigenschaft, auch Kürzeste zu sein, verlieren, wenn sie ihre gemeinschaftliche einhüllende Kurve berührt haben, wornach also von einem Punkte ausgehende geodätische Linien, die stets neben einander laufen, ohne sich zu schneiden, nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. Man könne diesen Satz nachträglich leicht einsehen, da im Schnittpunkte zweier unendlich nahen geodätischen Linien nicht nur die erste, sondern auch die zweite Variation verschwindet, der Unterschied sich also auf eine unendlich kleine Größe dritter Ordnung reduziert, so daß kein Minimum mehr stattfinden kann.

Die geodätischen Linien, die durch einen Punkt gehen, bleiben also immer auch kürzeste Linien auf allen developpablen Flächen, da ja die geodätischen Linien solcher Flächen, wenn diese in die Ebene abgewickelt werden, sich in gerade Linien verwandeln und die durch einen Punkt gehenden Geraden sich nie wieder schneiden; ferner nach Jacobi auch auf allen konkav-konvexen Flächen, d. h. solchen, die in allen ihren Punkten negatives Krümmungsmaß besitzen. Allein diesem letzteren von Christoffel†) bewiesenen Satze Jacobis wurde, von einem gewissen Gesichtspunkte aus betrachtet, die allgemeine Giltigkeit benommen durch Braunmühl, der sich eingehender mit den Enveloppen geodätischer Linien befaßte††) und dabei nachwies, daß es doch auf dem einschaligen Hyperboloide, trotzdem diese Fläche rein negatives Krümmungsmaß besitzt, Einhüllende gibt, wenn man nämlich die geodätischen Linien das Unendliche durchlaufen und

*) Cfr. Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung, § 86.
**) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, pg. 46 u. 47.
†) In den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1868.
††) Math. Annalen, Bd. 14, pg. 557 ff. u. Bd. 20, pg. 557 ff.

wieder auf die Fläche zurückkommen läßt, wie es bei analytischer Betrachtung sein muß. Braunmühl hat auch ein Beispiel zu der Frage gegeben, die Jacobi offen ließ, nämlich, ob nicht auch auf Flächen mit positivem Krümmungsmaße keine Enveloppen der geodätischen Linien eintreten, indem er das Paraboloid, welches überall positiv gekrümmt ist, betrachtet und zeigt, daß die Einhüllenden auf demselben sich auf den unendlich fernen Kreis reduzieren, also im Endlichen keine Einhüllende vorkommt. Diesbezüglich hat ferner Bonnet gezeigt, daß ein Büschel geodätischer Linien stets auf allen positiv gekrümmten Flächen, welche geschlossen sind, eine Enveloppe besitzen muß, bis zu deren Berührungspunkten also die geodätischen Linien auch kürzeste Linien sind.

3.

Man kann für die kürzesten Linien auch Definitionen einführen, die mechanischer Natur sind und den Verlauf der Linien deutlich veranschaulichen. Eine dieser Definitionen ist folgende: Eine kürzeste Linie ist die kürzeste Form, welche ein zwischen zwei Punkten der Fläche in ihr und über sie gespannter Faden annimmt, wenn auf den Faden weiter keine Kräfte wirken, also auch von seiner Schwere abgesehen wird. Daß diese Definition auch zu der früher ausgesprochenen Fundamentaleigenschaft führt, läßt sich leicht dartun. Die Resultierende der Spannungen, welche längs zweier auf einander folgenden Elemente der Kurve, die durch den Faden gebildet wird, stattfinden, liegt in der Ebene dieser Elemente, also in der Schmiegungsebene der Kurve. Die Resultierende muß aber ferner von dem Widerstande der Fläche aufgehoben werden, woraus folgt, daß sie mit der Normale der Fläche zusammenfallen muß. Bei den von dem Faden gebildeten Kurven geht demnach die Schmiegungsebene stets durch die Flächennormale. Es rührt dieser Beweis von Monge*) her. Man kann aber natürlich den Beweis auch mit Hilfe der entsprechenden Sätze der Mechanik in Gleichungen ausführen.**)

Eine andere mechanische Erklärung der kürzesten Linien ist folgende: Wenn ein Punkt gezwungen ist, sich auf einer Fläche zu bewegen, und dabei keine beschleunigenden Kräfte auf ihn wirken, sondern er nur von einem anfänglichen Stoße getrieben wird, so beschreibt er eine kürzeste Linie. Auch hier läßt sich leicht die obige Fundamentaleigenschaft herausfinden. Denn wenn ein Punkt (mit der Masseneinheit) sich auf der Fläche $F(x, y, z) = 0$ bewegen muß und außer einem ersten Impulse gar keine Kräfte auf ihn wirken, so sind bekanntlich die Differentialgleichungen der Bewegung (mit den Bezeichnungen (6) geschrieben):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda Z.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $2\frac{dx}{dt}, 2\frac{dy}{dt}, 2\frac{dz}{dt}$ und addiert sie dann, so ergibt sich: $d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$ oder $\frac{ds}{dt} = \text{const.} = c$. Mithin hat man jetzt die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \lambda' X, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \lambda' Y, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \lambda' Z,$$

wo $\lambda' = \frac{\lambda}{c}$ ist, und von diesen läßt sich leicht auf die Gleichungen (7) kommen.**)

---

*) Cfr. Salomon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art 51.
**) Cfr. Joachimsthal, Anwendung der Diff.- u. Integralrechnung, § 90.

B. Differentialgleichungen der kürzesten Linien auf krummen Oberflächen im allgemeinen.

4.

Als Differentialgleichungen der kürzesten Linien auf der krummen Oberfläche $F(x, y, z) = 0$ kann man nach dem Früheren zunächst die Gleichungen (7) auffassen. Dieselben lassen sich bei Einführung eines Proportionalitätsfaktors λ auf die Form bringen:

$$d\frac{dx}{ds} = \lambda X, \quad d\frac{dy}{ds} = \lambda Y, \quad d\frac{dz}{ds} = \lambda Z. \tag{8}$$

Durch Quadrieren und Summieren dieser Beziehungen erhält man

$$\lambda = \frac{ds}{\rho\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

weil der Krümmungsradius, welcher bei unseren Linien in die Richtung der Flächennormale fällt und zugleich Krümmungsradius eines Normalschnittes der Fläche ist, $\rho = \dfrac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}$ ist. Mithin gehen die Gleichungen (8) über in:

$$\begin{aligned} &\rho\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\; d\frac{dx}{ds} = X\,ds, \\ (9)\qquad &\rho\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\; d\frac{dy}{ds} = Y\,ds, \\ &\rho\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\; d\frac{dz}{ds} = Z\,ds.\text{*)} \end{aligned}$$

Die in der Beziehung (7) enthaltenen Gleichungen (sowie die daraus gefolgerten (8) und (9)) vertreten aber nur die Stelle einer einzigen Gleichung, was man daraus ersieht, daß sich aus ihnen eine identische Gleichung ableiten läßt. Multipliziert man nämlich die Gleichungen (8) der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und addiert sie dann, so erhält man $\frac{dx}{ds}\, d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d\frac{dz}{ds} = \lambda\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$, wo aber infolge der Identität $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ die linke Seite Null wird und ferner auch $X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0$ ist.

Um nun die eine Gleichung abzuleiten, schreiben wir die Gleichung (8), indem wir die unabhängige Variable unbestimmt lassen, folgendermaßen:

$$\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2} = \lambda X, \quad \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2} = \lambda Y, \quad \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2} = \lambda Z,$$

multiplizieren sie bezw. mit $(dy\,d^2z - dz\,d^2y)$, $(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$, $(dx\,d^2y - dy\,d^2x)$ und addieren sie. Es ergibt sich dann

$$X(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + Y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + Z(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0 \tag{10}$$

als Gleichung der Kürzesten auf der krummen Oberfläche $F(x, y, z) = 0$.**)

Faßt man x als unabhängige Variable auf, so ist also die Gleichung (10) eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung und das Integral derselben hat zwei Konstante. Zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Fläche kann man folglich immer eine kürzeste Linie ziehen und von jedem Flächenpunkte gehen unendlich viele kürzeste Linien aus.

---

*) Gauß, disquisitiones generales circa superficies curvas (deutsch von Wangerin, Art. 14).
**) Cfr. (auch im Folgenden) Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung, § 87.

Die Gleichung (10) kann man natürlich auch direkt aus der Fundamentaleigenschaft der Kürzesten ableiten, nämlich daß die Schmiegungsebene in jedem Punkte der Kurve durch die Flächennormale geht. Die Gleichung der Schmiegungsebene ist in Determinantenform geschrieben:

$$\begin{vmatrix} \xi - x, & \eta - y, & \zeta - z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

und die Gleichung der Flächennormale lautet:

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z}.$$

Daraus folgt für die kürzesten Linien sofort die Gleichung:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

die aber mit (10) gleichlautend ist.

Dieselbe Gleichung erlangt man selbstverständlich auch, indem man von dem allgemeinen Ausdrucke für den Winkel ausgeht, den die Schmiegungsebene in einem Punkte einer beliebigen Kurve mit der Tangentenebene der Fläche in diesem Punkte bildet oder, was dasselbe ist, den die Binormale der Kurve mit der Flächennormale bildet. Da die Richtungskosinus der Binormale den Größen $(dy\, d^2z - dz\, d^2y)$ u. s. w. bezw. proportional sind und die der Flächennormale den X, Y, Z, so erhält man für das Orthogonalsein der beiden Richtungen, wie es bei den kürzesten Linien eintreten muß, die Bedingung (10).

Durch ähnliche Betrachtungen läßt sich auch leicht die geometrische Bedeutung der Gleichungen ermitteln, welche aus (10), bezw. (11) durch andere Schreibung hervorgehen*), nämlich:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ X, & Y, & Z \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} dx\,(Y\,d^2z - Z\,d^2y) + \\ dy\,(Z\,d^2x - X\,d^2z) + \\ dz\,(X\,d^2y - Y\,d^2x) \end{array} \right.$$

und

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} d^2x, & d^2y, & d^2z \\ X, & Y, & Z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} d^2x\,(Y\,dz - Z\,dy) + \\ d^2y\,(Z\,dx - X\,dz) + \\ d^2z\,(X\,dy - X\,dx). \end{array} \right.$$

5.

Die Differentialgleichung einer kürzesten Linie, wie sie im Vorhergehenden gefunden wurde, kann man noch umformen und dabei zur Integration geeignet machen.**) Man geht dabei von der Form (12) der Gleichung aus und hält mit dieser die aus der Flächengleichung folgende Beziehung:

$$(14) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

zusammen, welcher die Differentiale dx, dy, dz genügen müssen. Aus diesen beiden Gleichungen kann man die Beziehung dx : dy : dz ableiten oder auch gleich die Differentiale selbst mit einem Proportionalitätsfaktor μ multipliziert. Es ist

$$\mu\,dx = Z\,(Z\,d^2x - X\,d^2z) - Y\,(X\,d^2y - Y\,d^2x),$$

was man nach Hinzufügen von $X^2\,d^2x - X^2\,d^2x$ schreiben kann:

$$\mu\,dx = d^2x\,(X^2 + Y^2 + Z^2) - X\,(X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z).$$

Durch Differentiation der Gleichung (14) ergibt sich aber:

$$(15) \qquad (dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz) + (X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z) = 0.$$

*) Cfr. Böklen, analyt. Geom. d. Raumes, § 15.

**) Cfr. Joachimsthal: observationes de lineis brevissimis etc., Crelle Journal, 6. Bd., pg. 155. — Hesse, Vorlesungen über anayl. Geom. d. Raumes, 23. Vorlesg.

Mithin erhält man, wenn man noch die analogen Gleichungen für dy und dz hinzufügt:

$$\mu\, dx = d^2x\,(X^2+Y^2+Z^2) + X\,(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz),$$
$$\mu\, dy = d^2y\,(X^2+Y^2+Z^2) + Y\,(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz),$$
$$\mu\, dz = d^2z\,(X^2+Y^2+Z^2) + Z\,(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz).$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz und addiert sie, so ergibt sich mit Rücksicht auf (14):

$$(16)\qquad \mu = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)}{dx^2+dy^2+dz^2};$$

multipliziert man aber der Reihe nach mit dX, dY, dZ, so erhält man μ in der Form

$$(17)\qquad \mu = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,(dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z)}{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz} + X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ.$$

Subtrahiert man nun (16) von (17), so ergibt sich

$$(X^2+Y^2+Z^2)\left(\frac{dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z}{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2}\right) + X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = 0$$

oder

$$(18)\qquad \frac{dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z}{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz} + \frac{X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ}{X^2+Y^2+Z^2} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2} = 0$$

als eine andere Form der Differentialgleichungen der kürzesten Linien auf der krummen Oberfläche $F(x, y, z) = 0$.

Man kann die Gleichung (18) aus der früheren Form der Differentialgleichung der kürzesten Linien auch auf unmittelbarem Wege ableiten, wie es auch von Joachimsthal und Gehring getan wurde.*) Um diesen Weg zu finden, braucht man nur den Faktor aufzusuchen, mit dem man die frühere Gleichungsform multiplizieren muß, um die neue zu erhalten.

Wenn man die linke Seite der Gleichung (18) auf den gemeinsamen Nenner Q bringt, der das Produkt der einzelnen Nenner ist, und dann den Zähler P des entstehenden Bruches mit dem Trinom der Gleichung (13), das abkürzungsweise mit V bezeichnet sei, zusammenhält, so ergibt sich, daß $P = VW$ ist, wo

$$W = dX\,(Y\,dz - Z\,dy) + dY\,(Z\,dx - X\,dz) + dZ\,(X\,dy - Y\,dx)$$

gesetzt ist. $W = 0$ ist aber nichts anderes als die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf der krummen Oberfläche $F(x, y, z) = 0$. Die Transformation zur Gleichung (18) besteht also darin, daß man die Gleichung der kürzesten Linien mit der der Krümmungslinien multipliziert und das Produkt durch

$$Q = (dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz)\,(X^2+Y^2+Z^2)\,(dx^2+dy^2+dz^2)$$

dividiert.

Die Multiplikation der beiden Trinome V und W läßt sich leicht durchführen, wenn die Determinantenform angewendet wird:

$$\begin{vmatrix} d^2x, & d^2y, & d^2z \\ X, & Y, & Z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dX, & dY, & dZ \\ X, & Y, & Z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z, & X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ, & dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz \\ X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z, & X^2+Y^2+Z^2, & X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \\ dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z, & X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, & dx^2+dy^2+dz^2 \end{vmatrix}.$$

*) Cfr. Joachimsthal, Crelle Journ., 26. Bd., pg. 161. — Hesse, Vorlesungen über analyt. Geom. d. Raumes, pg. 327, Anmerkung unter dem Striche.

Dieses zweite Verfahren, die Gleichung (18) abzuleiten, ist natürlich nichts anderes als eine Konzentration der algebraischen Operationen, die bei der früheren Ableitung (mittelst des Proportionalitätsfaktors μ) ausgeführt wurden.

In der Gleichung (18), welche, wie aus der zweiten Ableitungsmethode hervorgeht, nicht nur für die kürzesten Linien, sondern auch für die Krümmungslinien auf krummen Oberflächen im allgemeinen gilt, sind von den drei Brüchen die zwei letzten vollständige Differentiale, u. zw. sind sie bezw. gleich $\frac{1}{2}$ d log $(X^2+Y^2+Z^2)$ und $-\frac{1}{2}$ d log $(dx^2+dy^2+dz^2)$. Allein auch der erste Bruch wird ein vollständiges Differential, wenn die vorliegende Fläche zweiter Ordnung ist, so daß sich die Gleichung dann leicht integrieren läßt.*) Es sei dieses speziellen Falles hier schon Erwähnung getan, da später darauf zurückzukommen sein wird.

Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung sei allgemein:

$$(19)\qquad A_1 x^2+A_2 y^2+A_3 z^2+2 B_1 yz+2 B_2 zx+2 B_3 xy+2 C_1 x+2 C_2 y + 2 C_3 z+D=0.$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} X&=2(A_1 x+B_3 y+B_2 z+C_1), & dX&=2(A_1 dx+B_3 dy+B_2 dz),\\ Y&=2(B_3 x+A_2 y+B_1 z+C_2), & dY&=2(B_3 dx+A_2 dy+B_1 dz),\\ Z&=2(B_2 x+B_1 y+A_3 z+C_3), & dZ&=2(B_2 dx+B_1 dy+A_3 dz);\end{aligned}$$

und mithin ist

$$\begin{aligned} dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz &= 2(A_1 dx^2+A_2 dy^2+A_3 dz^2\\ &\quad +2 B_1 dy\,dz+2 B_2 dz\,dx+2 B_3 dx\,dy),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dX\,d^2x+dY\,d^2y+dZ\,d^2z &= 2[A_1 dx\,d^2x+A_2 dy\,d^2y+A_3 dz\,d^2z+B_1(dy\,d^2z+\\ &\quad dz\,d^2y)+B_2(dz\,d^2x+dx\,d^2z)+B_3(dx\,d^2y+dy\,d^2x)]\\ &= \frac{1}{2} d(dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz),\end{aligned}$$

woraus zu ersehen ist, daß in dem speziellen Falle auch der erste Bruch in (18) ein volles Differential, nämlich gleich $\frac{1}{2}$ d log $(dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz)$ ist.

Die Gleichung (18) geht also im Falle von Flächen zweiter Ordnung in

$$d\log(dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz)+d\log(X^2+Y^2+Z^2)-d\log(dx^2+dy^2+dz^2)=0$$

oder

$$(20)\qquad \frac{(dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz)(X^2+Y^2+Z^2)}{dx^2+dy^2+dz^2}=C$$

über, wo C die Integrationskonstante bedeutet.

Man kann also nach Gehring sagen: Unter der Voraussetzung von Oberflächen zweiter Ordnung ist die Differentialgleichung der Krümmungskurve der integrierende Faktor der Differentialgleichung der kürzesten Linie.

6.

Ist die Gleichung der krummen Oberfläche im allgemeinen in der Form

$$(21)\qquad z=f(x,y)$$

gegeben, so ist

$$(22)\qquad X=-\frac{\partial f}{\partial x}=-p,\quad Y=-\frac{\partial f}{\partial y}=-q,\quad Z=1;$$

*) Cfr. Joachimsthal, Crelle Journ., 26. Bd., pg. 156.

und die Gleichung der kürzesten Linien lautet, wenn wir x als unabhängige Veränderliche nehmen:

$$d^2y\,(dx + p\,dz) + d^2z\,(q\,dx - p\,dy) = 0$$

oder mit Benützung der Relationen $dz = p\,dx + q\,dy$, $d^2z = dp\,dx + dq\,dy + q\,d^2y$, $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, wo

$$(23)\qquad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

gesetzt ist,

$$dx\,d^2y\,(1 + p^2 + q^2) + (q\,dx - p\,dy)\,(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) = 0$$

oder

$$(24)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}(1 + p^2 + q^2) + \left(q - p\frac{dy}{dx}\right)\left(r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0.^{*)}$$

Es läßt sich diese Gleichung natürlich auch durch direkte Ableitung mit Hilfe der Regeln der Variationsrechnung ermitteln. Wenn die Gleichung (21) vorliegt, so haben wir das Bogenelement in der Form:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2} \\ &= dx\,\sqrt{(1 + p^2) + 2pq\,y' + (1 + q^2)\,y'^2} = V\,dx, \end{aligned}$$

wo $y' = \frac{dy}{dx}$ gesetzt ist. Nun soll y so als Funktion von x bestimmt werden, daß $S = \int V\,dx$ ein Minimum wird. Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man dann $\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = 0$ zu bilden. Führt man die angedeuteten Rechnungen durch, so kommt man schließlich wieder auf die Gleichung (24).

7.

Es sei die Gleichung der krummen Oberfläche im allgemeinen in der Form folgenden Systems gegeben: Jede der drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z sei Funktion zweier neuen Größen u und v. Diese Darstellungsart einer Fläche besteht bekanntlich darin, daß man sich die ganze Fläche durch zwei Systeme von Kurven überzogen denkt, von denen das eine der Gleichung $u = \text{const.}$, das andere der Gleichung $v = \text{const.}$ entspricht. Die Kurven des ersten Systems wollen wir die Kurven V, die des zweiten die Kurven U nennen. Jeder Punkt der Fläche ist als Durchschnitt einer gewissen Kurve V mit einer gewissen Kurve U gegeben und jede andere nicht zu diesen beiden Systemen gehörige Kurve auf der Fläche wird durch eine Gleichung zwischen den Veränderlichen u und v dargestellt.

Soll nun die Gleichung einer kürzesten Linie auf krummen Oberflächen durch die krummlinigen Koordinaten u und v ausgedrückt werden,**) so hat man auf das Bogenelement, in diesen Koordinaten geschrieben, zurückzugehen:

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

wo, wie gewöhnlich,

---

*) Cfr. Joachimsthal, **Anwendung der Diff.- u. Integralrechnung**, § 87 und Jellett (Schnuse), **Variationsrechnung**, § 86.

) Cfr. Gauß, disquis. gener. etc. (Wangerin, Art. 18f); Joachimsthal, **Anwendung der Diff.- u. Integralrechnung, § 98.

$$(25)\qquad \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Es muß wieder, damit der Bogen ein Minimum sei, $\delta S = \delta \int ds = 0$ werden. Um die Rechnung zweckmäßig durchführen zu können, sei u als Funktion von v betrachtet. Es ist

$$\delta S = \int \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + \frac{\partial F}{\partial u} du\, dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2\right)\delta u + (2E\, du + 2F\, dv)\, d\, \delta u}{2ds}$$

oder mittelst partieller Integration:

$$\delta S = \int \frac{\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u} du\, dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2}{2ds}\delta u + \frac{E\, du + F\, dv}{ds}\delta u - \int d\left(\frac{E\, du + F\, dv}{ds}\right)\delta u.$$

Und damit nun die obige Bedingung erfüllt sei, muß der unter dem Integralzeichen stehende Faktor von δu unabhängig von diesem verschwinden, d. h. es muß die Beziehung bestehen:

$$\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u} du\, dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2 = 2 ds\, d\left(\frac{E\, du + F\, dv}{ds}\right).$$

Es ist aber bekannt*), daß, wenn man mit ϑ den Winkel bezeichnet, den das Bogenelement einer Kurve mit der durch den Anfangspunkt des Elementes gehenden Linie U bildet, wobei der Winkel von der Seite dieser Linie angefangen, auf der die Werte von u wachsen, nach der Seite hin positiv genommen wird, nach der die Werte von v wachsen, daß dann:

$$(26)\qquad \cos\vartheta = \frac{E\, du + F\, dv}{\sqrt{E}\, ds}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG - F^2}\, dv}{\sqrt{E}\, ds}$$

ist.

Man kann demnach die rechte Seite der letzten obigen Gleichung weiter schreiben:

$$\begin{aligned} 2 ds\, d\left(\frac{E\, du + F\, dv}{ds}\right) &= 2 ds\, d\left(\sqrt{E}\cos\vartheta\right) = \frac{ds\, dE}{\sqrt{E}}\cos\vartheta - 2\, ds\sqrt{E}\sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= \frac{E\, du + F\, dv}{E} dE - 2\sqrt{EG - F^2}\, dv\, d\vartheta \\ &= \frac{E\, du + F\, dv}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u} du + \frac{\partial E}{\partial v} dv\right) - 2\sqrt{EG - F^2}\, dv\, d\vartheta. \end{aligned}$$

Mithin geht die obige Gleichung über in:

$$2\sqrt{EG - F^2}\, d\vartheta = \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} du + \frac{\partial E}{\partial v} du + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} dv - 2\frac{\partial F}{\partial u} du - \frac{\partial G}{\partial u} dv$$

*) Cfr. Gauß, disqu. (Art. 7); Joachimsthal, Anwendung der Diff.- und Integralrechnung, § 56.

oder

$$2\sqrt{EG - F^2}\, d\vartheta = \frac{F}{E}\, dE + \frac{\partial E}{\partial v} du - 2\frac{\partial F}{\partial u} du - \frac{\partial G}{\partial u} dv. \tag{27}$$

Dies ist also in Verbindung mit einer definierenden Gleichung für den Winkel ϑ die Differentialgleichung der kürzesten Linien.

Wollte man die Gleichung bloß zwischen u und v haben, so müßte man ϑ eliminieren, was mit Hilfe der aus (26) folgenden Gleichung

$$\cot g\, \vartheta = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{du}{dv} + \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}}$$

geschehen könnte.

Ist das krummlinige Koordinatensystem so beschaffen, daß die zwei Systeme von Linien V und U orthogonal zu einander sind, so ist die Bedingung dafür: $F = 0$. Die Gleichung (27) geht dann über in:

$$2\sqrt{EG}\, d\vartheta = \frac{\partial E}{\partial v} du - \frac{\partial G}{\partial u} dv. \tag{28}$$

Ebenso vereinfachen sich auch die Gleichungen (26).

Wird ferner das eine der beiden zu einander orthogonalen Systeme, etwa das der Linien U, selbst ein System von kürzesten Linien und wählt man für u die Länge einer Linie dieses Systemes, dieselbe gezählt, falls alle Linien des Systemes sich in einem Punkte treffen, von diesem Punkt ab, falls aber ein gemeinsamer Schnittpunkt nicht vorhanden ist, von irgend einer Linie des zweiten Systemes ($u = \text{const.}$) aus, dann vereinfachen sich die Gleichungen noch mehr. Da jetzt u gleich s ist, so wird $E = 1$ zu setzen sein, und man erhält aus (28): $2\sqrt{G}\, d\vartheta = -\frac{\partial G}{\partial u} dv$ oder, wenn man, wie üblich,

$$\sqrt{G} = m \tag{29}$$

setzt:

$$\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{d\vartheta}{dv} = 0. \tag{30}$$

Diese Gleichung, die also speziell für die Veränderungen des ϑ bei den kürzesten Linien gilt, gibt zusammen mit einer Gleichung, durch welche der Winkel ϑ bestimmt wird, die Gleichung der kürzesten Linien in den krummlinigen Koordinaten u und v. Solche Definitionsgleichungen für ϑ sind auf Grund der Ausdrücke (26):

$$\cos \vartheta = \frac{du}{ds},\quad \sin \vartheta = \frac{m\, dv}{ds},\quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{m\, dv}{du}, \tag{31}$$

worin $ds = \sqrt{du^2 + m^2 dv^2} = dv\sqrt{u'^2 + m^2}$ ist, wenn man $\frac{du}{dv} = u'$ setzt. Man kann die Ausdrücke (31) auch aus dem rechtwinkligen Dreiecke ersehen, dessen Katheten du und m dv, nämlich die Differentiale der Kurven der beiden Systeme sind und dessen Hypotenuse ds ist.

Eliminiert man aus (30) den Winkel ϑ, so ergibt sich eine Beziehung zwischen u und v allein. Aus $\cos \vartheta = \frac{du}{ds}$ folgt: $-\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dv} = \left(\frac{du}{ds}\right)'$, wenn man hier wie im Folgenden die erste Ableitung nach v mit einem beigesetzten Striche bezeichnet, und weiter: $\frac{d\vartheta}{dv} = -\frac{\left(\frac{du}{ds}\right)'}{\frac{m\, dv}{ds}}$, also nach (30): $\frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - \left(\frac{\frac{du}{dv}}{\frac{ds}{dv}}\right)' = 0$ oder

$$\frac{m \frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{u'^2+m^2}} - \left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2+m^2}}\right) = 0. \tag{32}$$

Wenn die Linien U alle von demselben Punkte ausgehen, so wird offenbar für $u = 0$ unabhängig von v $m = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$. Denn da das Bogenelement einer V-Kurve $m dv$ ist und diese Kurven für unendlich kleines u als Kreise mit dem Radius u um den Ausgangspunkt der Linien U als Mittelpunkt angesehen werden können, so hat man für solche Werte: $m\,dv = u\,dv$, wo für v der Winkel selbst gewählt ist, den irgend eine Linie U mit einer anderen beliebig gewählten Linie U bildet, oder $m = u$. Es wird also mit $u = 0$ gleichzeitig $m = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$.

8.

Da die Krümmungshalbmesser der kürzesten Linien nach der Fundamentaleigenschaft derselben zugleich Normalen der Fläche sind und also auch Krümmungsradien der Normalschnitte der Fläche, so kann man auch den Euler'schen Satz über die Krümmungshalbmesser von Normalschnitten:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha \tag{33}$$

als Gleichung für die Kürzesten ansehen.*) In dieser Gleichung bedeuten R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien, d. h. die Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte der Fläche, ρ ist der Krümmungshalbmesser eines dritten Normalschnittes, also einer kürzesten Linie**) und α ist der Winkel, den die Tangente der kürzesten Linie mit der Tangente eines Hauptschnittes, also mit der Tangente einer Krümmungslinie bildet.

C. Eigenschaften der kürzesten Linien auf krummen Oberflächen im allgemeinen.

9.

Die Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linien, daß in jedem ihrer Punkte die Schmiegungsebene durch die Flächennormale geht, läßt sich natürlich auch noch in verschiedener anderer Weise aussprechen, wie es auch teilweise schon im Früheren geschehen ist.

So kann man z. B. den Charakter dieser Linien auch ausdrücken, indem man sagt, daß in jedem Punkte die Schmiegungsebene auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht steht, oder daß die Hauptnormale stets mit der Flächennormale zusammenfällt, also daß in jedem Punkte der Krümmungsradius der Linie eine Normale der Fläche ist — oder daß, wenn man durch die Tangente der Kurve und durch die Normale der Fläche im Berührungspunkte eine Ebene legt, diese zugleich durch das folgende Kurvenelement geht — oder daß, wenn man die einem beliebigen Punkte der Kurve zugehörige Tangente senkrecht auf die dem nächstfolgenden Punkte angehörige Tangentialebene der Fläche projiziert, durch diese Projektion zugleich die nächstfolgende Tangente der Kurve gebildet wird***) — oder daß in jedem Punkte der Kurve ihre sogenannte geodätische Krümmung verschwindet. Daß alle diese Ausdrucksweisen im Wesen dasselbe sagen, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

---

*) Cfr. Böklen, analyt. Geom. d. Raumes, § 15.
**) Nur für zwei benachbarte Linienelemente, nicht für den ganzen Normalschnitt giltig.
***) Cfr. Stegmann, Variationsrechnung, § 46.

Wie die Fundamentaleigenschaft auch in den beiden angeführten mechanischen Definitionen der Kürzesten enthalten ist, wurde bereits gezeigt.

Es läßt sich aber die Grundeigenschaft auch geometrisch leicht ermitteln.*) Es seien AB und BC zwei aufeinanderfolgende Elemente einer Kurve auf einer krummen Oberfläche, die mit einem und demselben Teile der Schnittlinie TT' der Tangentialebenen der Fläche in den Punkten A und C supplementäre Winkel bilden. Es ist also $\sphericalangle ABT = 180^0 - \sphericalangle TBC$ oder $\sphericalangle ABT = \sphericalangle T'BC$. Dann ist die Summe $AB + BC$ jedenfalls kleiner als jede andere derartige Summe, etwa $AB' + B'C$, wo B' ein weiterer, beliebiger Punkt der Durchschnittslinie TT' ist. Denn wenn man um TT' eine der Ebenen bis zum Zusammenfallen mit der anderen dreht, so fallen AB und BC in eine Gerade und AC ist die kürzeste Verbindung der Punkte A und C. Die bei unserer Annahme bezüglich der Winkel betrachtete Kurve ist also die kürzeste Linie zwischen A und C. Nun kann man aber wegen der Lage von AB und BC gegen TT' AB und die Verlängerung von BC als aufeinanderfolgende Seiten eines geraden Kegels ansehen, dessen Achse in die Gerade TT' fällt. Die durch die drei unendlich nahen Punkte A, B, C gehende Ebene, d. i. die Schmiegungsebene der kürzesten Linie, muß demnach als Tangentialebene dieses Kegels zu der Ebene normal stehen, welche durch die Achse und die Berührungsseite des Kegels geht, also zu der Ebene ABT, d. i. der Tangentialebene der Fläche im Punkte A, wodurch eben die Fundamentaleigenschaft nachgewiesen ist.

Nach Bertrand folgt die Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linien auch aus dem bekannten Meunier'schen Satze, nach welchem unter allen Schnitten, die man durch die Tangente einer Kurve auf einer Fläche legen kann, dem Normalschnitte der größte Krümmungshalbmesser zukommt. Denn da der Ueberschuß der Länge eines unendlich kleinen Bogens über die Länge der zugehörigen Sehne umso kleiner wird, je größer der Krümmungsradius ist, so ist der kürzeste Bogen zwischen zwei unendlich nahen Punkten einer Fläche der, welcher den größten Krümmungsradius besitzt. Es ist also den kürzesten Linien die Eigenschaft eigen, daß die Schmiegungsebene stets zur Tangentialebene der Fläche normal steht.

Es läßt sich ein geometrischer Nachweis der Fundamentaleigenschaft auch noch in anderer Weise geben, z. B. so, daß man zunächst zeigt, daß die Kürzesten auf den abwickelbaren Flächen die genannte Eigenschaft besitzen, und daß man dann erst auf allgemeine Flächen übergeht.**)

Aus der Beziehung (7) kann man die Fundamentaleigenschaft der Kürzesten auch noch in anderer Weise ausgesprochen herauslesen als es früher geschehen ist, nämlich so, daß bei diesen Kurven die Flächennormale in der Ebene zweier aufeinanderfolgenden Elemente der Kurve liegt und den Winkel zwischen ihnen halbiert, wie es sich auch aus der oben erwähnten geometrischen Betrachtung ergibt. Denn da die Richtungskosinus der Linie, welche den von zwei Graden gebildeten stumpfen Winkel halbiert, zu $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ proportional sind, wo α, β, γ und α', β', γ' die Richtungskosinus dieser zwei Geraden bedeuten, so sind die Zähler in der Beziehung (7):

$$d\frac{dx}{ds} = \left(\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}, \text{ u. s. w.}$$

den Richtungskosinus der Halbierungslinie des Winkels zweier aufeinanderfolgenden Elemente der Kurve proportional. Wegen der Proportionalität

*) Cfr. Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art 51.
**) Cfr. Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung, § 88.

von $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ mit X, Y, Z fällt demnach diese Halbierungslinie mit der Flächennormale zusammen.*)

Im Anschlusse an diese Betrachtungen über die Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linien sollen im Folgenden andere Eigenschaften dieser Kurven angegeben werden, die sich mehr oder weniger direkt aus der Fundamentaleigenschaft ergeben, die zum großen Teile aber auch zeigen, daß die Kürzesten auf krummen Oberflächen dieselbe Stellung einnehmen wie die geraden Linien in der Ebene, indem sich Eigenschaften, die den Geraden in der Ebene zukommen, entsprechend auf die kürzesten Linien auf krummen Oberflächen übertragen lassen.

10.

Eine der Eigenschaften kürzester Linien ist die, daß, wie wir bei der geometrischen Ableitung im Vorhergehenden gesehen haben, aufeinanderfolgende Kurvenelemente mit denselben Seiten der Schnittgeraden der bezüglichen Tangentialebenen der Fläche supplementäre Winkel bilden

Eine weitere Eigenschaft gibt die Beziehung (7), bezw. die Gleichungen (8). Es sei eine feste Gerade gegeben, deren Richtungskosinus l, m, n seien und mit welcher die Tangenten einer kürzesten Linie gleiche Winkel bilden mögen. Es soll also die Gleichung bestehen:

$$l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds} = \text{const.}$$

Daraus folgt:

$$l d\frac{dx}{ds} + m d\frac{dy}{ds} + n d\frac{dz}{ds} = 0$$

oder auch

$$lX + mY + nZ = 0,$$

was aussagt, daß die Flächennormalen in den Punkten der kürzesten Linie zu der festen Geraden normal stehen oder zu einer festen Ebene parallel laufen. Wenn also die Tangenten einer kürzesten Linie mit einer festen Geraden gleiche Winkel einschließen, so sind die Flächennormalen längs der Kurve einer festen Ebene parallel. Daß auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist, ergibt sich außer durch Rechnung auch folgendermaßen. Eine Normale der gegebenen festen Ebene, zu der die Flächennormalen längs einer kürzesten Linie parallel verlaufen, ist zu allen Tangentialebenen längs der Kürzesten parallel, also auch zu ihren Schnittlinien, mit denen ja die Elemente der kürzesten Linie supplementäre Winkel bilden.*)

11.

Um eine weitere Eigenschaft der kürzesten Linien aufzusuchen, gehen wir zunächst wieder auf die schon betrachteten krummlinigen Koordinaten u und v zurück und spezialisieren das Koordinatensystem wieder dahin, daß die Linien U, für welche $v = \text{const.}$ ist, kürzeste Linien seien. Nur sagen wir jetzt nichts über die Lage der beiden Liniensysteme gegen einander aus (ob sie orthogonal oder nicht orthogonal sind.**)

Da die Linien U kürzeste Linien sein sollen, so müssen ihre Schmiegungsebenen stets zu den Tangentialebenen der Fläche normal stehen. Die Schmiegungsebene einer U-Linie hat nun bekanntlich die Gleichung:

*) Cfr. Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. **117** u. 122.
**) Cfr. Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung, § 95.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)(\xi-x)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)(\eta-y)$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)(\zeta-z)=0$$

Die Gleichung der Tangentialebene aber hat die Form:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(\xi-x)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)(\eta-y)$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)(\zeta-z)=0.$$

Es ergibt sich dies daraus, daß, da die Flächennormale sowohl auf den Kurven U als auch auf den Kurven V senkrecht steht, die Größen X, Y, Z den Bedingungen zu genügen haben:

$$X\frac{\partial x}{\partial u}+Y\frac{\partial y}{\partial u}+Z\frac{\partial z}{\partial u}=0,\quad X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

so daß also die Beziehung besteht:

$$X:Y:Z=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right):\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right):\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Wegen der Orthogonalität der Schmiegungs- und Tangentialebene muß nun

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)=0$$

sein. Das gibt aber

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right]-$$
$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right]=0.$$

Nun sind die ersten Faktoren in den beiden Produkten in den gewöhnlichen Bezeichnungen bezw. E und F. Ferner ist

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}.$$

Somit ergibt sich die Beziehung:

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}=0.$$

Da aber, wie von früher bekannt ist, in unserem Falle $E=1$ zu setzen ist, so haben wir schließlich nur $\frac{\partial F}{\partial u}=0$ übrig. F ist also von u unabhängig und nur eine Funktion von v allein. Der Wert des F läßt sich näher angeben.

Es seien die betrachteten kürzesten Linien (U) alle von gleicher Länge u, die Länge vom gemeinschaftlichen Schnittpunkte aus gezählt. Die Kurve, welche die Endpunkte aller dieser Kürzesten verbindet, ist dann eine Linie des Systemes V. Denkt man sich nun die Länge u immer kleiner werdend, so schließt sich die Endpunktskurve immer mehr zusammen. Wird endlich u unendlich klein, so kann man die Kurve der Endpunkte als unendlich kleinen ebenen Kreis um den Schnittpunkt als Mittelpunkt auffassen, so daß also der Winkel, den sie mit den einzelnen kürzesten Linien bildet, schließlich 90° wird. Es besteht demnach für unendlich kleines u die bekannte Bedingung für die Orthogonalität der beiden Liniensysteme: $F = 0$. Da aber, wie nachgewiesen wurde, F von u gar nicht abhängt, so muß F allgemein den Wert Null haben, d. h. die Kurve, welche die Endpunkte gleich langer von einem Punkte ausgehender kürzester Linien verbindet, steht zu allen diesen normal.

Zählt man die Längen der kürzesten Linien, die wieder gleich sein sollen, nicht von einem gemeinsamen Punkte, sondern von einer zu allen orthogonalen Kurve aus, die zum V-Systeme gehören möge, so steht auch die Endpunktskurve wieder zu allen Kürzesten normal. Denn da F schon für die erste Transversallinie den Wert Null hat, so ist auch für die neue Kurve $F = 0$.

Der obige Satz läßt sich also dahin erweitern, daß man sagt: Wenn von einer beliebigen Linie auf einer Fläche unter rechtem Winkel und nach derselben Seite hin kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche die anderen Endpunkte verbindet, die Kürzesten sämtlich unter rechtem Winkel.

Daß der frühere Satz in diesem erweiterten enthalten ist, ergibt sich daraus, daß man den gemeinsamen Schnittpunkt als degenerierte geschlossene Kurve auffassen kann.

Beide Sätze rühren von Gauß her, der sie aber in anderer Weise bewies.*)

Aus den beiden Sätzen ergibt sich auch, daß, wenn man das eine der beiden Liniensysteme U und V auf der Fläche als aus kürzesten Linien bestehend annimmt, die beiden Systeme immer orthogonal zu einander genommen werden müssen. Aus diesem Grunde wurde auch bei der Ableitung der Gleichungen der kürzesten Linien in den krummlinigen Koordinaten u und v (pg. 11) der Fall nicht berücksichtigt, wo die beiden Kurvensysteme, von denen das eine aus kürzesten Linien besteht, nicht orthogonal zu einander sind.

Wenn man aber diesen Fall als zu recht bestehend annimmt, dann führt er wieder zur Bedingung $F = 0$, bezw. $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. Denn die Gleichung (27), die allgemein gilt, geht dann, da $E = 1$ ist, in

$$2\sqrt{G - F^2}\, d\vartheta = -2\frac{\partial F}{\partial u} du - \frac{\partial G}{\partial u} dv$$

über. Sollen nun die Linien U kürzeste Linien sein, so muß in dieser Gleichung, die für eine beliebige kürzeste Linie gilt, die mit den Linien U in der früher angegebenen Weise den Winkel ϑ bildet, $\vartheta = 0$ und $dv = 0$ gesetzt werden. Es muß also $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ sein, woraus sich wieder die nämlichen Schlüsse ziehen lassen wie früher.**)

Führt man den Beweis, daß in dem betrachteten Falle $F = 0$ wird, nach Gauß, so wendet man die Gleichungen (9) auf die kürzesten Linien U an. Für s ist dann u zu setzen und man erhält:

$$\frac{\partial \frac{\partial x}{\partial u}}{\partial u} = \frac{1}{\rho} \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \text{ u. s. w.}$$

Multipliziert man diese (drei) Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ und addiert sie, so ergibt sich mit Rücksicht auf $E = 1$:

*) Gauß, disquis. generales etc. (Art. 15, 16).
**) Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil: Anmerkung 69 zu Art. 155.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\rho \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Der Klammerausdruck ist Null, da die Flächennormale zu den Kurven V senkrecht steht. Es ist also auch $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, woraus wieder $F = 0$ folgt.

Die obigen beiden Sätze lassen sich auch geometrisch leicht ermitteln.*)

Es seien OA und OA' zwei unendlich benachbarte kürzeste Linien von gleicher Länge. Es kann dann gezeigt werden, daß die Verbindungslinie der Endpunkte AA' zu jeder der beiden Linien senkrecht steht. Denn wenn man annimmt, die Winkel bei A und A' seien keine rechten, sondern etwa der bei A ein spitzer und also der bei A' ein stumpfer, so kann man dann die kürzeste Linie A'B (B liegt auf OA) so ziehen, daß $\sphericalangle AA'B = 90^{\circ}$ ist. In dem unendlich kleinen Dreiecke AA'B, das natürlich als eben betrachtet werden kann, ist also A'B als Kathete kleiner als die Hypotenuse AB; somit ist auch $(OB + BA') < (OB + BA)$ oder $(OB + BA') < OA (= OA')$. Es ist also der Weg von O über B nach A' kürzer als der Weg OA' und dieser daher keine kürzeste Linie mehr, was aber einen Widerspruch enthält. Es muß also der Winkel bei A' und analog der bei A ein Rechter sein, womit der erste Satz bewiesen ist.**)

Der Satz läßt sich auch umkehren und man kann sagen: Wenn sich kürzeste Linien in einem Punkte schneiden und man durch sie eine Orthogonalkurve legt, so schneidet dieselbe von allen Linien vom Schnittpunkte aus gleiche Stücke ab. Der Beweis hiefür soll als sehr nahe liegend nicht erörtert werden.

Im Anschlusse an diese Betrachtungen sei gleich als mit dem Vorigen eng zusammenhängend darauf hingewiesen, daß unter allen geodätischen Linien, welche sich von einem Punkte O der Fläche nach einer gegebenen Linie L der Fläche ziehen lassen, diejenige die kürzeste ist, welche L rechtwinklig schneidet. Denn wenn man annimmt, die kürzeste der geodätischen Linien, nämlich OA (A sei der Schnittpunkt mit L), bilde mit der gegebenen Linie L keinen rechten Winkel, so kann man auf ihr unendlich nahe an L einen Punkt B wählen, von ihm eine Senkrechte zu L fällen (indem man längs L von A aus ein Stück gleich AB cos A abträgt und den so erhaltenen Punkt C mit B verbindet) und dann längs dieser Senkrechten offenbar auf kürzerem Wege von O aus zur Kurve L gelangen, als wenn man auf OA weiter geht. Es könnte also OA nicht die kürzeste Linie sein. — Wenn alle geodätischen Linien die Kurve L rechtwinklig schneiden, so sind natürlich die Längen von O bis zur Linie L alle gleich.

Bei dem geometrischen Beweise des obigen erweiterten Satzes nun kann man ähnlich vorgehen wie bei dem oben durchgeführten Beweise des ersten Satzes. Wenn A und A' zwei unendlich nahe Punkte einer bestimmten Kurve sind, von der kürzeste Linien orthogonal ausgehen, und wenn man auf den durch A und A' gehenden Kürzesten nach derselben Seite hin gleiche Stücke AB = A'B' abträgt, so läßt sich die Orthogonalität von BB' (und überhaupt der Endpunktskurve aller gleich langen kürzesten Linien) dadurch nachweisen, daß man bei der gegenteiligen Annahme einer Nichtorthogonalität von je einem Punkte in den Kürzesten unendlich nahe an BB' Senkrechte zu BB' errichtet und so zeigt, daß AB und A'B' keine kürzesten Linien sein könnten.

---

*) Gauß: disquis. generales etc. (Art. 15); Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung, § 95; Salmon-Fiedler, analyt Geom d. R., II. Teil, Art. 118; Böklen, analyt. Geom. d. R., § 7; u a.

**) Auch mechanisch gedeutet läßt sich der Satz leicht einsehen. Denn die Kurve, die entsteht, wenn man einen Faden, der durch einen festen Punkt geht, bei Beibehaltung derselben Fadenlänge um diesen Punkt herumführt, ist offenbar überall rechtwinklig zur Richtung des Fadens.

Schneiden sich die beiden unendlich benachbarten Kürzesten AB und A'B' in einem Punkte O, so folgt der Beweis der Orthogonalität von BB' auch schon leicht aus dem ersten Satze und seiner Umkehrung.

Haben aber die beiden unendlich nahen Kürzesten keinen Schnittpunkt, was nur ein Ausnahmefall ist, so kann der Beweis der Orthogonalität auch so erbracht werden. Man ziehe die kürzesten Verbindungen AB' und A'B. Der Winkel B'AA' wird dann, weil AA' und BB' unendlich klein, AB und A'B' aber endlich sind, als vom Winkel BAA' nur um unendlich wenig verschieden auch als rechter anzusehen sein und es wird also auch $AB' = A'B' = AB$ sein. Da nun die beiden gleich langen Kürzesten AB und AB' von demselben Punkte ausgehen, so muß nach dem ersten Satze der Winkel ABB' ein rechter sein und auch der Winkel AB'B oder der von ihm um unendlich wenig verschiedene Winkel A'B'B. Analog läßt sich die Kürzeste A'B verwenden.

Der erweiterte Satz läßt sich ebenfalls umkehren und man kann sagen: Wenn zwei verschiedene Kurven ein System kürzester Linien gleichzeitig rechtwinklig schneiden, so fassen sie auf jeder von ihnen eine konstante Länge zwischen sich.*) Auf den Beweis dieser Umkehrung soll nicht eingegangen werden, da er ziemlich nahe liegt.

12.

Mit Hilfe des Vorhergehenden läßt sich leicht folgender Satz beweisen.**) Bestimmt man den Ort eines Punktes auf einer Fläche so, daß die Summe seiner kürzesten Entfernungen von zwei festen Punkten der Fläche konstant ist, so bilden diese kürzesten Entfernungen mit der Tangente der entstehenden Kurve stets gleiche Winkel.

Es ist dieser Satz analog dem betreffenden über die Radienvektoren einer Ellipse in der Ebene und kann auch ganz so bewiesen werden.

Sind F und F' die beiden festen Punkte und A und B zwei unendlich benachbarte Punkte der entstehenden Kurve, so ist nach der Voraussetzung: $FA + F'A = FB + F'B$. Bestimmt man nun die Punkte a auf FB und b auf F'A so, daß $Fa = FA$ und $F'b = F'B$ wird, so ist $Fa + F'A = FB + F'b$; also ist $F'A - F'b = FB - Fa$ oder $Ab = Ba$. Ferner haben die Dreiecke AbB und AaB, die man, da die Punkte A, B, a, b unendlich nahe liegen, als eben auffassen kann, noch AB gemeinsam. Weiter sind die Winkel bei a und b rechte, weil Aa und Bb die Verbindungslinien der Endpunkte je zweier gleich langen kürzesten Linien sind. Wegen der Kongruenz der beiden Dreiecke müssen demnach auch die Winkel BAb und ABa einander gleich sein. Da B und A unendlich benachbart sind, so sind ferner auch die Winkel, welche AB mit AF und BF bildet, einander gleich. Folglich schließen die beiden kürzesten Linien FA und F'A mit der Linie AB oder der Tangente in A gleiche Winkel ein, was zu beweisen war.

Umkehrung: Zieht man von zwei festen Punkten innerhalb einer Kurve auf einer krummen Oberfläche zu einem Punkte der Kurve kürzeste Linien und bilden diese mit der Tangente daselbst gleiche Winkel, so ist die Summe dieser kürzesten Entfernungen konstant. Der Beweis dieses Satzes ist der frühere in umgekehrter Ordnung.

Die beiden Sätze behalten ihre Richtigkeit auch, wenn man nicht von der konstanten Summe, sondern von der konstanten Differenz der kürzesten Entfernungen spricht. Die Umkehrung erfordert dann, daß die beiden Kürzesten

---

*) Cfr. Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 119; u. a.

**) Cfr. (auch im Folgenden) Joachimsthal, Anwendung d Diff.- u. Integralrechnung, § 6; Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raum., II. Teil, Art. 119; Böklen, analyt. Geom. d. Raumes, § 17; u. a.

auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen. (Die Sätze entsprechen dem Falle einer Hyperbel in der Ebene.)

Im Anschlusse an diese Sätze läßt sich auch ein anderer Satz zeigen. Denkt man sich in zwei Punkten M und N einer beliebigen Kurve auf einer krummen Oberfläche (oder auch in einem Punkte, wenn die Kurve eine geschlossene ist) einen Faden befestigt, der länger ist als das zwischen den beiden Punkten gelegene Kurvenstück, und hält man diesen Faden stets gespannt, so wird er sich im allgemeinen zum Teile an die Kurve anlegen, während der andere Teil zwei kürzeste Linien darstellt, die sich in einem Punkte P schneiden. Bewegt man nun den Faden bei beibehaltener Spannung, so wird der Punkt P eine Kurve beschreiben, deren Tangente mit den beiden kürzesten Linien stets gleiche Winkel bildet. Denn wenn APB das gespannte Stück des Fadens in der einen Lage und A'P'B' in der benachbarten Lage ist, wobei also A und B, bezw. A' und B' die Punkte sind, in denen der Faden die Kurve verläßt, so ist offenbar $APB' = AP'B'$ und man hat, da man A'P' in die Richtung des geradlinigen Elementes AA' und PB in die des Elementes BB' fallend annehmen muß, den früheren Fall vor sich und kann daher auch den Beweis bezüglich der Winkel an der Tangente bei P genau so wie früher führen.

Wenn man umgekehrt voraussetzt, daß man vom Punkte P zwei tangierende kürzeste Linien an die Kurve zieht, die mit der Tangente in P gleiche Winkel bilden, so folgt daraus, daß $AP + PB + BB' = AA' + A'P' + P'B'$ ist oder $(AP + PB) - (A'P' + P'B') = AA' - BB' = AB - A'B'$, also $(AP + PB) - AB = (A'P' + P'B') - A'B'$, was aussagt, daß die Differenz zwischen der Summe der Längen dieser kürzesten Linien, dieselben vom Schnittpunkte bis zum Berührungspunkte gerechnet, und der Länge des von ihnen auf der berührenden Kurve begrenzten Bogens konstant ist.*)

Auch diese letzteren Sätze haben ihre analogen in der Ebene.

13.

Bevor wir mit Hilfe früherer Formeln eine weitere Eigenschaft kürzester Linien, bezw. eine Eigenschaft von Polygonen, die durch kürzeste Linien auf krummen Oberflächen gebildet sind, angeben, wie sie Gauß**) entwickelt hat, seien zunächst gewisse Begriffe erläutert.

Ist auf einer krummen Oberfläche ein bestimmtes Gebiet abgegrenzt und bildet man dieses in der bekannten Weise auf eine Kugel vom Radius 1 ab, indem man nämlich parallel zu den Flächennormalen in den Begrenzungspunkten des Flächenstückes Radien der Hilfskugel zieht, so nennt man nach Gauß den Inhalt der auf der Hilfskugel entstehenden Figur Total- oder Gesamtkrümmung oder auch die curvatura integra der Figur auf der gegebenen Fläche. Von dieser Gesamtkrümmung ist das Krümmungsmaß zu unterscheiden, das sich auf einen Punkt einer Fläche bezieht und den Quotienten der Gesamtkrümmung des an dem Punkte liegenden Oberflächenelementes und des Flächeninhaltes des Elementes selbst bezeichnet, also das Verhältnis zwischen dem einem Elemente einer krummen Fläche entsprechenden Elemente der Hilfskugel und dem Oberflächenelemente selbst. Wenn wir demnach mit $d\sigma$ ein Flächenelement und mit k das Krümmungsmaß bezeichnen, so ist das Integral von $k\,d\sigma$ die Gesamtkrümmung einer beliebigen Figur.

Es sei nun auf einer krummen Oberfläche ein von kürzesten Linien gebildetes Dreieck ABC gegeben. Wollen wir die Gesamtkrümmung Σ dieses Dreieckes berechnen, so haben wir

*) Salmon-Fiedler, analyt. Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 119.

**) Disquisitiones gener. (Art 20); vergl. zum Folgenden auch Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung, § 99.

$$\Sigma = \int k\, d\sigma$$

auszuführen, wo die oben angegebenen Bezeichnungen beibehalten sind. Das Integral ist über die ganze Dreiecksfläche zu erstrecken.

Wir führen zum Zwecke der Ausrechnung wieder die krummlinigen Koordinaten u und v ein, indem wir uns auf der Fläche ein Koordinatensystem gegeben denken, wie wir es schon wiederholt betrachtet haben. Wir nehmen nämlich die Spitze A des Dreieckes als Ausgangspunkt der Kurvenschar U ($v = \text{const.}$), die aus lauter kürzesten Linien besteht. Zu dieser Schar gehören die beiden Seiten AB und AC des Dreieckes. Die Schar V ($u = \text{const.}$) steht zur ersten senkrecht.

Um das Flächenelement $d\sigma$ auszudrücken, betrachten wir je zwei unendlich benachbarte Linien der beiden Systeme, die also dann ein unendlich kleines Rechteck ausschneiden, dessen Seiten bekanntlich du und mdv sind, wo wieder $m = \sqrt{G}$ gesetzt ist. Wir haben also:

$$\Sigma = \iint k\, m\, du\, dv.$$

Von dem Krümmungsmaße k hat aber Gauß nachgewiesen, daß es in einem beiebigen Punkte einer Fläche gleich dem reziproken Werte des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche ist. Wenn wir letztere mit R_1 und R_2 bezeichnen, so ist also $k = \frac{1}{R_1 R_2}$. Führen wir hier die Koordinaten u und v ein, so haben wir, da $E = 1$ und $F = 0$ ist, $4 G^2 k = \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$. Mit Rücksicht auf $G = m^2$ wird $\frac{\partial G}{\partial u} = 2m \frac{\partial m}{\partial u}$ und $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 2m \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2 \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2$ und daher $k = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$. Infolgedessen ergibt sich:

$$\Sigma = \iint -\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du\, dv$$

Wenn wir zuerst nach u integrieren, erhalten wir:

$$\Sigma = \int \left(c - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv,$$

wo c die Integrationskonstante bedeutet. Die Grenzen für u sind natürlich Null und sein Wert auf der Linie BC, der noch von v abhängt. $\left(c - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv$ ist die Totalkrümmung des unendlich schmalen Dreieckes zwischen zwei unendlich benachbarten U-Linien. Für $u = 0$ wird nun offenbar diese Totalkrümmung Null, da schon das ganze Dreieck selbst zum Punkte A zusammenschrumpft, also ist $c - \frac{\partial m}{\partial u} = 0$. Wie wir aber bereits früher (pg. 12) gesehen haben, wird für $u = 0$: $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$. Es ist also $c = 1$ und mithin

$$\Sigma = \int \left(1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv.$$

Benützen wir nun die Gleichung (30): $\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{d\vartheta}{dv} = 0$, die ja auch für die kürzeste Linie BC gilt, um den Winkel ϑ einzuführen, den diese Linie (in der früher angegebenen Weise) mit den Linien U bildet, so wird:

$$\Sigma = \int\left(1 + \frac{d\vartheta}{dv}\right)dv = \int dv + \int d\vartheta.$$

Da man v als den Winkel ansehen kann, den die U-Linien mit einer von ihnen als Anfangslinie genommenen bilden, so ist $\int dv$ der Winkel A, weil die Grenzen des Integrals Null und A sind. Ferner ist $d\vartheta$ der Unterschied zwischen den Winkeln ϑ, welche die Linie BC mit zwei benachbarten U-Linien bildet, also $d\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0$. $\int d\vartheta$ ist infolge dessen die Summe aller solchen Differenzen; das gibt, wenn wir die betreffenden Winkel bei B und C mit Θ und Θ' bezeichnen: $\int d\vartheta = \Theta' - \Theta = C - (\pi - B) = B + C - \pi$. Wir haben also:

$$\Sigma = A + B + C - \pi.$$

Die Gesamtkrümmung hat positives Zeichen, da wir das Krümmungsmaß positiv genommen haben, also konkav-konkave (konvex-konvexe) Flächen vorausgesetzt haben. Ist die betrachtete Fläche konkav-konvex, dann ist das Krümmungsmaß und auch Σ negativ. Wir schreiben daher allgemein:

$$\Sigma = \pm(A + B + C - \pi).$$

Die Größe $A + B + C - \pi$ nennt man den sphärischen Exzeß, den negativen Wert aber, nämlich $\pi - (A + B + C)$, den sphärischen Defekt der Winkel des Dreieckes.

Da weiter die Oberfläche O unserer Hilfskugel mit dem Radius 1 gleich 4π ist, so ergibt sich:

$$\Sigma : O = \pm(A + B + C - \pi) : 4\pi,$$

d. h. die Totalkrümmung eines Dreieckes, das von kürzesten Linien auf einer krummen Oberfläche gebildet wird, verhält sich zur Oberfläche der Kugel mit dem Einheitsradius wie der sphärische Exzeß, bezw. Defekt (je nach der Art der Krümmung der Fläche) seiner Winkel zu 8 Rechten.

Zur Verallgemeinerung dieses Satzes kann man ein beliebiges Polygon auf einer krummen Oberfläche nehmen, dessen Seiten kürzeste Linien sind. Man erhält dann einen analogen Satz. Es tritt nur an Stelle des sphärischen Exzesses, bezw. Defektes der Überschuß der Winkelsumme über $(2n - 4)$ Rechte, bezw. der Fehlbetrag an $(2n - 4)$ Rechten. Es ergibt sich dies, wenn man das Polygon durch kürzeste Linien in Dreiecke zerlegt.

Anmerkung. Es kann der Gauß'sche Satz auch als spezieller Fall eines allgemeineren Satzes aufgefaßt werden, der von Jacobi aufgestellt wurde und der lautet: Wenn in einem beliebigen, von Kurven doppelter Krümmung gebildeten Dreiecke je zwei Seiten in ihren Schnittpunkten gemeinschaftliche Hauptnormalen haben, so hat das Dreieck die Eigenschaft, daß, wenn man durch den Mittelpunkt einer Hilfskugel vom Radius 1 zu jeder Hauptnormale des Umfanges des Dreieckes eine Parallele zieht, wodurch auf der Kugelfläche ein entsprechendes Dreieck entsteht, daß dann der Inhalt dieses Kugeldreieckes durch den sphärischen Exzeß, bezw. Defekt des betrachteten Dreieckes gegeben ist. Daß der obige Gauß'sche Satz hier mit eingeschlossen ist, ist einleuchtend. Denn da bei den kürzesten Linien die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt und die Fläche in einem Punkte nur eine Normale hat, so haben tatsächlich die kürzesten Linien als Dreiecksseiten in ihren Schnittpunkten eine gemeinschaftliche Hauptnormale.

Auf den Beweis des Jacobischen Satzes, sowie auf andere Beweise des Gauß'schen Satzes soll hier nicht weiter eingegangen werden.

(II. Teil folgt.)

Franz John.